MISCELLANEA TAURINENSIA.

TOMUS TERTIUS.

MÉLANGES
DE
PHILOSOPHIE ET DE MATHÉMATIQUE
DE LA
SOCIÉTÉ ROYALE
DE TURIN

POUR LES ANNÉES 1762-1765.

A TURIN, MDCCLXVI.

DE L'IMPRIMERIE ROYALE.

AVEC PERMISSION.

TABLE

des Mémoires contenus dans ce Volume.

MÉMOIRE.

MEMOIRE

Sur la différente dissolubilité des Sels neutres dans l'esprit de vin contenant des observations particulières sur plusieurs de ces Sels.

PAR M. MACQUER.

L'Examen des propriétés des Sels neutres est une des plus importantes, mais en même tems une des plus vastes matières que nous offre la Chimie, sur tout si l'on étend comme celà est à propos la dénomination de *Sels neutres* à toutes les combinaisons des acides quelconques avec toutes les substances terreuses, alkalines salines & métalliques, avec les quelles ces acides sont capables de s'unir. La classe de ces corps composés ou surcomposés est si étendue qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on les connoisse tous; il en reste un grand nombre que les Chymistes n'ont jamais vû, & l'on peut dire même que toutes les propriétés des Sels neutres les plus communs, & les plus usités, ne nous sont point encore connues.

Une des propriétés de ces Sels qu'il est le plus important de connoître c'est leur dissolubilité plus ou moins grande, c'est cette propriété qui peut donner le plus de lumière sur le véritable état, ou sur le dégré de saturation réciproque de leurs acides & de leurs bases; il est aisé de sentir aussi que c'est de cette même propriété que dépendent principalement les phenomenes de leur cristallisation & que par consequent elle est intimement liée avec la théorie de cette grande & interessante operation.

 Mais

Mais quelques belles que ſoient les ſpéculations qu'on puiſſe faire ſur ces objets, il n' eſt pas moins certain qu'elles ne peuvent être qu'incertaines & même trompeuſes, à moins qu'elles ne ſoient fondées ſur les faits, or les faits nous manquent préciſément ſur cette matière, ou du moins nous pouvons aſſûrer qu'il s'en faut encore beaucoup qu'on ait conſtaté tous ceux qu'il eſt eſſentiel de connoître. Pluſieurs bons Chymiſtes ont à la vérité déterminé la quantité que peut diſſoudre l'eau de pluſieurs des Sels neutres des plus connus & c' eſt aſſurément un très-grand avantage, mais l' eau n' eſt pas le ſeul diſſolvant qui ait de l'action ſur les Sels; l'eſprit de vin qui eſt un menſtrue tenant en même tems de la nature de l'eau, & de celle de l'huile eſt capable d'agir auſſi ſur ces composés & d'en diſſoudre pluſieurs, en plus grande quantité que l' eau même; or perſonne que je ſache n' à entrepris de déterminer quels ſont les Sels, dont l' eſprit de vin eſt le diſſolvant & de quelle quantité il ſe charge de chacun de ces Sels; on ſçait ſeulement en gros qu'il y a certains Sels, que l'eſprit de vin diſſout tels que la *terre foliée*, le *Sel ſedatif*, tandis qu'il ne touche point à d'autres, mais c' eſt là tout ce que l' on ſçait, & cet objet mérite aſſurément bien qu' on ſe donne la peine de l' examiner plus à fond; une ſuite d' expériences exactes ſur cette matière ne peut donc manquer de repandre du jour non ſeulement ſur la nature des différens Sels, mais encore ſur celle de l' eſprit de vin; lors qu'on connoîtra bien quels ſont les Sels que ce menſtrue diſſout, quels ſont ceux qu'il ne diſſout point, on ſera à portée d'entreprendre une autre ſuite d' expériences relatives à la criſtalliſation de ces derniers qu'on pourra procurer par des additions ſucceſſives de différentes quantités d'eſprit de vin dans l' eau qui les tient en diſſolution. Enfin l' eſprit de vin étant un des diſſolvans qu'on peut employer avec le plus de ſuccès dans l'analyſe des végétaux & des

des animaux par les menſtrues, laquelle eſt ſans contredit la plus exacte & la plus ſure de toutes, on ſera à portée de connoître quelles ſont celles des parties Salines de ces composés que l' eſprit de vin en peut extraire, & de les ſéparer enſuite de ce diſſolvant pour les obtenir dans leur état naturel, & ſans qu'elles aient ſouffert la moindre altération.

Ce ſont là les principales conſidérations qui m' ont déterminé à entreprendre le travail que j' ai l' honneur de préſenter à l' Illuſtre Academie des Sciences de Turin, & de ſoumettre à ſes lumières; mais, comme je l' ai deja remarqué cet objet eſt d' une étendue ſi conſidérable, qu'il ſeroit impoſſible de l' épuiſer dans un ſeul Memoire; j' ai donc été obligé de me borner dans celui-ci à un certain nombre de Sels, j' ai choiſis ceux qui réſultent de l'union des trois *acides minéraux*, *Vitriolique*, *Nitreux & Marin*, avec la *Terre calcaire*, *l'Alkali fixe végétal*, *l'Alkali fixe minéral, ou la baſe du Sel commun*, *l'Alkali volatil*, *l'Argent*, *le Cuivre*, *le Fer & le Mercure.*

Comme la qualité de l' eſprit de vin peut influer beaucoup ſur les réſultats des expériences de la nature de celles dont je vais rendre compte, il eſt à propos que je détermine de quel eſpéce étoit l' eſprit de vin dont je me ſuis ſervi; il a été le même pour toutes les expériences, j' ai crû devoir me ſervir d' eſprit de vin le plus déphlegmé & le mieux rectifié qu'il ſeroit poſſible, mais rectifié ſans aucune addition ny intermède, & ſimplement par des diſtillations bien ménagées & ſuffiſamment réiterées, dans l'appréhenſion ou qu'il ne fut alteré par l' action des intermédes, ou qu'il n' en enlevat quelques portions avec lui dans la diſtillation, & que cela n'occaſionnat quelque faux réſultat dans les expériences. Celui dont je me ſuis ſervi & qui avoit été rectifié comme je l' ai dit ſans aucun intermède, peſoit ſix gros cinquante quatre grains dans une fiole qui contient juste une once d'eau distillée, le Thermométre de M. de Réaumur étant à 10 degrés au dessus du terme de la glace. Je sçai qu'il est possible d'avoir de l'esprit de vin encore plus déphlegmé, j'en ai vû qui ne pesoit que six gros 48 à 49 grains dans la bouteille d'une once d'eau, mais j'ai donné la préférence a celui dont je viens de parler, par les raisons que j'ai dites, sauf à regarder comme nulles les quantités de Sel qu'il pourroit dissoudre à raison de son peu de flegme surabondant, quand ces quantités ne seroient que proportionnées à ce peu de flegme, c'est-à-dire assès petites, pour ne pouvoir être ni pesées, ni même appréciées.

En second lieu comme l'eau de la cristallisation des Sels pouvoit contribuer aussi à en faire dissoudre une beaucoup plus grande quantité dans l'esprit de vin, tous ceux des Sels que j'ai soumis à mes expériences, ont été d'abord entiérement dépouillés de leur eau de cristallisation par la désication la plus exacte, j'ai versé dans un matras sur chacun de ces Sels ainsi préparés une demi once de mon esprit de vin; j'ai mis le matras bouché, sur un bain de sable & je l'ai chauffé jusqu'à ce que l'esprit de vin commençat à bouillir, j'ai filtré cet esprit de vin tout bouillant, je l'ai laissé refroidir pour observer les cristallisations qui pourroient se faire par refroidissement, après quoi j'ai fait évaporer entiérement cet esprit de vin pour recueillir & peser ce qu'il laissoit de résidu salin. Toutes ces circonstances ont été observées pour chacune de mes expériences; elles ont été aussi reiterées chacune deux fois de la même manière, avec cette difference que la seconde fois je faisois bruler mon esprit de vin après la digestion sur le Sel, au lieu de l'évaporer, pour examiner les phenomenes que sa flamme pourroit présenter.

Tartre

Tartre vitriolé.

Après avoir avoir composé le *tartre vitriolé* moi même par la combinaison exacte & jusqu'au point précis de saturation de l' acide vitriolique avec l' alkali fixe végétal très-pur, après l' avoir exactement desséché, je l' ai traité comme je l' ai dit avec une demi once de mon esprit de vin, cet esprit de vin n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & n' a laissé par son évaporation entière qu'une quantité trop petite de matière saline pour pouvoir être pesée & appreciée, ce qui me détermine à la regarder comme nulle par la raison que j' ai dite, & à conclure que l' esprit de vin ne dissout point le Tartre vitriolé. La flamme de l' esprit de vin qui avoit boüilli sur ce Sel ne différoit absolument en rien, de celle de l' esprit de vin le plus pur.

Nitre ordinaire.

Le Nitre que j'avois aussi composé moi même, comme je l' ai fait à l' égard de tous les autres, s' est dissous dans l' esprit de vin bouillant à la quantité de 4 grains sur la demi once d' esprit de vin, laquelle pése 288 grains une partie de ces 4 grains de Nitre s' est cristallisée très-confusement par le refroidissement. La flamme de cet esprit de vin étoit beaucoup plus grande, plus haute, plus ardente, plus jaune, & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur. La capsule dans laquelle cet esprit de vin avoit été brulé est restée seche, & j' y ai trouvé les quatre grains de Nitre sec. Je crois pouvoir conclure de cette expérience que l' esprit de vin dissout à l' aide de la chaleur de l' ebullition $\frac{4}{288}$ de son poids de Nitre.

Sel

Sel marin à base d'alkali végétal nommé communement Sel fébrifuge de Sylvius.

L'esprit de vin après avoir bouilli sur *le Sel marin à base d'alkali fixe végétal*, n'a rien laissé cristalliser par le refroidissement ; par l'évaporation il a laissé près de 5 grains de ce Sel. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord comme celle de l'esprit de vin pur, mais elle est bientôt devenue grande, jaune, ardente, & lumineuse; il s'est trouvé pareillement 5 granis de Sel après cette combustion ainsi l'esprit de vin dissout $\frac{5}{288}$ de son poid du Sel dont il est question.

Sel de Glauber.

L'esprit de vin traité comme à l'ordinaire par l'ébullition sur le *Sel de Glauber* desséché, n'a rien laissé cristalliser de sensible par le refroidissement; il n'a rien laissé non plus après son évaporation, ny après sa combustion ; cependant sa flamme avoit une couleur rouge considérable, mais malgré cette couleur de la flamme je crois pouvoir conclure que l'esprit de vin ne dissout point le Sel de Glauber, car on verra qu'il ne faut qu'une quantité infiniment petite de Sel pour changer totalement le caractère de la flamme de l'esprit de vin.

Nitre à base d'alkali marin nommé communement Nitre quadrangulaire.

L'esprit de vin traité avec le *Nitre quadrangulaire* a laissé cristalliser par le refroidissement, mais très-confusement, une asès bonne quantité de ce Sel ; par l'évaporation & la déficcation du tout, il s'en est trouvé 15 grains. La flamme de cet esprit de vin étoit d'un jaune lumineux

rou-

rougeatre depuis le commencement jusqu' à la fin ; elle étoit décrépitante & même comme fulgurante & détonnante sur la fin ; après l' entière combustion, il s' est trouvé 18 grains de Nitre quadrangulaire un peu humide, qui se sont réduits à 15 grains par la désiccation. Il résulte de cette expérience que l' esprit de vin dissout $\frac{15}{256}$ de son poids de Nitre quadrangulaire.

Sel commun.

Le Sel commun traité avec l' esprit de vin ne s' est point dissous en quantité bien appréciable. Cependant la flamme de l' esprit de vin dans lequel il avoit bouilli avoit une couleur rouge considérable, & étoit plus grande & plus ardente que celle de l' esprit de vin pur.

Sel ammoniacal vitriolique.

J' ai fait le *Sel ammoniacal vitriolique*, qu'on nomme aussi *Sel ammoniac secret de Glauber*, en combinant ensemble jusqu'au point de saturation de l'acide vitriolique concentré avec de l' alkali volatil concret dégagé du Sel ammoniac par l' alkali fixe ; il s' est fait dans l' instant du mélange une très-vive effervescence ; il s' est excité beaucoup de chaleur ; il s' en est élevé beaucoup de vapeurs fort épaisses d' un odeur singulière. Ce Sel étant au point de saturation & bien desséché étoit très-blanc, d' une saveur vive & piquante, mais ni acide, ni alkaline, il s'est cristallisé en aiguilles comme le Nitre, & ne s' est point humecté a l' air. L' esprit de vin qui avoit bouilli sur ce Sel à laissé former par le refroidissement (le termométre de M. de Raumur étant à 14 dégrés au dessus de zero) quelques petits cristaux au tour du matras, ces cristaux étoient comme des points si petits que je n' ai pû en distinguer ftinguer la figure à la loupe, cet esprit de vin n'a laissé par son entière évaporation qu'un enduit extrêmement mince & inappréciable. Sa flamme d'ailleurs ne différoit en rien de celle de l'esprit de vin pur. Je conclus de là que l'esprit de vin ne dissout point le Sel ammoniacal vitriolique.

Nota. J'ai réiteré l'expérience précedente avec du Sel ammoniacal vitriolique, au quel j'avois donné pour base l'alkali volatil *fluor* du Sel ammoniac dégagé par la chaux, & il n'y a point eû de différence dans les résultats.

Sel ammoniacal nitreux.

J'ai fait du *Sel ammoniacal nitreux* en mêtant jusqu'à parfaite saturation de l'esprit volatil de Sel ammoniac dégagé par la chaux avec de l'acide nitreux très-pur. Cette combinaison s'est faite presque sans effervescence, mais il s'en est élevé un quantité très-considerable de vapeurs blanches fort épaisses. Ces vapeurs viennent des portions d'acide & d'alkali volatil qui s'élévent avant de s'être combinées & qui se rencontrent & s'unissent en l'air. Ce Sel après avoir été desséchè avoit une saveur de nitre très-fraiche, mais beaucoup plus vive & plus piquante que celle du nitre à base d'alkali fixe. L'esprit de vin, après avoir boüilli sur ce Sel, & en avoir dissous beaucoup comme on va le voir, le laissoit cristalliser abondamment par le moindre refroidissement; ces cristaux étoient en petites aiguilles de la figure de celles du nitre, l'esprit de vin chargé de ce Sel m'a paru avoir un odeur approchante de celle de l'*ether nitreux* il à laissé après son entière évaporation un gros & demi, ou 108 grains de nitre ammoniacal. La flamme de cet esprit de vin étoit plus blanche & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur; elle noircissoit un peu les corps blancs qu'on y exposoit comme le fait celle

de

de l' ether ; après que cette flamme a eu cessé d' elle même ; il est resté environ la moitié de la liqueur qui avoit une saveur de nitre ammoniacal très-forte.

La portion de ce Sel qui s' étoit cristallisée dans l'esprit de vin, étoit en cristaux transparens par ce qu'ils retenoient vraisemblablement de l' esprit de vin dans leur cristallisation, comme les Sels cristallisés dans l' eau retiennent pareillement une certaine quantité de cette eau dans leur cristaux. J' ai laissé ces cristaux exposés à l' air pendant cinq ou six jours le termométre étant à 18 & 19 dégrés; ils ont perdu de leur transparence mais ne sont point devenus friables & en poudre comme ceux du Sel de Glauber, & autres Sels qui perdent beaucoup de leur eau de cristallisation par la seule exposition à l' air ; au contraire, ils ont acquis un consistance plus ferme, & adheroient assés fortement au verre qui les contenoit. L' esprit de vin dissout comme on le voit par cette expérience $\frac{108}{288}$ de son poids de Sel ammoniacal nitreux.

Sel ammoniac.

L' esprit de vin traité par la methode commune à toutes mes autres expériences avec le Sel ammoniac ordinaire, à dissout de ce Sel, & en a laissé cristalliser une quantité sensible par le refroidissement; il s' est trouvé après son entiére évaporation qu'il en avoit dissous 24 grains. La flamme de cet esprit de vin ne m' a pas paru différer de celle de l' esprit de vin pur. L' esprit de vin dissout donc $\frac{24}{288}$ de son poids de Sel ammoniac.

Sel vitriolique à base calcaire ou sélénite.

Comme les Chymistes savent présentement que les *Pierres spéculaires gypseuses* sont des Sels neutres formés de l'union

b de

de l' acide vitriolique avec de la terre calcaire ; qu'elles ne ſont en un mot que ce qu'on nomme *ſélénite*, j' ai choiſi pour l' expérience préſente de nôtre Pierre ſpéculaire des environs de Paris. Après l' avoir bien lavée & netoyée, je l' ai calcinée & je l' ai traitée avec l' eſprit de vin comme les autres Sels. Ce qu'il en a laiſſé après ſon entière évaporation n' étoit qu'un enduit infiniment mince & trop peu conſidérable pour pouvoir être recüeilli & apprecié, ainſi je mets ce Sel, par les raiſons que j' ai dites, au nombre de ceux que l' eſprit de vin ne diſſout pas. La flamme d' ailleurs de cet eſprit de vin n' avoit rien d' extraordinaire.

Nitre à baſe calcaire.

J' ai fait *le Nitre calcaire* en combinant enſemble juſqu' au point de ſaturation de l' acide nitreux très-pur avec de la *craye de champagne* lavée, après avoir filtré cette diſſolution, je l' ai faite évaporer juſqu' à forte pellicule & l' ayant laiſſé expoſée au frais de la nuit, le termométre étant à 11 dégrés au deſſus de zero, cette liqueur s' eſt coagulée en une maſſe criſtalliſée en petites aiguilles extrêmément fines raſſemblées en faiſceaux & formant comme de pinceaux ou broſſes; il y avoit autour de la capſule qui contenoit cette matière quelques points criſtalliſés en criſtaux plus petits que les plus petits grains de ſablon, ces points étoient environnés circulairement de petites aiguilles pareilles à celles de broſſes, & ces aiguilles y aboutiſſoient comme à un centre, enſorte que cela repreſentoit autant de petits ſoleils rayonnans, qu'il y avoit de points. Ce Sel avoit une ſaveur très-acre & très-amère & attiroit fortement l' humidité de l' air. Ayant voulu achever de le deſſécher à feu moderé, je n' ai pu y réuſſir pendant plus de 24 heures; ce n' étoit toujours qu'une

liqueur

liqueur visqueuse, un peu rousse, couverte d'une peau; elle se coaguloit lors qu'elle n'etoit plus chauffée, mais elle se resolvoit en liqueur tout de suite par l'humidité de l'air quoique le tems fût alors très-sec (c'étoit le 3 Juin) & que le termométre fût à 22 dégrés, elle avoit la consistence & la *poisserie* du miel. J'ai donc été obligé d'employer le feu nud au lieu du bain de sable dont je me servois d'abord pour dessécher; elle s'est reduite par la désiccation entière en une matière blanche ayant l'apparence d'une terre, il ne s'est néanmoins exhalé pendant cette désiccation aucunes vapeurs d'acide nitreux. J'ai pulverisé ce Sel & l'ai mis tout chaud dans un matras; il est si déliquescent que malgré la promptitude avec laquelle je faisois cet opération, il s'humectoit un peu, étant même encore chaud. J'ai versé dessus tout de suite la quantité ordinaire d'esprit de vin, & j'ai observé que cet esprit en dissolvoit beaucoup sans le secours de l'ébullition; à ce degré de chaleur il en à dissous une plus grande quantité, & s'en est même saturé, car il restoit encore au fond du Sel non dissous. L'esprit de vin chargé de ce nitre calcaire avoit une couleur rousse & un consistence huileuse à peu près comme celle de l'huile d'amandes. Ayant laissè refroidir cette dissolution, je n'y ai remarqué aucune cristallisation; il est vrai qu'il faisoit alors fort chaud; le thermométre étoit à 22 dégrés. Il s'est seulement formé au fond de la liqueur un léger sédiment terreux rousseâtre. J'ai fait évaporer cette dissolution spiritueuse jusqu'à siccité; elle s'est desséchée à une chaleur beaucoup moindre que n'avoit fait ce même Sel dissous dans l'eau; le résidu sec pesoit une demi once c'est-à-dire 288 grains autant que l'esprit de vin employé. La flamme de cet esprit de vin étoit d'abord semblable à celle de l'esprit de vin ordinaire, mais elle est bien-tôt devenue grande, lumineuse, rouge, décrépitante & pétillante;

 elle

elle a laiſſé après s' être éteinte un réſidu blanc ſalin très-abondant & déliqueſcent.

Sel marin à baſe calcaire.

J' ai fait diſſoudre de la même craye dans de bon acide marin juſqu' à parfaite ſaturation il en a reſulté une liqueur ſaline neutre qui ayant été filtrée & évaporée avoit une ſaveur ſalée acre & amere. La déſiccation de ce Sel s'eſt faite un peu plus facilement que celle du nitre calcaire cependant il a fallu employer auſſi le feu nud, & le Sel qui eſt reſté m' a paru auſſi avide de l' humidité & auſſi *déliqueſcent* que le nitre calcaire. L' eſprit de vin traité avec ce *Sel marin calcaire* en a diſſous auſſi ſon poids égal, & la flamme de cet eſprit de vin étoit toute ſemblable à celle de l' eſprit de vin ſaturé de nitre calcaire.

Vitriol de lune.

J' ai fait le *Vitriol de lune* qui eſt une combinaiſon de l'acide vitriolique avec l'argent, par précipitation, de la manière ſuivante. J' ai verſé de l' acide vitriolique concentré dans une diſſolution d'argent faite par l' acide nitreux; il s' eſt fait auſſi tôt, comme cela arrive toujours, un dépôt blanc qui eſt un compoſé d' acide vitriolique & d' argent & que je crois devoir nommer Vitriol de lune ou d' argent. Il ne s' eſt prèſque pas excité de chaleur dans cette opération; j' ai verſé plus d' acide vitriolique qu' il n' en falloit pour ſéparer tout l' argent d' avec l'acide nitreux. La liqueur ayant été étendue dans de l' eau diſtillée pour faciliter la précipitation étoit très-acide; je l' ai décantée deſſus le dépôt; j' ai ſéparé du vitriol de lune tout l' excés d' acide, ou plutôt tout l' acide libre, par pluſieurs lotions dans de l' eau diſtillée & par imbi-

tions

tions dans le papier gris, jusqu'à ce que ce Sel ne fit plus aucune impression de rouge sur le papier bleu après avoir parfaitement desséché ce Sel, je l'ai fait boüillir dans mon esprit de vin, il ne s'en est rien dissous, & la flamme de cet esprit de vin ne différoit en rien de celle de l'esprit de vin pur.

Nitre de lune nommé communement cristaux de lune.

J'ai fait dessécher parfaitement des *cristaux de lune* & ayant versé dessus la quantité ordinaire de mon esprit de vin, il m'a paru qu'il s'en dissolvoit: la liqueur mise à boüillir a pris une odeur d'ethér nitreux, & s'est un peu troublée par une espéce de poudre noirâtre; je l'ai filtrée toute boüillante comme dans toutes les autres expériences; à mesure quelle se refroidissoit, il y paroissoit une grande quantité de cristaux figurés en Rombes minces qui se formoient à la surface. Ces Rombes sont produits par quatre triangles un peu inclinés dans le même sens, ensorte qu'ils ne sont pas dans un même plan, leurs sommets réunis font au milieu du Rombe une espéce de pointe pyramidale mais fort peu élevée, & leurs côtés communs représentent deux diagonales qui se coupent leur milieu. Le tout ressemble donc à une Pyramide à quatre faces extrêmément basse & comme applatie: chaque face triangulaire paroit formée de lignes paralléles au côté opposé au sommet. L'esprit de vin après son entière evaporation a laissé un gros 12 grains de ce Sel nitreux. Sa flamme étoit plus blanche & plus lumineuse que celle de l'esprit de vin pur & accompagnée d'un peu de fuliginosité. L'esprit de vin dissout donc $\frac{84}{368}$ de son poids de Nitre de lune.

Lune

Lune cornée.

J' ai fait de la *Lune cornée* en verſant de l'acide marin dans une diſſolution d' argent par l' acide nitreux, & je l' ai traitée comme j' avois fait le vitriol de lune par un lavage à l'eau diſtillée, juſqu'à ce qu'elle ne donnat plus aucune marque d' acidité. L' eſprit de vin n' en a rien diſſous même à l' aide de l' ébullition. La flamme de cet eſprit de vin n' avoit rien de particulier.

Vitriol de mercure.

Le Sel réſultant de l' union de l' acide vitriolique avec le mercure que je nomme *Vitriol de mercure* & qu'il faut bien diſtinguer du *Turbith minéral*, en ce que ce dernier ne contient preſque point, ou même point du tout d' acide vitriolique, ce Vitriol de mercure, dis-je, a été fait par le même procédé dont j' ai parlé pour le Vitriol de lune, c' eſt-à-dire en verſant de l'acide vitriolique dans une diſſolution de mercure faite par l' acide nitreux. Je n' ai lavé que légérement à l' eau diſtillée le depôt blanc qui ſe forme dans cette opération, par ce qu'on ſçait que par un grand lavage on lui enleve tout ſon acide & qu'on le réduit en une eſpéce de précipité jaune indiſſoluble même dans l' eau & qu'on nomme Turbith minéral, ou plus-tôt parce qu'on décompoſe cette combinaiſon & qu'on la ſépare en deux autres dont l'une eſt le Turbith dont je viens de parler & l' autre reſte diſſoute dans l'eau des lavages & ne contient que fort peu de mercure tenu en diſſolution par une très-grande quantité d' acide : or ce n' étoit ni l' une ni l' autre de ces préparations de mercure dont j' avois intention de reconnoître le dégré de diſſolubilité dans l'eſprit de vin ; ayant donc lavé légérement, comme je l' ai dit, le Vitriol mércuriel qui s' étoit formé dans

dans mon opération, je l'ai fait sécher parfaitement au bain de ſable; il étoit aprés cette déſiccation très-blanc & très-beau; je l'ai traité avec l'eſprit de vin juſqu'à l'ébullition comme les autres, & je n'ai remarqué aucune diſſolution: ayant filtré cette liqueur toute chaude, il ne s'y eſt rien criſtalliſé par le refroidiſſement; il n'eſt rien reſté non plus après ſon entière évaporation. La flamme de cet eſprit de vin étoit comme celle de l'eſprit de vin pur; elle n'a laiſſé aucun réſidu ſenſible après qu'elle a eu ceſſé d'elle même; le vaiſſeau dans lequel cet eſprit de vin avoit brulé étoit ſec; il avoit ſeulement une légére ſaveur acerbe métallique & l'ayant frotté avec un papier bleu mouillé, ce papier s'eſt trouvé un peu rougi. Il ſuit de là que l'eſprit de vin ne diſſout point ſenſiblement le Sel vitriolique mercuriel, ou Vitriol de mercure, même à l'aide d'un peu d'acide libre.

Nitre de Mercure.

Ayant fait diſſoudre juſqu'à ſaturation du Mercure dans de l'acide nitreux trés-pur j'ai obtenu une grande quantité de criſtaux de *Sel nitreux mercuriel* que je nomme *Nitre de Mercure*; j'ai lavé ces criſtaux à pluſieurs eaux diſtillées & je les ai fait égouter ſur du papier gris; après les avoir parfaitement ſéchés, je les ai traités par l'ébullition avec l'eſprit de vin comme les Sels cy deſſus; ces criſtaux qui étoient blancs avant d'avoir boüilli dans l'eſprit de vin ſont devenus par cette ébullition d'un jaune citronné un peu gris. L'eſprit de vin qui avoit ſervi à cette opération ayant été évaporé entièrement n'a laiſſé qu'un léger enduit d'un Sel un peu argentin & ſi mince que je n'ai pû le recüeillir. La flamme de cet eſprit de vin ne differoit point ſenſiblement de celle de l'eſprit de vin pur, cependant elle a donné quelques légéres marques de fuliginoſité; il eſt reſté, après qu'elle a eu ceſſé d' elle même, un enduit Salin argentin comme après l'évaporation; cet enduit a un peu rougi le papier bleu; ayant lavé à plusieurs eaux distillées le Nitre mercuriel sur lequel l' esprit de vin avoit boüilli, il m' a paru que l'eau en dissolvoit fort peu & il a pris une couleur de plus en plus jaune, come celà arrive au Turbith minéral je ne tire pour le présent d' autre conséquence de cette expérience, si non que l' esprit de vin ne dissout qu'une quantité prèsque insensible du Nitre de Mercure dans l' état ou je l' ai employé: comme je trouve quelque chose de singulier dans ce fait, je me propose de faire dans la suite d' autres expériences pour l' éclaircir.

Mercure sublimé corrosif.

De tous les composés de Mercure & d' acide marin, c' est celui qu'on nomme *sublimé corrosif* qui est le plus salin, & c' est par cette raison que je l' ai choisi par préférence aux autres pour en éxaminer la dissolubilité dans l' esprit de vin; j' ai donc fait boüillir de mon esprit de vin sur ce Sel, & l' ayant filtré tout chaud j' ai observé qu'il se cristallisoit beaucoup de Sel par le refroidissement, cet esprit de vin à laissé par son entière évaporation deux gros & demi & un scrupule, ou 204 grains de Sublimé corrosif. Sa flamme étoit d' abord comme celle de l' esprit de vin ordinaire, mais bien-tôt elle est devenue plus grande, plus jaune, & plus lumineuse; elle étoit mêlée de quelques traits de couleur bleue sur tout sur la fin elle étoit très-décrépitante. L' esprit de vin dissout donc $\frac{204}{288}$ de son poids de sublimé corrosif. Il est vray que voyant que l' esprit de vin dissolvoit beaucoup de ce Sel par l' ébullition, je l' ai laissé boüillir plus long tems que les autres Sels.

Vitriol

Vitriol de mars.

Ayant desséché du *Vitriol de mars* au bain de sable sans le liquefier, je l' ai fait boüillir avec mon esprit de vin; il m' a paru qu' il ne se dissolvoit rien ou qu'infiniment peu de chose. L' esprit de vin décanté de dessus ce Sel n' a rien laissé cristalliser par le refroidissement, & par son entière évaporation il n' a laissé qu'un légér enduit brun trop peu considérable pour pouvoir être recüeilli. Cet esprit de vin a brulé comme l' esprit de vin pur & n' a laissé dans la capsule ou il avoit brulé qu'une tache brune. Ayant appliqué un papier bleu moüillé sur cette tache, il a été rougi sensiblement. Il paroit par cette expérience que l' esprit de vin ne dissout point le Vitriol martial.

Nitre de mars.

J' ai fait dissoudre peu à peu de la limaille de fer non roüillée dans de l'acide nitreux très-pur ; il m' a été impossible de saturer cet acide au point de ne plus rougir le papier bleu; la dissolution s' est épaissie considerablement ; j' y ai ajouté de l' eau & de nouvelle limaille, le tout s' est mis en une espéce de pâte & malgré cela la dissolution étoit encore fort acide; elle étoit de couleur rousse rougeâtre ; je l' ai faite évaporer à siccité; il s' est exhalé pendant cette évaporation beaucoup de vapeurs acides d' une odeur très-penetrante. Le residu sec étoit de couleur brune. Je l' ai traité avec l' esprit de vin ; ce dissolvant a pris dessus, à l'aide d'une chaleur moderée, une couleur rouge de briques assés foncée, mais l' ayant porté jusqu' à l' ebullition, il a perdu presque toute sa couleur en déposant un sédiment considérable. Cet esprit de vin filtré & évaporé jusqu'à siccité n' a laissé que quatre grain de matière acide d' un jaune de safran très-foncé; ce Sel martial a eu beaucoup de peine à se dessécher entièrement & étoit si déliquescent qu' il s' est humecté étant même encore chaud. La flamme de cet esprit de vin étoit d' abord comme à l' ordinaire, mais quand il y en a eu environ un tiers de brulé, elle est devenue rouge & pétillante & a duré de la sorte jusqu'à la fin; il est resté dans la capsule un enduit rouge brun assés considérable & un peu de liqueur fort acerbe & fort acide. Il faut remarquer sur cette expérience que l' esprit de vin dissoudroit vraisemblablement une beaucoup plus grande quantité de ce Nitre martial sans le secours d' aucune humidité, si l' on pouvoit le dessécher entièrement sans séparer presque tout l' acide nitreux d' avec le fer, mais cet acide tient si peu à ce métal que je crois que cela n' est pas possible.

