



ISR-300 LIN/66-33  
8 novembre 1966

LOIS DE PHASE POUR UN "LINAC"  
EFFETS LONGITUDINAUX DE CHARGE D'ESPACE

par

P.M. Lapostolle

1) INTRODUCTION

Si les accélérateurs linéaires à protons construits à ce jour ont toujours cherché à utiliser une phase moyenne (phase synchrone ou phase de référence) constante au cours de l'accélération, il semble légitime aujourd'hui d'envisager d'autres lois de variations. Cette possibilité a été mentionnée en <sup>1)</sup> (page 47), explicitée récemment en <sup>2)</sup> en ce qui concerne certains implications de calcul et est, en fait, appliquée dans un projet de linac injecteur<sup>3)</sup>.

On va indiquer ici quelques considérations susceptibles de guider dans le choix de telles lois de phase.

Dans une première partie, on négligera les effets de charge d'espace.

Ceux-ci seront ensuite pris en considération, du moins en ce qui concerne leur effet longitudinal. On cherchera à l'aide d'un modèle simple, à montrer leur effet sur les limites de stabilité et en déduira la façon dont la loi de phase d'un linac pourrait être choisie pour permettre l'accélération de très hautes intensités.

2) FAIBLE INTENSITE - lère LOI

Il est bien connu qu'au cours de l'accélération les paquets de particules vont en se groupant de plus en plus dans un linac. On parle de "compression" adiabatique et applique même ce concept à l'extension en phase.

Or il est bien évident que l'extension en phase - et on parle ici plus particulièrement de l'espace des phases longitudinal - ne peut décroître au cours du mouvement.

Si l'on néglige (on le fera ici dans tout ce rapport), les phénomènes de couplage avec le mouvement transversal, l'extension en phase reste constante. En réalité il n'y a pas "compression" de l'extension des paquets, il y a "dilatation" de la zone de stabilité où ils évoluent.

En effet, la théorie élémentaire de l'accélération donne, pour les deux dimensions de cette zone sur les axes  $\Delta\varphi$  et  $\Delta W/\omega$  de l'espace des phases<sup>1)</sup> (page 8) :

$$\Delta\varphi_{\max} - \Delta\varphi_{\min} = \frac{v_s}{\omega} \left| 3 \varphi_s \right| \quad (1)$$

$$\frac{\Delta W_{\max}}{\omega} - \frac{\Delta W_{\min}}{\omega} = \sqrt{\frac{mv_s^3 eE T}{\omega} \left| \varphi_s \cos \varphi_s - \sin \varphi_s \right|} \quad (2)$$

où  $\varphi_s$  est la phase "synchrone",  $v_s$  la vitesse "synchrone" E le champ accélérateur (crête dans le temps, moyen sur l'axe) T le coefficient de temps de transit (variable le long de l'accélérateur, donc fonction de  $v_s$ ) et  $\omega$  la pulsation de la HF.

Une "mesure" de l'aire de la zone de stabilité est donnée par le produit des quantités (1) et (2). On voit immédiatement que, si  $\varphi_s$  reste constant, la présence du terme  $v_s$  (auquel s'ajoute d'ailleurs la légère variation de T) produit la dilatation évoquée.

Les phénomènes ayant lieu dans ce sens, il n'y a pas perte de particules lorsque l'énergie augmente. Cependant, on peut se demander si, du point de vue de l'économie de l'accélération, il n'est pas dommage de gaspiller ainsi la stabilité de phase.

Evidemment, il faut une certaine "garde" pour absorber les oscillations dues aux défauts de phase ou de champ ; par ailleurs, les couplages et les non linéarités déforment l'extension en phase et peuvent aussi nécessiter quelque place supplémentaire dans la zone de stabilité.

Mais si l'on néglige ces effets, une première loi de phase consiste à maintenir constant le produit de (1) par (2). Pour un champ E donné (maximum utilisable par exemple) on obtient alors le linac de longueur minimale ; pour une longueur donnée, on trouverait le champ minimal (et à peu près aussi la puissance HF minimale).

Si l'on néglige les variations (relativement faibles) de T, et si l'on admet un champ moyen E constant le long de l'accélérateur (ce qui, jusqu'à présent, semble une approximation raisonnable) on obtient la loi de phase :

$$v_s^3 \times \varphi_s^2 \left| \varphi_s \cos \varphi_s - \sin \varphi_s \right| = \text{Cte} \quad (3)$$

La courbe I de la figure 1 indique la loi de variation de  $\varphi_s$  en fonction de  $v_s$  qui correspond à (3) (on a, dans le calcul de cette courbe, utilisé, à la place de la relation approximative (1), une valeur exacte). L'échelle des  $v_s$  est prise logarithmique de manière à éliminer aisément la constante du 2ème membre de (3), par simple translation.

### 3) FAIBLE INTENSITE - 2ème LOI

Dans le paragraphe précédent, et la loi qui en découle, on a supposé implicitement que la zone de stabilité était remplie. L'intérêt d'une loi de phase variable pourrait être encore considéré comme étant d'augmenter l'acceptance d'un linac.

En fait, ceci risque d'être, dans bien des cas, d'un intérêt réduit car il est souvent important de produire un faisceau de faible émittance.

Cependant, on peut concevoir l'avantage qu'il y a à accélérer des particules et à les "guider en phase" bien à l'intérieur et au centre de la zone de stabilité. Et même une

certainne justification à n'occuper toujours qu'une fraction de cette zone, soit afin de se réserver toujours une marge pour tolérer des défauts ou des effets de couplage qui tendent à augmenter l'extension nécessaire, soit afin de réduire les effets non linéaires qui ne manquent pas de se produire si l'on approche la limite de stabilité<sup>1)</sup> (page 47).

C'est ce dernier point, de linéarité du mouvement longitudinal, qui va servir de base à la 2ème loi de phase.

Rappelons les equations du mouvement longitudinal<sup>1)</sup> (pages 39 à 44)

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{+,n} - W_{-,n} = e V_0 T_0(k) I_0(k_r r) \cos \varphi \quad (4) \\ \varphi_{+,n} - \varphi_{-,n} = \frac{keV_0}{2W} \frac{d}{dk} \left[ T_0(k) I_0(k_r r) \right] \sin \varphi. \quad (5) \\ W_{-,n+1} - W_{+,n} = 0 \quad (6) \\ \varphi_{-,n+1} - \varphi_{+,n} = k_{+,n} L_{n,n+1} \quad (7) \end{array} \right.$$

où l'on a posé

$$k = \frac{\mathcal{E}}{v} \quad \text{et} \quad k_r^2 = k^2 - \frac{v^2}{c^2} \quad (8)$$

v étant la vitesse de la particule d'énergie W.

Considérons d'abord les équations relatives à l'énergie.

Un examen rapide des ordres de grandeur montre que, dans l'étendue d'un paquet, les variations de gain d'énergie dues aux termes en k de (4) sont petites et, à ce titre, relativement linéaires ; les non linéarités proviennent donc surtout du terme cos φ.

Nous écrivons alors ce dernier sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos \varphi = \cos(\varphi_s + \Delta\varphi) = \cos \varphi_s \cos \Delta\varphi - \sin \varphi_s \sin \Delta\varphi \\ \cos \varphi \simeq \cos \varphi_s - \sin \varphi_s \Delta\varphi - \cos \varphi_s \frac{\Delta\varphi^2}{2} \end{array} \right. \quad (9)$$

qui met en apparence un premier terme non linéaire.

Passons aux équations relatives à la phase.

On peut remarquer que l'équation (5) est une correction, et que c'est l'équation (7) qui va faire apparaître les non linéarités les plus importantes par son terme en  $k$

Si on considère le cas non relativiste, on peut écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} k = \omega \sqrt{\frac{m}{2W}} \\ k = \omega \sqrt{\frac{m}{2W_s}} - \omega \sqrt{\frac{m}{2W_s}} \frac{\Delta W}{2W_s} + \omega \sqrt{\frac{m}{2W_s}} \frac{3\Delta W^2}{8W_s^2} \end{array} \right. \quad (10)$$

Une mesure de la non linéarité est donnée par le rapport du terme non linéaire au terme linéaire, dans les équations (9) et (10).