Sel marin martial.

J' ai fait dissoudre peu à peu de la limaille de fer bien nette dans de bon acide marin; la dissolution s' est très-bien faite sans que le fer se changeat en safran de mars & sans s' épaissir. Il est à remarquer au sujet de cette dissolution, que les vapeurs qui s' en élevent ont une odeur desagréable pénetrante & fort différente de celle de l'acide marin pur; elles sont aussi fort inflammables & font une explosion violente quand on les allume dans une vaisseau clos. J' ai fourni une grande quantité de limaille à cette dissolution, même après qu' il n' y avoit plus d'éffervescence, mais malgré cela elle rougissoit tojours un peu le papier bleu. Je l' ai faite évaporer, il s' est formé dessus une pellicule saline luisante & un peu chatoyante. L'ayant laissée refroidir quand elle a été à ce point, elle s' est toute coagulée en cristaux confus dont je n' ai pû distinguer la figure même à la loupe. Ayant continué l'évaporation

poration au bain de ſable juſqu' à ſiccité, la déſiccation a eu beaucoup de peine à ſe faire; il a fallu une journée entière pour cela; ſur la fin ce Sel avoit une odeur tout à fait ſemblable à celle du Vitriol de mars lors qu'on le deſſéche. Ce même Sel marin martial avoit une couleur de roüille aſſés claire & aſſés vive lors qu'il n' étoit que médiocrement chauffé, mais cette couleur devenoit beaucoup plus rouge & plus brune, lors qu' il l' étoit d' avantage. L' eſprit de vin a pris par l' ébullition ſur ce Sel une couleur de roüille un peu trouble & un peu changeante par l' oppoſition, ou l' interpoſition de la lumière; ayant ſoummis cette diſſolution à l' évaporation il a fallu beaucoup de tems pour deſſécher entièrement le réſidu, il peſoit un demi gros ou 36 grains; il étoit d' une couleur jaune brune, s' humectoit à l' air mais lentement; il lui a fallu ſept ou huit jours pour ſe réſoudre totalement en liqueur. La flamme de cet eſprit de vin étoit aſſés blanche, & aſſés brillante, à meſure que la déflagration avançoit elle devenoit plus lumineuſe & plus blanche; elle étoit accompagnée ſur la fin de beaucoup de petites étincelles blanches & brillantes comme des étoiles d' artifice; il eſt reſté après cette combuſtion un réſidu jaune brun aſſés conſidérable d' une ſaveur martiale ſtyptique. L' eſprit de vin diſſout donc $\frac{36}{288}$ de ſon poids de *Sel marin martial*.

Vitriol de cuivre.

Le *Vitriol de cuivre* deſſéché parfaitement eſt devenu preſque blanc; l' eſprit de vin que j' ai fait boüillir deſſus n' a pris aucune couleur; le même eſprit de vin n' a laiſſé aucun réſidu par ſon entière évaporation; il a brulé comme de l' eſprit de vin pur, & n' a pareillement laiſſé aucun réſidu après ſa déflagration. Ce qui prouve que l'eſprit de vin ne diſſout point le Vitriol de cuivre.

Nitre à base de cuivre.

J' ai fait diſſoudre du cuivre rouge très-pur dans de l'acide nitreux auſſi très-pur ; la diſſolution s' eſt faite d'elle même très-rapidement après qu'elle a été entièrement ſaturée de cuivre, elle avoit une couleur bleue tirant ſur le verd céladon ; elle étoit troublée par une chaux de cuivre de même couleur, mais infiniment plus pâle que la liqueur & preſque blanche. J' ai fait évaporer cette diſſolution au bain de ſable, il s' eſt formé deſſus une pellicule de criſtaux confus ; l' ayant alors laiſſée refroidir, elle s' eſt coagulée toute entière en une maſſe de petits criſtaux ſi confus, qu'il m' à été impoſſible d' en diſcerner la figure, même à l'aide d' une bonne loupe ; ces criſtaux ſe ſont enſuite humectés & reſous totalement en liqueur en fort peu de tems. J' ai remis cette liqueur en évaporation, la pellicule s' eſt reformée de nouveau & par le refroidiſſement toute la maſſe s' eſt encore coagulée ; ayant entrepris de la deſſécher enſuite entièrement ; elle s' eſt liquefiée à la première impreſſion de la chaleur, mais comme elle reſtoit toujours en cet état, j' ai augmenté le feu ; alors quoiqu'à la reſerve de la pellicule de la ſurface, ce Sel demeurat toujours liquide, il a commencé à en ſortir beaucoup de vapeurs d' acide nitreux très-pénétrantes ; ces vapeurs m' ont fait connoître que cette liquidité que j' attribuois à de l'eau ſurabondante au Sel n'étoit qu'une vraie fuſion de ce même Sel, & que ce ne ſéroit qu' en lui enlevant ſon acide par l' action du feu, en le décompoſant en un mot totalement que je pourrois l' amener ſur le feu à l' état de ſolidité ſéche ; l' ayant donc retiré de deſſus le feu, il s' eſt figé ſur le champ en une matière très-dure & fort avide de l' humidité de l' air ; j' ai pulveriſé promptement ce Sel & après l'avoir mis encore chaud dans un matras, j' ai verſé par deſſus

la

la quantité ordinaire d' eſprit de vin. Je l'ai laiſſé agir à froid pendant deux jours : dans cet eſpace de tems, il a pris une belle couleur bleüe de ſaphir aſſés foncée, & il eſt reſté au fond du matras une eſpéce de chaux de cuivre d' un verd bleu pâle. Par l' ebullition cette couleur n' a point pris plus d' intenſité ; j' ai donc ſiltré la liqueur elle a paſſé très-claire & du plus beau bleu de ſaphir ; il eſt reſté ſur le ſiltre beaucoup de chaux de cuivre de couleur de verd de gris fort pâle. Cette diſſolution après ſon entière èvaporation a laiſſé 48 grains de Nitre à baſe de cuivre. La flamme de cet eſprit de vin étoit d' abord comme à l' ordinaire, mais elle eſt bien-tôt devenue beaucoup plus blanche, plus lumineuſe & d'un verd très-beau, cette flamme étoit accompagnée d'une quantité aſſés conſidérable de fumée fuligineuſe noirciſſante : il s'eſt formé au tour de la liqueur enflammée un bourlet de matière verte qui s' eſt noirci en partie par la chaleur & qui a pris un caraſtère charbonneux, auſſi s' eſt elle allumée, elle bruloit en rougiſſant comme un charbon ; il eſt reſté après la flamme ceſſée d' elle même, une quantité aſſés conſidérable de Sel bleu en liqueur. L' eſprit de vin a diſſous comme on voit dans cette expérience [illegible] de ſon poids de *Nitre à baſe de cuivre.*

Sel marin à baſe de cuivre.

J' ai pris pour compoſer le *Sel marin à baſe de cuivre* du fil de cuivre rouge très-pur, je l' ai mis dans l'acide marin aſſés fort, diſtilié par l' acide vitriolique pur à la manière de Glauber ; la ſurface du cuivre s' eſt ternie promptement, mais ſans qu'il parut aucun autre ſigne de diſſolution ; il a fallu le ſecours du bain de Sable pour faire agir l'acide ſur ce metal, alors les ſignes ordinaires aux diſſolutions des métaux par les acides ont parus, mais je je fus étonné de voir que la liqueur, à mesure que la dissolution se faisoit, au lieu de prendre une couleur verte, comme je m'y attendois, prenoit au contraire une couleur de caffé qui devenoit de plus en plus brune & foncée. Lors que la dissolution a été à peu près au point de saturation elle étoit un peu épaisse elle rougissoit encore sensiblement le papier bleu, quoique d'ailleurs l'acide ne parut plus du tout agir sur le cuivre qui restoit. J'ai versé cette dissolution dans une capsule pour l'évaporer & ayant rincé le matras avec de l'eau, j'ai vû aussi avec surprise que le peu de dissolution brune qui restoit dans le matras est devenue d'un très-beau verd tirant sur le bleu aussi tôt qu'elle a été étendue dans l'eau, & cette couleur s'est communiquée au reste de la dissolution dans laquelle j'avois mêlé cette rinçure. Par l'évaporation elle s'est réduite presque toute en cristaux de couleur verte & figurés en aiguilles; le peu de liqueur qui baignoit ces cristaux étoit redevenue fauve brun par l'évaporation; enfin lors que tout a été évaporé jusqu'à siccité, le verd des cristaux a disparu & tout étoit absolument brun: j'ai mis ce Sel tout chaud dans mon esprit de vin, ce dissolvant a pris presque aussi tôt un verd très-foncé, & a dissous beaucoup de ce Sel sans le secours d'autre chaleur que celle de l'air, qui à la verité étoit très-grande ce jour là & de 28 à 29 dégrés (c'étoit le 26 Aoûst.) L'esprit de vin chargé de ce Sel a fourni après fort peu d'évaporation beaucoup de cristaux du plus beau verd ils étoient éguillés & comme soyeux; par la déficcation, ils ont perdu tout leur verd & sont devenus absolument bruns: ils pesoient 48 grains après avoir été bien desséchés. La flamme de l'esprit de vin chargé de ce Sel étoit du plus beau verd; on y appercevoit cependant des éspéces de fulgurations blanches & rouges; il est resté après la combustion de l'esprit de vin beaucoup de Sel dont une partie étoit verte & l'autre brune.

Les

Les changemens de couleur qui arrivent à ce Sel ſuivant la quantité d' eau plus ou moins grande à laquelle il eſt uni ont quelque choſe de ſingulier & de remarquable; lors qu' il eſt ſec, ou qu' il ne contient que très-peu d' eau, il eſt d' un jaune fauve foncé brun; à meſure qu'on y ajoute de l' eau, il devient ſucceſſivement verd d'olives, beau verd de pré plein & foncé, verd bleuâtre, & enfin lors qu'il eſt étendu dans beaucoup d' eau, il eſt entièrement bleu, mais clair; il repaſſe enſuite ſucceſſivement par toutes ces mêmes couleurs, juſqu'à redevenir tout brun, à meſure qu'on fait évaporer l' eau qui le tient diſſous. Ces phenomenes m'ont fait ſoupçonner que ce Sel de couleurs ſi différentes lors qu'il eſt plus ou moins ſec pourroit être la matière d' une ſorte d' *encre de ſympathie.* Jen ai fait l' éſſai; ayant tracé des caractères ſur du papier blanc avec ſa diſſolution étendue dans beaucoup d' eau laquelle eſt comme je l' ai dit d' un bleu pâle ces caractères après qu' ils ſe furent ſechés ſimplement à l'air étoient inviſibles à cauſe du peu d' intenſité de la couleur; mais les ayant chauffès, j' ai vû auſſi tôt paroitre l' ecriture d'un jaune vif très-beau. Cette couleur qui n'eſt qu'une teinte affoiblie du fauvè brun qu' a le Sel en maſſe lors qu'il eſt parfaitement deſſéchè, m' a rappellé que M. Baumé très-habile Chimiſte de cette Ville avoit publiè dès 1757 dans les cours de chymie que nous faiſons enſemble, une encre de ſympathie dont les effets ſont tous ſemblables à celle dont je parle actuellement, & comme la baſe de l' encre de M. Baumé eſt du cuivre de même que dans celle-cy, quoique le procedé qu' il a donné pour la faire ſoit différent, je ne doute nullement que ces deux encres ſympatiques ne ſoient eſſentiellement de même eſpéce & je reconnois avec plaiſir que M. Baumé eſt le prèmier qui ait obſervé cette ſorte d' encre, & qui en ait parlé, ce Chimiſte convenoit en annonçant cette encre qu'elle n'avoit

pas

pas la proprieté de redevenir invisible par la simple exposition à l' air aussi parfaitement que l' encre sympatique tirée du cobalt & s' est toujours proposé de lui donner cette qualité, mais des recherches d'une plus grande importance l' en ont empéché jusqu'à présent; celle dont je viens de parler avoit aussi le même deffaut, mais après les observations que j' avois faites sur les changemens de couleur du Sel de cuivre, & sur la cause prochaine de ces changemens il m'etoit bien facile de donner à cette encre la proprieté desirée; on a vû que la différence des couleurs du Sel marin cuivreux dépend uniquement de la quantité d' eau plus ou moins grande à laquelle il est uni, si donc lors qu'il paroit en jaune par la désication parfaite sur le papier, il ne disparoit point ensuite entiérement par l' exposition à l' air, cela ne peut venir que de ce qu' il n'attire pas assés promptement & assés éfficacement l' humidité de l' air, & en effet ce Sel quoique deliquescent n'est pas à beaucoup près du nombre de ceux qui possedent cette qualité au plus haut point; il ne s' agissoit donc pour donner à l' encre en question la proprieté de disparoitre entièrement que de la rendre plus avide de l' humidité de l' air que ne l' est naturellement le Sel marin cuivreux, & c' est à quoi je suis parvenu facilement en mêlant dans sa dissolution un autre Sel exempt de toute couleur, qui ne peut le décomposer & qui est infiniment plus déliquescent; il y en a assûrement plusieurs qui peuvent être employés pour cela avec succés; j' avois sous la main le Sel marin à base de craye qui m' avoit servi dans mes expériences précedentes; jen ai mêlé dans la dissolution de Sel marin cuivreux à peu près autant qu'elle pouvoit contenir de ce dernier Sel; j' y ai ajouté un peu d'excés d' acide marin & de l' eau, ensorte que le tout avoit une couleur d' aigue marine assés belle, & ayant fait l' epreuve de cette encre, jai trouvé qu' elle disparoissoit presque aussi bien

que

que celle de cobalt je rappelle au reſte icy que l' acide marin qui m' a ſervi pour ma diſſolution de cuivre avoit été diſtillé par l' acide vitriolique libre, parce qu' il n' eſt pas impoſſible qu'un peu de ce dernier acide mêlé avec le premier ne contribue aux effets dont j'ai parlé; j'avertis auſſi ceux qui voudroient vérifier cette encre que c' eſt le Sel marin à baſe de craye au quel j' ai donné la préference ſur les autres Sels marins à baſe calcaire, parce qu' il m' a paru par des expériences faites anterieurement ſur les combinaiſons de l' acide marin avec différentes terres calcaires, que les Sels qui en réſultoient n' étoient pas tous également déliqueſcens, & que celui-cy l' étoit beaucoup plus que la plus part des autres.

Je n' attache au reſte aucune prétention à cette eſpéce d' encre de ſympathie, non ſeulement, par ce que je n'en ſuis pas le premier obſervateur, mais encore par ce que ce n' eſt là qu' un de ces petits faits curieux qui ſe préſentent comme d' eux mêmes aux Chimiſtes dans leurs recherches & aux quels on ne doit donner qu'un moment d' attention quand on a pas intention d' en developper la theorie. Je ne me ſuis peut être que trop arrêté à celui-cy, c' eſt pourquoi je me hâte de revenir à mon objet principal.

Les expériences dont j' ai rendu compte dans ce memoire, quoique deja nombreuſes, ne le ſont cependant point ancore aſſés à beaucoup près pour en tirer des conſequences & une theorie générale; elles font entrevoir à la verité que les Sels neutres ſont d' autant plus diſſolubles dans l' eſprit de vin, que leur acide eſt moins fortement uni avec leur baſe, & qu' à cet égard, ils ſuivent par rapport à l' eſprit de vin à peu près la même régle que par rapport à l' eau, mais la ſaturation plus ou moins parfaite de l' acide des Sels n' eſt certainement point l'unique cauſe de leur différent dégré de diſſolubilité dans l' esprit de vin, car il y en à qui se dissolvent en plus grande quantité dans ce menstrue que dans l' eau même. Le principe philogistique, ou inflammable, influe probablement beaucoup dans les effets de ces dissolubilités, mais je le repete, nous n' avons point encore assés de faits connus sur ces objets pour en developper la Theorie generale. Je m' abstiens donc pour la présent de toute spéculation à cet égard, & je me borne à quelques réflexions particulières sur les expériences dont j' ai rendu compte.

En rassemblant sous un même point de vüe tous les Sels vitrioliques que j' ai examinés, il se trouve qu' il n' y en a aucun que l' esprit de vin ait dissous, ou du moins dont il ait dissous une quantité sensible, & le Sel de Glauber est le seul qui ait apporté quelque changement à sa flamme. Si cette indissolubilité se soutient dans les autres Sels vitrioliques qui me restent à examiner, elle sera une nouvelle preuve de la superiorité deja reconnüe de l' acide vitriolique sur les autres acides à raison de sa plus grande simplicité & de la plus grande force avec laquelle il est capable d' adhérer à toutes les substances susceptibles d' union avec les acides, aussi ais-je deja fait observer ailleurs que dans la classe des Sels vitrioliques nous n' en connoissons encore aucun qui ne soit cristallisable, ou dont la qualité deliquescente annonce une connexion foible de l' acide avec sa base.

Comme aucun de mes Sels vitrioliques ne s' est trouvé sensiblement dissoluble dans l' esprit de vin, il n' est point étonnant, qu' ils n' ayent occasionné aucun changement à la flamme de cet esprit, mais on pourroit être surpris que je n' aye observé aucune couleur verte à la flamme de celui que j' avois fait boüillir sur le vitriol de cuivre, tandis que M. Bourdelin dit dans son memoire sur le Sel sedatif imprimé dans les memoires de l'Academie des sciences de Paris pour l'année 1755, qu'ayant fait bruler de

l' esprit

l' esprit de vin sur du vitriol de cuivre, il à observé une belle couleur verte dans sa flamme. Il est très-certain cependant que la contradiction qui se trouve entre nos deux expériences n' est qu' apparente, & qu' elles sont exactement vraies l' une & l' autre. M. Bourdelin avoit pour but dans le memoire que je viens de citer, non d' examiner le dégré de différente dissolubilité des Sels dans l' esprit de vin, mais de reconnoître s' il s' en trouveroit quelqu' autre que le Sel sedatif qui eut la proprieté de communiquer une couleur verte à sa flamme, il n' étoit pas necessaire en conséquence que ce savant Chimiste prit comme moi la précaution de priver ses Sels de leur eau de cristallisation avant de les soummettre à l' action de l' esprit de vin, aussi ne dit il point qu' il eut desséché le vitriol de cuivre, sur le quel il a fait son expérience, & l'on ne doit point douter que ce ne soit l' eau de cristallisation de ce Sel qui l' ait rendu miscible à l' esprit de vin en quantité suffisante pour verdir la flamme, d' autant plus qu' il est prouvé par plusieurs des expériences dont j' ai rendu compte qu' il ne faut qu'une quantité de Sel infiniment petite, pour changer considérablement la flamme de cette liqueur. Ces différences demontrent bien au reste, combien il étoit necessaire que je prisse la précaution de priver mes Sels de toute humidité surabondante, pour en reconnoître au juste le dégré de dissolubilité.

Si nous jettons après cela aussi un coup d' œil général sur le Sels nitreux nous verrons, que tous ceux que j'ai soummis à l' expérience se sont comportés à l' égard de l' esprit de vin bien differement des Sels vitrioliques on sait que l' acide nitreux tient en général infiniment moins que l' acide vitriolique aux différentes substances qui peuvent former des Sels neutres avec ces acides; il est demontré aussi en chymie que ce même acide renferme le principe inflammable dans sa composition; or il est très probable que ce sont là les deux causes principales de la dissolubilité des Sels dans l' esprit de vin, aussi resulte-t-il des expériences que j' ai rapportées, que presque tous les Sels nitreux sont dissolubles dans l' esprit de vin, & la plus part même en quantité assés considerable; il y à cependant deux de ces Sels qui font une sorte d' exception le premier c' est le Nitre de Mercure dont l'esprit de vin n'a pas dissous une quantité sensible, & le second c' est le Nitre de mars dont le menstrue n'a dissous que fort peu, quoique ce dernier Sel soit très déliquescent & paroisse par cette qualité devoir être un des plus dissolubles. Je n'ajoute rien pour le présent à ce que j'ai dit aux articles de ces Sels, ce sont de ces effets dont la cause demande à être recherchée par un plus grand nombre d'expériences: mais il est bon de remarquer encore au sujet de nos Sels nitreux qu' il n' y en a aucun qui n' ait alteré sensiblement la flamme de l' esprit de vin, ce qui indique toujours une grande disposition de leur part à s' unir à ce dissolvant en tout ou en partie. Au reste cette alteration de la flamme de l' esprit de vin par les Sels neutres est encore un objet important, qui mérite beaucoup d'attention & dont il paroit qu' on pourra retirer autant de connoissances nouvelles sur la nature des Sels, que de leur dissolubilité même, mais il demande aussi une nombreuse suite d' expériences & d' observations. Nous entrevoyons seulement par celles qui sont deja faites, que la flamme de l' esprit de vin peut recevoir trois sortes d' alterations de la part des Sels. La premiere c' est de devenir plus jaune, plus rouge, plus grande, & plus décrépitante; la seconde c' est d' être plus blanche, plus lumineuse, & en même tems plus ou moins fuligineuse; & la troisième, c' est de contracter quelque couleur particuliere, comme par exemple la couler verte que lui donnent

nent les Sels à base de cuivre. Je soupçonne que la premiere de ces qualités a lieu lors que c' est le Sel neutre entièr & comme Sel neutre, qui agit dans cette flamme, que la seconde est produite particulièrement par l' acide des Sels, lequel donne à l' esprit de vin un caractére plus ou moins approchant de celui de l' ether, & que la troisième est duë principalement à la base ou à la substance qui est unie à l' acide des Sels, mais tout cecy a besoin d' une plus grande suite d' expériences pour être éclairci.

Enfin les phenomenes des Sels neutres contenant l'acide marin réunis aussi sous un même point de vuë nous font connoître que ces Sels se sont dissous pour la plus part dans l' esprit de vin, & ont causé de l' alteration à sa flamme; ainsi à cet égard l' acide marin paroit différer de l' acide vitriolique à peu près comme l' acide nitreux, mais il est bien remarquable que le composé de mercure, & d' acide marin soit infiniment plus dissoluble dans l'esprit de vin que les Sels résultans de l' union de cette substance métallique avec les autres acides, & que ce même composé, (*le sublimé corrosif*) se dissolve en plus grande quanrité dans l' esprit de vin que dans l' eau même. L' acide de ce Sel, ni même la manière particulière dont il est uni au mercure ne paroissent pas les seules causes de cette singulière dissolubilité; je supçonne que la nature de cette substance métallique très abondante en principe inflammable & qui est peut être même celle de toutes qui en contient le plus, influë pour beaucoup dans les phenomenes de sa dissolubilité, mais c' est encore là un objet qui demande des recherches & des expériences ulterieures. Je finis par une dernière remarque sur la nature de la flamme de l' esprit de vin traité avec les Sels contenant l' acide marin je fais donc observer que de tous ceux de ces Sels que j'ai examinès jusqu' à présent le Sel

marin

marin martial eſt le ſeul qui ait donné à cette flamme la couleur blanche & un caractére rapproché de celui de la flamme de l'ether ; je ne doute point que parmi ceux qui reſtent à examiner, il ne s'en trouve pluſieurs autres qui produiſent le même effet, mais en attendant on peut toujours en inferer que le fer eſt un des métaux qui peuvent communiquer un caractére particulier à l'acide marin, par la quantité abondante de principe inflammable qu'il lui tranſmet.

A Paris ces 8.e Octobre 1765.

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De novis quibusdam experimentis electricis.

CUm in eximia gallica symmeriani libri versione, quam suis notis auctam Cl. NOLLETIUS ad me perhumaniter miserat (*a*) nova multa, ac ingeniosa experimenta invenirem, illud maxime laude dignum videbatur, quod & in cruralibus per frictionem excitatis, & in vitris electricitatem ex communicatione habentibus oppositae electricitates sejunctae distinctaeque exhibeantur. Sic enim earum electricitatum mutuas actiones mutuasque relationes melius pervestigari posse censebam, sicque viam pandi ad explosionis electricae theoriam luculentius declarandam. Hisce excitatus eo quoque operam meam contuli, & multa collegi, quae etsi manca adhuc sunt, & imperfecta, proponenda tamen duxi, quod hujusmodi videantur, quae acriori ingenio, ac diuturniori, quam mihi licuerit diligentia amplificari, ac perfici possint.

CAPUT I.

De frictione binarum taeniarum sericearum ejusdem coloris.

1. DUas taenias sericeas albas (*) igne recenter exsiccatas, alteram alteri superextensam, & plano levigato, sive deferenti, ut metallico, sive coërcenti, ut vitreo, superpositas regula ex ebore in aciem exsecta fricabam: inde taeniae electricitatem acquirebant, qua ad planum adhaerescerent; ab eo simul divulsae, se se attrahebant, superiore, quae fricata fuerat, resinosam, eamque majo-

(*a*) Experiences, & observations nouvelles concernant l'electricité par M. *Robert Symmer.*

(*) Gallice *des rubans.*

majorem, ſubjecta vitream electricitatem oſtendente. Si ſeorſim divellerentur a plano, ſupra quod fricatae fuerant, ſeſe repellebant, & utraque reſinoſam electricitatem monſtrabat.

2. Eveniebat vero interdum, ut etiam ſimul a plano revulſae taeniae ſe ſe repellerent; idque quoties, vel inter fricandum ſuperior ab inferiore fuerat revulſa, vel laxiores taeniae erant, ſicque ex frictione inferior taenia adverſus ſubjectum planum atterebatur, ut inde congenerem, & ſuperiori parum diſparem electricitatem acquireret.

3. Enimvero ad eum frictum, quo electricitas inducitur, magnam corporis ſupra corpus excurſionem haud requiri, ſatis intellexi poſtquam expertus ſum eaſdem albas taenias, etiam charta inaurata rigidiore, aut lamina plumbi interceptas, ex ipſius chartae, aut plumbi frictione ſatis ſenſibilem electricitatem adeptas fuiſſe.

4. Dum porro taeniae a plano, ſupra quod fricatae ſunt, revelluntur (1. 2) in locis, ubi ſecedunt, ipſas inter & ſubjectum planum ſcintillae emicant, quae ſcintillae ſimiliter conſpiciuntur, quando taeniae ſimul a plano divulſae, & in unum adhaereſcentes ab invicem ſeparantur, ubi vero ſemel a plano, ſupra quod fricatae ſunt, taeniae revulſae fuerint, aut a ſe invicem, quantumvis iterum deinceps ad planum, aut ad ſe mutuo admoveantur, nulla unquam amplius in earum ſeparatione lux ſe prodit.

5. Similiter quamvis taeniae a plano, ſupra quod fricatae ſunt, ſingillatim ſejunctae, ſe ſe repellant (1), ſi tamen ſemel ab eodem una revulſae fuerint, atque adeo ſe ſe attrahentes factae ſint, quantumvis ad ipſum iterum applicentur, & ſeorſim ſejungantur, ſe ſe attrahere pergunt; & viceverſa, quae taeniae a plano ſeorſim divulſae fuerunt, & propterea ſe ſe repellunt, licet poſtea altera ſuper alteram ad ipſum iterum aptentur, & quocumque modo rurſus dimoveantur, ſe ſe repellere pergunt.

6. Ex his modus patet, quo taeniae ex parte alia se se attrahentes, ex alia se se repellentes fieri possint, si postquam supra planum leve fricatae sunt, pars alia earumdem simul, alia seorsim, & singillatim ab eo plano divellatur. Verum de his phoenomenis fusius deinceps disseremus.

7. Porro quamdiu taeniae supra planum, supra quod fricatae sunt, relinquuntur, vix ulla electricitatis indicia praebent; simul vero revulsae, & adhuc invicem adhaerentes, praepollentis resinosae electricitatis (1), ex utraque facie indicia praebent, & instar unicae taeniae resinosam electricitatem habentis se gerunt: si ad planum iterum admoveantur, iterum signa electrica in ipsis sopiuntur, quae iisdem ab eo revulsis denuo se produnt, & ita deinceps, donec omnis ipsarum electricitas extincta sit.

8. Quod si modo dictae taeniae non jam levi superficiei, supra quam fricatae sunt admoveantur, sed imponantur corpori hirsuto, ac deferenti, uti telae ex cannabe, aut gossipio haud exsiccatae, cito ipsarum electricitates ad aequilibrium perducuntur, ita ut inde dimotae taeniae, quamdiu simul junctae perstant, nulla praebeant electricitatis indicia, si dimoveantur, electricitates ostendant contrarias, & aequales, quae, iisdem iterum junctis, rursus delitescunt, & ita porro.

9. Imo vero taeniae se se repellentes, quae levi deferenti superficiei altera super alteram admotae, eique quantumvis adhaerescentes, se se repellere pergunt, quoties revelluntur (5), si hirsutae deferenti superficiei altera super alteram imponantur, intra aliquot secunda temporis minuta jam se se attrahent, ut iisdem ab ea superficie quovis modo revulsis apparet; idque ex eo fit, quod electricitas taeniae hirsutae superficiei proximae jam in contrariam abierit, & ex resinosa vitrea facta sit.

10. Hinc eſt, ut ſi binae albae taeniae ſupra hirſutam ſuperficiem dicto modo (1) fricentur contrarias ſemper electricitates acquirant, ita ut quovis modo inde revulſae fuerint, ſuperior ſemper reſinoſam, inferior, quae hirſutae ſuperficiei proxima fuit, vitream electricitatem oſtendat.

11. Quod autem efficit ſubſtratum hirſutum deferens corpus (9), id ipſum praeſtat deferens quodcumque in apicem efformatum. Etenim ſi duae taeniae ex electricitate ſe ſe repellentes (1) parallelo ſitu ſuſpendantur, ut planis faciebus ſe mutuo reſpiciant, tum acuminatum metallum taeniarum alterutri obvertatur, & per ejus longitudinem promoveatur ad unius, duorumve pollicum diſtantiam, mox oppoſita taenia ad hanc, cui apex obvertitur, accurret, eique juncta adhaerebit, & neutra jam amplius taenia ulla electrica ſigna dabit, quamdiu junctae perſtabunt: quodſi divellantur, conſtabit, illius taeniae, ad quam apex converſus eſt, electricitatem mutatam fuiſſe, & ex reſinoſa in vitream evaſiſſe.

12. Eodem autem artificio, quo reſinoſa taeniae unius electricitas in vitream mutatur, poteſt etiam taenia non electrica electricitate imbui: ſi nempe, taenia non electrica hirſutae ſuperficiei impoſita, ſuper ipſam electrica taenia extendatur (9), vel ſi, taenia electrica ad non electricam applicita, ad hanc acuminatum metallum obvertatur, & juxta ipſius longitudinem promoveatur (11). Conſtabit vero ſemper taeniam, quae electricitatem hoc pacto acquiſivit danti contrariam acquiſiviſſe, ita ut ſi illius electricitas vitrea fuit, hujus ſit reſinoſa, & viciſſim: conſtabit inſuper taeniam, quae hoc modo electricitatem largitur, inde vix majorem pati virium electricarum jacturam, quam ſi per id tempus ſuſpenſa ſtetiſſet, nullamque electricitatem communicaſſet.

13. Hinc eſt, ut una eademque taenia electrica pluribus non electricis contraria electricitate imbuendis inſervire poſſit, ſi ſingulae ſucceſſive eidem applicitae expoſito modo (12) tractentur. Unaquaeque vero ipſarum electricitatem acquiret contrariam quidem, ſed aequalem electricitati taeniae excitantis, eo tempore, quo vis excitabatur (8), ut propterea ea ratione electricitas abſque frictu mirum in modum multiplicari poſſit.

14. Taeniam albam minus ſiccam, adeoque minus coërcentem alii item albae recenter ad ignem exſiccatae ſupponebam, eaſque ſupra planum leve, ſive deferens, ſive coërcens impoſitas regula ex ebore fricabam: quovis modo taeniae a ſubjecto plano divellerentur, ſuperior ſemper reſinoſam, inferior vitream electricitatem oſtendebat.

15. Ex quo apparet vim apicum in ſuperioribus experimentis in eo poſitam eſſe, ut taeniam, cui obvertuntur, magis deferentem efficiant, ſeu faciliorem reddant electrici fluidi per eamdem fluxum, quum humiditas ſubjectae taeniae, quae ipſam vapori electrico magis penetrabilem reddit, idipſum efficiat (14), quod ſuppoſiti eidem apices, ſi ſicca eſſet, praeſtare potuiſſent (10).

16. Hactenus expoſita experimenta eodem omnino ſucceſſu tentari poſſunt duabus nigris taeniis optime exſiccatis, ut certo conſtet, ſericum ſive album, ſive nigrum ex frictione, quae ebore fit, reſinoſam electricitatem adipiſci.

17. Si loco eboris, pelle uterer ad fricandas duas taenias, ſive utramque albam, ſive utramque nigram, idem iterum erat experimentorum omnium exitus, ut ſimiliter concludere fas ſit ſericum utrumvis ex pelle reſinoſam electricitatem recipere. Si vitrum ad fricandum adhiberem in eiſdem experimentis, idem eventus. Si demum ſulphur, electricitas taeniae, quae fricabatur vitrea erat, caetera ſimili modo, ac in ſuperioribus experimentis contingebant,

ſed inverſo ordine, ut ubi in illis reſinoſa electricitas habebatur, hic haberetur vitrea, & viciſſim.

18. Et haec quidem conſtanter ita ſe habere viſa ſunt, ut nimirum taeniae ſericeae, ſive albae, ſive nigrae ex frictu ope eboris, pellis, vitri, vim reſinoſam acquirerent, ex frictu ope ſulphuris vitream, idque non modo in recenſitis experimentis, ſed in aliis quibuſvis; quando nempe vel alterutrius coloris taenia utroque extremo affixa, & horizontaliter per aërem tenſa dictis corporibus fricabatur, vel iiſdem circumjecta, & utroque extremo prehenſa, altero, alteroque alterne ita trahebatur, ut adverſus ea corpora attereretur, vel demum aliquo ex iis corporibus tranſverſim obvoluta juxta longitudinem per ipſa ita trajiciebatur, ut in eo trajectu vehementem ab iiſdem attritum ſubiret.

19. Cum charta nuda, vel inaurata taenias fricarem minus conſtans fuit inductae electricitatis indoles; quamvis enim plerumque ex his albae taeniae vitream (*a*), nigrae reſinoſam electricitatem reciperent, contigit tamen interdum, ut haec aliter aliterque ſe haberent. Cujus quidem inconſtantiae cauſſas omnes hactenus aſſequi non potui; viſum tantummodo eſt, attritum, quem olim eae taeniae ex aliis corporibus paſſae fuiſſent, ipſas ad inſuetam electricitatem a charta vel nuda, vel inaurata recipiendam aptas effeciſſe.

20. Illud vero etiam conſtans fuit, ut taeniae binae albae, tum binae nigrae charta nuda, aut inaurata interceptae, interea dum ipſa charta ſupra tabulam fricaretur (3), vim electricam ejuſdem generis acquirerent, & quidem reſinoſam, ob quam de charta exemtae ſe ſe repellebant: quo in experimento, cum taeniae nonniſi adverſus chartam, aut inauraturam, qua undique obvolvebantur, affri-

(*a*) Sericum globo vitreo circumductum, & charta inaurata fricatum vitream electricitatem in catenam emiſiſſe Cl. *P. Beccaria* expertus eſt. *lettere* §. 134. 135.

frictum pati potuerint, patet in eo saltem experimento, chartam tum nudam tum inauratam vim etiam resinosam taeniis sive albis, sive nigris impertiri, indeque sit verosimile varium etiam modum, quo frictio peragitur, ad eam inconstantiam (19) aliquid conferre.

CAPUT II.

De frictione binarum taeniarum sericearum oppositis coloribus infectarum: tum de symmeriana cruralium electricitate.

21. EX experimentis in praecedenti capite expositis satis constitit contrarietatem electricitatum serici albi, atque nigri, quas Cl. Viri SYMMERUS (*b*), & NOLLETIUS (*c*) proposuerunt generatim admitti non posse, cum contra ex plerisque corporibus (18), & in quibusdam adjunctis ex omnibus, quae experiri libuit, solo sulphure excepto, (18. 20) sericum album similiter ac nigrum resinosam electricitatem acquirat (*d*). Praestabit igitur ea ipsa experimenta expendere, ex quibus Cl. VIRI in eam opinionem adducti sunt.

22. Symmerianorum experimentorum haec summa est. Cruralia sericea oppositi coloris, alterum scilicet album, nigrum alterum (*e*) prius excalefacta (*f*) in crus vel in brachium (*g*) opportuna tempestate (*h*) immitebat, ibique vel

(*b*) P. 30. 33. 38. 39. 40.
(*c*) In *Symmerum* p. 43.
(*d*) Revera sericum generatim inter corpora resinosam electricitatem possidentia recenseri consueverat. *Nollet Leçons VI*, p. 345.
(*e*) P. 7. 32. 13. 41.
(*f*) P. 7.
(*g*) P. 9. 25.
(*h*) P. 6. 7. 25. 75. 76.

vel relinquebat aliquamdiu (*i*), vel etiam ſuſque deque trahebat (*k*) dein utrumque ſimul e crure, vel brachio detrahebat (*l*). Quamdiu conjuncta erant exigua electricitatis indicia dabant: ſi alterum ab altero educeretur, ac removerentur, utrumque vehementer electricum ſe oſtendebat, & album quidem vitrea, nigrum vero reſinoſa electricitate imbutum erat (*m*).

23. Nullibi porro SYMMERUS meminit exterioris affrictus, quo ad tibialia excitanda uſus fuerit: unde ipſorum electricitas ſoli eorum frictui adverſus crus dum induerentur, aut exuerentur (*n*), vel cruralium inter ſe frictui tribuenda erit.

24. Porro ſi ex frictu cruralium adverſus crus electricitas inducta fuiſſet, illud perpetuum fuiſſet, ut crurale cruri proximum, quod maximam frictionem paſſum eſſet vim reſinoſam reciperet, cujuſcumque demum coloris eſſet (17) contra SYMMERUS monet, ſi crurale album ſit, vitream electricitatem conſtanter recipere, ſeu ſubſit nigro, ſeu eidem ſit ſuperpoſitum, & viciſſim, ſi nigrum, conſtanter recipere reſinoſam (*o*), ex quo conſtat electricitatem cruralium in iis experimentis eorumdem frictui adverſus crus tribuendam non eſſe.

25. Reliquum igitur eſt, ut cruralium electricitas eorumdem inter ſe frictui tribuatur (23): & quidem expertus ſum ſericum album quovis ex recenſitis modis (18) ſerico nigro fricatum, vitream electricitatem acquiſiviſſe, nigrum fricatum albo reſinoſam.

26. Cl. NOLLETIUS crurale album, & nigrum alterum alteri ſuperextenſum, & corpori deferenti impoſita confricabat

(*i*) P. 7.
(*k*) P. 31.
(*l*) P. 8. 9.
(*m*) Vid. loca cit. n. e.
(*n*) Huic electricitatem tribuere videtur *Symmerus* p. 7. 9.
(*o*) P. 6. 141.

cabat, & ſimiliter ea ratione album vitrea, nigrum reſinoſa electricitate conſtanter imbuebat (*p*).

27. Porro cum duas taenias oppoſitis coloribus infectas alteram alteri ſuperpoſitam, ſupra deferens leve planum confricarem, eveniebat interdum, ut alba vitream, nigra reſinoſam electricitatem reciperet, ſeu alba ſubeſſet, ſeu nigra, ſeu pelle, ſeu charta, ſeu corpore quovis fricarentur. Eveniebat alias, ut taenia ſupérpoſita electricitatem reciperet reſpondentem indoli corporis, quo fricabatur (18. 19), ſubjecta vel eamdem, vel contrariam, prout taeniae vel ſimul, vel ſeorſim a ſubjecto plano ſeparabantur, non aliter, ac quando duas taenias albas (1) vel duas nigras (16) adhibebam.

28. Quare cum in primo caſu indoles electricitatis naturae confricantis corporis non reſponderet, ſed fricati ſerici colori, conſtat ſimiliter, ac §. 24. electricitatem non ex frictione, quae charta aut pelle fit, inductam fuiſſe, ſed ab alterius taeniae adverſus alteram attritu (confer 3), cum contra in caſu altero electricitas inducta reſpondens indoli corporis fricantis oſtendat confricatam taeniam majorem adverſus illud, quam adverſus ſubjectam taeniam attritum paſſam fuiſſe.

29. Revera primum illud (27) eveniebat conſtanter, quoties ſericum confricandum laxum erat, ac cedens, & cruralium inſtar retiforme (*q*), ut contra ſubjectum ſericum facilius excurreret, ac fricaretur; corpus vero confricans ex iis, quae minorem ſerico electricitatem impertiuntur; cum contra contigeret alterum, ſi ſericum fricandum ſtrictius, craſſius, rigidius eſſet, corpus vero confricans ex iis

(*p*) Mem. de l' Acad. an. 1761. p. 248.

(*q*) *Fait à maille.* Ex his patet, eam ſtructuram, quam prae textura ordinaria telae ſericeae his experimentis aptiorem exiſtimaverat. Cl. *Symmerus*, revera plurimum conferre ad contrarietatem electricitatum ſerici albi, & nigri ſervandam, quoties alterum ſuper alterum fricatur.

iis, quae majorem ſerico electricitatem tribuunt; (*) ſic enim ſericum confricatum ab ipſius affrictu potius, quam ab affrictu adverſus ſubjectum ſericum, electricum evadebat.

30. Idque adeo verum eſt, ut ſericeum crurale, etiam album, ſupra vitrum charta inaurata fricatum, vim reciperet reſinoſam, ſubjectum vitrum vitream oſtenderet; cum contra tela ſericea firmior, ac denſior (*r*) vitro ſuperextenſa ex frictione per inauratam chartam plerumque, ex frictione ſulphuris perpetuo vitream electricitatem reciperet, tuncque ſubjectum vitrum reſinoſa imbueretur. Ex quibus patet (ut obiter id obſervemus) ſericum album ſupra vitrum fricatum, quod ab ipſo attrahitur, contrariam ſemper eidem electricitatem poſſidere, hinc ſtare leges electricorum motuum a Desagulierio propoſitas (*s*). Eas enim electricitates contrarias eſſe luculenter conſtat, tum quod ex binis taeniis oppoſita electricitate imbutis (18), quae ab eorum altero attrahitur ab altero repellatur, & viceverſa, tum quod cæteras omnes contrarietatis notas exhibeant.

31. Igitur fricatum ſericum interdum electricitatem recipit a corpore fricante, alias a ſerico ſubjecto, pro ut ab eorum alterutro majorem attritum patitur, & pro ut alterum prae altero electricitati in ſerico per affrictum ciendae aptius eſt.

32. Huc etiam facit experimentum aliud, quod nempe ſi binae taeniae, alba altera, altera nigra, vel ſi tres, quarum duae extremae albae, & media nigra, aut duae extremae

(*) Hinc diuturna frictio, quae ut vitrum (*Nollet Leçons* tom. VI. p. 274.) ſic ſericum aptum reddebat ad majorem electricitatem ex frictu ſuſcipiendam id etiam efficiebat, ut fricatum ſericum potius a fricante corpore, quam a ſuppoſito contrarii coloris ſerico electricitatem reciperet.

(*r*) Gallice *ſatin blanc.*

(*s*) Confer *Cl. Nolletium* in *Symmer.* p. 149. 150., & Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 253.

tremae nigrae, & media alba, aliae aliis hoc ordine impositae charta inaurata intercipiantur, ex chartae frictione, albae semper vitream, nigrae resinosam electricitatem acquirant, cum contra, ut diximus (20), binae albae taeniae, aut binae nigrae, ea ratione, resinosa semper imbuantur. Quo quidem in experimento, qnam vis affrictus inauraturae circumpositae adversus taenias, & taeniarum contra se mutuo aequalis sit, inde colligi potest, posita aequali frictione, sericum majorem ab oppositi coloris serico, quam ab inaurata charta electricitatem recipere, adeoque talem exhibere, qualis ab oppositi coloris serico induceretur.

33. Ex his jam facile est intelligere, cur cruralia in crus inducta, etiam nulla externa adhibita frictione electrica fierent (23): nempe dum alterum super alterum induebatur inter se mutuo fricabantur. Cur perinde esset sive albo crurali nigrum, sive album nigro subesset (24): scilicet, sive album sericum nigro, seu nigrum albo fricetur, album constanter vitream, nigrum resinosam electricitatem acquirit (25). Cur etiamsi cruralia cruri inducta manu fricentur, album perpetuo vitream, nigrum resinosam electricitatem recipiat (*t*); nempe cruralia cum cedentia sint ex manu superducta minus atteruntur, quum adversus se invicem confricentur (Confer. 29. 32.) Cur duo cruralia ejusdem coloris vim acquirant exiguam (*u*), cum tamen duae taeniae, etiam ejusdem coloris ex frictione non minus electricae fierent, quam si diversum colorem praeseferrent (1. 2). Nempe SYMMERUS cruralia cruri applicita extrinsecus non fricabat (23) hinc si ejusdem coloris essent, non aliam electricitatem acquirere potuerunt, nisi quam levis eorum affrictus adversus crus dum induerentur,

f tur,

(*t*) Ut in experimentis *Cl. Nolletii*, Mem. de l'Acad. tom. cit. p. 245. 252.
(*u*) Symmer. p. 26. 27. 30.

tur, aut exuerentur, excitasset, quae porro exigua est: quod si vero postquam ejusdem coloris cruralia induta fuissent, manu fricarentur, non secus, ac taeniae in superioribus experimentis (1. 2) eximiam electricitatem acquirebant (*v*). Ex his etiam eruitur, cur cruralia simul detrahi debeant (*x*). Si enim alterum prius educatur contra subjectum confricari debet directione illi contraria, qua confricabatur, dum indueretur, ex quo eorum vis infringi proculdubio debet, ut taceam, quod generale est corporibus contrarias electricitates possidentibus, ut nimirum sejuncta multo citius electricitatem disperdant, quam si juncta serventur. Quod si crurale nigrum albo superpositum sit, quod frequentius contigisse videtur in SYMMERI experimentis (*y*), & manu etiam fricetur, cum eadem electricitas, & a manu fricante, & ab albo subjecto in nigrum crurale ex eo frictu conjiciatur, scilicet resinosa (17. 25), hinc fiet, ut nigri cruralis electricitas electricitate albi multo sit vehementior; proindeque ea obtinebunt, quae de binis taeniis, aut simul, aut singillatim a subjecto plano divellendis adnotata fuerunt (1). Ex his demum constat cruralium electricitatem inprimis excitari dum alterum super alterum induitur, aut si simul induantur (*z*), dum alterum super alterum trahitur, extenditurque; dum enim detrahuntur, cum detrahantur simul, vix, ac ne vix quidem inter se mutuo atteri possunt; imo vero, ut diximus, si seorsim detrahantur, quando ingens [illegible] fieri [illegible]

(*v*) Etiam album sericum super album, aut nigrum super nigrum cruri impositum, & manu fricatum electricum fieri, sed minus. *Nollet in Sym.* p. 25 Alibi de gradu electricitatis caute esse decernendum, seque taeniis sericeis experimenta instituisse, quae *Symmerianis* contraria videantur p. 43. 44.

(*x*) Il faut bien prendre garde de ne pas les desunir. *Symmer.* p. 8. 9.

(*y*) Uti p. 10. 11., & 30. 31., & 143. 144. j'ai trouvé que le bas noir ne doit point son electrisabilité sur le bas blanc &c. *Nollet in Sym.* p. 42.

(*z*) Il est assez indifferent comment on met les bas *Symmer.* p. 8. Ambo simul in crus induxisse videtur *Nolletius* Mem. de l'Acad. cit. p. 245.

fieri debet alterius ſuper alterum affrictus, eorum vis infringitur. Poſtquam crurália detracta ſunt inter ſe mutuo tenaciſſime adhaerent, certo indicio jam ſuſceptae electricitatis, ut propterea affrictui, quem patiuntur, dum a ſe mutuo ſeparantur, ea electricitas tribui non poſſit (*&*).

CAPUT III.

De conſtanti taeniarum electricarum ad laeves ſuperficies adhaeſione.

34. LAminam plumbi planam ac laevem ex ſericeis filis ſuſpendebam, ut *inſulata* undique eſſet. Tum taeniam vitrea electricitate imbutam uno extremo ita prehenſam, ut manus ipſam ſuſtentans a plumbo diſſita eſſet, ad planam plumbi ſuperficiem admovebam; ſegniter attrahebatur. Si interim ad plumbum digitum ferrem, hunc inter & plumbum proſiliebat ſcintilla, & multo alacrius eo momento taenia ad plumbum ferebatur, eique firmiter adhaerens toto pondere ſuo facile ſuſtentabatur. Pergebat deinde taenia ad plumbum adhaerere (*a*); at quantumvis juncta relinquaerentur, nec plumbum, nec adhaerens taenia ulla amplius electrica ſigna dabant. Si taenia a plumbo removeretur, nova plumbum inter, & admotum digitum ſcintilla emicabat, & taenia ut prius electricam ſe praebebat.

35. Si loco taeniae vitream electricitatem habentis, taenia adhiberetur reſinoſa electricitate imbuta, eadem omnino obſervabantur.

(*&*) Quae Cl. *Nolletii* ſuſpicio eſt in *Symmer.* p. 19.

(*a*) Conſtantem hanc ſerici electrici ad laeves ſuperficies adhaeſionem Cl. *Symmerus* primum obſervavit p. 68. 69. Confirmavit Cl. *Nolletius*, licet eius explicatio adhaeſioni taeniarum ad leves coërcentium ſuperficies tantummodo conſentanea ſit. Ib. pag. 80. 81.

36. Si taenia electricitate sive vitrea, sive resinosa imbuta ad plumbi laminam, ut prius (34) aptetur, nec scintilla ulla ex plumbo eliciatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam repellit, imbutam electricitate opposita attrahit. Si scintilla primum ex plumbo eliciatur, attrahit utramque. Si, postquam scintilla ex plumbo excussa est, prior taenia revellatur, plumbum taeniam aliam cognomine electricitate imbutam attrahit, imbutam opposita repellit.

37. Igitur plumbum, cui electrica taenia adplicita est, ejusdem generis electricitatem emittit, qua cognomine electricitate imbutam taeniam repellit: ubi ea electricitas ab admoto digito recepta fuerit scintillae specie, jam plumbum instar corporis se habet nullam electricitatem habentis, & taeniam utramvis indiscriminatim attrahit. Demum si revellatur taenia, jam plumbum aptum fit electricitati, quam emisit, recipiendae, & propterea ipsi taeniae contrariam electricitatem ostendit, & admoto digito, novam scintillam edit.

38. Similiter taenia, quamdiu ejusdem generis electricitas ex plumbo hausta non sit per admotum digitum, signa electrica edit: postquam scintilla ex plumbo educta est, instar non electricae se habet; si a plumbo dimoveatur iterum suam electricitatem ostendit.

39. Patet itaque taeniam electricam planae faciei plumbi admotam, niti ut contrariam, & aequalem in plumbum electricitatem inducat; postquam admoto ad plumbum digito talem in ipso electricitatem excitavit, plumbum, & taeniam aequaliter, sed contrario modo electrica, firmiter invicem adhaerere, & nullam jam in exteriora corpora electricam vim exerere: demum si dimoveantur sibi mutuo contrarias, & aequales electricitates ostendere.

40. Et haec quidem stellulae & pennicilli observatione confirmantur. Etenim si dum taeniam electricam planae

faciei

faciei plumbi admoves (34. 35.), acuminatum metallum oppositae plumbi faciei obvertas, stellulam ad ejus apicem emicare videbis, si taeniae electricitas vitrea sit, pennicillum, si resinosa: mox utrumvis evanescet, nec ullam amplius electricitatem ad eum apicem observabis, quantumvis taeniam plumbo adhaerentem relinquas. Hanc demum si revellas, & removeas a plumbo, apex iterum electrica signa, sed contraria dabit; nempe pennicillum, si revulsae teniae electricitas vitrea fuerit, stellulam si fuerit resinosa. Si acuminatum metallum non plumbo obversum, sed ipsi adnexum fuerit, eadem omnia, sed contrario, ut consentaneum est, ordine apparebunt (*b*).

41. Igitur ut taenia electrica non electricae applicita, contrariam, & aequalem in hanc electricitatem inducit (12, 13.), sic etiam inducit in plumbum, si eidem applicita sit (39). Totum discrimen in eo positum est, quod in taeniam vapori electrico difficilius penetrabilem contraria electricitas alici non possit, nisi eidem acuminatum metallum obvertatur (15); in plumbum, quod deferens est, & acuminato metallo, & cujuscumque figurae deferente corpore admoto, facile aliciatur. Rursus quemadmodum, postquam taenia electrica oppositam, & aequalem electricitatem in adplicitam taeniam non electricam induxit, utraque atmosphaera caret (8), sic etiam postquam taenia electrica aequalem, & contrariam in plumbum electricitatem induxit, nec jam ipsa, nec plumbum ulla oppositarum electricitatum signa praebent, quamdiu juncta relinquuntur, eas ostensura, ubi primum a se invicem fuerint dimota (39).

42. Ex quibus jam intelligitur, cur si duae taeniae opposito modo, & aequaliter electricae (8) ad planam plumbi faciem successive admoveantur, ex cujusque admotione

(*b*) Confer de his signis electricis Cl. *Beccaria elettricis artific.* §. 200. & seq.

tione plumbum inter, & digitum ſcintilla exiſtat, quae iterum exiſtat ex cujuſque dimotione, ſi ſucceſſive dimoveantur: contra ſi ſimul vel admoveantur, vel dimoveantur, ſcintilla nulla ſit. Cur ſi taeniae electricae ad plumbum haerenti, taeniam oppoſito modo, & aequaliter electricam (8) admoveas; illa huic adhaereat, a plumbo ſecedens (c) & interim plumbum inter, & digitum ſcintilla exiliat: nimirum dum taeniae oppoſitas, & aequales electricitates habentes in ſe invicem agunt, agere deſinunt in ambientia corpora (§. cit.), hinc plumbum ab actione teniae ipſi primum applicitae jam liberum, aptum ſit, ut electricitatem per hanc inductam amittat, ac ſcintillam edat. Demum intelligitur ex his, cur duae, aut plures teniae eamdem electricitatem habentes, atque adeo ſeſe repellentes ſucceſſive laminae plumbeae applicitae, ſucceſſive hanc inter & admotum digitum totidem ſcintillas excitent, & interim aliae ſuper alias ad plumbum adhaereant, ſi ſingillatim dimoveantur, totidem ſcintillas iterum excitaturae.

43. Quoniam vero electricitas in plumbum inducitur oppoſita, & aequalis electricitati adplicitae teniae (39), patet in eo ſaltem experimento deferentia corpora tantum vaporis electrici recipere, aut emittere poſſe, quantum continent coërcentia; propterea minus tutum ratiocinium eſſe, quo ex coërcentium onere concluditur, longe majorem in coërcentibus, quam in deferentibus corporibus ipſius copiam contineri (*d*).

44. Imo experimentum habeo, ex quo directe confici videtur aequalem in utriuſque claſſis corporibus vaporis electrici quantitatem contineri. Nempe glaciem intra vas metallicum ex ſericis filis ſuſpenſum aeſtivo tempore immiſi, tum leviſſima deferentia corpora circa vas conſtitui, quae

a qua-

(*c*) Id. etiam a Cl. *Symmero* notatum p. 69.
(*d*) *Franklin* Tom. I. pag. 186. 187. & 196. & 202. verſ. gallicae.

a quavis, vel minima in vase orta electricitate commoveri possent. Glacies tota in aquam liquata est, quin ulla in illis corpusculis commotio observata sit. Jam vero aqua, ut notum est, succussionem desert, & pro armatura interna phialae succutientis inservit, glaciei frustum ipsam deferre similiter non potest (*e*), adeoque haec coërcentibus vaporem electricum, illa deferentibus est annumeranda (*f*); quapropter si coërcentia corpora majorem quam deferentia electrici ignis copiam continerent, glacies, quae liquescendo ex coërcente deferens fit, excessivum ignem emittere deberet in vas metallicum, quo includitur, tantamque ejus copiam dumtaxat retinere, quantam deferentis corporis, in quod liquescendo abit, natura postularet. Quum igitur nil simile observetur, maxime probabile fit, parem in utroque corpore, glacie scilicet, & aqua, parem adeo in coërcentibus, ac deferentibus corporibus ignis electrici quantitatem inesse (*g*).

45. Si taeniam electricam non planae plumbi *insulati* faciei (34), sed ejus marginibus in aciem sectis, angulisve admoverem, attrahebatur primum, sed mox repellebatur. Tunc, admoto ad plumbum digito, scintillam excutiebam, & rursus taeniae attractio habebatur, mox, remoto digito, in repulsionem abitura; sicque alterne admoto, remotoque digito, alterne attrahebatur, ac repellebatur taenia, donec omnis ipsius electricitas extincta esset.

46. Inde liquet, in hoc experimento ex taenia in plumbum ejusdem generis electricitatem diffundi, quae dum diffunditur attractionem efficiat, mox vero diffusa repulsionem pariat: tunc si, admoto digito, plumbi electricitas extinguatur, iterum residuam taeniae electricitatem in plum-

(*e*) Ib. p. 190. 191.

(*f*) Uti concludit idem *Franklinus* p. 40. in adnotatione.

(*g*) Similiter ceram fusam, & resinam deferentia esse ex *Wilsono* tradit *Franklinus* (loc. ult. cit.) & tamen resinas fusas sola frigefactione, electricas non fieri, sed affrictu incaute admisso accuratissimis experimentis Cl. *Beccaria* demonstravit, l. c. §. 468. & seq.

plumbum diffundi, quae dum fluit, novam efficiat attractionem, dein ubi, sublato digito, rursus in plumbo accumulata fuerit, denuo repulsionem producat, sicque alterne, donec omnis taeniae electricitas fuerit exhausta.

47. Si istud experimentum (45) cum superiore (34) conferatur, patet in illo taeniam electricam oppositam, & aequalem electricitatem in plumbum inducere (41); in hoc ejusdem generis (46); hinc in priori casu constantem taeniae, & plumbi attractionem haberi, in altero attractionem mox in repulsionem abire. Ejus vero discriminis rationem in eo totam positam esse constat, quod taenia illic planae plumbi faciei, hic ejus angulis admoveatur: scilicet dum planae faciei plumbi admovetur taenia, cum aegre ejus electricitas, ob naturam coërcentem, ipsam deserere possit, & in plumbum se diffundere, reliquum est ut contrariam, & aequalem electricitatem in hoc ex admoto digito aliciat, cum qua possit aequilibrari (41); contra cum plumbi angulis admovetur taenia, horum vi ejus electricitas facilius exsugitur, idemque contingit, ac si taenia magis deferens esset (15); hinc plumbum ejusdem generis electricitatem acquirit, eaedemque taeniam inter, & plumbum motuum leges obtinent, quae in deferentium corporum motibus observantur (g*).

48. Hæc

(g*) Similiter Cl. *Aepinus* tubum ex frictione electricum, in quadam distantia, ut electricitas communicari posset, vitream electricitatem, qualem possidebat, de more in aeneam laminam objectam emisisse observavit. Cum eorum distantia tanta evasisset, ut per interjectum resistentem aërem electricitas diffundi non posset, ac propagari, tubum contrariam, seu resinosam electricitatem in eam laminam ex corporibus ipsi vicinis alicuisse (Vid. Nov. Com Ac. *Petrop.* Tom. VII.). Et his porro similia jam proposuerat Cl. *Cantonus* (Vid. Auct. exper. adjecta edit. paris. oper. *Frankl.* II. a pag. 289. ad 293.) Propterea electricitas, sive interpositione coërcentium intercepta, ut in experimentis *Aepini*, & *Cantoni*, sive eorum poris implicita, ut in nostris, adeout in circumposita, aut applicita deferentia propagari non possit, contrariam electricitatem in ipsa ex vicinis aliis deferentibus accersit, ac congerit.

48. Hac adnotata distinctione (47) facile est respondere quaestioni, quam CL. NOLLETIUS proponit: cur nempe folia metallica a tubo vitreo, resinisve electricis, plerumque alterne attrahantur, & repellantur; alias tamen attrahantur dumtaxat, & pertinacissime ad ipsorum superficiem adhaereant (*h*), nempe quoties electricitas a corpore electrico aegre extricatur (*i*), quae folia acutos margines, angulosve ad id corpus convertunt ea omnino sunt in adjunctis §. 45., propterea alterne attrahi, ac repelli debent; quae vero plana superficie ad ipsum conversa sunt, vel angulum ad oppositas partes obvertunt, quae res vicem suppleat digiti tangentis (*), vel manu ad electricum corpus aptantur, in casum incurrunt § 34, proindeque iisdem legibus obnoxia sunt, & constanter adhaerescunt.

49. Cum taenia electrica taeniae non electricae contrariam electricitatem conciliabat, inde non multum debilitabatur, ita ut aliis, & aliis taeniis oppositam electricitatem successive impertiri posset (12. 13.). Similiter taenia electrica a plumbo dimota, cui contrariam, & aequalem electricitatem conciliavit (34) propriam electricitatem fere integram servasse deprehenditur. Hinc est, ut eadem taenia electrica aliis, aliisque plumbeis laminis contrariam, & aequalem electricitatem successive etiam tribuere possit, vel, quod idem est, si electricitas in plumbum inducta, admoto digito, scintillae specie educatur, rursus nova, & ejusdem naturae ab adplicita taenia in id induci queat, sicque repetito, donec taenia electricitatem aliquam servaverit. Igitur in quovis taeniae electricae ad

g pla-

(*h*) In *Symmerum* p. 56. & Mem. de l' Acad. pag. 254.
(*i*) Quando nam aegre extricetur infra constabit
(*) Monuerat jam Cl. *Nolletius*, quod si folia metallica aut alia levia corpuscula in tubum *mediocriter* electricum demittantur, *Vous observerez très-souvent, qu' une partie de ces corps paroit comme collèe au corps élèctrique, pendant que l' autre paroit soulevée, & comme entrainée.* Essai sur l' electrecité pag. 76.

planam plumbi faciem acceſſu digitus ex plumbo ſcintillam eliciet, in quovis ejuſdem receſſu ſcintillam ſimiliter educet, ſed priori oppoſitam; adeout ſi illa a reſinoſa plumbi electricitate repetenda erat, haec vitreae ipſius electricitati tribuenda ſit: ſcintillae propterea totidem ejuſdem generis ex plumbo elici poterunt, quot vicibus taenia ad plumbum admovetur, ſcintillae iterum totidem ejuſdem generis, ſed priori oppoſiti habebuntur, quot vicibus taenia ab eodem plumbo removetur.

50. Eae quidem ſcintillae paullatim decreſcunt, pro ut taenia paullatim electricitatem ſuam exuit; quandoquidem vero id lente fit, hinc eſt, ut alterna taeniae admotione, & remotione plures hoc pacto ſcintillae haberi poſſint ſatis vehementes, ſi celeriter taenia ad plumbum admoveatur, removeaturque. Et quidem cum externam phialae armaturam manu prehendiſſem, ejuſque unco in qualibet taeniae vitream electricitatem habentis ad planam plumbi faciem admotione, ſcintillam ex plumbo elicuiſſem, dum ſcintillas ab ejus remotione ortas extraneo deferente corpore excutiebam, factum eſt ut quadraginta circiter ſatis validas, parumque decreſcentes ſcintillas obtinerem, quibus phiala onerabatur, & ſuccutiebat, interiore ejus facie vitream, exteriore reſinoſam electricitatem habente. Si eodem modo ſcintillas intra phialam accumularem, quas in quavis taeniae remotione plumbum praebebat, & viciſſim, quas edebat in quavis ejus admotione, extraneo deferente corpore elicerem, phiala etiam onerabatur, & ſuccutiebat; ſed ejus interna facies reſinoſam, externa vitream electricitatem habebat: ſi utraſque ſcintillas, tum quas in taeniae acceſſu, tum quas in ipſius receſſu plumbum praebet, in phialam ſimiliter congererem, nullam inde phiala electricitatem acquirebat, oppoſitis ſcilicet electricitatibus ſeſe invicem deſtruentibus. Demum ſi ſingula haec experimenta taenia reſinoſam electricitatem habente

inſti-

inſtituerem, eadem omnia, ſed inverſo, ut quiſque intelligit, modo eveniebant. Ex quibus illud confirmatur, quod aliis argumentis ſuperius oſtendimus (39. 40.), ſcintillas plumbum inter, & digitum conſpicuas in taeniae admotione, tum in ejuſdem remotione a contraria electricitate ipſius plumbi ortas eſſe.