Au cours des oscillations de phase ces termes, en  $\Delta\varphi$  ou  $\Delta W$  apparaîtront successivement ; l'importance relative des non linéarités dues à (9), à celles dues à (10) est alors donnée par le rapport

$$\left| \frac{\cos \varphi_s}{\sin \varphi_s} \frac{\Delta\varphi}{2} \right| \left/ \frac{3}{4} \left| \frac{\Delta W}{W_s} \right| \right.$$

et il est intéressant, en particulier, de comparer les valeurs maximales de ces deux termes, c'est à dire de donner dans ce rapport, à  $\Delta\varphi$  et  $\Delta W$  les valeurs extrêmes atteintes par les écarts d'énergie et de phase au cours des petites oscillations. Ce rapport est donné par<sup>1)</sup> (page 7) :

$$\frac{\Delta W}{\Delta\varphi} = \sqrt{\frac{m v_s^3 c E T |\sin \varphi_s|}{\omega}} \quad (11)$$

On peut alors écrire

$$\frac{\text{non lin. en } \Delta\varphi}{\text{non lin. en } \Delta W} = \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi_s}{|\sin^3 \varphi_s|} \frac{4\pi W_s}{9e E T \lambda_s}} \quad (12)$$

en désignant par  $\lambda_s$  la longueur d'onde réduite ( $\lambda_s = 2\pi v_s/\omega$ ).

Un examen des ordres de grandeur montre que le deuxième terme du radical est très supérieur à l'unité ; sa valeur minimum, à l'injection, avoisine 10. Si l'angle de phase  $\varphi_s$  à l'injection

est inférieur à  $70^\circ$ , la non linéarité principale sera donc toujours celle due à  $\Delta\varphi$ , c'est à dire à l'équation (9) ou (4).

Examinons donc plus spécialement l'amplitude de ces non linéarités. Il apparait clairement sur (9) que, pour une phase  $\varphi_s$  constante, elle décroît lorsque l'énergie augmente.

A nouveau, il semble alors légitime pour réduire l'effet total de ces non linéarités d'en diminuer l'amplitude à basse énergie en augmentant  $\varphi_s$ . On peut, par exemple, conserver constant notre critère, ou notre mesure de non linéarité en  $\Delta\varphi$  :

$$\frac{\cos \varphi_s}{\sin \varphi_s} \frac{\Delta\varphi}{2} = \text{Cte} \quad (13)$$

Reprenant la valeur de  $\Delta\varphi$  déjà utilisée pour calculer (11) ref. 1 (page 7), on trouve

$$\frac{\cos \varphi_s}{\sin \varphi_s} \sqrt[4]{\frac{\omega^3}{m v_s^3 c E T |\sin \varphi_s|}} = \text{Cte} \quad (14)$$

Soit encore, en supposant  $E$  constant et négligeant la variation de  $T$

$$v_s^3 \frac{\sin^5 \varphi_s}{\cos^4 \varphi_s} = \text{Cte} \quad (15)$$

La courbe correspondant à la loi (15) est représentée en II sur la figure 1. On voit que si, pour les grands angles de phase, c'est à dire pour les faibles vitesses, les lois I et II diffèrent, elles tendent l'une vers l'autre de plus en plus à mesure que  $\varphi_s$  décroît vers les valeurs couramment employées actuellement.

Il est bon de noter que notre "mesure" des aberrations en  $\Delta\varphi$  est en même temps une "mesure" du couplage longitudinal  $\rightarrow$  transversal. La minimisation que nous recherchons va donc également dans le sens d'une réduction de ce couplage.

#### 4) FAIBLE INTENSITE - AUTRES LOIS ET REMARQUES GENERALES

Il est évident que la loi II, que l'on vient d'énoncer, ne saurait être considérée qu'à titre indicatif et qu'on ne peut lui attribuer aucune valeur précise. Par contre la loi I peut être considérée comme un cas extrême que l'on hésitera à dépasser pour ne pas risquer de perdre des particules qui auraient déjà été capturées à basse énergie.

Parmi les autres lois qui pourraient être proposées figure celle qui rendrait constant le rapport  $\Delta W/\Delta\varphi$  donné par (11) au cours de l'accélération. Avec une telle loi, la forme du paquet resterait inchangée dans l'espace des phases, ce qui correspondrait peut-être à une meilleure "adiabaticité" et, en pratique, à une dispersion d'énergie constante.

Cette loi conduirait à

$$v_s^3 \sin \varphi_s = \text{Cte} \quad (16)$$

on ne la retiendra pas car elle dépasse la limite de la loi I que nous préférons ne pas franchir<sup>1)</sup> (page 48).

Sur la figure 1 a été indiquée en pointillés la loi adoptée dans le projet déjà cité<sup>3)</sup>. On peut voir qu'elle est voisine de II et moins rapide que la limite I sur sa majeure partie. Vers l'extrémité haute énergie la décroissance de la phase a été limitée à environ  $25^\circ$  pour ne pas augmenter exagérément les tolérances de stabilité sur le champ accélérateur. Une telle précaution doit, normalement, toujours être prise et limite vers les hautes énergies le domaine d'application des lois précédentes.

#### 5) EFFETS DE CHARGE D'ESPACE. PARAMETRE D'INTENSITE

La présence des charges modifie la distribution des champs à l'intérieur des paquets et tend à décroître les effets de stabilité longitudinale du champ accélérateur.

La distribution des charges, dans les paquets est, en général, assez compliquée et le calcul des champs produits est par suite difficile.

Divers cas ont été étudiés, mais toujours, jusqu'à présent, en régime stationnaire (plus ou moins fictif) à énergie constante (ref. 4, 5, 6, 7). Le dernier travail en date, par T.D. Newton, prend en considération un problème assez complet, incluant les effets d'image avec décentrage éventuel du faisceau ; ses résultats pourraient peut-être servir de base à une étude qui incluerait l'accélération comme nous nous le proposons. Cependant, nous nous bornerons ici à un calcul linéarisé plus approximatif par lequel nous chercherons seulement à obtenir une image suggestive des phénomènes et des lois générales qualitatives.

Nous adopterons pour cela la méthode de l'ellipsoïde précédemment décrite<sup>8)</sup> en supposant même, ici, des paquets uniformément chargés, dont l'ellipsoïde est alors une représentation assez fidèle.

Ce faisant, on sait, d'après les travaux de I. Kapchinskij (ref. 4), que l'on obtiendra un résultat légèrement pessimiste ; mais on préférera, à ce stade, conserver cette sécurité, pensant que, de toutes façons, les conclusions que nous pourrions tirer sur le choix de lois de phase ne devraient pas en être sensiblement affectées.

Par ailleurs, nous négligerons ici les phénomènes transversaux, supposant, pour simplifier, que la focalisation est réglée de manière à maintenir à une valeur donnée, constante par exemple, la section transversale des paquets.

Evidemment, c'est là une approximation très grossière et des calculs plus détaillés tels que le propose<sup>8)</sup> devraient traiter des cas plus réels ; cependant, il est déjà possible ainsi de dégager quelques résultats qualitatifs essentiels. I. Kapchinskij (ref. 4) propose d'ailleurs aussi de traiter séparément les phénomènes transversaux et longitudinaux et nous reviendrons plus loin sur ce point.

Nous négligerons également ici les effets d'image des tubes de glissement, et là encore, notre résultat n'en sera que pessimiste.

Le rapport<sup>8)</sup> a donné le calcul du champ de charge d'espace à l'intérieur d'un paquet ellipsoïdal et fourni des expressions approchées. Ici, nous supposerons la longueur des paquets toujours



au moins égale à leur diamètre et adopterons pour le champ longitudinal l'expression très simplifiée :

$$E_{c.c.} = \frac{-q}{4\pi \epsilon_0 ab^2} z \quad (17)$$

(c'est-à-dire que nous prenons pour la fonction  $f$  l'approximation  $f = 1/3 a/b$ ) où  $a$  est le rayon de la section transversale du paquet (supposée circulaire)  $b$  la demi-longueur et  $q$  la charge totale.