51. Cl SYMMERUS cruralium electricitatem acuminato ferro hauſtam (45. 47.) in phialam adigebat, ſicque ſucceſſionem habebat, quae porro tanta erat, quanta electricitas cruralium, qua phiala fuerat imbuta (*k*) nos ſcintillas totidem habemus, quarum ſingulae aequales ſunt actuali cruralis electricitati, quot vicibus ad plumbum admovetur, totidem iterum, ſed contrariae naturae, quot vicibus ab eodem removetur, ſicque modum invenimus facilem electricitatem abſque affrictu multiplicandi.

52. Ex hactenus dictis intelligitur ratio phaenomeni ſuperius (7) propoſiti; cur nempe taeniae, quamdiu plano, ſuper quod fricatae ſunt applicitae perſtant nulla electrica ſigna edant, quae ſtatim praebeant, ſi ab eodem dimoveantur. Scilicet reſinoſa electricitas in taeniis praevalens ab aequali quantitate vitreae electricitatis in ſubjecto plano aequilibratur, uti conſtat, ſi prius *inſuletur* planum, quam taeniae removeantur: hinc nullam in exteriora corpora actionem exercet, donec, dimoto plano, aequilibrium non fuerit ſublatum (41).

(*k*) P. 40. 41.

CAPUT IV.

De phaenomenis tubi aëre vacui, aut deferentibus corporibus pleni. De analogia cruralium oppositas electricitates habentium cum onerato vitro. De tenacitate electricitatis in coërcentibus.

53. SI duo vitra plana, nuda, optime exsiccata, alterum alteri superpositum supra corpus deferens laeve ex. gr. supra chartae inauratae folium cum solo communicans similiter ac taeniae (§. 1.) fricentur, inde electrica fiunt, & tum ad se mutuo, tum ad subjectam chartam adhaerescunt: si lamina plumbea haud valde crassa loco chartae inauratae adhibeatur, ipsa etiam vitris adhaerens ab eorum vi electrica toto pondere suo sustentabitur.

54. Quamdiu charta vitris adhaerens perstat, vix ullum praebent electricitatis signum: si removeatur, & vitra juncta serventur, utraque facie vitream electricitatem ostendunt: taeniam enim vitrea electricitate imbutam utraque facie repellunt, imbutam resinosa attrahunt utraque. Si charta vitris iterum aptetur, iterum electrica signa cessant, & ita deinceps, prout charta vitris adplicatur, aut ab eis removetur, ipsorum electricitas aut silet veluti sopita, aut ad exteriora se prodit, donec penitus extincta sit.

55. Si charta, aut plumbum vitris subjectum sericeam taeniam adnexam haberet, per quam a vitris divelli posset, quin tangeretur, atque adeo receptam electricitatem amitteret, ipsum inter, & vitra leve corpus ex serico filo pendulum oscillabat, aliaque omnia habebantur, quae contrariam vitris, atque adeo resinosam illius electricitatem ostenderent.

56. Vi-

56. Vitra vero ipſa contrariam electricitatem praeſeferebant, adeo ut inter ipſa leve corpus ex ſerico filo pendulum oſcillaret ſuperiore vitream, eamque majorem; inferiore reſinoſam electricitatem habente.

57. Conſideranti facile patebit hoc experimentum idem omnino eſſe cum illo, in quo duae taeniae ejuſdem coloris altera ſuper alteram ſupra planum deferens fricatae ſimul ab eodem divellebantur (1): ut enim illic reſinoſa electricitas in ſuperiori taenia, vitrea cum ipſa aequilibrata partim in taenia ſubjecta, partim in ſubſtrato deferente corpore poſita erat (7. 52.), ita hic viciſſim vitrea in ſuperiori vitro, reſinoſa cum illa aequilibrata partim in vitro inferiori partim in ſubjecta armatura reſidet, unde vitrorum electricitas non prius ad exteriora ſe prodit, quam detracta armatura aequilibrium fuerit ſublatum.

Hiſce itaque vitris eadem experimenta exhiberi poſſunt, quae taeniis electricis inſtituta praecedenti capite expoſita ſunt.

58. Quod ſi, detracta priori laevi armatura (53) fricata vitra per breve tempus hirſuto deferenti corpori imponantur, aut ſi ſupra id corpus fricentur, ab eo dimota vix ullam in ambientia corpora electricam vim exercent: cohaerent tamen inter ſe, & ab invicem dimota acquiſitas oppoſitas, & quidem aequales electricitates oſtendunt, quae iterum ſilent vitris ad contactum reſtitutis, & ita deinceps donec omnis ipſorum electricitas extincta ſit. Et haec quidem iis iterum ſunt ſimilia, quae de taeniis in ſimilibus adjunctis expoſita ſunt (8. 10.)

59. Jam vero patet experimentum noſtrum (53) idem omnino eſſe cum hauksbejano (*), in quo globus, aut tubus vitreus aere vacua, aut deferentibus corporibus referta

(*) Experim. phyſ. mech. tom. I. p. 277., & ſeq. vid. etiam ſimilia *Du Fay* experimenta a Cl. *Demareſt* huc allata p. 299. & ſeq.

ferta confricantur, quando, ut notum eſt, nulla, aut perexigua habentur electricitatis ſigna, quae tamen abſque nova frictione ſe produnt, ſi aut aer admittatur (*l*), aut deferentia corpora educantur. Quare hic etiam dicendum erit electricitatem ita diſpoſitam eſſe, ut vitrea quidem electricitas ad exteriorem vitri ſuperficiem, reſinoſa autem priori aequalis partim in interna vitri facie, partim in armatura adnexa reſideat, aut in vacuo armaturae vices gerente (57.); hinc quamdiu oppoſitae illae electricitates aequales ſunt, & aequilibratae, exteriora ſigna earumdem nulla haberi; ſublata vero armatura, ſicque reſinoſa electricitate diminuta, jam praepollentem vitream electricitatem ſe oſtendere (*m*).

60. Illud vero etiam ex noſtris experimentis deducitur, ut experimentum hauksbejanum ad votum ſuccedat, corpora deferentia, quibus tubus repletur talia eſſe debere, ut internae illius ſuperficiei aptari poſſint, & uniformem armaturam eidem praeſtare; ſecus enim ſi ſcabra, anguloſa, hirſuta, jam tota, aut fere tota reſinoſa electricitas in internam vitri faciem inducetur, unde licet ea corpora poſt vitri frictionem detrahantur, oppoſitae electricitates in aequilibrio eſſe pergent, nullamque adeo, aut perexiguam in ambientia corpora vim exercebunt (58).

61. Si porro vitra deſcripto modo electrica facta (53.58.), utrimque armentur ex oppoſitarum armaturarum contactu ſuccuſſio nulla habebitur; imo & taeniae (7), & vitra, quamvis corpore deferente levi, ut charta inaurata ad aliquot minuta temporis undique obvoluta ſerventur cohaere-
re

(*l*) *Otto de Guerike* apud *Cl. Dalibar.* in hiſtor. elect. Franklin. epiſt. praefixa p. XVI.

(*m*) Apparet igitur quam recte Cl. Nolletius comparaverit latentem electricitatem cruralium ſibi mutuo applicitorum cum latente electricitate tubi deferentibus corporibus pleni, quoniam illa cruralium ſeparatione, haec deferentium corporum detractione manifeſta ſit. In *Sym. ver.* p. 51.

re pergent, & detecta, ac sejuncta nondum oppositas electricitates amisisse observantur, quum consuetum onus ex oppositarum armaturarum communicatione temporis momento fuissent amissura.

62. Experimentum instituebam a FRANKLINO propositum, nempe bina vitra plana optime exsiccata, alterum alteri superpositum, ut instar unius essent, ad inferiorem faciem deferenti lamina tegebam; ita tamen ut armatura haec cum solo neutiquam communicaret, sed perstaret *insulata*, quamdiu opposita superior junctorum vitrorum facies fricaretur. Dein superiorem hanc faciem alterne fricabam, alterne ad subjectam armaturam admoto digito scintillam ciebam: inde vitra, ut prius (53), tum inter se, tum ad subjectam armaturam adhaerescebant, & quemadmodum FRANKLINUS docet (*n*), onerabantur; ita ut, imposita superiori faciei, quae fricata fuerat, armatura, ex hujus, & inferioris armaturae simultaneo contactu succussio haberetur.

63. Verum quod singulare videri potest, postquam vitra, facta oppositarum armaturarum communicatione, succussissent, adhuc tamen cohaerebant, & quamvis juncta electricas vires in exteriora corpora non exercerent, ab invicem tamen dimota oppositas electricitates ostendebant, taliaque, uno verbo, erant, qualia statim post frictum fuerant in superiori experimento (58.). Duplicem adeo in hoc experimento electricitatem adquirebant, alteram qua succuterent, & quae succutiendo extingueretur, alteram quam diutius servarent. Illam franklinianam, hanc symmerianam brevitatis caussa deinceps appellabimus.

64. Porro si, vitris illis (62), quibus oppositae electricitates inhaerent ab invicem dimotis, eorum armaturae tangantur scintilla ex utraque habebitur, & jam succutiendo inepta fient. Iis enim ad contactum restitutis, facta licet oppo-

(*n*) Tom. I. p. 217. 218.

oppositarum armaturarum communicatione nulla obtinebitur. Parum tamen ex eo armaturarum contactu symmeriana eorum electricitas infirmabitur; adhuc enim se mutuo attrahere pergent, & leve corpus ex serico filo inter ipsa pendulum in oscillationes adigere, eodem prorsus modo, quo in superiori experimento (63.) evenire diximus.

65. Igitur electricitas, quae succutit, similis est plumbi electricitati, quae solo contactu disperditur, quum primum taenia oppositam electricitatem habens ab ipso dimovetur (37.), cum contra symmeriana vitrorum, aut taeniarum electricitas hujusmodi sit, ut semota vitra, aut taeniae oppositas electricitates habentia jam quidem atmosphaeras electricas ostendant, quibus antea caruerant, sed easdem nonnisi lente, ac temporis progressu ex deferentium contactu amittant (38. 63. 64.)

66. Utraque igitur electricitas, sublata oppositae electricitatis propinquitate, nititur quidem, ut prodeat e corporibus, quibus insidet, sed electricitas, quae succutit, uti ea, quae plumbo inest, in objectum deferens corpus statim diffunditur, symmeriana nonnisi lente.

67. Iterum si symmeriana electricitas satis promte prodire posset, facta oppositarum facierum communicatione, succuteret, similiter ac frankliniana, & temporis momento extingueretur: quum vero contrarium contingat (61.63.), confirmatur eandem a corporibus, quibus insidet, irretitam difficilius, tardiusque se se expedire.

68. Revera si vitra, aut teniae symmeriana electricitate imbutae hirsuto deferente corpore undique obvolvantur multo citius eam electricitatem amittunt, quam cum laevi deferente quaquaversum tegerentur (61). Cujus quidem discriminis ratio, ut alibi innuimus, (15) in eo tota consistit, quod pili hirsutae superficiei faciliorem reddant electrici fluidi fluxum per coërcentia, quibus obvertuntur.

69.

69. Qui vero consideret, quam difficile coërcentia electricitatem suscipiant, susceptamve dimittant, qui noverit, quam tarde aër electricitatem hauriat, haustamve disperdat (*o*), is facile intelliget symmerianam electricitatem aëreae similem esse, porisque coërentium altius intricatam, franklinianam deferentium electricitati assimilari, & vel deferentibus insidere, vel nonnisi superficie tenus in coërentibus positam, ac liberam esse.

70. Ex his constat tenacitatem electricitatis serico haud esse propriam, sed coërentibus quibusvis corporibus communem (*p*): constat deinde oppositas succutientes electricitates dimidiam hinc inde vitri crassitiem neutiquam occupare, multo minus per vitrum ex una in alteram superficiem trasmitti: constat demum tenacitatem electricitatis ex sola difficultate, qua per poros coërcentium electricum fluidum movetur, deducendam esse.

71. Facile autem est intelligere, cur vitrum, cujus una superficies fricatur, dum oppositæ faciei armatura cum solo constanter communicat, succutere nunquam possit, nec sericum, nec corpus aliud quodcumque similiter confricatum; nam ut FRANKLINUS advertit (*q*) contrariae electricitates, quae ad oppositas vitri superficies liberae adhuc sunt, ex simultanea communicatione cum corporibus deferentibus hinc per manum fricantem, inde per armaturam, qua proportione congeruntur, dissipari debent, nec unquam propterea vitrum succutiendo aptum fiet. At contra cum earum electricitatum pars, quae altius in vitri poros penetravit aegre inde iterum emergat, & sola oppositarum

h facie-

(*o*) Vid. *Cl. Cantonum* l. c. p. 294., & cl. *Beccaria lettera* VII., ubi de hac aeris electricitate multa nova, & pulcherrima theoremata per experimenta demonstrantur.

(*p*) Cum talci laminam non secus ac vitra symmeriana electricitate imbuissem, ipsam parieti adhaesisse observavi, & ultra horam in ea adhaesione perseverasse.

(*q*) Loco ult. cit.

facierum communicatione cum deferentibus promte disperdi nequeat (61); hinc novam, & novam continuata frictione adigi posse liquet, quae memoratis hactenus signis se prodat.

72. Inde est ut sericum, etiam deferente lamina interceptum, ex ejus frictione symmerianam electricitatem acquirat (3. 20. 32.) in eo *tourmaline* lapidi quodammodo simile, quem ex medii deferentis, in quod immergitur, calore electricum fieri observarunt (*r*).

73. Ex hactenus dictis erui posse videtur I. electricitate alterutra, vitrea scilicet, aut resinosa in unam vitrorum, aut aliorum coërcentium faciem irruente, contrariam electricitatem ad oppositam faciem, si via detur, aequa quantitate accurrere. II. Eas electricitates in se invicem tendere, hinc coërcentium laminas, quibus incumbunt junctas servare. III. Dum ad se mutuo tendunt, neutiquam niti ut ad exteriora diffundantur, hinc ex neutra parte atmosphaeram efformare. IV. Interea tarde ac difficulter in interjectae coërcentis laminae crassitiem penetrare. V. Si via facilior ac commodior detur, per quam misceri possint, facta nimirum per deferentia corpora oppositarum facierum communicatione, electricitates quae ipsis liberae adhuc insistunt, eam viam legere, & sibi mutuo occurrentes se invicem destruere. VI. Eas vero, quae altius in poros coërcentis laminae penetrarunt, niti quidem ut eandem viam teneant, sed cum aegrius inde exsolvi possint, multo tardius id fieri, nisi, acuminatis deferentibus corporibus utrimque admotis, earum exitus adjuvetur (68). VII. Cum eae oppositae electricitates ad se invicem tendant, hinc fieri, ut si via alteri tantum detur, admoto deferente, dum opposita undique coërcetur, ne illa quidam prodeat hujus actio-

(*r*) Histoire de l'Acad. de Berlin tom. XII. p. 105., & seq.

actione retenta (*f*). VIII. Quotiescumque laminae, quibus oppositae electricitates inhaerent, sejunguntur, jam utrasque atmosphaeras electricas acquirere. IX. Et tunc quidem electricitates, quae liberae adhuc ad illarum superficiem sunt ex deferentium contactu momento dissipari (64). X. Eas vero, quae altius in ipsarum poros penetrarunt, multo tardius, nisi, acuminato deferente corpore objecto, ad exitum adjuventur (cap. III.)

CAPUT V.

De armaturarum officio in onere vitrorum, aliorumque coërcentium.

74. NOtum est FRANKLINI mirabile experimentum, in quo, vapore electrico per globi rotationem ab una ad alteram vitri armaturam deducto, vitrum onerat absque ullius extraneae electricitatis praesidio (*t*), tum aliud, in quo vitrum onustum, atque *insulatum* ope arcus deferentis item *insulati* deonerat, quin post deonerationem ullum in arcu deferente, aut in corporibus cum ipso communicantibus electricitatis vestigium supersit (*u*). Quibus quidem in experimentis, cum oneretur vitrum, nulla extranea adscita electricitate, deoneretur iterum, quin quidpiam susceptae electricitatis dimittat, inde VIR illustris concludit maximam electrici vaporis copiam in vitro delitescere (*v*), quae ex una in alteram ipsius superficiem deducta vitrum oneret, aequabiliter iterum distributa nativam ipsius habitudinem restituat.

(*f*) Ne acutissimo quidem obverso stilo cruralia electricitate exui potuerunt, quandiu juncta perstabant. *Symmer.* pag. 36. 37.

(*t*) Tom. I. p. 101. 102.

(*u*) Ib. p. 68. 69., & 115. 116.

(*v*) Ib. p. 9. 186. 196., 202. & alibi passim.

75. Enim vero vaporem, quo ex una in alteram armaturam deducto oneratur vitrum, non ex illa prodire, nec in hanc congeri censet VIR summus, sed a subjecta vitri superficie per armaturam alteram erumpere, ut per alteram in oppositam vitri superficiem immittatur. Nam, mutatis quantumvis onerati vitri armaturis, successionem haud minus haberi observat (x), & praeterea adnotat (y), dum deoneratur vitrum, iis ex locis, quibus arcus deferentis extremitates admoventur, ab emicante igne armaturae portionem disjici, & interpositum gluten comburi; ex quo confirmari contendit electricitatem, quae succutit, in armaturis neutiquam residere, sed sub ipsis positam in suo trajectu earum portionem abripere.

76. Quae quamquam maximam veri speciem praeseferant, experimenta tamen nonnulla afferam, quae suadere videntur electricitates, quibus vitra onerantur, in armaturis praesertim residere (z), ex iis in extimas vitri superficies, seu in exteriora ipsius strata deponi, quando armaturae divelluntur: idque non alio consilio, nisi ut acutiores excitem ad eandem rem accuratius pervestigandam.

77. Taenias plures sericas ejusdem coloris, quinque ad exemplum, aut sex, optime exsiccatas, alias aliis superpositas supra laminam deferentem laevem regula ex ebore fricabam, ea cautione, ne in eo affrictu taeniae, vel ab invicem separarentur, vel adversus subjectum deferens corpus attererentur. Postquam fricatae fuerant, si singulas seorsim, a suprema incipiendo, & ex ordine divellerem, in uniuscujusque divulsione inter taenias scintillae apparebant illis praecise in punctis, quae ab invicem separabantur:

(x) L. c. p. 140. & seq.
(y) L. c. p. 184. 185.
(z) Vim succutiendi in armaturis posuerat *Watsonus suite* p. 240. objectiones etiam contra doctrinam franklinianam proposuit, quibus tamen Franklinus ipse respondet tom. I. p. 164. & seq.

tur: eae ſcintillae ſimiliter exiliebant in infimae taeniae ſeparatione a ſubſtrata deferente lamina. Taeniae autem hoc modo divulſae omnes reſinoſam electricitatem praeſeferebant.

78. Si poſtquam taeniae fricatae fuiſſent (77.), omnes ſimul a ſubjecto plano divellerentur, in unum faſciculum cohaerebant, qui praevalentis reſinoſae electricitatis ex utraque facie ſigna exhibebat. Tunc ſi facies, quae laminae laevi deferenti applicita fuerat ad hirſutam ſuperficiem admoveretur, ut electricitates oppoſitae ad aequilibrium redigerentur (58), dein ab infima taenia incipiendo, ſingularum iterum, ſed inverſo ordine ſeparatio fieret, iterum ſcintillae, ut prius, apparebant, ſed taeniae omnes electricitatem habebant vitream, atque adeo priori oppoſitam, ſuprema excepta, quae reſinoſam electricitatem ex affrictu acquiſitam ſervaverat.

79. Hinc eſt ut ſi taenias eas alias aliis ſuperpoſitas ſupra hirſutum corpus fricarem, dein omnes ſimul ab eo divellerem, ut faſciculum haberem, in quo oppoſitarum facierum electricitates aequilibratae eſſent (58) intermediae taeniae omnes, vel ſupremae congenerem electricitatem acquirerent, vel infimae, pro ut a ſuprema incipiendo, & progrediendo verſus infimam, vel contra ab infima ad ſupremum procedendo ex ordine revellebantur.

80. Porro ſi binae earum taeniarum ſimul revellantur (77. 78. 79.) ſibi mutuo adhaerent, & ſimul junctae eandem electricitatem habent, quam una tantum revulſa habitura eſſet, ſed ſi ſeparentur, obſervabitur eam electricitatem in ipſarum extima reſidere, intima, per quam faſciculo adhaerebant oppoſitam, ſed multo minorem electricitatem habente.

81. Ex quibus conjectare licet, per affrictum (77.) ſupremam taeniam electricitate imbui, caeteras, aut nullam, aut perexiguam recipere: oppoſitam vero, & aequalem

lem electricitatem in subjectam deferentem laminam congeri, quae cum supremae taeniae electricitate aequilibrium constituat, impediatque quominus suprema taenia ulla exteriora edat electricitatis signa. Si taeniae, a suprema incipiendo singillatim, & ex ordine divellantur, supremae electricitatem in subjectam deponi scintillarum specie, ex hac in tertiam, & ita deinceps, donec in infimam deponatur, propterea taenias omnes supremae cognominem electricitatem adipisci.

82. Si taeniae omnes simul a plano deferente divellantur (78), verosimile est electricitatem in eo congestam, & cum supremae taeniae electricitate aequilibratam in infimae superficiem, quae ab ipso divellitur, ex parte deponi scintillarum specie, hinc taenias in unum fasciculum junctas retineri: praevalere tamen in eodem supremae taeniae electricitatem, quod subjectae deferentis laminae electricitas cum ea aequilibrata, tota in infimam taeniam permeare non potuerit: quod si jam ea infima taenia hirsuto corpori obvertatur, ex quo majori vi in ipsam electricitas immittitur (15), tantam recipiet, ut cum supremae contraria electricitate aequilibretur, & tunc porro, si ab hac incipiendo singulae taeniae ex ordine divellantur, fiet, ut ejusdem electricitas similiter scintillarum specie ex una in alteram diffundatur, sicque taeniae omnes intermediae ipsi congenerem; atque adeo supremae contrariam electricitatem obtineant.

83. Quando porro binae earum taeniarum simul revellantur (80) earum extima comperitur habere electricitatem quam ex frictu, aut ex divulsa superincumbente taenia acquisivit, intima contrariam ab opposita extima taenia propagatam, sed multo minorem, tantam nimirum, quanta per interpositas adhuc taenias alias propagari potuit.

84. Cum vero electricitas in hac taeniarum separatione ab extremarum taeniarum alterutra (81. 82.), vel potius

utra-

utraque (83.) in intermedias diffundatur ſcintillarum ſpecie, hinc eſt ut ubi ſemel taeniae faſciculum componentes ſeparatae ſunt, quantumvis in faſciculum iterum ordinentur nullae amplius in earum ſeparatione ſcintillae conſpiciantur; nam, electricitate in eum modum ex taenia in taeniam jam propagata, ratio ceſſat, ob quam in nova earum ſeparatione ſcintillae fuiſſent appariturae.

85. Intelligitur etiam ex his, cur binae taeniae, ubi ſemel ſeorſim divulſae a ſubjecto plano, aut a proximis taeniis ſe ſe repellunt, vel ex ſimultanea ſeparatione ſe ſe attrahunt, quantumvis ad eas taenias, aut ad planum iterum admoveantur, ſive ſeorſim, ſive ſimul divulſae, ut antea ſe attrahere, aut repellere pergant. Nimirum electricitate imbuuntur taeniae in prima ea ſeparatione: ubi ſemel eadem imbutae ſunt fruſtra ad planum deferens, aut ad caeteras taenias iterum admoventur. Ex quibus porro jam ratio patet phaenomenorum plerorumque in capite primo expoſitorum (ab 1. ad 10.)

86. Similiter vero taenias alias aliis ſuperpoſitas laminae metallicae adplicabam, quae electricitatem ex globo recipiebat, dum interim ad oppoſitam taeniarum faciem acuminatum metallum obvertebam, & per ipſius longitudinem promovebam; dein cum ceſſante globi actione taenias explorarem, eadem omnino eveniebant, ac in ſuperioribus experimentis: nempe pro vario ordine, quo revellebantur taeniae, vel omnes metallicae laminae contraria electricitate imbui poterant, vel eadem, prima excepta, cui apex obverſus fuerat, quae ab eodem receptam electricitatem laminae contrariam conſtanter ſervabat.

87. Quemadmodum igitur ab extimis taeniis in ſubjectas electricitas propagatur, aut a ſubjecto plano in proximam taeniam, quando a ſe mutuo ſeparantur, ſic ab armaturis in vitri ſuperficies deponi in ipſarum ſeparatione eorum phaenomenorum affinitas maxima, vel potius identitas ſuadere videtur.

88. Revera cum vitrum optime exſiccatum laminis plumbeis armaſſem, quae eidem tantum adplicitae, nequaquam vero adglutinatae erant, vitro de more onerato, armaturas firmiſſime ipſi adhaeſiſſe obſervavi, a quo cum poſtea divellerentur, lux pariter & ſcintillae in locis apparuerunt, ubi ab invicem ſeparabantur.

89. Cum vero plura ſericeae telae (*a*) folia alia aliis ſuperpoſita ſimiliter armaſſem, & oneraſſem (onus autem exiguum recipere poterant, quod, ubi paullo major electricitas congeſta fuiſſet, per ſerici craſſitiem ex una in alteram ſuperficiem exiliebat, unde deonerabantur), firmiter etiam armaturae ad ſerici ſuperficiem adhaeſerunt; ſed cum earum alteram, ſuſpenſa quamvis manu, divellere tentarem, nunquam id perficere potui, quin interim ſcintilla a punctorum aliquo, unde divulſio fiebat per ſerici craſſitiem ad oppoſitam armaturam exiliret, unde & deonerabatur ſericum, & oppoſita armatura proprio pondere ſecedens decidebat.

90. Quare veroſimile eſt electricitates oppoſitas in oppoſitis armaturis praeſertim locatas, eas eſſe, quae ipſarum ad vitrum, aut ſericum adhaeſionem efficiant, quaeque, dum armaturae divelluntur, in vitri ſuperficies irruentes ſcintillas exhibeant (88), in ea divulſione conſpiciendas. Cum maximo impetu ex armaturis, dum divelluntur, in proximam coërcentem ſuperficiem irruant, hinc factum eſſe, ut armatura altera divelli a ſerico non poſſet, quin electricitas ab ipſa in ejus ſuperficiem irruens ad oppoſitam armaturam perveniret (89).

91. Neque tamen electricitatem totam ab armaturis in armati coërcentis corporis ſuperficies deponi, dum divelluntur, ſed partem eius coërcentis reſtitentia reprimi (vid. cap. praec.) experimenta iterum inſinuare videntur: etſi enim,

(*a*) *Du ſatin*.

enim, postquam ab onerato vitro armaturae revulsae fuerunt, oppositae electricitates aequilibratae esse pergant; id ex eo fit, quod aequa pars electricitatis ab utraque facie repellatur; cum autem vitrorum, aut taeniarum altera superficies electricitatem immediate a fricante corpore reciperet, altera nonnisi a subjecta armatura in eius separatione super ipsam depositam, eveniebat constanter, ut non tota deponeretur; nam electricitates oppositae, quae in aequilibrio erant, quamdiu lamina deferens applicita perstabat, ea dimota, amplius non erant, praevalente nimirum electricitate superficiei fricatae, ex eo, quod deferens lamina oppositae electricitatis partem secum abripuisset (conf. cap. 1. IV.).

92. Eamdem rem experimentis etiam aliis confirmavi. Nam, si vitrum inferiori facie armatum, superiori nuda electricitatem ab acuminato metallo e catena pendulo reciperet, rursus eveniebat, ut oneraretur, & binae oppositae electricitates aequilibrarentur, quamdiu vitro adhaerens armatura eidem adplicita perstabat, ea vero detracta, supremae superficiei electricitas praevaleret. Si superficies superior armata electricitatem reciperet a catena, dum acuminatum metallum ad inferiorem nudam obversum per puncta superiori armaturae respondentia promovebatur, iterum onerabatur vitrum, & oppositae electricitates in aequilibrio erant, rursus armatura adhaerebat, rursusque ea divulsa, apparebat haud totam electricitatem supra vitri superficiem ab ipsa depositam fuisse; nam praevalens inferioris faciei electricitas jam ex utraque vitri facie se ostendebat.

93. Scilicet, ut paucis rem hanc complectamur, in vitris, aliisque coërcentibus praevalet semper oppositarum electricitatum illa, quae in alterutram faciem majori vi adacta est; propterea, si hinc per frictionem, aut per acuminata corpora immitatur, inde per planas superficies, illa

i huic

huic praevalebit: aequilibrabuntur vero quoties, vel utrimque per planas ſuperficies ac laeves, vel per ſtilos aeque acutos utrimque, vel hinc per frictionem, inde per acuminata corpora fuerint immiſſae.

94. Ex quibus iterum veroſimile fit electricitates ſuccutientes in armaturis maxime deferentibus praeſertim reſidere, nec niſi aegre in coërcentium interpoſitorum poros penetrare: partem tamen earum non exiguam in ipſorum coërcentium ſuperficies irruere, dum armaturae divelluntur, ex eo quod eae oppoſitae electricitates tanta vi in ſe invicem tendant, ut a ſe mutuo dimoveri non patiantur. Frictione, aut acuminatis corporibus obverſis facilius per coërcentia ſibi viam facere electriciratem, & per extima ſtrata, quibus haec obvertuntur, non aliter ac per deferentia permeare.

95. Hinc eruitur fieri utique poſſe, ut deferentia parem, ac coërcentia electrici ignis quantitatem contineant (43. 44.): electricitatem tantam in illis congeri non poſſe ac in coërcentibus, quia oppoſitae electricitates ſe mutuo cohibentes in iiſdem conſtitui nequeunt, quin ſtatim permiſceantur: id tantum obtineri interpoſitione coërcentis; indeque fieri, ut etiam ad coërcentium ſuperficies accumulatae oppoſitae electricitates maxima ex parte, vel per reſiſtentem aërem diſperdantur, quando ſeparatis, & dimotis coërcentibus laminis, quibus incumbunt in ſe agere, mutuaque ea actione ſe invicem cohibere deſinunt (*b*).

96.

(*b*) Uti in experimento §. 64. expoſito, tum in ſymmeriano mox §. 97. enarrando, quando dimotis vitris, quibus oppoſitae electricitates inſident per minimum tempus, etſi armaturae nullo deferente corpore tangantur, vis electrica maxima ex parte per reſiſtentem aerem diſſipatur, uti conſtat ex maxima vi, qua in ea divulſione repellitur deferens corpus ſuperiori armaturae impoſitum, ex ſibilo, ex ampla luce, quae tunc temporis in loco tenebricoſo ſupra vitrorum ſuperficies cernitur, hinc eſt, ut ad contactum reſtitutis vitris vel nulla, vel perexigua ſucceſſio habeatur.

96. Ex his iterum intelligi poteſt, cur coërcentia, quotquot hactenus explorata ſunt, indiſcriminatim omnia ad ictum electricum idonea fuerint comperta. Sic *porcellana*, talcum (c) cryſtallus montana (d), reſinae, cera hiſpanica (e), ſericum (89), aër ipſe (f), ſimiliter ac vitrum onerari poſſunt, onerata ſimiliter ſuccutiunt. Scilicet nulla habita ratione denſitatis, elaſticitatis, mollitiei, fluiditatis, peculiariſve indolis eorum corporum, ſufficit, ut interpoſitione ſua contrariarum electricitatum in ſe mutuo tendentium mixtionem impediant, ut oneri ſuſcipiendo apta ſint.

97. Demum ex his commode explicari poteſt elegantiſſimum SYMMERI experimentum, in quo duo vitra ſibi invicem applicita, dein exterius tantum armata inſtar unici vitri onerabantur, & adhaerebant (g), contra vero, ſi utrimque unumquodque ipſorum armatum eſſet, ſuperior cuiuſque ſuperficies vitream, inferior reſinoſam illi aequalem de more recipiebat (h), propter eaque nulla inter ipſa vitra adhaeſio oriebatur (i); enim vero, quando nulla armatura vitris interjicitur, nullum eſt corpus, in quo mobilis electricitas ſit praeter armaturas externas; hinc electricitas in alterutram ipſarum immiſſa contrariam, & aequalem electricitatem nonniſi in oppoſitam armaturam inducere poteſt, conſequenter contrariae, & aequales electricitates ad oppoſitas tantum junctorum vitrorum facies reſidebunt. Quum vero armaturae interjiciuntur, earum mobilis electricitas ſuppetit, quae commoveri poſſit: hinc electricitas vitrea in ſuperiorem armaturam a globo adve-

i 2 niens

(c) *Cl. Beccaria* in epiſt. ad *Cl. Nolletium* §. 472.
Cl. le Roy Encyc. coup. foudroyant.

(d) *Cl. Nollet.* Leçons VI. pag. 477.

(e) *Cl. P. Beccaria lettera* V. §. 148., & ſequent. *Aepinus Hiſtoire de l' Acad. de Berlin.* Tom. cit. p. 119. 120.

(f) *Aepinus* l. c.

(g) *Symmer* p. 113. 114.

(h) Id. p. 119. Franklin tom. I. p. 135. 136.

(i) *Symmer.* ib.

niens intermediarum armaturarum nativam electricitatem ita secedere coget; ut resinosa illi aequalis in proximiorem colligatur, vitrea earumdem in alteram abeunte, unde aequalem resinosae electricitatis quantitatem in armaturam infimam, vitrisque subjectam a solo alicere potest. Quando, instituta inter externas armaturas communicatione, vitra haec simul deonerantur, vitrea, & resinosa interjectarum armaturarum electricitas iterum per easdem aequabiliter distribuitur, sicque ad nativum statum restituuntur. Quod si porro electricus vapor, quo vitra onerantur, ex una vitri in alteram superficiem abiret, in iisque resideret (74), nulla ratio esset, cur, etiam quando nulla armatura vitris interponitur, electricitas vitrea ab interna superioris vitri superficie expelli non deberet, & cum resinosa contiguae superficiei inferioris vitri commutari; cum enim eae superficies totidem punctis sibi invicem respondeant, vel potius se tangant, fluidum electricum nullo vehiculo opus habet, ut ex una in alteram transeat, quod unum officium armaturis fuerat relictum (*k*).

98. Ad argumentum alterum franklinianum quod spectat; armaturae nempe portionem inde excuti, unde ignis electricus emicat (74), videtur utique id non minus a repercussione electrici fluidi fieri posse, quam a directo ipsius transitu per armaturas (*) ex eo praesertim, quod in explosione vitra interdum ipsa diffringantur (*l*), quan-

quam

(*k*) Experimentum hoc symmerianum aliquoties frustra tentatum a Clarissimo *Nolletio* tandem ad votum successit *Mem. de l' Acad.* l. c. p 267. Enimvero, ut propria observatione didici, vel levissimus humor vitris adhaerens efficit, ut non secus onerentur, ac si armatura esset interjecta. Ex quo apparet multo magis ab ipso cavendum esse in hoc & affinibus experimentis hactenus propositis, quam in plerisque aliis electricis, cum humor, qui pro armatura inservire potest illo multo adhuc minor sit, qui impedit, quominus vitra onerari possint.

(*) Vid. *Frank.* tom. I. p. 187.

(*l*) *Idem* tom. I. p. 187.

quam erumpens ignis electricus ipsorum crassitiem neutiquam trajicere debeat.

CAPUT VI.

De contrariarum electricitatum natura.

99. Contrarietatem vitreae, & resinosae electricitatis, quam experimentis memoratis (74), aliisque permultis (*m*) Franklinus demonstraverat, simplicissima, celeberrimaque hypothesi explicavit; alteram nempe contrariarum electricitatum ab excessu electrici fluidi, alteram a defectu nativae ejusdem quantitatis in corporibus proficisci, indeque fieri, ut pari copia permixtae se mutuo destruant. Cujus hypotheseos praestantiam facile perspiciunt quicumque naturae simplicitatem in intricatissimis etiam phaenomenis mirari consueverunt. Haud diffitendum tamen est, alii cuicumque hypothesi locum esse, si ita experimenta postulent, modo illi contrarietati aeque satisfaciat (*n*).

100. Et Symmerius quidem contrarietatem illam novis argumentis confirmavit (*o*), at hypothesim aliam franckliniaane substituendam duxit: nempe binas oppositas electricitates a binis oppositis viribus *utrimque positivis* fieri, ex quarum contrarietate, & pugna phaenomena omnia electrica producantur, quae quidem vires oppositae a duobus fluidis oppositas naturas habentibus originem ducant (*p*).

101. Quanquam vero de duplicis fluidi natura nihil ulterius decernere audeat Vir modestissimus (*q*), manifestum est duo fluida elastica se se invicem attrahentia eius hypothesi

(*m*) Tom. I. a p. 85. ad 93., & alibi passim.
(*n*) Confer. *Cl. Beccaria lettera* II. §. 65.
(*o*) P. 116. 117.
(*p*) Pag. 111., & 119.
(*q*) Pag. 120.

thesi adamussim respondere; nam prius non quiescent, quam aequabiliter fuerint permixta. Haec autem profero, non quod velim Cl. VIRI mentem interpretari in re, de qua ipse consulto noluit aperire, sed tantummodo, ut appareat, quatenus haec hypothesis phaenomenis satisfaciat.

102. Scilicet ea semel admissa haud minus explicantur WATSONI, & FRANKLINI experimenta ad vaporis electrici circulationem spectantia (*r*), & similiter intelligitur, cur vitreae electricitatis subeuntis, & resinosae prodeuntis eadem species sit; & eadem iterum species resinosae subeuntis, ac vitreae prodeuntis tum ad acutorum deferentium apicem (*s*), tum ad mercurii summitatem in communicantibus barometris (*t*), nam ubi alterutrum elementum in quovis corpore praevalebit, in ambientia corpora se se expandet, ex quibus interim par oppositi elementi quantitas in id corpus migrabit, donec aequabiliter utrumque elementum fuerit distributum. Quod, si lamina coërcens inter deferens electricum corpus, & deferens aliud cum solo communicans interjecta sit, tunc a solo in hoc corpus par oppositi elementi quantitas attrahetur quidem, sed coërcentis resistentia impedita, tamdiu ad ipsius superficiem haerebit, quamdiu via praesto sit, per quam contraria ea elementa sibi invicem permisceri queant: unde nullo negotio ea intelliguntur, quae §. 73. allata sunt, & reliqua omnia ad coërcentium electricitatem spectantia; cur ad exemplum contraria elementa ad oppositas vitri facies aequabiliter permixta quiescant, ita secreta, ut vitrea electricitas ad unam faciem confluat, resinosa in alteram abeunte, vitri onus constituant, quod sola aequabili eorum distributione iterum destruatur (74). Pari facilitate ea intelliguntur,

(*r*) Vid. *Franck.* loco ultimo citato.

(*s*) Vid. *Cl. Beccaria elettricismo artificiale* passim, *Francklinum* tom. II. p. 167., & seq.

(*t*) Vid. experimenta *Cl. Wilson*, quae referuntur in *Mem. de l' Acad.* 1762. pag. 155.

liguntur, quae cap. III., & IV. de coërcentium electricitate dicta sunt, quando redundans elementum ita coërcentis poris irretitum est, ut non nisi aegre extricari possit; elementum vero oppositum, quod in ejus locum succedere debet aegre similiter eorum poros pervadit, unde in admotis deferentibus diu moram patitur, nisi ea deferentia ita acuminata sint, ut illi eliciendo, huic vero immittendo sint aptiora.

103. Equidem SYMMERUS hypothesim suam directis experimentis confirmari censet, quod & succussio in utroque brachio aequalis ab onerato vitro habeatur (*u*), & foramina a trajecta per chartam electricitate fimbriata utrimque sint, fimbriis oppositarum facierum ad oppositas plagas directis, quibus duarum virium opposita directione agentium certum argumentum exhiberi opinatur (*v*). Imo experimentum affert, quo huiusmodi oppositae virium directiones luculentius demonstrantur, ac veluti sub oculos ponuntur: nempe metalli tenuem bracteam chartae foliis interceptam ex vehementi vitri electricitate per chartam trajecta duas impressiones recipere, quae chartae foraminibus a trajiciente electricitate peractis utrimque continuae sint, & oppositas plagas respiciant (*x*), & ea quidem virium contraria directione agentium aequalitas etiam Cl. P. BECCARIA experimento confirmatur, in quo lamina vitrea onerata, ac pendula, dum admotis ad opposita respondentia puncta arcus deferentis extremitatibus deoneratur, ne minimum quidem commovetur (*y*).

104. At quantumvis haec omnia vires opposita directione agentes ostendant, vix probant duplici ad eas exercendas, eoque contrario fluido opus esse. Etenim ad succussionem, quod spectat, advertit Cl. BECCARIA eo majorem

(*u*) P. 87., & seq.
(*v*) P. 90. 91.
(*x*) P. 92., & seq.
(*y*) *Lettera* V. §. 168.

jorem esse debere, quo angustior via est, per quam electricus vapor trajicitur, hinc aequalia brachia in omologis locis aeque percuti, & succussionem eo altius, seu ad ampliores brachiorum dimensiones pertingere, quo electricitas fuerit vehementior (ζ). Fimbrias vero oppositas directiones habentes ab expansione fluidi quaquaversus circa centrum undae (a), neutiquam vero ab ipsius undae directione fieri respondet FRANKLINUS (b); similiterque dici posset impressionum contrariarum, quae in folio metallico observantur, alteram quidem ab impetu advenientis fluidi produci, alteram vero ab ejusdem repercussione ob resistentiam chartae ad oppositam ipsius partem adhuc trajiciendae: nec aliter Cl. BECCARIA ex actionis, & reactionis aequalitate explicat in frankliniana hypothesi, cur vitrum pendulum, dum explosio fit, non commoveatur (c).

105. Contra vero, ut principio dicebam, franklinianam hypothesim mira eius simplicitas commendat, tum illud scholarum *entia sine necessitate non esse multiplicanda*. Id unum in ea desiderari posse videtur, ut, qua facilitate intelligitur, cur contrariae electricitates inter se permixtae se destruant, eadem explicetur, cur, quando misceri non possunt, se invicem alliciant, cohibeantque, nec aliter in se agant, quam si mutua inter ipsas attractio intercederet (41. 73. 74. 95.). Sed jam nimis multa de perobscura quaestione, quae magnos VIROS in contrarias partes distraxit, quae tamen indicare voluimus, ut constaret, hypothesim quamcumque, quae contrarietatem electricitatum in se tendentium, & aequabili mixtione se se destruentium explicet, notis hactenus phaenomenis aeque consentaneam esse.

(ζ) *Electric. artific.* §. 431. 432.
(a) *Du courant*.
(b) Tom. II. pag. 230. Ita etiam *Cl. Beccaria elettric. artific.* §. 513.
(c) L. C.

DE L' ACTION DE LA CHAUX VIVE

Sur différentes ſubſtances

PAR M. LE COMTE SALUCES.

1. PLuſieurs Savans ont traité de la Chaux, & leurs productions ſont très-intéreſſantes; mais les réſultats différens qu' ils ont eus de leurs travaux, ayant contribué à une diverſité de ſentimens ſur la nature de cette ſubſtance, la verité ſe trouva ainſi balancée par la réputation des grands hommes, qui y avoient donnés leurs ſoins, &, à quelque opinion près, on demeura dans la perpléxité & dans l' incertitude: c' eſt pour cette raiſon, qu' après ce qu' en avoient dit les VANHELMONT, les STAHL, les LEMERY, les ZWELPHER, les HARTMANN, les FICKIUS, les LUDOVICI, les KUNKEL, & beaucoup d'autres que j'omettrai pour plus de briéveté, M. du FAY en entreprit un nouvel éxamen: ſon travail ne fut pas néanmoins ni dès-plus ſuivis, ni déciſif; car quoiqu' il en eut retiré un Sel, il n'en a pas déterminé la nature. M. MALOUIN travailla enſuite ſur le même ſujet, & prouva que la Chaux contenoit un Sel ſélénitique. M. MACQUER voulut, au ſurplus, voir ſi ſes propriétés êtoient duës à quelque matière ſaline, qui concourut à ſa formation, & il a démontré le contraire. M. POTT tourna ſes vuës ſur les phénomènes que préſente la diſſolution de la Chaux vive dans l' acide nitreux. M. DU HAMEL obſerva ce qui réſultoit de la combinaiſon de cette ſubſtance avec tous les acides, & augmenta par là

le nombre des connoiſſances qu' on avoit ſur cette matière; en traitant enſuite de la nature du Sel ammoniac, ce Savant ayant paſſé à éxaminer quelle pouvoit être la cauſe de la conſtante décompoſition de ce Sel en liqueur en employant la Chaux pour intermède, conclud d' une ſuite d' expériences très-ingénieuſes, que la Chaux n' agit pas ſeulement ſur l' acide du Sel ammoniac, mais encore ſur la matière graſſe qui eſt de l' eſſence des Alkalis volatils. M. BRANDT donna auſſi un Mémoire en 1749 à l' Académie Royale de Suéde ſur la Chaux; le premier objet qu' il a eû en vuë a été de décider ſi elle eſt entièrément diſſoluble dans l' eau, il paſſa enſuite à éxaminer, ſi par ſa combinaiſon avec les acides, il réſulte des Sels neutres, & il a trouvé que ni l' une ni l' autre de ces propoſitions n' étoit pas vraye; il entra enſuite dans une comparaiſon de ſes effets avec ceux des Alkalis fixes, & il finit par des recherches ſur les matières qui contiennent une terre ſemblable à la Chaux. M. HOFFMANN a de même fait différentes expériences ſur la Chaux vive, & il lui attribue un principe terreſtre très-ſixe, & un autre volatil preſque de la nature du feu; il prétend que le feu ne fait qu' unir ces deux principes avec plus de force, & qu' on peut en ſéparer celui qui eſt volatil par la cuiſſon dans l'eau; M. NADAULT donna enſin une diſſertation remplie d' expériences toutes nouvelles, & fort ingénieuſes dans le recüeil que l' Académie Royale des Sciences fait paroître ſous le titre de Mémoires préſentés à l' Académie par divers Savans &c. Tom. 2. mais tous ces Illuſtres Ecrivains ont eut pour but, dans l' éxamen qu' ils ont fait de la Chaux, de voir ſi elle contenoit quelque matière ſaline; ſi cette matière entroit dans ſa compoſition, & quelle en étoit la nature. Le Seul M. Du HAMEL, que je ſache, développa, par occaſion, & dans le cas particulier du Sel ammoniac la propriété dont nous avons parlé; propriété qu' on con-

noiſſoit

noiſſoit en quelque façon; car on ſavoit, par exemple, qu'on pouvoit rendre, par ſon moyen, diſſolubles dans l' eau les huiles, & les graiſſes, en formant avec elles une eſpéce de ſavon; ces connoiſſances étoient pourtant trop vagues, & trop peu circonſtanciées, pour que l'on en put inférer ce que ce Savant a enſuite établi par des procédés fort élégants. M. Talducci avoit fait dès l' an 1671 des expériences ſur ce ſujet, & il avoit déja obſervé que la Chaux vive combinée avec le ſoufre augmentoit de poids, malgré l' inflammation de cette ſubſtance, & quelqu' autre phénomène qui reſulte de ſon union avec l' acide nitreux, ou avec quelqu' autre matière; ces expériences, quoique ingénieuſes, ne ſont cependant que des faits iſolés qui ne lui laiſſerent pas ſoupçonner la propriété qu' a la Chaux vive d' attaquer la partie phlogiſtique de pluſieurs corps: c' eſt ce qui fait l' objet de ce mémoire, que je crois d' autant plus intéreſſant, qu' il n' a encore été traité par perſonne ſous ce point de vuë, & que fourniſſant des phénoménes nouveaux, on peut en retirer des obſervations dont l'utilité ſera d' autant plus ſenſible, qu' on pourra, en les comparant à d' autres déja connuës, développer bien des vérités qui demeureroient encore, ou dans l' incertitude, ou, peut-être, dans l' obſcurité & dans l' ignorance.

2. C' eſt de cette matière que nous appellons auſſi du nom de *matière inflammable*, ou *ſoufre principe &c.* dont il eſt queſtion dans ce mémoire, & qu' il eſt néceſſaire de bien diſtinguer de ce qu' on entend communément par matière graſſe; car l' union qu' elle contracte avec toutes les parties, qui compoſent une ſubſtance graſſe, n' eſt pas, à beaucoup près auſſi intime, que l'eſt celle qu'elle contracte avec cette partie, dont la préſence, ou la privation, apporte des altérations, & des changemens ſi conſidérables aux corps.

3. Comme un tel éxamen ne peut naturellement que m'engager dans un grand nombre d' expériences, dont aucune n' est à négliger, & que, d'ailleurs, je ſerois trop diffus; je penſe de ne donner maintenant qu' un éſſai de tout le travail que j' ai fait, & dont je rendrai compte, par parties, conjointement à ce qui me reſte encor à faire. Je choiſirai pour ce mémoire les expériences dont les réſultats m' ont fourni quelques phénomènes, ou quelques obſervations plus particulières; pour ſuivre un ordre, je commencerai par expoſer ce qui m'eſt réſulté de la combinaiſon de la Chaux avec le ſoufre, & pour pouvoir procurer tous les éclairciſſemens que je crois néceſſaires, je me propoſe de faire obſerver, en même-tems, ce que m'a donné le mélange du Soufre avec l' alkali fixe, mélange qu'on connoît ſous le nom de foye de ſoufre, & le mélange d' un pareil foye de ſoufre avec la Chaux, c' eſt de ce dont je m' en vais rendre compte.

EXPÉRIENCE PREMIERE.

Combinaiſon du Soufre avec la Chaux : du Soufre avec le Sel de Potaſſe; & du foye de Soufre avec la Chaux.

4. JE fis, dans cette vuë, un foye de Soufre, en mêlant quatre parties de Sel de Tartre à une de Soufre fondu, j' ai diſſous ce mélange dans l' eau, de même que les ſuivans. Je fis auſſi un mélange de quatre parties de Chaux vive avec une de Soufre fondu. J'en fis un troiſième enfin de ſix parties de Chaux, trois d'Alkali fixe, & une de Soufre. Je mis les trois cucurbites garnies de leurs Chapiteaux ſoigneuſement luttés dans un même bain de ſable.

5. Dans les deux premières combinaiſons la plus grande partie du Soufre ſe ſublima au Chapiteau; on voyoit néan-

moins

moins des taches blanches très-luisantes, & principalement dans le col des cucurbites. Le caput mortuum étoit noir dans celle de la Chaux, & roux jaunâtre dans celle du foye de Soufre. Je ne m' arrêtai pas à éxaminer ces résultats, me réservant à le faire, lorsque j' en aurois eus des plus considérables.

6. Le troisième mélange, savoir celui du foye de Soufre avec la Chaux m' a fourni des observations plus remarquables; car il ne laissa rien sublimer, & la liqueur qui passa dans le récipient, quoiqu' insipide & sans odeur, changeoit cependant en rouge le papier bleu; il est vrai qu'elle ne fermentoit point sensiblement avec les Alkalis. Je suis cependant très-persuadé, qu' elle contenoit un peu d'acide; parcequ' outre ces indices, j' ai trouvé, depuis mon travail fait, que M. SEEHLIUS en avoit retiré, & qu' au sentiment de M. VOGEL, cet esprit tient de l' urineux; (*a*) la tête-morte étoit d' un blanc éclatant contre les parois du verre, noire dans le milieu, boursoufflée, facile à se réduire en poussière, grasse au toûcher, d'un goût très-salé. J' en retirai par la dissolution, filtration, & dessication, une substance très-blanche, cotonneuse feüilletée, à peu près, comme la terre foliée; cette substance étoit converte de petits cristaux luisants très-déliés qui s' élevoient en pointes, & se croisoient comme les brins d' une étoffe de laine blanche: son odeur approchoit beaucoup de celle que prend l' urine évaporée en consistence de miel, sa saveur étoit amère, & un peu salée.

Ayant répété cette expérience, en substituant au Sel concret du Sel qui étoit tombé en déliquescence, je commencai par remarquer que la liqueur avoit pris une couleur beaucoup plus chargée, je la décantai, & elle ne changea plus sensi-

(*a*) Ce Phénomène présente quelque chose d'extraordinaire, mais je ne dois pas dissimuler qu'il a été observé par plusieurs Savans.

ſenſiblement en rouge le papier bleu, (*b*) mais elle faiſoit une grande effervéſcence avec les acides : ayant enſuite calciné les matières dont j' avois décanté la liqueur, elles ſe ſont réduites en une maſſe pulvérulente, ſpongieuſe, très-légere, noirâtre dans la partie ſupérieure, bleuâtre dans l' intérieur de la ſubſtance, & très-blanche dans les autres endroits, comme la tête-morte de l' expérience précédente.

8. J' ai réïteré les deux combinaiſons précédentes, mais le rapport de la Chaux, & de l' Alkali fixe, au Soufre étoit dans chacune de 10 : 1. Le foye de Soufre fournit une grande quantité de matière ſublimée au Chapiteau & au col du matras.

9. Cette matière étoit très- blanche & ne paroiſſoit tirer un peu ſur le jaune qu' au rebord du Chapiteau; elle étoit ſi graſſe que je ne pus la détacher du verre, ſans qu' elle s' engagea au pinceau, de manière à ne pouvoir l' en retirer qu' en le mettant dans l' eau.

Elle s' y eſt preſqu' entièrement diſſoute, ce qui reſtoit à la ſurface s' eſt enfin précipité ſous la forme d' une poudre blanche très-fine, & la diſſolution du blanc un peu jaunâtre devint claire, & paroiſſoit tirer ſur le bleu.

J' en pris une partie que je ſoûmis aux expériences dont je vais donner les réſultats.

10.

(*b*) La contradiction apparente qui ſe manifeſte dans ces réſultats, en ce qu'ils donnent des ſignes d'Alkali & d'acide ne viendroit'-elle point de ce que par cette combinaiſon l' acide vitriolique eut perdu un peu de ſon affinité avec le phlogiſtique, de manière que ſon union n'étant plus ſi forte, chacun des principes du mélange put agir avec liberté ſur des nouvelles ſubſtances avec leſquelles ils auroient quelque rapport, ſans que ces principes néanmoins puſſent contracter entr'eux de liaiſon à cauſe préciſément du phlogiſtique, qui dans cette rencontre, produiſit l'effet qu' on voit arriver ordinairement dans la diſtillation des plantes qui donnent de l' acide, & de l' Alkali volatil? Si on réfléchit ſur la facilité qu' il y a à décompoſer, par la ſeule évaporation lente, le ſoufre dans le foye de ſoufre, & à en retirer du tartre vitriolé, il paroît que cette conjecture n'eſt pas entièrément deſtituée de probabilité.

10. Elle ſe mêloit avec beaucoup d' effervеſcence, & de chaleur à l' huile de vitriol, & donnoit un peu d' odeur ſulphureuſe.

11. Elle ne ſouffroit aucun changement avec l' eau-forte, & exhaloit ſeulement un peu d' odeur ſulphureuſe.

12. Avec l' Alkali fixe il ſe fit un petit mouvement dans la liqueur qui reſſembloit à un principe de fermentation, & il s' éleva un peu d' odeur de leſſive.

13. Il arriva à-peu-près la même choſe avec l' eſprit volatil de Sel ammoniac, & il me parut qu' il émouſſoit l' odeur pénétrante qu' il avoit (*c*).

14. Je filtrai le reſte de la liqueur, & la fis évaporer; j' en retirai par une deſſication totale une croûte ſéche jaunâtre tirant un peu ſur le roux, je crus devoir rediſſoudre cette ſubſtance pour voir, ſi en lui enlevant la partie plus graſſe qu' elle contenoit, elle pourroit ſe criſtalliſer, & je vis que la diſſolution prenoit une couleur rouge très-belle, & qu' en même-tems, elle laiſſoit précipiter une matière brûne, laquelle ne s' enflammoit pas comme le ſoufre, quoiqu'elle en manifeſta encore un peu l'odeur; cette diſſolution filtrée n' a pas pû ſe criſtalliſer, & étant évaporée à ſiccité me donna de nouveau une petite pellicule qui fermentoit avec l' huile de vitriol, n' étoit point alterée par l' eau-forte, & donnoit avec l'un & l'autre une odeur ſulphureuſe.

15. J' examinai ce qui étoit reſté ſur le filtre, & il me parut à la couleur que ce n' étoit qu' une eſpéce de fleurs de

(*c*) Je dois avertir que le meilleur moyen que j' aye trouvé pour découvrir plus ſenſiblement l'exiſtence de l'acide vitriolique a été celui d'employer la diſſolution du Sel marin, ou celle du Sel ammoniac, car quelqu' aſfoibli qu' il fût par l' eau, ou quelqu' engagée que fut ſon activité par des ſubſtances hétérogènes, les ſignes en étoient beaucoup plus ſenſibles dans ces ſolutions, de ce qu' ils l' étoient avec les alkalis fixes, ou volatils: c' eſt là une obſervation qui m' a paru trop intéreſſante pour négliger d' en rendre compte.

de ſoufre combinées cependant avec beaucoup de matières étrangères. Il eſt toujours certain que ce réſidu contenoit encore du ſoufre, ce qu' on (*d*) reconnoiſſoit à ſa couleur un peu jaunâtre, & à des pointes bleuâtres qui en éxhaloient l' odeur, lorſque je le faiſois chauffer, juſqu' à brûler le filtre ; de même qu' à la propriété qu' il avoit de ſurnager l' eau dans laquelle on le mettoit ; de ne ſouffrir aucune altération étant mêlé à l'eau-forte, quoiqu' il fît efferveſcence avec l'huile de vitriol ; ce qui me porte à croire que le Sel qui ſe ſublime, ſouffre, par cette opération, une eſpéce de décompoſition, en ce qu' une partie de l' acide ſulphureux ſe détache de l'Alkali fixe, avec lequel il avoit contracté une union ſuffiſante à le volatiliſer, & qu' avant cette altération ce compoſé étoit une eſpéce de Sel ſulphureux de Stahl, qui ne diffère de celui qu' on fait à feu ouvert, que parce qu' il contient une plus grande quantité de phlogiſtique ; car, certainement, il n' en paſſe pas autant dans la liqueur du récipient, & il n' en reſte pas, outre cela, une auſſi grande quantité dans la tête-morte, qu' il s' en diſſipe par la combuſtion à l' air libre; nous verrons, en effet, que la liqueur paſſée dans le récipient étoit ſenſiblement acide, il eſt vrai qu' elle manifeſtoit une odeur ſulphureuſe, lors qu' on la mêloit à l' huile de vitriol ; mais j' ai lieu de penſer que cette odeur eſt produite par une eſpéce de déſunion qui ſe fait d'une partie du phlogiſtique du ſoufre, lorſqu' il eſt combiné avec l' Alkali fixe, de manière, qu' un peu d' acide vitriolique ſe convertit en eſprit ſulphureux, & qu' étant délayé

dans

(*d*) Les fleurs de ſoufre qu' on fait avec le Sel polichreſte ne devroient-elles pas plutôt leur blancheur à une petite quantité de ce Sel, que le ſoufre enléve dans ſa ſublimation, qu' à l' atténuation que le Soufre ſubit dans ſes parties par l' intermède de ce Sel?

N' en ſeroit-il pas de même du Magiſtère par une raiſon opposée?

dans plus ou moins d'eau, approche plus de l'odeur du Soufre brûlant, ou de celle du foye de soufre.

16. Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à mettre un charbon ardent dans l'huile de vitriol, il s'élévera d'abord des vapeurs sulphureuses volatiles; qu'on diminue la force de ces vapeurs par l'addition de l'eau; on trouvera que ces vapeurs s'affoiblissent, à mesure que l'eau est en plus grande quantité, au point de changer cette odeur, en une odeur très-approchante, si elle n'est pas, tout-à-fait, la même que celle du foye de Soufre (*e*).

17. Dans la tête-morte enfin, il se trouve trés-peu de phlogistique, eû égard à l'acide & à l'Alkali fixé; car on verra qu'on obtient, par la lixiviation, filtration & évaporation, un Sel luisant, pendant qu'il ne reste que très-peu de matière sur le filtre, laquelle ne s'enflamme point: il est vrai que cette substance saline n'en est pas totalement délivrée; car, sans cela, il devroit résulter un Tartre vitriolé; mais je crois que c'est aussi un Sel sulphureux, qui approche plus du Tartre vitriolé commun, en ce qu'il contient moins de phlogistique, que celui qui se volatilise, & qui, probablement, ne doit sa volatilité, qu'à la grande quantité de phlogistique, à la quelle il est uni, le Sel de Tartre étant une des matières les plus fixes.

18. C'est encore ici un exemple de la volatilité que peuvent acquérir les Alkalis fixes, par l'addition du phlogistique; nous nommerons le premier, Sel volatil, & le

 second

(*e*) La petite quantité de phlogistique qui se trouve combinée avec un acide vitriolique affoibli par beaucoup d'eau, est la cause de cette odeur fœtide; ce qui a été très-bien prouvé par *M. Hoffmann pag.* 110. *T.* 2. or, dans l'addition qu'on fait de l'huile de vitriol au Sel en question, on combine l'acide vitriolique au phlogistique surabondant du Sel, d'où il doit nécessairement se manifester l'odeur des œufs pourris.

fecond Sel fixe fulphureux (*f*). La liqueur qui paffa dans le récipient, étoit un peu trouble, & avoit une odeur fingulière, étant mêlée à l' huile de vitriol; elle s' échauffa confidérablement, & développa une forte odeur de Soufre brûlant; avec l' eau-forte, elle donna des fumées dont on ne pouvoit pas diftinguer la couleur, mais qui fentoient l' odeur de celles de l' efprit de nitre fumant: elle fit effervefcence avec l' Alkali fixe, de même qu' avec l' Alkali volatil. Le Caput mortuum étoit une fubftance compacte blanche, tirant fur le gris à fa partie fupérieure; gris brun à la furface inférieure, avec une partie très-blanche au centre; j' en effayai un peu, comme j' ai fait ci-devant, & il me réfulta ce qui fuit; favoir.

19. Il fit une grande effervefcence avec les acides, fe couvrit d' une matière onctueufe; prit une couleur brûne avec l' huile de vitriol, laiteufe avec l' eau-forte, ne manifefta aucun changement avec l' Alkali fixe & volatil: il fe fit au furplus un précipité, dans chacun de ces mélanges. Ce précipité étoit tanné dans l' acide vitriolique, verd-clair dans l' eau-forte, tanné plus clair dans l' Alkali fixe, & prefque noir dans l' Alkali volatil.

20. J' ai diffous le refte, je l' ai filtré, & fait évaporer jufqu' à ficcité, & il fe forma une croûte épaiffe, criftalline & affez ferme, qui avoit une faveur onctueufe piquante, amere, & fentoit un peu l' odeur d' œufs pourris, moins cependant, de ce qu' elle le fentoit, avant que la diffolution fût filtrée: c' eft-là le Sel dont nous avons parlé ci-devant §. 17.

21.

(*f*) J' ai dit un exemple de la volatilité qu' acquièrent les alkalis fixes, par l' addition du phlogiftique, pour m' exprimer felon l'acception commune; car j' aurai occafion de faire voir, dans la fuite, qu' elle doit être attribuée, en grande partie, à l'affociation qui s'eft faite de quelque peu d'acide, de manière, qu' on doit regarder ces produits comme des compofés d'acide, de matières inflammables, & d'une fubftance fixe, au moïen de l'eau.