On peut alors décrire le mouvement longitudinal des particules dans le paquet par l'équation<sup>1)</sup> (page 5)

$$\Delta\varphi'' + k_s \frac{e}{m} ET \left[ \cos(\varphi_s + \Delta\varphi) - \cos \varphi_s \right] + \frac{eq}{4\pi m \epsilon_0 ab^2} \Delta\varphi = 0 \quad (18)$$

ou encore, en désignant par  $\Delta\varphi_{max}$

$$\Delta\varphi_{max} = k_s b \quad (19)$$

déphasage correspondant à la demi-longueur du paquet,

$$\Delta\varphi'' + k_s \frac{e}{m} ET \left[ \cos(\varphi_s + \Delta\varphi) - \cos \varphi_s + \alpha \frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_{max}^2} \right] = 0 \quad (20)$$

où l'on a posé

$$\alpha = \frac{q k_s}{4\pi \epsilon_0 a ET} \quad (21)$$

$q$ , rappelons le, est la charge totale du paquet et  $2a$  son diamètre.

On peut encore écrire

$$\alpha = \frac{I}{2a \epsilon_0 v_s ET} \quad (22)$$

en désignant par  $I$  l'intensité accélérée, supposant que les paquets se succèdent à un intervalle d'une période HF.

$\alpha$  est un coefficient sans dimensions. Prenant pour  $a$  5 mm (paquets d'un centimètre de diamètre) et pour champ accélérateur moyen ET 2 MV/m on trouve, pour une vitesse  $v_s$  correspondant à 500 kV

$$\alpha = 0.57 \times I \text{ ampère} \quad (23)$$

$\alpha$  se révèle un paramètre essentiel dans les effets de charge d'espace.

#### 6) EFFETS DE CHARGE D'ESPACE. CONTRACTION ADIABATIQUE DES PAQUETS

Commençons par examiner l'évolution, au cours de l'accélération, de paquets ne remplissant pas toute la zone de stabilité.

On trouve aisément une intégrale première de (20)<sup>1)</sup> (page 5 et page 6) que l'on peut écrire sous la forme

$$\left(\frac{\Delta W}{\omega}\right)^2 + 2 \frac{m e E T}{k_s^3} \left[ \sin(\varphi_s + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \cos \varphi_s - \sin \varphi_s - \frac{\alpha}{2} \frac{\Delta\varphi^2}{\Delta\varphi_{\max}^2} \right] = Cte$$

En réalité cette expression n'est valable qu'à l'intérieur des paquets c'est-à-dire pour  $\Delta\varphi < \Delta\varphi_{\max}$ . Elle fait apparaître le puits de potentiel où oscillent les particules (voir figure 2) : pour  $\Delta\varphi > \Delta\varphi_{\max}$ , le terme en  $-\Delta\varphi^2 + Cte$  du crochet est remplacé par une expression du type  $Cte/\Delta\varphi$ . Le puits est sensiblement comblé par la présence de charge d'espace, mais la stabilité est toujours assurée.

Si l'on suppose  $\Delta\varphi$  assez petit, on peut développer en  $\Delta\varphi$  le crochet de (24) et limiter aux termes en  $\Delta\varphi^2$ , ce qui donne :

$$\left(\frac{\Delta W}{\omega}\right)^2 + \frac{m e E T |\sin \varphi_s|}{k_s^3} \left[ 1 - \frac{\alpha}{|\sin \varphi_s| \Delta\varphi_{\max}^2} \right] \Delta\varphi^2 = Cte \quad (25)$$

Et, pour de tels petits mouvements, le théorème de Liouville donne, en supposant une évolution adiabatique au cours de l'accélération (les paquets restant elliptiques, sans "désadaptation") :

$$\Delta\varphi_{\max} = Cte \sqrt[4]{\frac{\omega^3}{m v_s^3 e E T |\sin \varphi_s| \left[ 1 - \frac{\alpha}{|\sin \varphi_s| \Delta\varphi_{\max}^2} \right]}} \quad (26)$$

soit encore

$$\Delta\varphi_{\max}^4 - \frac{(a v_s ET)_0}{a v_s ET} \frac{\alpha_0}{|\sin \varphi_s|} \Delta\varphi_{\max}^2 - A \left( \frac{v_{s,0}}{v_s} \right)^3 \frac{(ET \sin \varphi_s)_0}{ET \sin \varphi_s} = 0 \quad (27)$$

où l'on désigne par l'indice 0 les valeurs relatives à l'injection où  $\alpha_0$  est calculé et où A est une constante, proportionnelle au carré de l'extension en phase longitudinale du paquet.

Cette équation permet de déterminer la contraction adiabatique en phase des paquets au cours de l'accélération. En particulier, si  $a$ ,  $\varphi_s$  et ET sont maintenus ou supposés constants on peut encore écrire :

$$v \left[ \left( \frac{v}{v_0} \frac{|\sin \varphi_s|}{\alpha_0} \Delta\varphi^2 \right)^2 - \left( \frac{v}{v_0} \frac{|\sin \varphi_s|}{\alpha_0} \Delta\varphi^2 \right) \right] = \text{Cte} \quad (28)$$

La figure 3 représente, en traits pleins, l'allure de la variation de  $\Delta\varphi$  en fonction de  $v$ . Pour déterminer les échelles sur ce diagramme on calcule la valeur du paramètre  $\Delta\varphi^2 |\sin \varphi_s| / \alpha$  correspondant aux conditions initiales ; celle-ci permet de situer sur la courbe en tirets la valeur initiale de  $v$  et par suite celle de  $\Delta\varphi$  et, de là, les échelles.

Si le paramètre est supérieur à 2, on peut adopter l'approximation

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_0} = \left( \frac{v_{s,0}}{v_s} \right)^{1/3} \quad (29)$$

qui est la contraction adiabatique sans charge d'espace.

Si le paramètre est inférieur à 1,02 on a, au contraire, sensiblement

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\varphi_0} = \left( \frac{v_{s,0}}{v_s} \right)^{1/2} \quad (30)$$

nouvelle loi qui correspond à une forte charge d'espace.

De toutes façons  $\Delta\varphi$  décroît toujours quand l'énergie augmente, mais la longueur des paquets croît (voir courbe en tirets:  $v\Delta\varphi$  ou b).

Rappelons que ce résultat correspond à une phase  $\varphi_s$  et à un diamètre  $2a$  constants, ce qui n'est pas nécessairement réalisé dans les cas pratiques. En général, il y aurait lieu d'étudier l'équation (27). Par ailleurs, ce calcul néglige les phénomènes de couplage longitudinal-transversal et suppose une évolution rigoureusement adiabatique. Néanmoins il est susceptible de fournir des propriétés qualitatives valables<sup>(a)</sup>.

### 7) EFFETS DE CHARGE D'ESPACE - ZONE DE STABILITE

Reprenons le calcul précédent en supposant maintenant que la zone de stabilité toute entière est remplie par les paquets. Dans ce cas, ces derniers ne se trouveront pas exactement centrés autour du fond du puits de potentiel schématisé sur la figure 2 car on sait que la zone de stabilité est elle même dissymétrique (de  $-2\varphi_s$  à  $+\varphi_s$ ). Néanmoins, pour commencer on va négliger cet écart et reprendre l'équation (20) en supposant que  $\Delta\varphi_{\max}$  peut maintenant atteindre la limite de stabilité.

Pour celle-ci, le crochet de (20) s'annule et l'on a

$$\cos(\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{extr}}) - \cos \varphi_s + \frac{\alpha}{\Delta\varphi_{\text{extr}}} = 0 \quad (31)$$

relation qui s'écrit encore

$$\frac{\Delta\varphi_{\text{extr}}}{2} \sin \frac{\Delta\varphi_{\text{extr}}}{2} \sin \left( \left| \varphi_s \right| - \frac{\Delta\varphi_{\text{extr}}}{2} \right) = \frac{\alpha}{4} \quad (32)$$

La figure 4 montre les variations du premier membre de (32) pour diverses valeurs de  $\varphi_s$ . Il est clair que l'équation n'a de solution que si  $\alpha$  (le paramètre de charge d'espace défini en (22), proportionnel à l'intensité) n'est pas trop grand.

S'il en est ainsi l'équation a deux solutions. On voit aisément que, si  $\alpha$  est assez petit, la plus grande des deux est voisine de  $\left| 2\varphi_s \right|$  qui est la limite de stabilité sans charge d'espace ;

<sup>(a)</sup> Ces conclusions semblent en contradiction avec des études récentes de R. Gluckstern (ref. 9) et A. Benton (ref. 10) que nous remercions d'avoir bien voulu nous communiquer certains de leurs résultats. Mais les écarts obtenus ne semblent pas faciles à interpréter.

l'écart par rapport à  $|2\varphi_s|$  montre alors la réduction de la zone de stabilité due aux effets longitudinaux de charge d'espace. L'autre solution de (32) est sans intérêt pratique : elle correspondrait à des paquets où les forces de charge d'espace contrebalanceraient presque exactement et partout la stabilité de phase ; de tels paquets ne pourraient alors se conserver que si la dispersion d'énergie y était nulle : l'acceptance longitudinale serait nulle pour un tel cas.

Pour les valeurs pas trop élevées de  $|\varphi_s|$ , on peut remplacer (32) par l'équation approchée

$$\left(\frac{\Delta\varphi_{\text{extr}}}{2}\right)^2 \left(|\varphi_s| - \frac{\Delta\varphi_{\text{extr}}}{2}\right) = \frac{\alpha}{4} \quad (33)$$

Pour cette équation on obtient aisément la condition d'existence de la solution cherchée :

$$\alpha \leq \frac{16}{27} |\varphi_s|^3 \quad (34)$$

avec, dans le cas limite

$$\Delta\varphi_{\text{extr}} = \frac{4}{3} |\varphi_s|$$

Dans le même cas des faibles valeurs de  $|\varphi_s|$  en poursuivant le calcul classique de la zone de stabilité (ref. 1, page 5) on trouve que la limite opposée de cette zone se trouve encore à la distance  $-\Delta\varphi_{\text{extr}}/2$ . On voit donc bien, comme on l'avait prévu au début du paragraphe, que cette zone n'est pas centrée autour de  $\Delta\varphi = 0$ .

Pour tenir compte de ce décentrage, désignons par  $\Delta\varphi_0$  le centre de la zone que nous supposons être aussi celui du paquet, et par  $\theta$  la demi-longueur en phase de ce paquet.

L'équation (31) devra alors s'écrire

$$\cos(\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{extr}}) - \cos \varphi_s + \frac{\alpha}{\theta} = 0 \quad (35)$$

avec

$$\Delta\varphi_{\text{extr}} = \Delta\varphi_0 + \theta \quad (36)$$

On ne va pas reprendre l'étude de ces équations, mais admettre, ce qui est sensiblement le cas, que l'on a toujours le rapport 2 en  $\Delta\varphi$  pour les deux limites de la zone de stabilité, c'est-à-dire les deux bords du paquet.

On a alors

$$\Delta\varphi_0 = \frac{\Delta\varphi_{\text{extr}}}{4}$$

et

$$\theta = \frac{3}{4} \Delta\varphi_{\text{extr}}$$

si bien que (35) peut encore s'écrire

$$\cos(\varphi_s + \Delta\varphi_{\text{extr}}) - \cos \varphi_s + \frac{4\alpha}{3\Delta\varphi_{\text{extr}}} = 0 \quad (37)$$

On peut ainsi utiliser les résultats précédents en se bornant à changer la valeur de  $\alpha$ . En particulier l'intensité limite donnée par (34) doit maintenant s'écrire

$$\alpha_{\text{max}} = \frac{4}{9} \left| \varphi_s \right|^3 \quad (38)$$

Nous allons revenir sur ce point au paragraphe suivant.

#### 8) EFFETS DE CHARGE D'ESPACE. COURANT MAXIMAL. LOIS DE PHASE

Le résultat précédent peut être étendu aux grandes valeurs de  $\left| \varphi_s \right|$  en se référant à la figure 4 où l'on appliquera encore à  $\alpha$  le facteur correctif 4/3.

La figure 5 donne la valeur maximale de  $\alpha$ , c'est à dire le courant maximal en fonction de l'angle de phase synchrone  $\left| \varphi_s \right|$ .

En fait, pour cette "limite de stabilité", si le bord du paquet devient instable, il existe toujours une stabilité de phase longitudinale à l'intérieur. Dans une limite absolue, la densité ne saurait être uniforme ni, peut-être, la forme ellipsoïdale. C'est la raison pour laquelle notre présent calcul est pessimiste, comme l'a montré I. Kapchinskij<sup>4)</sup>. Si l'on applique notre calcul aux cas qu'il traite, on trouve que sa limite longitudinale est de l'ordre de 50 % supérieure à la notre.

Si nous prenons maintenant le cas du linac du CERN, on obtient une intensité maximale d'environ 110 mA pour un angle de phase de  $30^\circ$  et un diamètre de faisceau de 1 cm à l'entrée. Ce résultat est tout à fait compatible avec l'expérience actuelle ; il n'est pas sans intérêt aussi de noter qu'il est aussi conforme aux indications données en<sup>11)</sup> en s'appuyant sur un calcul extrêmement élémentaire.

L'intensité peut être augmentée par un accroissement de  $\varphi_s$ , c'est-à-dire, pour un accélérateur donné, par une augmentation du champ. C'est ainsi qu'il est possible d'atteindre une intensité plus élevée. Cependant on est alors limité par les conditions de claquage (l'emploi d'un "tilt", champ décroissant de l'entrée vers la sortie ne peut aider sensiblement car, aux faibles énergies, les lois de phase qu'il est ainsi possible d'obtenir sont assez défavorables) ; un plus grand angle de phase exige aussi une focalisation quadrupolaire plus intense et, si l'on ne dispose pas de réserve suffisante on reporte ainsi sur les effets transversaux la limite d'intensité<sup>4)</sup>.

Pour le projet de linac injecteur déjà mentionné<sup>3)</sup> la limite d'intensité se situe au contraire vers 300 ou 400 mA. Evidemment, une telle limite ne saurait alors être atteinte que moyennant un dispositif de compensation de la charge HF du faisceau sur la cavité, dispositif qui, dans ce projet, exigerait deux sources additionnelles de puissance ajustables en amplitude et en phase pour restituer ce qui est absorbé par le faisceau à la fois du côté des basses et du côté des hautes énergies.

En outre on devrait supposer la focalisation suffisamment intense pour compenser les effets transversaux de la charge d'espace. I. Kapchinskij<sup>4)</sup> a insisté sur l'importance de ces effets.

Dans notre hypothèse de calcul on peut évaluer aisément le rapport des effets défocalisants dus à la charge d'espace à ceux dus au champ accélérateur<sup>1)</sup> (page 46)<sup>8)</sup> ; on trouve

$$\frac{\Delta r'_{\text{chge esp.}}}{\Delta r'_{\text{acceler.}}} = \frac{\alpha}{\left| \sin \varphi_s \right| \Delta \varphi_{\text{max}}^2} \quad (39)$$

qui montre que l'effet de charge d'espace est toujours inférieur à l'effet défocalisant du champ accélérateur et, au maximum à environ la moitié si le courant atteint le courant limite. Comme la focalisation est toujours sensiblement supérieure au minimum nécessaire pour compenser l'effet défocalisant de l'accélération ( $1 + q^2$  si  $q$  est le rapport des fréquences d'oscillations transversales et longitudinales), une augmentation relativement modeste devrait suffire pour combattre les effets de charge d'espace ; cependant, si le courant atteint le courant limite, cette augmentation pourrait devoir être d'environ 30% ce qui n'est pas négligeable (le calcul élémentaire mentionné en <sup>11)</sup> était optimiste pour avoir négligé ce cas extrême).