21. Il resta sur le filtre une matière grise sans saveur, & sans odeur, qui ne brûloit point, étant mise sur les charbons ardents, mais qui y prenoit, seulement, une couleur blanche; elle fermentoit beaucoup avec les acides, & manifestoit une forte odeur sulphureuse avec l' huile de vitriol; ayant ensuite mèlé la combinaison de ce résidu avec l'eau-forte, dans celle faite avec l' huile de vitriol, il s' est élevé une quantité de vapeurs si prodigieuse, qu' il paroissoit que le mélange dut s' enflammer; j' y projettai des charbons en feu, & les vapeurs s' éleverent avec une force surprenante; elles étoient d' une couleur jaune très-vive, & répandoient une violente odeur d' esprit de nitre fumant, mêlée d' esprit sulphureux: le reste de la liqueur, qui ne s' étoit pas dissipée, continua à répandre des vapeurs jaunes rougeâtres pendant plus de 24 heures que je le gardai, elles ressembloient parfaitement à celles de l' esprit de nitre fumant, & n' avoient plus rien de sulphureux; d' où l' on voit que l' affinité de l' acide vitriolique avec la matière inflammable, se montre encore supérieure, dans cette occasion à celle des autres acides.

22. Le Célébre Stahl a été le premier, qui ait donné ce procédé, pour décomposer le soufre, & pour faire du tartre vitriolé; mais c' est toujours par le concours de l'air libre, que se faisoit cette opération; personne, que je sache, n' ayant crû, jusqu' à présent, qu' elle put réüssir à vaisseaux clos; on peut consulter à ce sujet les Savantes notes que l' Illustre M. Baron a faites sur Lemery: (*g*) & c' est de cette différence, que nous devons déduire celles de nos résultats; car le phlogistique, ne pouvant se dissiper, se combine, en partie, avec l' acide qui se détache

l 2 du

(*g*) V. Cours de Chymie &c. par *M. Lemery* nouvelle édition revûë cor., & augm. d' un grand nombre des notes &c. par *M. Baron* 1757. pag. 465.

du Soufre, & qui eſt alors délayé dans beaucoup d'eau, pendant que le reſte, qui eſt la partie la plus conſidérable, ſe joint au Sel de tartre avec un peu d' acide vitriolique; d' où il réſulte un Sel volatil ſulphureux, qui contient une plus grande quantité de phlogiſtique, que la tête-morte (*h*).

23. Le foye de Soufre fait avec la Chaux-vive, & diſſous dans l' eau, donna de même une matière ſublimée au Chapiteau, & au Col du matras; elle étoit encore plus blanche, & en plus grande quantité, que celle du foye de Soufre fait avec l' Alkali fixe, & avoit une apparence criſtalline un peu terne; elle étoit onctueuſe, & il me l'a fallu diſſoudre dans l' eau pour l' en retirer; rien ne ſurnageoit dans cette diſſolution, ſeulement après quelque tems qu' elle fut repoſée, il ſe fit un precipitè blanc, un peu verdâtre; j' ajoûtai de nouvelle eau, & il ſe diſſout encore une partie du precipité: la liqueur parut toujours un peu trouble.

J' en pris une partie, comme j' avois fait pour le foye de Soufre, & la mêlai avec les acides, & les Alkalis.

24. Mêlée à l' acide vitriolique, elle s' échauffa, fit une violente efferveſcence, & donna une odeur de Soufre brûlant. Avec l' eau-forte elle s' échauffa un peu, répandit des vapeurs; mais ne donna aucun ſigne ſenſible d' efferveſcence.

25.

(*h*) Ces Sels me paroiſſent être les mêmes que le Sel neutre que *M. Scypius* a obſervé dans les eaux minérales. Il le reconnoît de même nature que le Sel ſulphureux de Stahl dont il ne différe, que parcequ'il ne ſe laiſſe pas décompoſer par les acides nitreux & marin, & il en conclud qu'il ne doit cela, qu' à ce qu'il eſt moins volatil; je crois de même que le Sel du caput mortuum n' eſt qu' un tartre vitriolé altéré par un peu de phlogiſtique, & peut-être, ſurchargé d' acides, ce qui empêcheroit d' autant plus la criſtalliſation de ces Sels; comme le remarque *M. Junclker.*

25. Avec l' Alkali fixe il s' éleva des bulles d' air; je ne négligerai pas de faire obſerver ici, que dans le mélange de la diſſolution avec l' huile de vitriol, il ſe fit un précipité brun, qui s'élevoit en petits filamens aux côtés du verre: il ne paroiſſoit qu' un peu de pouſſière très-fine, & très-blanche dans celui de l' eau-forte: celui de l' Alkali fixe étoit plus conſidérable, de même que celui de l' Alkali volatil, avec la différence, que ce dernier étoit d' un verd un peu plus foncé.

26. Je crus devoir ajoûter de nouvelle eau dans le reſte de la diſſolution, pour voir ſi le nouveau précipité n'étoit point faute de diſſolvant; mais, quoiqu' il ſe mêla à l' eau dans le tems de l' addition, ce précipité reparoiſſoit néanmoins, à-peu-près en même quantité, après que j' avois laiſſé repoſer la diſſolution; je la filtrai enfin, je la fis évaporer juſqu' à ſiccité, & j' en retirai une ſubſtance qui adhéroit conſidérablement à la Terrine; ce n' étoit qu' une croûte bien mince d' une couleur fauve; elle répandoit un peu de fumée, étant expoſée au feu, s' y noirciſſoit, ſans s' enflammer, & ſans donner d' odeur ſulphureuſe bien ſenſible.

27. Elle fermentoit puiſſamment avec les acides, & manifeſtoit avec eux une forte odeur ſulphureuſe.

28. Il ſe faiſoit auſſi un peu de mouvement en la mêlant à l'Alkali fixe, & volatil. Voici encore un autre éxemple de la volatiliſation d'une matière très-fixe. Dépend-elle du phlogiſtique, de manière que par ſon moïen, la matière fixe change de nature, & prenne un caractère volatil? Ou bien exiſteroit-il des parties volatiles par elles-mêmes dans la Chaux, mais dont la propriété ſeroit ſuſpenduë, par une combinaiſon toute particulière, qui ſeroit détruite par l'addition de l' eau? C'eſt ici le ſentiment du Célébre M. Hoffmann que nous aurons occaſion de diſcuter dans la ſuite.

29.

29. La liqueur, qui paſſa dans le récipient, étoit claire; ne donnoit aucune odeur, & ne faiſoit ſentir aucune ſaveur, étant miſe ſur la langue.

Elle fermentoit avec violence, étant mêlée aux acides, & développoit avec eux une puiſſante odeur ſulphureuſe.

30. Elle excitoit auſſi un mouvement en la mêlant aux Alkalis; mais, ce mouvement paroiſſoit plutôt de fermentation.

31. La tête-morte étoit une ſubſtance bourſoufflée; griſe, tirant ſur le noir dans ſa partie ſupérieure, blanche dans le centre de la maſſe, & un peu noirâtre au fond, elle étoit graſſe au toûcher, ſoit dans ſa partie griſe, ſoit dans celle qui étoit parfaitement blanche; & ſe réduiſoit avec toute la facilité en une pouſſière très-fine, qui s' attachoit aux doigts: ſon odeur approchoit de celle du foye de Soufre, ſon goût étoit un peu amer, & ſembloit tenir comme un glû à la langue. Je l' ai diſſoute dans beaucoup d' eau, & après l' avoir filtrée, je l' ai fait évaporer.

32. Lorſque la diſſolution fut, environ, à moitié évaporée, il ſe forma à la ſurface une forte pellicule, ſans qu' il ſe précipita rien au fond; ce qui me fit penſer qu' elle pourroit bien ſe criſtalliſer: mais ce fut inutilement que je l' expoſai, pendant une nuit, au froid; je pris donc le parti de l' évaporer à ſiccité.

33. J' en retirai, par ce moïen, une croûte ſaline d'un goût ſalé & amer, avant qu' elle fut entièrement deſſéchée; mais lors qu' elle fut réduite à une entière deſſication, elle reſſembloit aſſez, au goût, à du Sel commun, à la ſeule différence près, qu' elle étoit un peu moins ſalée, que n' eſt le Sel marin, & un peu onctueuſe, laiſſant quelque trace d' une matière terreuſe graſſe brûlée par l' acide vitriolique; ayant enſuite pris ce qui étoit reſté ſur le filtre, & l' ayant mis dans l' eau boüillante, que j' ajoûtois à chaque

fois

fois que je filtrois la diſſolution qui s'étoit faite, je mis toutes ces diſſolutions ſur la croûte ſaline, dont je viens de parler, & j'en eus, par l'évaporation, une croûte qui, du blanc, avoit paſſé au jaunâtre, d'un goût fade, & ayant la conſiſtence d'une terre.

34. Cette ſubſtance diſſoute dans l'eau, fait beaucoup d'efferveſcence avec l'huile de vitriol, donne une grande odeur ſulphureuſe, prend une couleur laiteuſe, au moment du mélange, s'éclaircit, & ſe fait un précipité blanc, & une écume graſſe à la ſurface de la liqueur.

Après qu'on a verſé une certaine quantité d'eau-forte l'efferveſcence ſe manifeſte avec des fumées blanches, & après quelque tems, il ſe fait un petit précipité.

35. Il ſe fait un peu de mouvement avec l'Alkali fixe, il ſe forme enſuite un coagulum blanc, qui nage dans la liqueur devenuë laiteuſe, avec un petit précipité roux jaunâtre.

On voit le même mouvement avec l'Alkali volatil, la liqueur prenant une couleur rouſſeâtre; après être repoſée, on ne ſent plus d'odeur urineuſe, il ſe fait une précipité brun; & on voit une tranche, à la ſurface de la liqueur, qui reſſemble à une huile.

36. Ce qui eſt reſté ſur le filtre étoit une matière griſe foncée, qui perdoit un peu de ſa couleur, étant deſſéchée, pour l'en enlever, l'ayant miſe ſur une poële de fer à un feu violent, juſqu'à faire rougir à blanc la poële, elle a commencé par prendre une couleur jaune ſans fumée, ni odeur & elle devint enſuite blanche.

37. Je pris une partie de ce réſidu que j'avois fait deſſécher ſur le filtre, & je l'ai ſoûmis aux expériences ordinaires.

Il fit une violente efferveſcence avec les acides, & il manifeſta une puiſſante odeur ſulphureuſe volatile avec l'huile de vitriol, & une très-forte odeur d'eſprit de nitre fumant

fumant avec l' eau-forte ; dans le premier, une écume ſurnageoit la liqueur que j'avois étenduë dans l'eau, & l'on voyoit des petites particules qui s'y ſoûtenoient, il ſe fit au ſurplus, un précipité gris-brun ; dans le ſecond on découvroit de même cette écume graſſe, qui adhéroit aux parois du verre, & il n'y avoit point de précipité ſenſible.

38. Dans les Alkalis, il parut ſe faire un petit mouvement, & il ſe fit, ſur tout dans l'Alkali fixe, une précipitation, à ce que j'ai pû conjécturer, preſqu' entière de ce réſidu, lequel prit une couleur obſcure.

39. Ce même réſidu, calciné, donna les mêmes ſignes d'effervescence avec les acides, & de mouvement avec les Alkalis ; mais avec plus de force, de même que pour les odeurs qu'il développa dans le mélange des acides : cette écume ſe montra auſſi avec l' huile de vitriol, mais elle n' étoit pas en ſi grande quantité, & le précipité en fut plus abondant, plus clair, & moins léger ; rien ne ſe ſoûtenant dans l' eau ; dans l' eau-forte, il ne ſe fit point d' écume.

40. Avec les Alkalis, il ſe fit une précipité très-abondant, mais plus clair que celui dont nous avons parlé ci-devant.

41. Je réïtérai cette expérience, en mettant 24. parties de Chaux ſur une de Soufre, & j' obſervai que la matière ſublimée au Chapiteau, & au Col de la cucurbite, étoit très-blanche & luiſante, ſans le moindre veſtige de jaune ; on y découvroit même des criſtalliſations en aſſez grande quantité ; mais elles étoient tellement entrelacées les unes dans les autres, qu' on ne pouvoit pas diſtinguer la figure ; cette matière étoit néaumoins très-graſſe, & la partie, qui adhéroit au verre ne pût être enlevée, qu' en la diſſolvant dans l' eau : j' en mis un peu de celle que j' avois détachée avec le pinceau ſur les charbons ardents, & je vis qu' elle ſe bourſouffloit comme fait l' alun, pendant

qu' elle

qu' elle donnoit des fumées qui sentoient le Soufre; je dissous le reste, & je mêlai de cette dissolution dans l'huile de vitriol, l' eau-forte, l'Alkali fixe, & l' Alkali volatil; je remarquai, outre les effets dont nous avons parlé ci-devant, §. 23. 24. 25. qu' elle manifestoit l' odeur de foye de Soufre avec l' huile de vitriol, une odeur sulphureuse avec l' eau forte; qu' elle se troubloit, devenoit laiteuse, & formoit une espéce de coagulum, éxhalant une puissante odeur de lessive, après s' être reposée, avec l' Alkali fixe: par l'évaporation du reste de cette dissolution filtrée, je rerirai une substance grasse, amere, un peu salée, laissant une impression terreuse sur la langue, elle étoit par écailles comme la crême de Chaux desséchée, ce Sel manifestoit une forte odeur de Soufre brûlant avec les acides, & faisoit effervescence avec eux; il ne faisoit voir, au reste, aucun mouvement avec les Alkalis, & développoit l' odeur urineuse volatil du Sel ammoniac.

42. Je saturai d' acide vitriolique le peu qui me restoit de ce Sel, je l' étendis dans l'eau, & après l'avoir filtré & évaporé, j'en eus un Sel blanc fait, à-peu-près, comme le précédent qui ressembloit à un Sel sélénitique, mais dont le goût âpre & stiptique approchoit beaucoup de l' alun. Je tentai de le faire cristalliser par l' addition d' une lessive, mais je n' en retirai qu' une substance qu' il fallut dessécher, & qui ressembloit à des coquilles d' œufs pilées, & dont la saveur étoit extrêmément stiptique, & laissoit ensuite un impression terreuse sur la langue.

43. Les résultats des expériences faites sur la liqueur ont été les mêmes, que ceux dont j' ai parlé §. 29. 30.

44. La tête-morte ne différoit de la précédente §. 31. qu' en ce qu' elle paroissoit plus légere, & plus brûne à sa surface. Je trouvai

Qu' elle faisoit une forte effervescence avec l' acide vitriolique, & qu' il s' éxhaloit une forte odeur d' acide vitriolique ſulphureux. Avec l'eau-forte, elle fit auſſi beaucoup d' effervefcence, & manifeſta une forte odeur, telle que celle que donne l' eſprit de Nitre fumant.

45. Avec l' huile de tartre, on voyoit un petit mouvement qui partoit de la Chaux, pour ſe rendre à la ſurface de la liqueur; & je crois être fondé à penſer, que ce mouvement étoit produit par l'air, qui ſe développoit de la Chaux: mêlée enfin à l'eau, elle faiſoit effervefcence comme la poudre de la Chaux, &, à-peu-près, comme la *creta bathenſis.*

46. Ayant mis le réſidu qui étoit ſur le filtre, & qui y étoit en aſſez grande quantité, dans un creuſet ſur le feu; je remarquai des petits points de flamme bleuâtre, qui indiquoient qu' il contenoit encore un peu de Soufre, quoiqu' en petite quantité; il apparoiſſoit enſuite des petites étincelles de feu, comme ſi elles euſſent été de poudre de charbon: après un feu très-vif, cette terre qui étoit griſâtre, devint beaucoup plus claire; elle ne ſe diſſolvoit qu' en très-petite quantité dans l' eau: il ſe fit un précipité conſidérable d' une terre très-fine, & très-blanche, d'ailleurs, inſipide, & inodore: ce réſidu mêlé à l' huile de tartre développa une odeur urineuſe, pendant qu' il en donnoit une de leſſive, lors qu' il n' étoit point calciné.

EXPE-

EXPÉRIENCE SECONDE.

Combinaiſon de la Chaux avec le foye de Soufre décompoſé par l' addition de l' acide vitriolique.

47. JE mêlai du Soufre avec du Sel de potaſſe, & je noyai ce mélange dans l' huile de tartre où j'avois mis la Chaux; lorſque ce mélange ſe fut repoſé, je le ſaturai d' acide vitriolique, pour faciliter le dégagement du Soufre, & le ſoûmis à la diſtillation au bain de ſable; le feu étant très-vif du commencement, il ſe fit néanmoins une ſéparation des ſubſtances, ſelon leur différente gravité ſpécifique; mais la liqueur qui ſe montroit rouge dans le matras monta claire, & après elle, il paſſa un peu de Soufre dans le bec du Chapiteau: lorſqu' il ne parut plus d' humidité, je pouſſai le feu juſqu' à faire rougir le ſable, & il ſe ſublima dans le Chapiteau des taches blanches en petite quantité; voyant, enfin, que la tête-morte avoit une apparence vitreuſe brûne, je laiſſai refroidir le matras; l' ayant enſuite décoëffé, il s' éleva une violente éxhalaiſon de vapeurs volatiles qui a une odeur urineuſe, celle-ci étoit encore plus développée dans la matière ſaline du Chapiteau.

48. La liqueur, qui étoit paſſée dans le recipient, étoit un peu laiteuſe, & n'avoit point d'odeur. Mêlée à l'acide vitriolique, elle ne fermenta point, & développa ſeulement un peu d'odeur ſulphureuſe; avec l'acide nitreux, elle produiſit le même effet.

49. Mêlée à l'Alkali fixe, il me parut qu'elle avoit développé quelque peu d' odeur urineuſe. Mêlée enfin, à une diſſolution de Sel volatil concret dans l' huile de tartre, mélange qui ne donnoit plus qu' une foible odeur urineuſe, elle ſe renouvella avec beaucoup de force.

50. Le ſoupçon que j' avois formé, que cette liqueur pût contenir du Sel ammoniac, me fit penſer à la mêler

à l' eau-forte, pour en faire une eau régale ; je mis de l'or dans la liqueur, elle l' a entièrement diſſous (*i*).

51. En conſidérant les réſultats de toutes ces expériences, il paroît qu' on peut conclure que le Soufre a changé quant à ſes propriétés principales, & que l' aſſociation de la Chaux, & des Alkalis fixes le rend ſuſceptible de pluſieurs modifications, & d'une décompoſition dans ſes principes qui ne peut ſe faire d'ailleurs, que par la combuſtion à l'air libre ; mais comme les ſubſtances, qui ſe mêloient, & ſe noyoient dans l' eau qui paſſoit dans le récipient, & celles qui ſe ſublimoient dans le Chapiteau, où, qui s' élevoient dans le col, étoient en trop petite quantité pour en déterminer par des expériences éxactes la nature, & pour en déduire en conſéquence les altérations arrivées au Soufre; j' ai pris le parti de ſaturer de Soufre une quantité déterminée

(*i*) *M. du Hamel* a obſervé p. 76. mém. de l'Acad. R. des Sciences an. 1747. un phénomène qui a beaucoup de rapport à celui-ci, & par lequel il paroît que l' eſprit de nitre ſe régaliſe en paſſant ſur la Chaux, ce qui avoit été dit par *Beker*, nous renvoyons à ces deux Auteurs ceux qui voudroient éxaminer le fondement de leur opinion, & nous nous contenterons d'avancer quelques réflexions qui y ont rapport.

M. Malouin dans ſon mémoire ſur la Chaux dit pag. 95. d'en avoir tiré une liqueur de la nature de l' eſprit de Sel commun &c.

On ſait qu' en ne ſaturant pas les terres abſorbantes d' acide marin, on obtient un Sel qui a les propriétés des Alkalis fixes.

On ſait que le ſang contient du Sel marin dénaturé par l' action des eſprits vitaux.

M. Baumé dit avoir fait un Sel alkali artificiel, en ſaturant de la Chaux avec du phlogiſtique. Man. de Chimie pag. 74.

Ne pourroit-on pas ſoupçonner que par cette opération, on ne, fit par une roûte inconnuë, que la combinaiſon de l' acide marin à la terre, dans le rapport qui eſt néceſſaire pour former la ſubſtance ſaline dont nous avons parlé, qui a les propriètés de l'alkali fixe? ce ſeroit l' effet d' une décompoſition, & récompoſition, ou, au moins celui d' une ſurcompoſition dont nous avons tant d' éxemples.

Je n' oublierai pas de rapporter ici un phénomène qui ſemble prouver l' éxiſtence de l' acide marin dans la Chaux ; c' eſt qu' en diſſolvant de la Chaux dans une forte diſſolution de Sel de glauber, il m'eſt réſulté, par la filtration & évaporation, un Sel cryſtalliſé comme le Sel d' Ebſom.

minée de Chaux, & d' Alkali fixe pour en éxaminer les produits.

52. Je pris pour cela de la Chaux sulphurée, ou le caput mortuum d' une distillation de la Chaux faite avec le Soufre; le rapport de ces matières étoit de 16: 1. Sur deux onces de ce caput mortuum, je mis un gros de Soufre, ayant soin de bien mêler les matières, & de les incorporer par le secours de l' eau, je fis distiller ce mélange dans une cucurbite de terre à feu nud, ayant la précaution de n' augmenter considérablement le feu, que lorsqu' il ne se sublimoit plus rien dans le Chapiteau, & je l' y soûtins ainsi pendant une heure; je laissai refroidir la cucurbite, j' en retirai la tête-morte qui étoit devenuë encore plus grise, & plus légere; je la mêlai à un autre gros de Soufre, & la soûmis de nouveau à la distillation, remettant le même Chapiteau, & tel que je l' avois retiré de la distillation précédente, je mis à part l' eau que j' en avois retirée, & je réïtérai six fois le même procédé, en poussant le feu à la dernière violence la septième fois.

53. Je vis à chaque fois se sublimer une matière blanche comme celle dont j'ai parlé §. 23. elle pésoit 36. grains, & à la sixiéme sublimation la matière du Chapiteau devint jaune pâle en dedans, pendant qu'elle resta blanche contre le verre.

54. La premiére liqueur qui passa dans le récipient, le rapport de la Chaux au Soufre étant de 10: 1., étoit un peu laiteuse, elle avoit une odeur d' œufs pourris.

Mêlée à l' huile de vitriol, elle s' échauffa, fit effervescence & prit l' odeur de Soufre brûlant, en donnant des vapeurs blanches.

Je ne remarquai aucun mouvement avec l'eau-forte, seulement elle s' y mêloit comme fait le sirop dans l' eau.

55. Il me parut entrevoir un peu de mouvement par l' addition de l' Alkali fixe, & il s' éleva une odeur de lessive.

Cette

Cette liqueur étoit, d'ailleurs, si foible, que les seuls signes de l'huile de vitriol ont été manifestés.

56. La seconde liqueur étoit limpide, & sentoit un peu l'empireume.

Elle ne fit aucune effervescence avec les acides; elle donna seulement des fumées rousses & épaisses avec l'huile de vitriol, & une odeur de Soufre brûlant aromatique avec tous les deux; on doit encore observer, que l'huile de vitriol se précipitoit, & ce n'étoit, qu'en agitant les liqueurs, qu'elles se mêloient, faisoient paroître les fumées, & l'odeur en question.

Elle fit effervescence avec l'Alkali fixe, & diminua l'odeur urineuse avec l'Alkali volatil que je lui rendis, par l'addition du Sel de Potasse.

57. La troisiéme étoit aussi claire, sentant de même l'empireume, & donnant les mêmes résultats.

58. La quatriéme étoit aussi claire à la surface, on voyoit nager une liqueur qui paroissoit huileuse, elle sentit l'odeur d'esprit de nitre dulcifié, & produisit les mêmes effets que ci-devant.

59. La cinquiéme étoit claire, une huile verte sembloit nager à la surface, son odeur étoit sulphureuse très-volatile & très-pénétrante.

Mêlée à l'huile de vitriol, elle prit une odeur aromatique que l'Alkali fixe lui enlevoit, & elle suivit en tout, ce que nous avons vû ci-devant.

60. La sixiéme étoit, à-peu-près, comme la précédente, & donna les mêmes résultats; mais on voyoit un sédiment considérable d'un blanc jaunâtre.

61. La tête-morte dans les premiers procédés étoit bleuâtre; mais cette couleur se changeoit à chaque fois, & devenoit plus blanche, jusqu'à ce qu'elle passa au blanc sale à la sixiéme reprise; & elle ressembloit, pour lors, un mortier dont on fait les revêtemens, & sentoit

l'odeur

l'odeur de la Chaux, à laquelle on mêle la colle, & le gypſe pour blanchir les murailles, elle étoit inſipide, & peſoit onc. 2. $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$

62. La Chaux a donc augmenté ſon poids de $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ car je n'en avois employé que onc. 2. &, en ajoûtant les gr. 36. de la matière qui s'eſt ſublimée, il manque encore $\frac{3}{8}$ au poids total, puiſque j'avois fait l'addition de $\frac{6}{8}$ de ſoufre : or, il faut que ces $\frac{3}{8}$ ſoient paſſés avec l'eau dans les récipients; mais comme les liqueurs étoient ſenſiblement acides, & que dans les dernières, l'acide ſulphureux volatile étoit manifeſté & développé; il ſuit, qu'il doit avoir paſſé dans les récipients gr. 200. d'acide libre, étant, d'ailleurs, probable que le phlogiſtique ſe ſoit combiné (*k*) avec les parties de la Chaux, dont gr. 36. ont été ſublimés à la voûte du Chapiteau: il eſt vrai que dans la ſixiéme opération, il ſe ſublima un peu de Soufre, ſans avoir ſouffert aucun changement, autant du moins, que j'en ai pû juger par la ſeule inſpéction; & quoique la quantité ne fut pas conſidérable, elle a, néanmoins, concouru aux gr. 36., & c'eſt cette partie que nous verrons qui ne s'eſt point diſſoute dans l'eau.

63. Je pris la ſubſtance qui s'étoit ſublimée, & qui n'étoit plus ſi graſſe, qu'elle étoit, à la première & à la ſeconde ſublimation; je la mis dans l'eau froide, elle ſe ſoûtint

(*k*) A la ſixiéme repriſe une partie du Soufre ſe ſublima ſans ſe décompoſer, & c'eſt cette partie qui ne pût pas ſe diſſoudre, & dont nous parlerons plus bas; le reſte n'étoit, je crois, que des parties de Chaux combinées avec le phlogiſtique qui a abandonné l'acide vitriolique, ce qui doit revenir environ à gr. 9., ſavoir au quart du poids total.

soûtint à la surface pendant quelque temps ; mais petit-à-petit, il se fit un précipité blanc, le peu qui surnageoit demeurant jaune ; j' en mis un peu sur le feu & il s' enflamma comme le Soufre. Les premières sublimations cependant en contenoient très-peu ; car cette matière étoit toute dissoluble dans l' eau, quoiqu' elle fut fort grasse, & qu' elle contint par conséquent beaucoup de phlogistique. Je crois néanmoins que dans l' un & dans l' autre, il se trouve encore du véritable Soufre ; mais il n' est pas moins vrai, que la Chaux se volatilise avec lui, & qu' elle en décompose la plus grande partie : or il est probable que, pendant que la Chaux agit sur une partie du phlogistique du Soufre, & qu' elle en dégage l' acide, il y a des parties de cette Chaux, qui sont volatilisées, par l' aggrégation du phlogistique du Soufre, qui a été décomposé.

64. Ces observations servent à appuyer l' opinion de quelques Physiciens, qui prétendent que la cohésion des parties des corps dépend de la matière inflammable : M. Stahl a démontré qu' elle se rencontre dans les trois Regnes, & qu' elle n' y diffère, que par la quantité; or, cela posé, en raprochant des faits qui nous montrent que par une calcination suivie, & violente, ou par d' autres opérations réïtérés, on peut dépoüiller les corps du principe qui servoit à les caractériser, sans qu' on puisse les récomposer par l' addition du phlogistique, il paroît naturel de conclure, qu' il n' est pas le principe qui constitue toutes les propriètés des corps, comme quelques Chimistes l'ont crû.

65. Quoique les expériences, que j' ai rapportées, prouvent que la Chaux décompose le Soufre, en attaquant la partie phlogistique, il est pourtant vrai aussi qu'on n' en retire environ que la moitié en acide sulphureux, en y comprenant une partie qui se sépare par la sublimation; il nous reste donc encore à examiner, si le Soufre restant, ne se trouve dans la Chaux, que comme un simple aggrégé,

ou

ou bien s' il s' eſt combiné avec elle d' une manière plus intime; ce qui me porte à être plutôt de cette opinion, c' eſt que j' ai toujours fait rougir les cucurbites de terre dont je me ſuis ſervi dans ces dernières expériences, en employant un feu de bois très-vif & continué pendant long-tems, après toute diſtillation, & toute ſublimation finie : or il paroit que par cette opération, le Soufre auroit dû reparoître, s'il avoit encore été uni à ſon phlogiſtique; mais je préſume que ce phlogiſtique s' eſt combiné avec la Chaux d' une manière aſſez forte, pour ne plus être ſujet à l' action de l' acide vitriolique, qui, à ſon tour, eſt puiſſament retenu par la Chaux comme le prouve M. HOFFMANN.

66. Pour déterminer plus exactement ſi le Soufre qui reſte dans la Chaux, n' eſt plus ſous la forme de Soufre, je fis les expériences ſuivantes.

Je mis la tête-morte §. 61. dans ſix livres d'eau, il s'en eſt diſſout environ trois gros; je la filtrai, & ayant diviſé cette diſſolution, je mis du Sel de potaſſe dans une partie, elle devint d' un jaune clair, il ne ſe fit point du tout d' efferveſcence, & il parut ſeulement un peu de précipité; mais comme je n' ai eû aucune marque qui m' indiqua le point de ſaturation, je ne ſais pas ſi ce peu de precipitè n' a point été produit par de l' Alkali ſurabondant; ce qui me paroit d' ailleurs très-probable. Il s' éleva nénamoins à la ſurface de la liqueur une ſubſtance blanche qui reſſembloit à de la graiſſe figée, & qui, peu-à-peu, s' eſt précipité. (J' avois vû la même choſe dans le mélange du foye de Soufre à la Chaux: toutes les fois que j' ajoûtois du Sel de potaſſe, le mélange alors ſembloit même ſe gonfler, & il en ſortoit une grande quantité de bulles d'air) mais revenons à l' expérience; je décantai la liqueur, & la fis évaporer au bain de ſable, ce qui me fournit un Sel gras fait, à-peu-près, comme celui du §. 42. mais ſentant l' odeur d'urine évaporée ſans aucune différence, ſon goût étoit fort acide étant bien deſſéché, (*l*) amer, un peu ſtiptique, & laiſſoit une impreſſion onctueuſe ſur la langue, d' ailleurs très-avide de l' humidité.

67. Ce qui étoit ſur le ſiltre deſſéché à l'air, étoit comme du limon, il ſe pétriſſoit avec l' eau; mais il ſe fendoit au feu, il exhaloit un peu d' odeur de Soufre brûlant, & il paroiſſoit altéré par un autre odeur qui reſſembloit à du Camphre; il ne donnoit point de flamme, ſon poids ne fut pas ſenſiblement diminué, il devint très-blanc & approchoit beaucoup de la craye friable.

68. Je mis le reſte de la diſſolution dans un alembic de verre, & après la diſtillation finie, je trouvai une croûte griſe claire, dont le centre étoit roux noirâtre. Je ne pus détacher cette partie, tant elle adhéroit au verre; je pris le parti de la diſſoudre dans l'eau, pour la remettre à évaporer juſqu' à ſiccité, ſans pouſſer le feu ſur la fin (comme j' avois fait dans la diſtillation, pour voir s' il ne ſe ſublimoit rien au Chapiteau,) & j' eus encore une craſſe rouſſe qui ſentoit la graiſſe brûlée, & très-adhérente à la capſule; dans le milieu, on remarquoit une tache qui ne reſſembloit pas mal à une pierre, dont on tire le gypſe, qui eſt un peu argentine; j' eus beaucoup de diſſiculté à la détacher, & elle reſſembloit éxactement à la pouſſière par ſa couleur.