L'expression précédente du courant limite et les variations indiquées sur la figure 5 peuvent encore, conjointement avec la définition (22) de  $\alpha$  servir de base à de nouvelles lois de phase.

On peut, par exemple, supposer qu'on maintient constant le diamètre  $2a$  des paquets (ou du faisceau) tout le long de l'accélérateur.

On aura alors

$$v_s \times \alpha_{\max} = \text{Cte} \quad (40)$$

$\alpha_{\max}$  étant donné en fonction de  $|\varphi_s|$  par (38) et la figure 5.

On peut encore laisser croître le diamètre  $2a$ , mais avec une croissance au plus proportionnelle à  $v_s$  pour ne pas augmenter les non linéarités transversales et le couplage transversal  $\rightarrow$  longitudinal.

On aura ainsi comme loi extrême

$$v_s^2 \alpha_{\max} = \text{Cte} \quad (41)$$

Ces deux lois sont représentées sur la figure 6 respectivement par les courbes III et IV. On a rajouté en tirets sur cette même figure les courbes I et II des lois déjà citées pour le cas de faible intensité et a arbitrairement choisi l'origine des vitesses de manière à faire coïncider les courbes pour  $|\varphi_s| = 50^\circ$ . La loi du projet de linac déjà cité <sup>3)</sup> figure également en pointillés.



A ce stade, le choix d'une loi de phase est donc encore relativement indéterminé.

On ne voudrait pas atteindre la loi IV qui exigerait un grossissement du faisceau peu souhaitable par ailleurs. La loi III peut sembler raisonnable ; cependant pour des paquets ne remplissant pas toute la zone de stabilité afin de conserver une "marge de sécurité", cette loi doit probablement se rapprocher de la loi I. La loi II intermédiaire serait alors un compromis valable, mais il est évident qu'on ne saurait pas attacher beaucoup d'importance à un calcul de minimisation d'aberrations ou de phénomènes de couplage qui néglige les effets fortement non linéaires de la charge d'espace.

Dans l'état actuel des choses, la loi adoptée dans le projet<sup>3)</sup> apparaît donc comme très raisonnable.

Quoiqu'il en soit, des études ultérieures seraient nécessaires pour préciser les choses, tant les effets de non linéarités et de couplage, que l'influence de l'accélération rapide dont un linac est le siège et qui met en défaut l'hypothèse d'adiabacité admise ici.

Enfin, tout ceci présuppose la possibilité d'un groupement préalable du faisceau en paquets ; et l'expérience révèle, qu'il se présente là une difficulté très sérieuse. Aussi ce problème ne saurait-il être ignoré non plus que l'influence de la nature ou de la qualité du groupement sur la répartition des charges et leur évolution sur le plan de phase longitudinal dans le linac lui-même.

Distribution: (open) AR and ISR Scientific Staff.

- 1) P. Lapostolle, Introduction à l'étude des accélérateurs linéaires. Rapport CERN 66-20, juin 1966.
- 2) A. Carne, P. Lapostolle, Design equations in an Alvarez type proton linear accelerator. Los Alamos S.L. Linac Conference, October 1966.
- 3) M. Promé et al., Design of a 20 MeV Proton Lin. Acc., New Injector for Saturne. Los Alamos S.L. Linac Conference, October 1966.
- 4) I.M. Kapchinskij, A.S. Kronrod, Effect of Space Charge on Phase Oscillations of Particles in an Ion Linear Accelerator. International Conference on High Energy Accelerators, DUBNA 1963, page 906.  
I.M. Kapchinskij, Dynamique des particules dans les accélérateurs linéaires résonants. Atomizdat Moscou 1966 (4ème partie).
- 5) P.L. Morton, Particle dynamics in linear accelerators. MURA Report no. 679, December 1963.  
P.L. Morton, Longitudinal space charge effects in standing wave linacs. Review of Scientific Instruments, Vol. 36, 1965, page 1826.
- 6) B.I. Bondarev, A.D. Vlasov, Self consistent particle distribution and the limit current in linear accelerators. Conference on High Energy Accelerators, Frascati 1965. To be published.
- 7) T.D. Newton, Structure of a bunch of charges in an ideal accelerator. AECL Chalk River report FSD/ING 53, July 1966. To be published in Canadian Journal of Physics.
- 8) P. Lapostolle, Effets de la charge d'espace dans un accélérateur linéaire à protons. Rapport interne CERN AR/Int. SG/65-15, juillet 1965.
- 9) R.L. Gluckstern, Space charge effects in Proton Linear Accelerators. Los Alamos S.L. Linac Conference, Oct. 1966.
- 10) A. Benton, Space charge effects on longitudinal motion of linacs. Los Alamos S.L. Linac Conference, Oct. 1966.
- 11) P. Lapostolle, Intensity limitations in linacs and application to SOC. Symposium on SOC and beam cavity interactions. RHEL Chilton, July 1966.

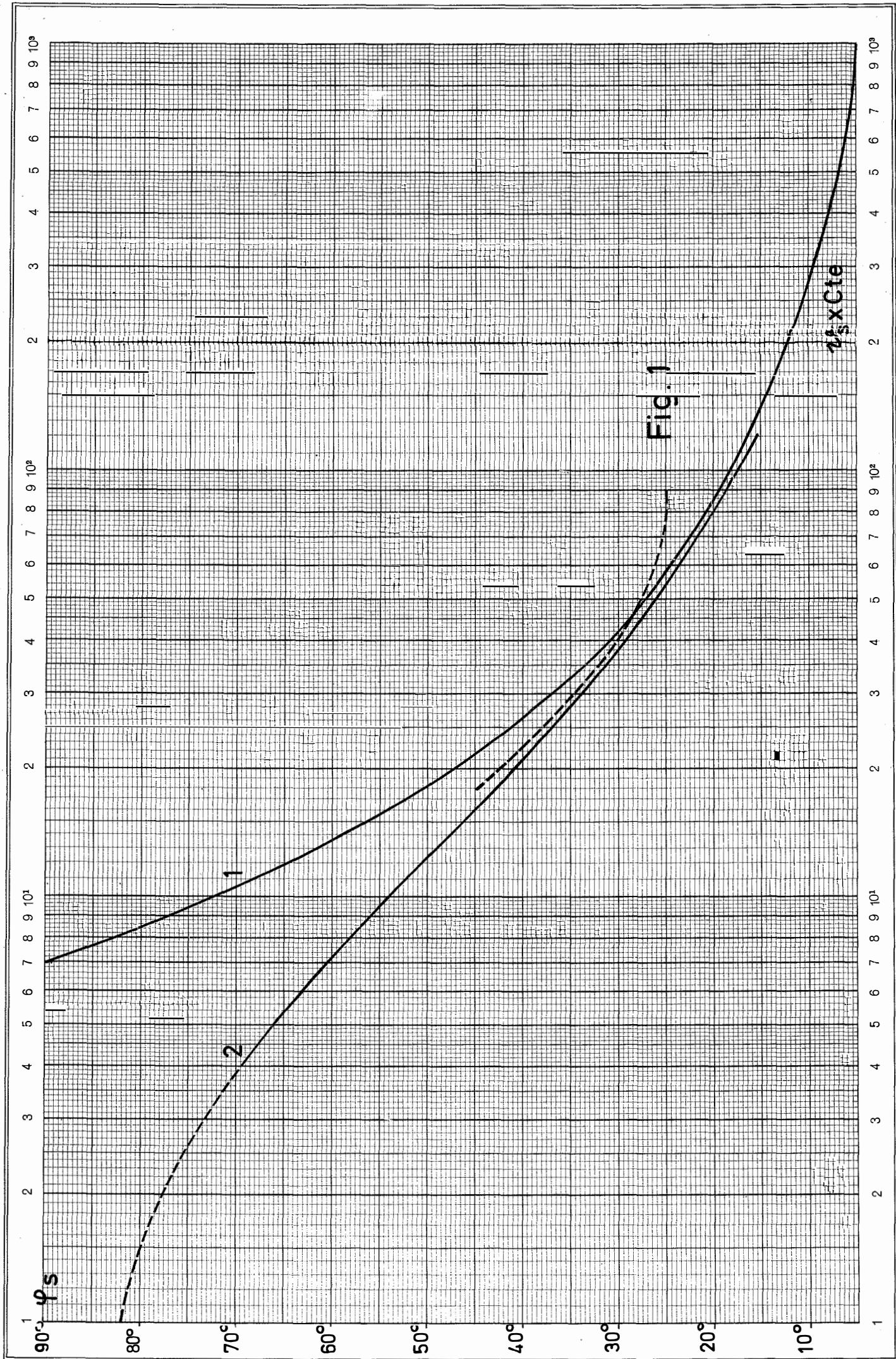
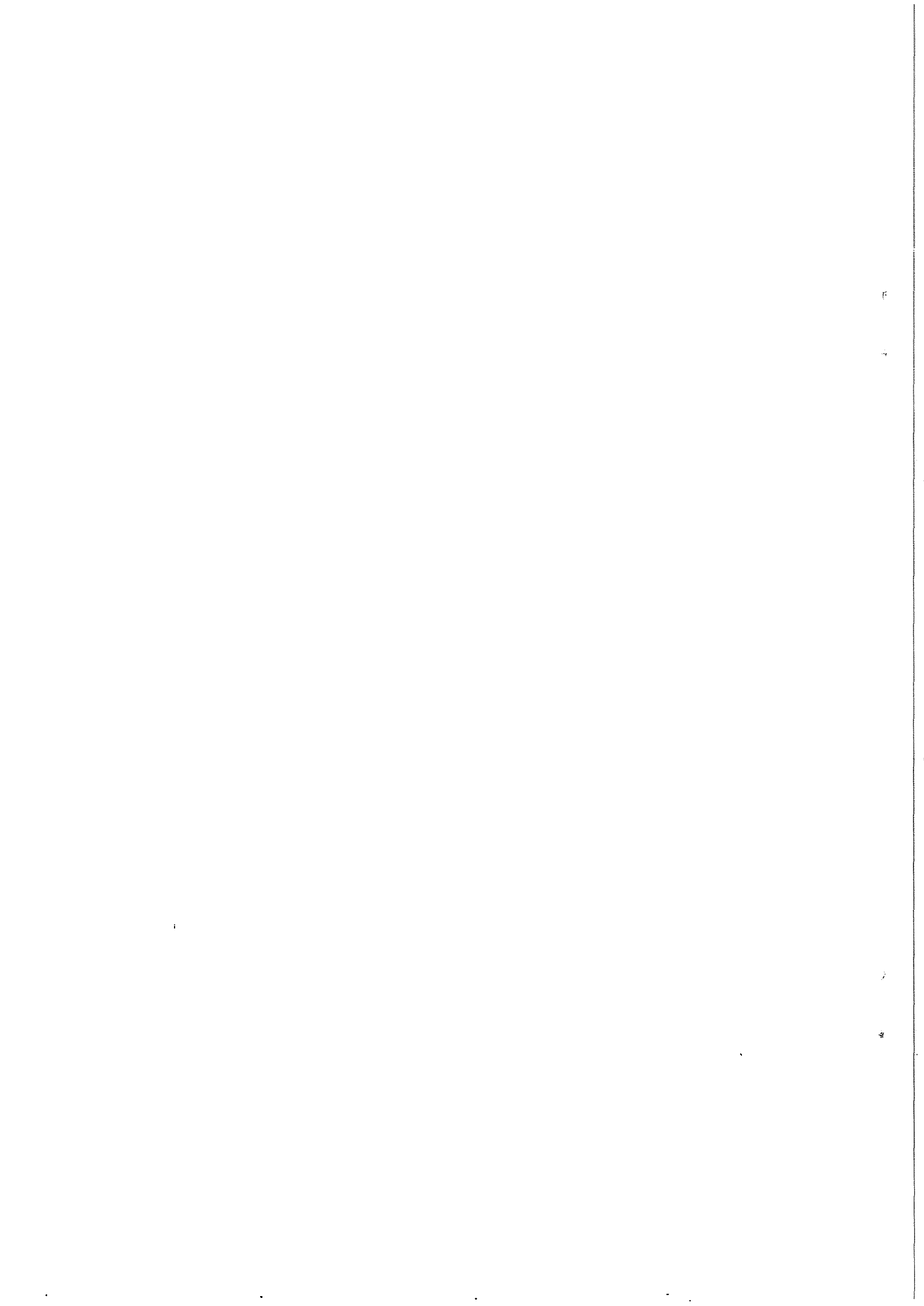