J' en mis une priſe ſur un fer rouge, elle y jetta beaucoup de fumées d'une odeur de graiſſe brûlée, & y prit la couleur du charbon; l'ayant miſe dans l' eau elle parut s' y diſſoudre, mais elle ſe précipita en entier, autant que j' en pû juger lorſqu'elle fut bien repoſée.

(*l*) Tout le monde ſait, que de la combinaiſon de la Chaux avec un Alkali fixe il réſulte le cauſtique potentiel dont ſe ſervent les Chirurgiens celui ci cependant diféroit de la pierre à cautére, en ce qu'il étoit très-blanc.

69. En considérant maintenant tous ces résultats, nous commençons par reconnoître une décomposition du Soufre, dont une grande partie de l' acide se convertit en esprit sulphureux. 2.° Qu' une partie, & probablement la plus grande du phlogistique qui entroit dans la formation du Soufre, s' unit à des parties de la Chaux, & se volatilise. 3.° Que les Sels qui resultent ainsi de la combinaison de l'acide vitriolique avec la Chaux, sont très-dissolubles dans l' eau, propriété contraire à la nature des sélénites, qui sont les Sels résultants de l' union de cet acide avec les terres calcaires; soit que ces Sels soient naturels, soit qu'ils soient le produit de l' art. 4.° Qu' on peut obtenir une liqueur, & même du Sel volatil urineux, phénomène cependant déja connu, & qu' on trouve dans plusieurs Auteurs. 5.° Que la Chaux perd par ce moïen toutes ses propriétés, & qu' il reste une partie qui est très-difficile à se dissoudre dans l'eau; il y a apparence que c' est la partie qui, étant saturée d'acide vitriolique, ne contient point de phlogistique.

70. C' est de l'union du phlogistique, que nous devons déduire cette plus grande dissolubilité; en ce que, par son association l'acide s' unit d' une manière moins intime, & moins forte avec la base terreuse, d' où il suit que l' eau a une plus grande action sur ce composé (*m*).

(*m*) Nous ne laisserons pas d'observer aussi qu' il n'en est pas de même, lorsque la matière inflammable est unie en particulier avec une de ces substances, car nous voyons que, lorsqu'elle s' y trouve dans une quantité convenable que nous nommerons saturation; les composés qui résultent ne se dissolvent plus avec la même facilité dans l' eau, ou même point du tout, ce qui paroît une preuve convaincante que c' est de son interposition, qu' on doit déduire la propriété en question.

Il me semble, d'ailleurs, que ceci tient à la théorie de la surabondance d' un des principes qui entre dans la formation d'un composé, d' où il paroît que doit dependre la facilité de leurs décompositions, ou pour prendre la chose plus généralement, du défaut d' un des principes

71. Cet effet ne doit cependant pas être regardé comme particulier au phlogiſtique, car je penſe qu'un principe qui auroit du rapport avec ceux-là produiroit du plus au moins le même effet.

Je remarquerai de même en paſſant que cette induction eſt d'autant plus fondée, qu'on voit que c'eſt de-là que dépend la diſſolubilité du Soufre dans l'eau par l'intermède de l'Alkali ſixe.

72. Ne pourroit-on pas auſſi penſer que la décompoſition des corps vient de ce que le diſſolvant a une plus grande affinité avec la partie phlogiſtique du corps dont il eſt le menſtruë, que n'en ont toutes les autres parties intégrantes de ce même corps avec la partie phlogiſtique ?

Cette conjecture, je l'avoüe, ſouffre de grandes difficultés ; mais elle n'eſt pas dénuée de probabilité, & elle pourroit être diſcutée avec plus de fondement autre part : d'ailleurs, elle paroît être le fondement de la théorie des doubles affinités.

73.

cipes, ce qui eſt d'autant plus ſenſible, que les corps ſont plus compoſés: dans cette théorie je comprens la volatilité ſoit naturelle ſoit artificielle comme le défaut d'un de ces principes, ainſi que nous verrons ailleurs.

Le travail que *M. Roüelle* a fait ſur les Sels neutres capables d'une ſurabondance d'acide ſemble confirmer ce ſentiment ; en ce qu'ils m'ont paru plus aiſés à décompoſer. L'opération du départ par l'eau-forte qui ne peut ſe faire, que lorſque la quantité de l'argent eſt au moins triple de celle de l'or.

La décompoſition du Borax pour en retirer le Sel ſédatif ſont des exemples de la ſurabondance abſoluë d'un principe.

La diſſolubilité du Soufre dans les huiles tient de même à cette claſſe; mais nous rapporterons à une claſſe oppoſée la diſſolubilité du Soufre dans l'eau par l'intermède des Alkalis, & par conſéquent, la facilité de ſa décompoſition, la facilité de la décompoſition des Sels ſulphureux &c. Ces dernières doivent être conſidérées produites par le défaut d'acide, de manière que la grande affinité qui ſe trouve entre cette ſubſtance ſaline, le phlogiſtique & les alkalis, produit à peu-près le même effet, que celui qui arrive aux Sels compoſés voyez n. du §. 7.

73. Cette décompoſition du Soufre, quelqu' extraordinaire qu' elle ſoit, eſt pourtant fondée ſur les mêmes principes que celle qui ſe fait par la cloche : on ſait que l' union du phlogiſtique à l' acide vitriolique ne peut ſe faire, que lorſque celui-ci eſt dans ſon plus grand dégré de concentration, d' où il ſuit qu' il faut rendre à l' acide le phlegme dont on l' avoit dépoüillé, pour obtenir la décompoſition du Soufre ; & c' eſt ce qui ſe fait dans cette opération, qui ſert de preuve à l' éxactitude de cette théorie, & qui eſt encore confirmée, par ce qu' on ne peut faire cette décompoſition par le moïen de la Chaux ni de l' Alkali fixe ſans le concours de l' eau; c' eſt pour m' aſsûrer de cette vérité, que j' ai fait un mélange de 8. parties de Chaux ſur une de Soufre, & de 8. parties d' Alkali de même ſur une de Soufre ; la Chaux, & l'Alkali étoient ſecs : je mis ces deux mélanges dans deux cucurbites de verre garnies de leurs Chapiteaux, & de leurs récipients bien luttés dans un bain de ſable, ayant eû ſoin de donner au commencement un feu tout-à-fait doux pour en retirer le peu d' humidité, qui ſe trouve toujours dans ces ſubſtances, quelque ſoin qu'on ſe donne pour les avoir ſéches, ſans qu' elle put favoriſer la décompoſition du Soufre ; en effet, je retirai quelques gouttes de liqueur dans les deux récipients : celle de la Chaux étoit néanmoins foiblement ſulphureuſe, & celle de l'Alkali fixe avoit une odeur urineuſe trés-dévelopée ; (*n*) lorſque la chaleur commença à être

(*n*) En rapprochant ce que nous avons dit §. 6.18. 46. 49. il eſt aîſé de voir, que les différences des phénomènes dans les réſultats des expériences qui ne différent que par quelques circonſtances, nous conduiſent à des remarques intéreſſantes. Premiérement; nous avons vû que la combinaiſon de 24. parties de Chaux ſur une de Soufre §. 46. a donné à la voûte du Chapiteau un ſublimé que je ſaturai d'acide vitriolique, & que ce qui reſta ſur le filtré étant bien déſſéché, développa une odeur urineuſe dans l' huile de tartre.

2. Que

à être un peu plus grande, il s' éleva une matière blanche dans les deux cucurbites, elle ne fut pas considérable dans le foye de Soufre, mais elle le fut dans le mélange de la Chaux, & il résulta un soufre verd le long des parois de la cucurbite, pendant qu'il n'y avoit qu'une matière à peine, colorée dans le Chapiteau.

74. La tête-morte du foye de Soufre pésoit $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$. la liqueur urineuse pésoit environ $\frac{15}{8}$; ce qui manquoit au poids total doit être assigné à ce qui a été sublimé.

On voit cependant que l' union que contracte le Soufre avec l' Alkali fixe est très-considérable, puisqu' il s' en est sublimé une si petite quantité dans laquelle on reconnoit que la plus grande partie, doit être assignée à de l'Alkali fixe qui a été volatilisé.

75. Le caput mortuum de la Chaux pésoit $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}$ le phlegme sulphuré pésoit aussi $\frac{15}{\text{gr.}}$ d' où, il suit que le subli-

mé

2. Que la liqueur du foye de Soufre, combiné avec la Chaux, & décomposé par l' addition de l' huile de vitriol, donna de même des marques sensibles d' esprit volatil §. 49.
3. Que le foye de Soufre mêlé à la Chaux §. 6. donna non seulement de l' esprit; mais un peu de Sel volatil.
4. Que le foye de Soufre sans être dissous §. 73. donna de même de cet esprit, pendant que nous n' avons qu' une liqueur qui sentoit le foye de Soufre dans une pareille combinaison noyée dans l' eau §. 18.

Je ne m' arrêterai pas à des conjéctures vagues, mais je ferai seulement observer que l' odeur volatil urineuse qui s' est manifestée par l' addition de l' Alkali fixe §. 46. & 49. prouve qu' il y étoit enveloppé par un acide; or, la dissolution de l' or arrivée par le mélange de cette liqueur à l' eau-forte, semble prouver la présence de l' acide marin: Je ne veux cependant rien assûrer sur ceci, car n' ayant pas preparé l' eau-forte moi-même, peut-être n' en étoit-elle pas tout-à-fait exempte.

mé a été de $\frac{57}{gr.}$ l'odeur de ce ſublimé étoit celle d'ail brûlé.

76. Je ne négligerai pas de rendre compte ici d'un phénomène tout-à-fait ſingulier que j'ai obſervé, à l'occaſion où je m'étois propoſé de procéder ſur l'Alkali fixe, comme j'avois fait ſur la Chaux §. 51. c'eſt-à-dire, de chercher à le ſaturer de Soufre; quoique l'opération ait manqué par la rupture du Vaiſſeau, ce qui m'a empèché de faire fond ſur les produits de la ſublimation, & de ce qui étoit paſſé dans les récipiens, la tête-morte néanmoins me fournit des obſervations aſſez intéreſſantes, pour ne pas les paſſer ſous ſilence.

Je pris le caput mortuum de la diſtillation dont nous avons parlè §. 5. & dont le poids étoit de $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$ j'y ajoûtai $\frac{6}{8}$ de Soufre dans 6. répriſes différentes, ce qui revenoit à $\frac{1}{onc.}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$ La tête-morte ne péſoit néanmoins que $\frac{2}{8}$ elle étoit d'un blanc éclatant, ſa gravité ſpécifique avoit conſidérablement diminué, elle étoit au reſte graſſe au toûcher, ſans gout & ſans odeur, enfin n'ayant aucun caractère de ſubſtance ſaline; j'en mêlai avec les acides, elle ne ſouffrit aucun changement; elle me parut ſe diſſoudre avec facilité dans l'huile de tartre, développant, en même temps, une forte odeur de phoſphore; la liqueur retirée par la diſtillation ſentoit de même cette odeur; mais elle paroiſſoit approcher beaucoup de celle de l'eſprit ſulphureux, & cela eſt aſſez naturel; car la cucurbite étant ſcellée, il ne pouvoit réſulter autre choſe, auſſi étoit-elle très-acide.

J'ai voulu diſſoudre le reſte qui ſe trouvoit être du poids de $\frac{111}{gr.}$ & il m'y a fallu $\frac{48}{onc.}$ d'eau; encore ſont-ils

reſtés

reſtés $\frac{6}{8}$ d'une matière qui ſe précipitoit toujours au fond de l'eau, & en eſt-il reſté environ $\frac{30}{gr.}$ ſur le ſiltre ce qui revient à $\frac{75}{gr.}$ de matière qui s'eſt diſſoute, je la fis évaporer à un feu très-lent, & j'en obtins un véritable Sel ſulphureux qui s'eſt criſtalliſé en aiguilles fort minces; ce Sel différoit de ceux dont nous avons parlé §. 18 en ce qu'outre à la criſtalliſation, il faiſoit une grande efferveſcence avec l'acide nitreux, pendant qu'on ne voyoit preſque pas de mouvement avec l'huile de vitriol; ce phénomene me parut bien ſingulier, lorſque j'obſervai que très-peu d'eau-forte continuoit à faire efferveſcence avec beaucoup de ce Sel mis à différentes repriſes, & qu'il ſe précipitoit auſſi tôt ſous ſa forme (*o*) criſtalline. Après en avoir mis une quantitè conſidérable, voyant que l'efferveſcence ne diſcontinuoit pas, je le fis évaporer juſqu'à ſiccité, je le diſſous enſuite & le mis de nouveau à évaporer, mais lentement, & il ne parut plus de criſtaux, mais une eſpéce de boüillie que j'eus beaucoup de peine à déſſécher. Je mis ce Sel ſur les charbons en feu, & il y eut très-peu de déflagration; il reſta une matière très-blanche, farineuſe qui reſſembloit aſſez à la Chaux lavée, par ce que je pus en juger à la ſeule inſpection.

77. Après avoir traité le Soufre avec la Chaux, la premiére idèe qui me vint dans l'eſprit, fut de voir ſi, en la mêlant aux huiles, il ſe feroit un déchet conſidérable, & ce que je pourrois obſerver dans la Chaux même.

Je

(*o*) Ce phénomène eſt tout à-fait digne d'obſervation, l'efferveſcence n'avoit lieu qu'à la ſurface de l'eau-forte, le Sel ſe faiſoit par grumeaux, de blanc il devenoit jaune, & ſe précipitoit enſuite au fond. Les vapeurs qui en exhaloient étoient celles de l'eſprit de nitre; le Sel réſultant étoit pour la plus grande partie le même qu'auparavant; il y avoit néanmoins un peu du ſalpêtre.

Je pris à cet effet onc. 2 de Chaux-vive pilée, je la mêlai à $\frac{1}{\text{onc.}}$ de charbon pilé & paſſé par un tamis très-ſerré, je mis ſur ce mélange $\frac{7}{8}$ d' huile d' olive, & après avoir mêlé exactement le tout je le mis dans une cucurbite de grés garnie d' un Chapiteau de verre bien lutté & avec ſon récipient à feu nud: je retirai d' abord une liqueur rougeâtre, enſuite un huile claire un peu empireumatique, & en troiſième lieu une huile jaune tout figée comme l' huile commune eſt en hiver, elle ſentoit fort l' empireume & reſtoit adhérante pour la plus grande partie aux parois du récipient, je filtrai la liqueur, & l' huile claire paſſa avec la première elles péſoient $\frac{3}{8}$; ayant enſuite rincé le récipient. Je trouvai que l' huile figée péſoit un demi gros, ce qu' ajoûté à $\frac{1}{8}$ pour celui qui étoit reſté ſur le filtre & aux $\frac{3}{8}$ des liqueurs filtrées, nous donne; $\frac{4}{8}\ \frac{1}{2}$ donc il eſt reſté $\frac{2}{8}\ \frac{1}{2}$ qui n' ont pas paſſé en liqueur malgré la vivacité du feu, mais une partie, il y a apparence, s' eſt ſublimée avec les parties de Chaux dont le Chapiteau étoit couvert, ſauf à la voûte tout-à-fait.

78. Le deux liqueurs mêlées enſemble à l' huile de vitriol ne donnerent aucun ſigne de changement; elles procurérent des fumées blanches d' une odeur aromatique dans l' eau-forte; elles firent un peu d' efferveſcence avec l'Alkali fixe & rougîrent le papier bleu, ce qui prouve que la première étoit ſenſiblement acide.

79. Ce qui s' étoit ſublimé étant d' une couleur rouſſe, & ſentant l' odeur d' ail brûlé. Je cherchai à le détacher du verre pour l' avoir ſous une forme concrète, mais il

 ne

ne me fut pas poſſible, tant la matière étoit graſſe. Je pris le parti de la diſſoudre dans l' eau, perſuadé que ce devoit être une eſpéce de ſavon volatiliſé par la violence du feu, elle s' eſt en effet entièrement diſſoûte, je tentai cependant en vain d' en ſéparer l' huile par le moïen de l'acide vitriolique, il ſe fit par ce moïen un précipité très-léger & par floccons.

80. Le caput mortuum étoit jaunâtre farineux ſous poudré d' un peu de charbon au centre de la ſurface ſupérieure, je l' arroſai d' eau ſans qu' il y ait eû la moindre effervescence, & je vis ſe former comme des graiſſes qui ne reſſembloient pas mal à de l'huile noire empireumatique qu' on tire de la ſuye, & comme le melange étoit trop liquide, j' ajoûtai $\frac{4}{8}$ de charbon ce qui endurcit auſſi-tôt la matière; je la détrempai avec de nouvelle eau la pétriſſant, & la ſoûmis à une nouvelle diſtillation.

81. Je retirai une liqueur claire un peu onctueuſe qui ne faiſoit aucune effervescence avec les acides, en faiſoit ſenſiblement avec l' Alkali fixe & rougiſſoit un peu les bords du papier bleu; ſon odeur étoit celle du noir de fumée. Il ſe ſublima une bande très-blanche au Chapiteau. Cette liqueur acidule & ce ſublimé me firent naitre la penſée de cohober de nouvelle eau le caput mortuum, & de voir ce que j' en aurois; je diſpoſai l' appareil, & ayant mis le même Chapiteau ſans récipient, l'évaporation qui ſe fit pendant la nuit enleva tout le ſublimé; je fis néanmoins la diſtillation, & l'eau que j' en retirai quoiqu' ayant la même odeur que la précédente ne donna aucun ſigne d'acide ni d' Alkali, il ſe forma cependant un nouveau ſublimé qui reſſembloit aux fumées que laiſſe la bonne poudre à canon ſur la batterie des mouſquets.

82. Pour m' aſſûrer ſi ces ſublimés dépendent du phlogiſtique qui entre dans ces combinaiſons, ou ſi en effet ce

ſont

ſont des parties volatiles qui exiſtent dans la Chaux, je mêlai encore $\frac{4}{8}$ de charbon à cette tête-morte délayée dans l' eau & en même-tems je mis $\frac{2}{\text{onc.}}$ de charbon dans une autre cucurbite & $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Chaux dans une troiſième pour être aſſûré des mes réſultats; il paroît même que j' aurois du commencer par-là; ſi en effet je n' avois pas regardé ceci comme un acceſſoire, ſans doute c' eut été ma marche; mais venons au fait: l' eau qui paſſa étoit rouſſeâtre onctueuſe & ſentoit l' odeur de la fumée du bois, d' ailleurs elle ne donna aucun ſigne d'acidité, il me parut à la verité qu' elle faiſoit quelque mouvement avec les acides, & que le papier bleu perdit quelque nuance de ſa couleur. Ce qui ſe ſublima au Chapiteau étoit ſi peu de choſe qu' il étoit à peine ſenſible.

83. La tête-morte étoit une matière farineuſe un peu jaunâtre, on n' y voyoit plus de veſtige de charbon quoique j' en euſſe mis un poids égal à celui de la Chaux ſans tenir compte de l' huile; ſon poids n' ètoit plus que d' $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$. Nous avons rémarqué §. 77. que la tête-morte après la première diſtillation devoit avoir augmenté de $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ le poids de la Chaux employée qui étoit de $\frac{2}{\text{onc.}}$; or il faut de toute néceſſité qu' il ſe ſoit volatiliſé $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ gros, de ces ſubſtances par l'intermède de l' eau; il me paroît naturel d'aſſigner cet effet à l' eau (*p*) car nous voyons qu'elle

(*p*) C'eſt ici le dénoüement du doûte propoſé §. 28.

qu' elle étoit toujours chargée de couleur; la premiere sur tout donnoit des marques sensibles d' un Sel acide: une partie doit donc avoir été confonduë ou dissoûte par l'eau même, l' autre qui sans doûte n' étoit pas la moins considérable est celle qui s' est sublimée au Chapiteau les trois premières fois sur tout.

Cette volatilisation de la Chaux ne me paroît pas néanmoins l' effet de l'art, & semble nous convaincre que l' eau seulement est le véhicule propre à dégager ces parties, qui existent telles dans la Chaux, sans que le phlogistique concoure à cet effet, si ce n' est qu' en s' engageant à la Chaux, l' eau qui est dans les corps dont il arrive la décomposition, par sa privation, puisse alors opérer (q) cette séparation des principes fixes, & volatils de la Chaux; en effet nous voyons que la quantité de matière qui se sublime va toujours en diminuant, qu' elle continuë à se faire sans addition de phlogistique, & par le seul intermède de la nouvelle eau qu' on ajoûte.

84. Je crois de pouvoir me dispenser d'examiner ce qui regarde les Sels nitreux avec la Chaux; ce sujet ayant été traitè avec plus d' étenduë par des Savans du premier ordre (r) sous un point de vüe, exige un temps plus long que celui que je pourrois y donner pour le présent. Il me suffit de rendre compte ici, que non seulement le nitre

(q) Les résultats dont nous avons rendu compte §. 81. 82. semblent nous prouver qu'il arrive le changement en question; car quelque soin que je me fusse donné pour priver la Chaux, & l'Alkali fixe de toute humidité, il est néanmoins passé un peu de liqueur, & il s'est formé à la voûte du Chapiteau un peu de sublimé blanc qui avoit les caractères de ceux dont nous avons parlé §. 8. & 23. la petite quantité cependant de ces produits nous a encore fait connoître que ce n'est qu'à la faveur de l'eau que le Soufre peut être décomposé.

(r) Outre les observations de *M. Du-Hamel*, on trouve dans le recüeil des ouvrages de *M. Pott* un excellent mémoire dans lequel il rectifie bien des choses, qui avoient été avancées par d'autres Savants.

nitre calcaire eſt moins inflammable que le ſalpêtre commun, mais que la Chaux ſulphurée ne fait point détonner ce Sel, & que la poudre à canon diſſoûte dans une eau de Chaux, cohobée pluſieurs fois ſur de nouvelle Chaux, perd beaucoup de ſon inflammabilité.

Le travail que l' Illuſtre M. Du-Hamel a fait ſur la Chaux, & ſur le Sel ammoniac a jetté un ſi grand jour ſur cette matière, qu' il ne reſte plus que quelques expériences à faire, & dont il en a tenté quelques unes lui-même.

85. Celle qui paroît être la plus naturelle, & en même temps déciſive eſt ſans doute celle, par laquelle il s' étoit propoſé de faire du Sel volatil en chargeant la Chaux de phlogiſtique; mais comme je n' ai pas vû la ſuite du travail dans laquelle il ſe propoſe la réſolution de ce problême, j' ai cherché s' il étoit poſſible de réuſſir par un (*t*) procédé différent de celui dont le Savant M. Baume' a fait uſage. Ce procédé quelqu' ingénieux, & quelqu' élégant qu' il ſoit, me paroît néanmoins ſouffrir des difficultés pour la réſolution du problême en queſtion: ceci ne doit cependant diminuer en rien le mérite du travail

(*t*) Comme il n' eſt pas poſſible de ſe procurer tous les éclairciſſemens néceſſaires pour développer les cauſes qui produiſent, ou qui concourent à un effet dans un ſujet quel conque, ſans chercher à déterminer s' il n' eſt produit que dans un cas particulier, où ſi c' eſt une loi conſtante dans des circonſtances déterminées (ce qui emporte la néceſſité de comparer le plus grand nombre de réſultats qu' il eſt poſſible, & qu' on obtient des variations de quelque circonſtance que l' on tâche de ſe ménager) on ne ſera pas ſurpris ſi, m' étant propoſé l' examen de quelques phénomènes qui réſultent de l' action de la Chaux ſur le Sel ammoniac, je donne une quantité d' expériences où la Chaux n' y entre pas, & qui ne doivent ſervir qu' à me faciliter le developpement de l' objet que je me ſuis propoſé. Je ne crois cependant pas de devoir négliger quelques obſervations, & quelques réfléxions qui ſe préſentent naturellement dans le cours de ces expériences, & je me fais un plaiſir de reconnoître que ce travail ne doit être regardé, dans cette partie, que comme une ſuite de celui du Savant *M. Du-Hamel.*

travail de M. BAUME'; car il eſt en effet parvenu à faire non ſeulement du Sel volatil en employant la Chaux pour intermède, mais il a encore tellement dénaturé la Chaux, qu' il dit lui-même l' avoir convertie en Alkali fixe; d' ailleurs ſon but n' a pas été d' examiner, ſi ce Sel volatil étoit produit entièrement par la décompoſition du Sel ammoniac, ou s' il ne s' en trouvoit pas une partie, qui fut produite par la matière animale avec laquelle il avoit phlogiſtiqué la Chaux; (*t*) mais ce fut pour réfuter un problême propoſé dans le journal de Médecine en Octobre 1762. dans lequel il eſt annoncé qu' on peut obtenir par le moïen de la Chaux-vive pure, l' Alkali volatil du Sel ammoniac ſous la forme fluide ou concrête, à la volonté de l' artiſte: on voit que c' en étoit aſſez pour démontrer l' *inſubſiſtance* de l' énoncé du problême; mais en eſt il de même pour la réſolution du problême propoſé par le Savant M. DU-HAMEL? Je crois qu' elle ſuffit pour démontrer, que tant que la Chaux ne change pas ſa nature, elle ne peut donner de Sel volatil.

86. Voici les difficultés qui me paroiſſent encore ſubſiſter dans leur entier.

Primo. La Chaux chargée d' une matière qui contienne du phlogiſtique, & dans laquelle on ne puiſſe ſoupçonner rien

(*t*) On pourroit objecter que par la violence du feu qui eſt neceſſaire pour cette opération, l' Alkali volatil auroit dû ſe diſſiper; mais il me paroît qu'on ne feroit pas bien fondé à penſer ainſi; car l' Alkali volatil n' exiſtant pas par lui-même dans ces matières, & n' étant qu' une production de l' art, il eſt naturel de croire que la Chaux qui eſt capable de le retenir avec tant de force dans la combinaiſon qu' on fait de cette ſubſtance avec le Sel ammoniac, doit de même empêcher la diſſipation qui s' en feroit en ſe combinant avec le Sel ammoniacal dont cet Alkali fait partie: il eſt vrai qu'on pourroit même nier la préſence ou la formation de ce Sel ammoniacal, comme n' étant pas démontrée, ſi l'on réfléchit cependant ſur les produits de l' analyſe du ſang, on verra que la choſe n' eſt pas tout-à-fait hors de vraiſemblance.

rien de volatil, donne-t-elle du Sel volatil avec le Sel ammoniac ?

Secundo. L' eſprit volatil fait par la Chaux-vive, ou par les Chaux métalliques n' enleve-t-il rien de l' intermède ?

87. Voici les expériences que j' ai faites ſur ce ſujet : je commencerai par celles qui ſe rapportent à la première queſtion.

Je mêlai auſſi exactement qu' il me fut poſſible deux parties de charbon végétal ſur une de Chaux, & j'en fis une pâte avec de l' huile d' olive, je la mis dans un creuſet au feu, que je fis rougir à blanc aprèſque l' huile fut toute brûlée & réduite en charbon ; je retirai alors cette Chaux, & la pétris avec de nouvelle huile, rémettant ce mélange dans un creuſet au feu, je réïterai enfin trois fois cette opération.

88. La Chaux ainſi chargée des matières graſſes, & expoſée à un très-grand feu ſoûtenu pendant long tems ſe réduit en une pouſſière brûne ſéche qui ne fait plus d' efferveſcence avec l' eau ; j' en pris $\frac{9}{8}$ que je mêlai avec $\frac{3}{8}$ de Sel ammoniac dans une cucurbite de verre ſur un bain de ſable ; je commençai par un feu doux que j' ai pouſſé enſuite juſqu' à faire rougir le fond de la cucurbite: il paſſa un peu de liqueur foiblement urineuſe dans le récipient, & le Sel ammoniac s' éléva le long des parois du verre, ſans qu' il ſe ſoit fait le moindre atôme de Sel volatil: je décoëfai l' alembic, & je mis $\frac{9}{8}$ d'eau de pluïe ayant ſoin de faire diſſoudre autant qu'il m'étoit poſſible le Sel qui s' étoit élevé, mais comme il en étoit paſſé dans le récipient même, & qu'il en étoit reſté dans le bec du Chapiteau, je ne crois pas que la quantité diſ-

ſoûte

ſoûte par l' eau put arriver à $\frac{2}{8}$; je commençai de même par un feu tout-à-fait doux, & lorſque la diſtillation fut achevée, je pouſſai le feu à la dernière violence & il ſe ſublima ſur la fin une petite quantité de matières blanches, qui s'eſt néanmoins réſoûte en liqueur en continuant l' opération ; le Chapiteau ne ſentoit pas d'odeur urineuſe & tenoit plutôt une foible odeur de foye de Soufre, ce qui s' accorde parfaitement bien avec les expériences de M. MALOUIN ; la liqueur étoit du véritable eſprit de Sel ammoniac qui tenoit cependant en diſſolution une certaine quantité du même Sel, ſavoir celui qui avoit paſſé dans le récipient à la première diſtillation, & ce qui m' a prouvé que ce n' étoit point un Sel volatil ce ſont les vapeurs blanches qui éxhaloient du mélange de cette liqueur avec les acides vitrioliques & nitreux dans le temps de l'efferveſcence; phénomène cependant qui n' a pas lieu lorſqu'on mêle à ces acides un eſprit de Sel ammoniac tiré de la Chaux qui ſoit exactement pur : (*u*) une autre indice qui a ſervi encore à me confirmer dans ce ſentiment, c' eſt le mouvement qui s' eſt excité dans cette liqueur par le mélange d' un peu de Sel de tartre, ce qui a augmenté conſidérablement la force de cet eſprit.

Un phénomène cependant tout-à-fait digne de remarque, c'eſt la couleur verte decidée que cet eſprit fait prendre au papier bleu, ce qui paroît encore confirmer ce que nous avons dit à la n. du §. 70.

89.

(*u*) Je dis un eſprit éxactement pur, car il arrive très-ſouvent que par un coup de feu trop vif du commencement de l' opération, d'une proportion peu convenable entre le Sel ammoniac & la Chaux, il paſſe du Sel dans le récipient ; auſſi ne ſauroit on aſſez prendre de précautions.

89. N' ayant pû réussir par ce procédé à retirer du Sel volatil, je me doûtai que cela eut pû provenir d' une trop grande quantité de matières grasses dont j' aurois impregnée la Chaux, & comme je n' étois pas dans le cas de chercher par un tâtonnement trop long à déterminer la quantité qui pourroit être-nécessaire pour procurer à la Chaux cette propriété étrangère à sa nature ; je me flattai d' y parvenir de même en broyant ensemble du charbon à la Chaux, & en combinant ensuite ce mélange avec un tiers de son poids de Sel ammoniac.

90. Quoique je fusse assûré que le charbon ne peut pas par lui-même décomposer le Sel ammoniac, pour m'en convaincre cependant par l'expérience, je fis aussi un mélange de charbon & de ce Sel dont en effet je ne retirai rien.

Dans la première de ces combinaisons, la Chaux, le charbon & le Sel ammoniac que je mis dans une cucurbite de terre étoient en égale quantité, & il me résulta une liqueur insipide & sentant très-fort l'empireume avec du Sel concrêt à la voûte du Chapiteau, ce Sel n' étoit cependant que des fleurs de Sel ammoniac comme je m' en suis assûré en en mettant dans l' huile de vitriol avec l' huile de tartre, & la Chaux.

La liqueur quoiqu' insipide & sans odeur urineuse donnoit les mêmes signes, de manière que je ne savois si le défaut de saveur & d' odeur urineuse devoit être attribué à la surabondance des matières grasses dont elle avoit les caractères les plus marqués, savoir l'onctuosité, l' odeur très-empireumatique, la couleur rougeâtre, l'odeur sulphureuse qu' elle manifestoit avec l' huile de vitriol ; ou à ce que la plus grande partie du Sel ammoniac fut passée sans se décomposer en forme liquide : ce sentiment me parut le plus probable ; mais avant toutes choses je crus devoir réitérer cette expérience en variant la dose des matières.