Fig. 1

Teilung } 1 - 1000 Einheit } 90 mm  
 Logar. Division }



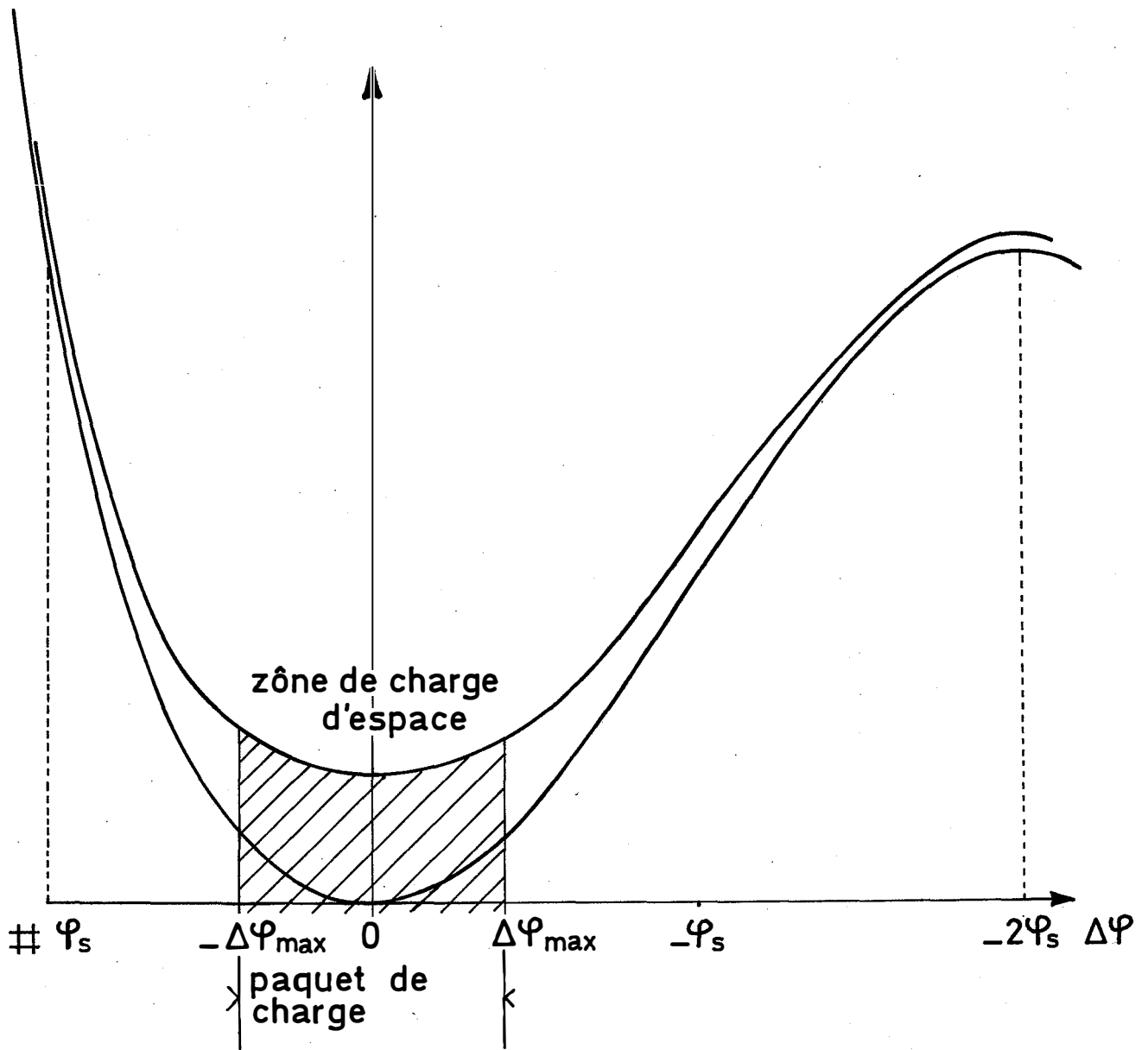


Fig. 2



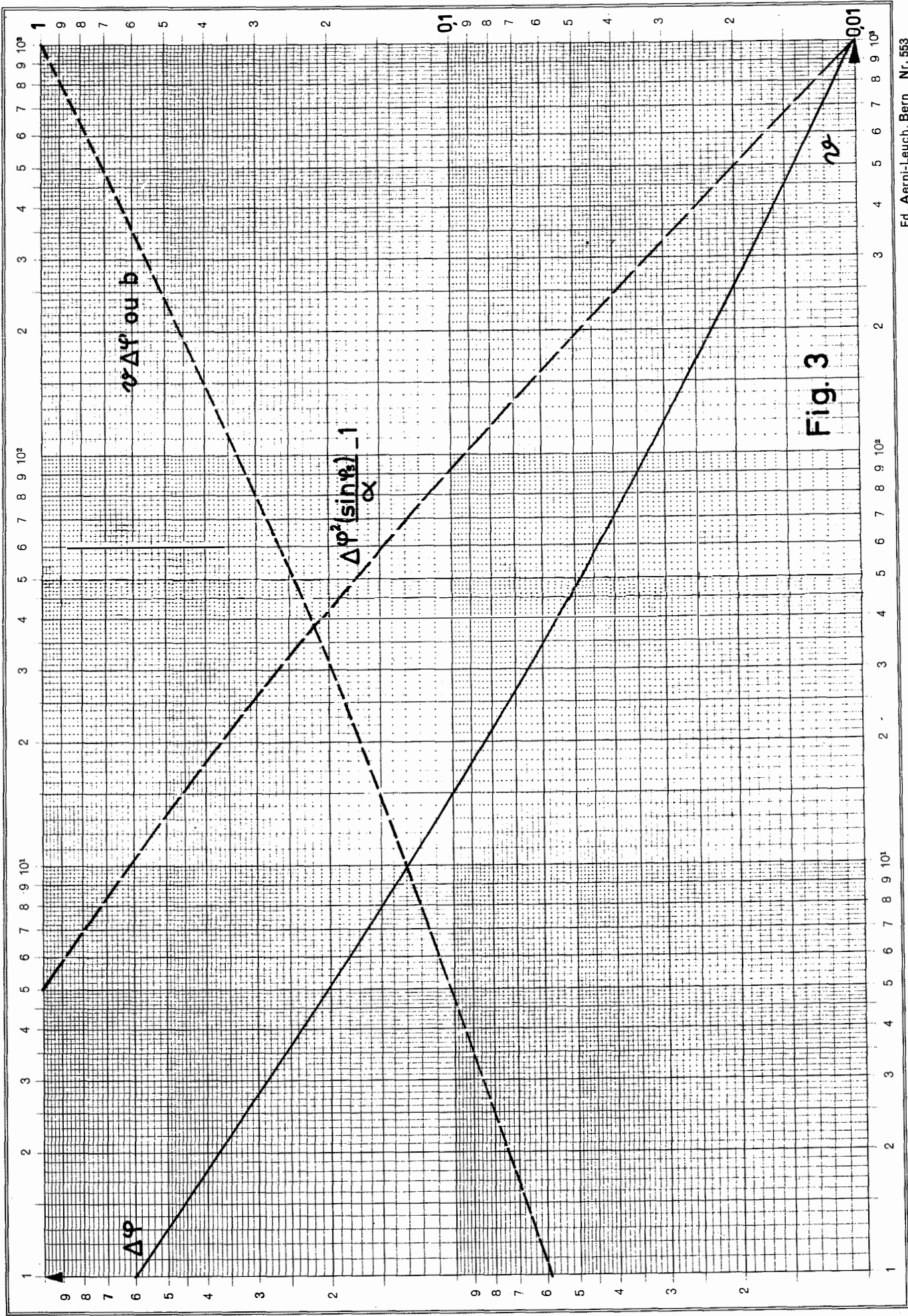


Fig. 3

€

3

)

0



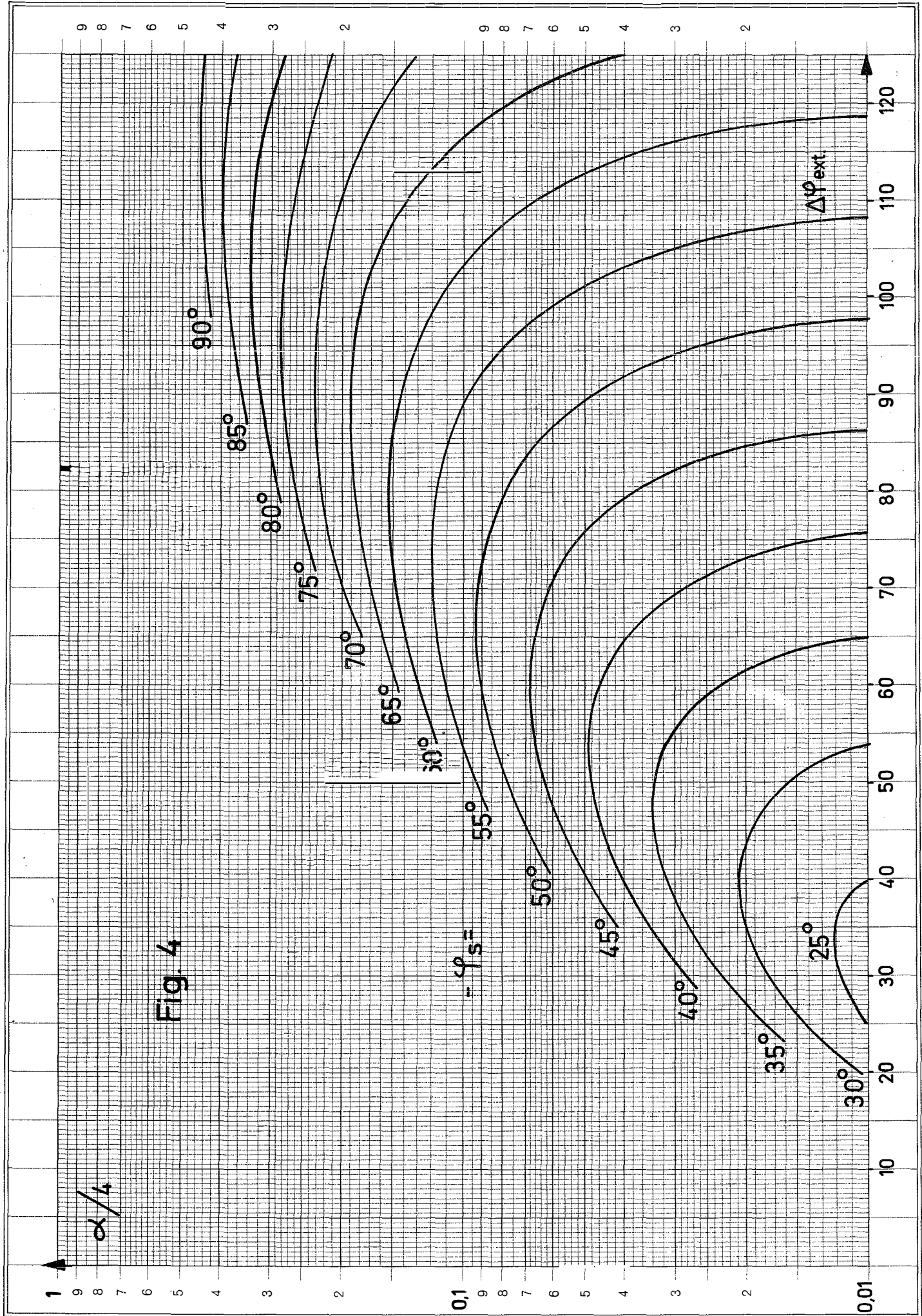


Fig. 4

5

6

.

7

8

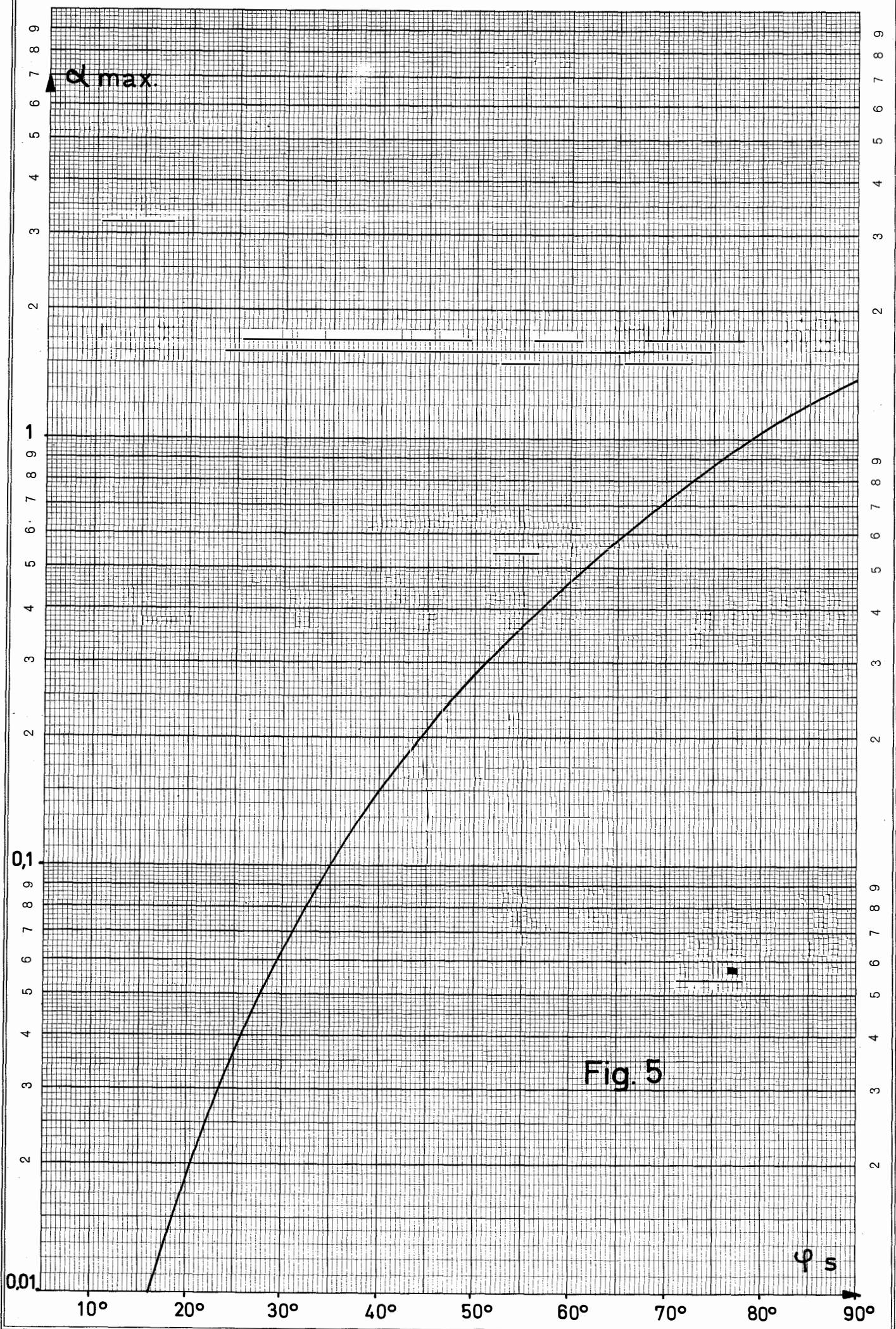
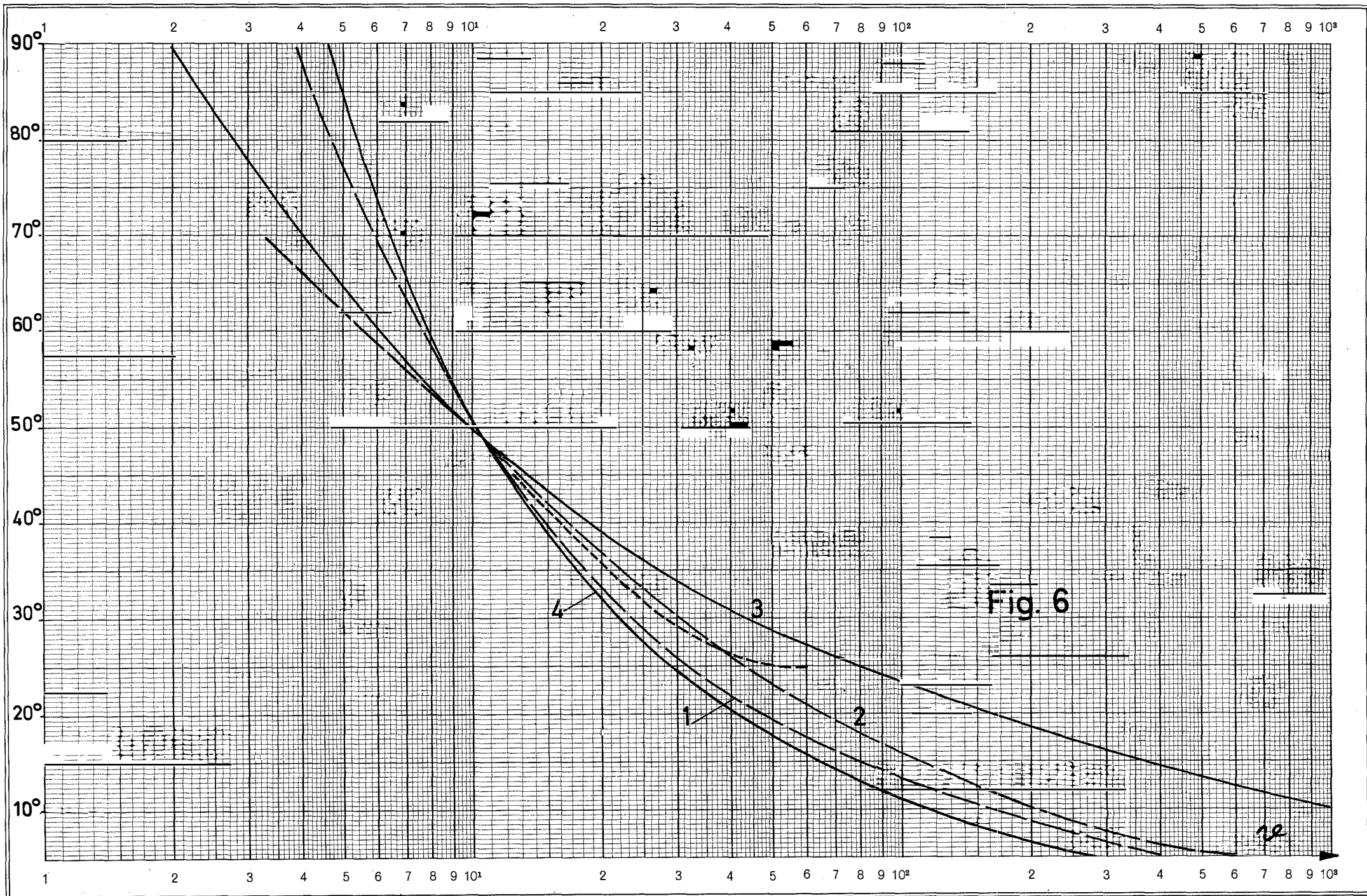


Fig. 5

Teilung } 1 - 1000 Einheit } 90 mm  
 Logat. Division }





Logar. Teilung } 1 - 1000 Einheit } 90 mm  
 Division } Unité }