91. Je retirai donc d'un mélange d'une partie de Chaux-vive ſur deux de charbon & une de Sel ammoniac une liqueur dont l'odeur approchoit très-fort de la précédente, & le Sel qui s'étoit ſublimé en plus grande quantité avoit un peu d'odeur urineuſe, à-peu-près comme les fleurs ammoniacales métalliques.

92. Je repaſſai une partie de ce Sel ſur deux parties de nouvelle Chaux-vive, mais les produits furent très-peu conſidérables; car ayant employé un gros de ces fleurs, je ne retirai que quelques grains de nouvelles fleurs de Sel ammoniac & quelques goûtes d'eſprit urineux, malgré que j'euſſe fait cette opération à feu nud dans une cucurbite de terre.

93. Quelque ſoin donc que je me ſois donné je n'ai pû parvenir à retirer du Sel volatil de la Chaux chargée de phlogiſtique tiré d'une ſubſtance végétale (*x*).

Je

(*x*) La Chaux ainſi chargée de phlogiſtique & ſaturée enſuite d'acide vitriolique, donne par la diſſolution, filtration & l'évaporation un Sel qui ne m'a pas paru différer de l'alun de plume & qu'on ne doit cependant pas confondre avec l'amiante comme fait *M. Lemery*, celui-ci eſt d'un goût aſtringent un peu douceâtre blanc comme de la neige, forme des végétations en bouquets par une évaporation moïenne, ſe bourſouffle ſur le feu, enfin il a tous les caractères de ce Sel qui eſt fort rare, & qui par-là peut devenir très-commun. Je ne ſache pas que perſonne ait encore donné la manière d'en faire, ni cherché à connoître ce qui entre dans ſa compoſition.

Je décompoſai cet alun par l'addition de l'eſprit volatil dans l'eſpérance de retirer un nitre, fondé ſur les expériences de *M Vallerius* & de *M. Pietſch*. Le premier diſant qu'il avoit retiré de ce Sel par la combinaiſon de l'acide vitriolique avec l'huile de l'eſprit de vin & le Sel de tartre, & rapportant en même tems que ce dernier en avoit fait avec du vitriol, de l'urine putrefiée & de la Chaux: or comme il ſuivroit de ces expériences que le nitre ne feroit que l'acide vitriolique dénaturé par l'Alkali volatil qui ſe développe par la putréfaction, ou ſelon le premier que ce même acide chargé de matière phlogiſtique eſt combiné à un Alkali fixe; j'ai voulu voir ſi cette combinaiſon m'en fourniroit, mais je n'ai retiré que du Sel ammoniacal ſecret.

Je ne prétends pas dire pour cela que la chose ne soit pas possible ; si le problême de M. BAUME' est soluble dans cette circonstance, on voit qu'il ne rencontre plus de difficultés ; mais la résolution du problême proposé par ce Savant ne seroit-elle pas plus facile, si on employoit la pierre à Chaux, la craye, ou toute autre substance capable de se convertir en Chaux, mais qui n'eut pas encore souffert l'action du feu, au lieu de se servir de la Chaux-vive ?

Comme c'est une question qui ne peut être décidée que par le fait, je me dispenserai d'exposer les raisons qui me déterminent à penser qu'il y ait un plus grand dégré de probabilité & qui m'ont engagé à proposer cette conjecture.

Les résultats des dernières expériences & les réfléxions que m'ont fourni d'autres qui sont très-connuës sur le Sel ammoniac, conjointement à celles du Savant M. DU-HAMEL, m'ont engagé à en faire de nouvelles dont je vais rendre compte.

Pour plus grande clarté, je commencerai par exposer quelques corollaires que cet Illustre PHYSICIEN a tirés de son travail rempli de sagacité.

„ I.º Toutes les fois que l'urineux ammoniac paroît
„ dans la distillation en forme concrête, c'est qu'il a em-
„ portée avec lui une portion concrête de l'intermède
„ avec lequel on l'a distillé.

„ II.º Toutes les fois qu'on a cet urineux en
„ forme d'esprit, c'est qu'il a passé dans la distillation
„ avec l'eau qui étoit contenuë dans les matières, &
„ qu'au lieu d'être joint à un substance solide qui lui
„ donne du corps, il l'est à un liquide qui le fait pa-
„ roître sous cette forme qui lui est propre.

Après les expériences que nous venons de rapporter, tout cela ne souffre plus de difficulté ; mais pourquoi la craye passe-t-elle avec l'urineux dans la distillation, & que la Chaux resiste si puissament à ces effets?

94. Il nous est encore moins difficile de répondre à ces difficultés après ce que nous avons dit de la Chaux §. 83.; car nous avons démontré que la partie volatile de cette substance ne peut en être dégagée qu'à la faveur de l'eau qu'on y mèle & dont il est probable, comme nous le verrons dans la suite, que dépend la décomposition du Sel ammoniac; mais comme elle n'est pas en grande quantité, il est naturel de penser que l'eau qui lui sert de véchicule en quelque petite quantité qu'elle soit elle même, peut toujours dissoudre le Sel volatil qui se dégage par ce moïen (y).

95. L'éxamen des différences qu'on reconnoît dans plusienrs opérations entre l'esprit volatil tiré par la Chaux & celui que l'on obtient avec les Alkalis fixes, m'avoit fait penser aussi que l'esprit urineux fait avec la Chaux n'emportoit point de son intermède concrêt; je crus cependant devoir m'en asûrer, & je fis dans ce dessein l'expérience suivante.

Je distillai du Sel ammoniac avec de la Chaux éteinte à l'air dans une cucurbite de terre à laquelle j'avois adapté un Chapiteau ouvert à sa partie supérieure, pour qu'il put avoir la communication avec un second Chapiteau de verre que j'avois soigneusement lutté au premier qui étoit de terre garni de son réfrigératoire, au moïen du quel, en remplissant une grande partie de sa cavité, je pouvois mettre du feu autour du second Chapiteau; je décomposai de cette manière l'esprit volatil en trois parties, c'est-à-dire en une liqueur très-limpide qui sentoit un peu l'urineux & qui étoit passée par le bec du premier Cha-

(y) Ceci ne suffit pas encore pour rendre raison de ce fait, mais nous en trouverons le dénoüement par la suite.

Chapiteau. Une couche de terre blanche insipide, sans aucune odeur urineuse & aussi mince qu' une feüille de papier laquelle adhéroit fortement au verre, & formoit comme une zone qui tenoit du rebord du Chapiteau jusqu' au commencement de la voûte. Une seconde liqueur très-rousse & sans odeur qui avoit passé par le bec du second récipient.

96. La première qui étoit limpide ne paroissoit pas augmenter son odeur urineuse par l'addition de l'Alkali fixe, au contraire la seconde développoit cette odeur avec beaucoup de force en y mêlant du Sel de tartre ou de la Chaux.

97. La matière blanche dont je viens de parler ne me paroît être autre chose que la partie terreuse du Sel sélénitique de la Chaux qui n'est que la crême de la Chaux même, laquelle est la véritable partie volatile dont nous avons parlé; en effet, j' en ai retiré du Sel sélénitique en y ajoûtant un peu d' huile de vitriol affoibli par beaucoup d' eau, & il s' est même reproduit une croûte cristalline un peu opaque & assez semblable à la crême de Chaux à la surface de la liqueur; l' odeur fort-urineuse qui se développa de la seconde liqueur par le mélange de la Chaux ou de l' Alkali fixe, semble nous prouver la présence d' un acide qui formoit un Sel ammoniacal; & je pense que c' est le même qui étoit auparavant engagé à la terre en question, & qui formoit avec elle la sélénite; pour me convaincre de la verité de cette opinion, je fis une distillation d' une partie de Sel ammoniac sur deux parties de crême & d' eau de Chaux que j' avois fait évaporer à siccité, mais n' ayant obtenu qu' une très-petite quantité de liqueur urineuse le Sel ammoniac s'étant sublimé, je decoëffai l' alembic, & je mis une quantité assez considérable d' eau, ayant eû soin de dissoudre autant qu' il m'étoit possible le Sel ammoniac: j' en fis ensuite

ſuite la diſtillation, & j'obtins une liqueur foiblement urineuſe, un Sel par floccons à l'orifice de la cucurbite & au bord du Chapiteau; ce Sel me parut ne ſouffrir aucune altération de la part de l'eau-forte, quoiqu'il fît efferveſcence avec l'huile de vitriol; il ne m'a pas été poſſible de bien conſtater ſi ce Sel étoit réellement un Sel ammoniacal vitriolique, je ſuis cependant très-porté à le croire tel; la tête-morte étoit d'ailleurs un Sel ammoniac fixe très-déliqueſcent qui ſe bourſouffloit & qui ſe fondoit au feu en répandant des vapeurs fort épaiſſes.

98. Cette expérience m'engagea naturellement à examiner ce qui réſulte du mélange du Sel ammoniac avec la Chaux bien lavée; je pris pour cela une quantité de Chaux éteinte, je la lavai douze fois dans de l'eau toujours nouvelle & toujours boüillante, je la fis enſuite deſſécher ſur un ſupport de mouffle & j'en mêlai $\frac{3}{\text{onc.}}$ avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac; je retirai par la diſtillation environ $\frac{3}{8}$ d'eſprit volatil, & il ſe ſublima à la voûte un Sel très-blanc qui avoit de l'odeur urineuſe; comme il y en avoit cependant très-peu, je ne pus pas m'aſſûrer s'il ne ſe trouvoit pas encore un peu de Sel ammoniac avec l'Alkali urineux: ce qui cependant m'a donné lieu de former ce doûte, c'eſt la grande quantité de vapeurs blanches & ambrées qu'il répandit en y mêlant de l'huile de vitriol; M. Du-Hamel pourtant qui avoit déja fait cette expérience avec quelque changement dans les circonſtances, dit que le peu de Sel qu'il en retira étoit de l'Alkali volatil; ce qui ſuffit pour tenir en ſuſpend mon jugement ſur une expérience que je n'ai pû répéter & qui doit être faite plus en grand. Je me contenterai pour le préſent de faire remarquer que la tête-morte avoit été fonduë; ſa couleur étoit d'un roux clair comme

ſont

sont les briques avant d' avoir souffert l' action du feu; sa saveur étoit un peu douceâtre & avoit quelque peu d'astringent; elle attiroit l' humidité à-peu-près comme le Sel marin qu'on fait avec la craye, mais beaucoup moins que le Sel ammoniac fixe.

99. Ayant reconnu que dans toutes les décompositions du Sel ammoniac pour en tirer l' urineux volatil, il se fait un enlévement d' une partie de l' intermède concrêt; je me déterminai à reprendre mon travail de plus loin, en commençant par l' éxamen des effets qui arrivent au Sel ammoniac sans intermède par le feu différement administré, & ensuite par ceux que présente la combinaison de ce Sel avec d' autres matières.

EXPÉRIENCE PREMIÈRE.

Distillation du Sel ammoniac à feu nud.

Sel ammoniac fluor.

100 UNE once $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau dans une cucurbite de terre, garnie d'un Chapiteau de verre, me donna à un feu d' abord assez vif $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}$ de liqueur teinte un peu en jaune, foiblement salée & amère, développant sur la langue un goût lixiviel qui dégéneroit en un goût urineux: son odeur étoit un peu empircumatique, elle donna des vapeurs blanches & épaisses en grande quantité avec l' huile de vitriol, s' échauffa & boüillonna considérablement; elle manifesta une forte odeur urineuse avec la Chaux-vive en quelque petite quantité que je l' eusse mise, pendant qu' il falloit beaucoup d'Alkali fixe pour lui faire développer foiblement cette odeur.

Il eſt clair que cette liqueur n' eſt (z) que du Sel ammoniac diſſoût dans beaucoup d' eau.

II.^e

(z) Je voulus m' aſſûrer ſi cette réſolution en liqueur dépendoit de ce que le phlogiſtique eut abandonné cette partie du Sel pour s' unir plus intimément à la partie du Sel ammoniac qui ne paſſe pas en liqueur , ou ſi c' étoit ſeulement à cauſe de la ſurabondance de l'eau dont ce Sel eſt chargé ; j' en mis à cet effet $\frac{7}{8}$ avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ de noir de fumée , & j'en fis la diſtillation au bain de ſable. Il me vint premièrement une liqueur un peu opaque qui donnoit quelques fumées avec l' huile de vitriol , & ne donnoit d' autre odeur avec la Chaux & l' Alkali fixe que l' empireumatique qu' elle avoit naturellement ; il ſe forma enſuite une petite quantité d'une ſubſtance blanche qui reſſembloit aſſez à du Sel ammoniac & qui fut détruite par une huile jaune très-empireumatique qui s' éleva après & qui paſſa dans le récipient : comme j' ai fait cette opération au bain de ſable, je n'ai pas pû pouſſer la tête-morte à un feu ſuffiſant pour décider ſi après l' huile noire *je* n' obtiendrois pas du véritable Sel ammoniac : mais comme d' autre part l' Alkali volatil qui ſe trouve dans le noir de fumée pouvoit cauſer des altérations à ce produit , je crus inutile de pouſſer plus loin l' opération , d'autant plus que ces premiers réſultats ſuffiſoient pour me faire connoître que la ſurabondance d' eau eſt la cauſe principale de la liquidité du Sel ammoniac dans le procédé dont nous avons rendu compte ; que ce Sel ammoniac fluor n'eſt cependant plus auſſi chargé de matière phlogiſtique que lorſqu' il eſt ſous la forme concrête ; & cela me paroît d'autant plus ſûr que les fleurs de Sel ammoniac qui ſe ſubliment, après que la liqueur eſt entierément paſſée, ſont d'une couleur jaune très-foncée , & les dernières même ſont rouges.

II.^e EXPERIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac au bain de ſable.

Fleurs de Sel ammoniac.

101. JE fis en même tems cette opération dans une cucurbite de verre au bain de ſable, ayant pris la précaution de bien étendre le Sel ammoniac en lui faiſant occuper tout le fond de la cucurbite, mais je ne retirai que 5 à 6 goûtes de liqueur laquelle étoit conſidérablement urineuſe; le reſte du Sel ſe ſublima, n' étant reſté au fond du vaiſſeau qu' un peu de matière noire; je remarquai cependant que cette ſublimation peut être diviſée en trois parties; la première qui ſe fait à un feu tout-à-fait moderé, & les fleurs en ſont blanches; la ſeconde qui éxige un plus grand dégré de feu, & elle ſe fait principalement au parois de la cucurbite, y adhére fortement & paroît preſque avoir ſouffert la fuſion; la troiſième qui n' a lieu qu' après un dégré de chaleur beaucoup plus grand & long-tems continué; on obtient par celle-ci des fleurs d' un jaune très-foncé.

Nous déduirons de ces deux expériences. I.° Que toutes les fois que le Sel ammoniac entre en fuſion avant que de ſe ſublimer, il doit paſſer pour la plus grande partie en liqueur.

2.° Que la différence dans l' adminiſtration du feu, ſoit par rapport à ſa vivacité & ſa force abſoluë, que rélativement aux Vaiſſaux dont on fait uſage pour les opérations, apporte une différence totale dans les réſultats.

III.e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac, qui n'a pas paſſé en liqueur dans la première expérience, avec la Chaux-vive.

Eſprit volatil cauſtique ; Sel ſublimé très-blanc.

102. SUR ce qui eſt reſté dans la cucurbite de la première expérience §. 100. je mis environ deux onces de Chaux-vive, & après avoir lutté le Chapiteau & le récipient, j'en fis la diſtillation dont je retirai un peu plus de $\frac{3}{8}$ d'eſprit très-pénétrant, & d'une couleur jaune avec quelques grains d'un ſublimé très-blanc. La tête-morte avoit une ſaveur très-picquante, elle étoit d'une couleur rouſſeâtre & avoit été fonduë.

103. Le réſultat dont je viens de rendre compte, m'engagea à éxaminer ſi en enlevant ſeulement au Sel ammoniac une partie de l'eau qu'il rétient toujours en grande quantité, on peut parvenir à le décompoſer, & ſous quelle forme l'Alkali volatil ſe préſente.

Nous remarquerons en attendant. I.o Que le Sel ammoniac, qui ne ſouffre aucune décompoſition avec la Chaux-vive comme l'a très-bien obſervé le Savant M. Du-HAMEL, peut cependant être décompoſé, au moins en partie, lorſqu'il eſt ainſi privé d'une grande partie de ſon eau. 2.o Qu'on doit néceſſairement convenir qu'il emporte des parties de l'intermède fixe ce qui confirme ce que j'ai dit dans les §§. précédents.

IV.ᴱ EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac légerement calciné avec la Chaux-vive.

Eſprit volatil cauſtique ſublimé en efflореſcence ſentant l'urineux.

104. SUR cette idée je pris $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de Sel ammoniac en gâteau, & l'ayant mis dans un creuſet au au feu, je le réduiſis à $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{2}{8}\ \frac{1}{2}$ & le mêlai à $\frac{3}{\text{onc.}}$ de de Chaux-vive que je fis encore deſſécher à un feu violent, (*aa*) j'obtins par la diſtillation environ $\frac{6}{8}$ de liqueur d'une force extrêmément pénétrante & d'une couleur jaune ſemblable à celle que l'on retire par les ſubſtances métalliques. On voyoit au ſurplus dans la cucurbite & dans le Chapiteau une eſpéce d'efflореſcence terne & acide qui ſentoit un peu l'urineux en la paſſant entre les doigts. La tête-morte péſoit $\frac{3}{\text{onc.}}\ \frac{4}{8}\ \frac{24}{\text{gr.}}$, elle étoit ſpongieuſe paroiſſant comme criblée, rouſſeâtre, très-picquante attirant beaucoup l'humidité, elle ſembloit au reſte avoir été fonduë de même que la cucurbite. (*)

(*aa*) Quoique la Chaux n'eut pas encore attiré l'humidité de l'air, & que j'euſſe eû la précaution de choiſir une groſſe maſſe dont j'avois ôté une couche aſſez conſidérable. Je crûs devoir lui faire eſſuïer cette opération pour être toujours plus aſſûré du fait.

(*) Cette expérience découle naturellement de la précedente & lui ſert de confirmation.

V.[e] EXPÉRIENCE.

Répétition de la précédente avec du Sel ammoniac privé d' une plus grande quantité d' eau.

105. CEtte ſingulière décompoſition me porta à chercher, ſi en calcinant davantage le Sel ammoniac, je pourrois obtenir du Sel volatil au lieu d' eſprit.

Je réduiſis à cet effet $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de ce Sel à $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{2}$, je le mêlai avec trois onces de Chaux-vive qui avoit été expoſée à un grand feu pendant plus d' une heure; j' obtins par la diſtillation de ce mélange près de $\frac{4}{8}$ d' eſprit urineux très-pénétrant & d' une couleur jaune comme le précédent avec des taches blanches comme celles dont j' ai parlé précédement; & quoiqu' elles fuſſent en plus grande quantité, je n' en pus pas recüeillir aſſez pour les examiner.

VI.[e] EXPÉRIENCE.

Addition de l' eau enlevée au Sel ammoniac par la calcination.

Eſprit volatil.

106. JE voulus au reſte voir ſi en rendant à la tête-morte & à cette ſubſtance blanche la quantité d' eau à-peu-près que j' avois enlevée au Sel ammoniac, je retirerois encore une quantité conſidérable d' eſprit volatil, ou au moins toute l' eau que j' ajoûtois, & comme je ne doûtois pas qu' il ne ſe fut diſſipé de l' Alkali volatil & de l' acide marin dans la calcination, j' ai crû

ne

ne devoir employer qu' une plus petite quantité d' eau, c' eſt pourquoi je n' en mis que $\frac{2}{8}$, & après avoir ſcellé avec ſoin les vaiſſeaux, j'en fis la diſtillation en commençant par un feu doux & le pouſſant ſur la fin juſqu' à faire fondre la partie inférieure de la cucurbite, mais je ne retirai plus qu' $\frac{1}{8}$ d' eſprit.

Voici un réſultat tout-à-fait ſingulier; nous avons obſervé §. 102. que la quantité d' eſprit dans cette expérience étoit un peu plus grande que celle du Sel ammoniac qui reſtoit dans la tête-morte de l' expérience §. 100., & qu' au ſurplus il ſe ſublima quelques grains d' une matière blanche; nous voyons par celle-ci que bien loin d'excéder la quantité d' eau nouvellement ajoûtée, nous n' en avons pû retirer que la moitié; mais il eſt bon d' obſerver que malgré que le fond de ma cucurbite ait été fondu, le dégré de feu néanmoins n'aura pas été auſſi conſidérable que celui qu' a ſouffert l'autre cucurbite qui étoit de terre, & à feu nud.

Quant à l' augmentation du poids, elle doit être attribuée aux parties de Chaux qui ont été enlevées dans l'opération ce qui ne paroit pas avoir beſoin de plus grande démonſtration, les réſultats des expériences dont j' ai rendu compte ci-devant me paroiſſant plus que ſuffiſantes pour nous convaincre de cette verité.

VII.[a]

VII.^E EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le Sel ammoniac fixe.

Eſprit volatil ſublimé très-blanc.

107. JE fus curieux d'obſerver ce que le Sel ammoniac fixe donneroit avec du nouveau Sel ammoniac.

Je mêlai à cette fin $\frac{4}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ du Sel ammoniac fixe réſultant des expériences 104. & 105 avec $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{1}{2}$ de Sel ammoniac ſans être privé d'eau, & j'obtins environ $\frac{1}{\text{onc.}}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ d'eſprit urineux $\frac{1}{8}$ d'un ſublimé très-blanc, & $\frac{16}{\text{gr.}}$ d'une matière de même ſublimée qui étoit extrêmément graſſe & qui adhéroit très-fort au verre, l'ayant détachée avec un pinceau, elle étoit d'un gris cendré; étant brûlée ſur du papier à la chandelle, elle donna un couleur verte à la flamme; ſon goût étoit très-ſalé, & très-picquant ſur la langue, moins cependant que celle du ſublimé blanc qui communiquoit de même la couleur verte à la flamme. La tête-morte péſoit $\frac{4}{\text{onc.}}$ & un peu plus de $\frac{4}{8}$ elle attiroit très-fort l'humidité, ſa couleur étoit rouſſeâtre, ſa ſaveur étoit (*bb*) brûlante, ſa texture enfin friable entre les doigts; ſon poids ne fut pas conſidérablement augmenté.

108. Mon plan étant celui de rapprocher les différens phénomènes que préſentent les décompoſitions du Sel ammoniac faites par différens intermèdes, je ne ſaurois négliger

(*bb*) Cette ſubſtance me paroît devoir être miſe au nombre des cauſtiques plus puiſſants.

gliger de rendre compte de ce que j'ai obſervé de plus remarquable dans la répétition que j'ai faite des opérations d'ailleurs trés-connuës.

VIII.E EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec la grenaille de plomb.

Eſprit volatil cauſtique.

Plomb corné.

JE pris $\frac{2}{\text{onc.}}$ de plomb grenaillé que je mis dans une cucurbite de verre avec $\frac{6}{8}$ de Sel ammoniac: le feu fut adminiſtré dans le commencement avec beaucoup de précaution, pour que le Sel ammoniac ne ſe ſublima point, & fut pouſſé ſur la fin avec beaucoup de vivacité, de manière que le fond de la cucurbite s'étoit preſque fondu.

Il paſſa dans le récipient un eſprit jaune dès-plus pénétrants & dont la force étoit encore augmentée par l'addition du Sel de tartre, ce qui me fit conjecturer qu'il étoit paſſé un peu de Sel ammoniac fluor avec l'eſprit urineux; j'en fus d'autant plus convainçu que cet eſprit faiſoit une violente efferveſcence & s'échauffoit très-fort pas le mélange de l'huile de vitriol, répandant dans ce tems beaucoup de vapeurs blanches qui avoient une forte odeur d'eſprit de Sel; il ſe ſublima enſuite des fleurs de Sel ammoniac d'un jaune foncé qui contenoient un peu de plomb: les deux tiers environ de la téte-morte étoient convertis en plomb corné, & ce plomb corné en occupoit la partie ſupérieure, & adhéroit comme des ſcories à la partie inférieure qui étoit formée par le plomb qui avoit été fondu & que l'acide n'avoit point attaquée.

IX.ᴱ EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le plomb & la Chaux-vive.

Eſprit volatil cauſtique.

109. DE la diſtillation d'$\frac{1}{\text{onc.}}\,\frac{1}{2}$ de plomb avec $\frac{1}{\text{onc.}}\frac{1}{2}$ de Chaux-vive, & $\frac{9}{8}$ de Sel ammoniac je retirai de même un eſprit cauſtique très-pénétrant & d' une couleur jaune; cet eſprit faiſoit efferveſcence avec l' huile de vitriol & reſſembloit parfaitement en tout au précédent. La tête-morte cependant parut m' offrir quelque différence. I.° En ce que le plomb étoit preſque tout converti en plomb corné. 2.° Que la Chaux ſembloit n' avoir pas ſouffert de changemens ſenſibles; pour m' en aſsûrer d'avantage, j' en ſéparai une partie au moïen d' un tamis fort ſerré; je la mis dans un creuſet au feu, & je ne remarquai aucune des vapeurs que le Sel ammoniac fixe donne abondament dans cette opération; après cela il me parut qu'elle n' attiroit pas l' humidité de l'air avec plus de force que ne fait la Chaux-vive commune, & boüillonnoit, ou du moins faiſoit un ſifflement en entrant dans l' eau.

Les différences remarquables qui ſont entre la tête-morte de l'expérience précédente & de celle-ci, me font conjecturer qu' il faut que l'acide marin ſoit délayé dans beaucoup d' eau pour attaquer le plomb, & que c' eſt pour (cc) cette

(cc) Je ne prétends pas que cette ſeule cauſe facilite la diſſolution du plomb j'ai même raiſon de penſer que cet effet n'a pas lieu lorſqu'elle eſt toute ſeule, mais que dans le cas où il ſe trouve de l'Alkali volatil combiné à cet acide, ce mélange exerce ſon action ſur le plomb, tant que ces deux ſubſtances ne ſont point dans un certain dégré de concentration, cette raiſon que dans l'expérience précédente il n'y a eû qu'une partie du plomb convertie en plomb corné, pendant qu'outre à du Sel ammoniac fluor il s'eſt encore élevé une quantité conſidérable de fleurs de Sel ammoniac ; ces deux effets n'ayant lieu probablement que lorſque l'acide & l'Alkali volatil ſont dans leur plus grand dégré de concentration.

2.° Que la Chaux ſert à retenir une partie de l'acide du Sel ammoniac qui s'échapperoit dans le commencement de l'opération avec l'Alkali volatil.

3.° Que l'acide marin affoibli par beaucoup d'eau a plus d'affinité avec le plomb qu'avec la Chaux (*dd*).

(*dd*) Cette opération a fait le ſujet d'une grande queſtion entre les Célébres *M. Geoffroy*, & *Neumann*. Ce dernier ayant remarqué que le Chimiſte François avoit placé les ſubſtances métalliques, au deſſous des Sels, comme ayant un moindre rapport avec les acides, dans la table des affinités, lui fit obſerver que cette régle ſouffroit des exceptions, en lui donnant pour exemple la décompoſition du Sel ammoniac par les ſubſtances métalliques; mais *M. Geoffroi* n'attribuant cette décompoſition qu'à l'altération conſidérable que ces ſubſtances ſouffrent en paſſant à l'état de Chaux, faiſoit rentrer cette exception dans la loi générale, en ſuppoſant que les Chaux metalliques contiennent quelque peu d'Alkali fixe qui ſe développe, ou qui ſe forme dans la calcination. *M. Neumann* répondit que ſi cela eut été vrai, on n'auroit pas dû obtenir de l'eſprit urineux par le minium bien lavé dans de l'eau boüillante & deſſéché, comme l'on l'obtenoit de même en l'employant ſans aucune préparation, & pour couper court à toute ſorte de diſpute, il lui fit voir qu'on pouvoit ſubſtituer avec un égal ſuccès le plomb granulé, & ſous la forme métallique; je ne ſache pas que *M. Geoffroy* ait répondu depuis au Savant Chimiſte du Roy de Pruſſe, la preuve étant ſans réplique, mais ſi cet Illuſtre Phyſicien eut cherché à s'éclaircir plus particuliérement ſur cette exception en examinant avec ſoin les produits qu'on obtient par ces opérations, il eut ſans doûte vû qu'elle n'avoit lieu que dans le cas particulier de l'acide du Sel ammoniac, qui non ſeulement eſt très-foible, mais qui ſe trouve aſſocié à une grande quantité de matiére phlogiſtique ; ce qui, peut-être, ne contribuë pas peu à la déſunion qui ſe fait de cet acide d'avec l'Alkali volatil, & tout au moins auroit-il reconnu que la table qu'il a dreſſée ne pouvoit pas être exaƈtement vraïe dans tous les

X.[e] EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec le plomb, & le Sel de tartre.

Eſprit urineux.

Sel volatil.

110. Comme le Sel ammoniac décompoſé par le plomb ne donne que de l'eſprit urineux, & que d'autre part les Alkalis fixes donnent très-peu d' eſprit, & beaucoup de Sel volatil; je me propoſai d' obſerver les réſultats qui me viendroient de la combinaiſon du plomb avec du Sel de potaſſe, & je crus en même tems de pouvoir m' aſsûrer, ſi dans cette opération l' acide marin attaque par préférence l' Alkali fixe comme il ſeroit aſſez naturel: pour n' avoir rien à me reprocher, je crus devoir emploïer une quantité de Sel ammoniac capable ſeulement de ſaturer une quantité donnée de plomb dans la décompoſition qu' il ſouffriroit; c' eſt pour cette raiſon que je diſtillai une once de Sel ammoniac ſur $\frac{3}{\text{onc.}}$ de plomb, & $\frac{3}{\text{onc.}}$ de Sel de potaſſe.

Je

les cas, & qu' il auroit dû en former deux, comme le remarque fort-bien *M. Baumé*, ſavoir une qui exprima tous les rapports des ſubſtances dans les opérations qui ſe font par la voye humide, & une autre dans laquelle fuſſent marqués les rapports en opérant par la voye ſéche; ou pour m' exprimer d' une manière plus générale une table qui déſigna le plus ou le moins d'aptitude que les ſubſtances ont à s'unir, ſuivant que par la combinaiſon des principes ſecondaires, le nouveau compoſé approche plus ou moins du rapport des élémens ou des véritables principes qui conſtituent des compoſés plus ou moins aiſés à être détruits. La Chimie ne ſeroit plus alors une ſcience pûrement expérimentale, elle pourroit fort-bien être ſujette au calcul avec autant d' exactitude que le ſont les ſciences phyſico-mécaniques, l' aſtronomie &c.

Je dois cependant avertir que faute de plomb granulé, j' employai de petites lames minces, & que le Sel de potasse n' étoit pas bien pur, deux circonstances qui certainement pourroient causer des variations, & c' est pour cela que j' en avertis.

Je retirai $\frac{1}{8}$ $\frac{15}{gr.}$ d' esprit volatil très-limpide qui faisoit une violente effervescence avec l' huile de vitriol, & répandoit des fumées blanches & épaisses; rougissoit un peu le papier bleu pendant qu' il étoit humide, & qu' il devenoit blanc en se désséchant; cet esprit contenoit $\frac{54}{gr.}$ d' un Sel volatil cristallisé en aiguilles très-déliées. Une partie du Sel ammoniac se sublima, & il en resta une petite quantité en forme d' efflorescence sur la tête-morte, laquelle étoit d' une couleur brûne parsemée de points d' une très-belle couleur bleüe comme l' azur de Berlin, une partie du plomb paroissoit réduite en litharge, le reste étoit fondu avec toute la masse, & présentoit différentes couleurs dans la partie inférieure qui étoit tout-à-fait adhérante au verre, & sembloit ne faire qu' un tout avec lui; je me déterminai sur cela à remettre dans la cucurbite tout le Sel ammoniac qui n' avoit point été décomposé avec $\frac{3}{onc.}$ $\frac{1}{2}$ d' eau commune sur la tête-morte, & à faire ainsi une nouvelle distillation; je retirai par ce moien $\frac{2}{onc.}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{2}$ d' esprit de Sel ammoniac un peu plus foible que le précédent, mais il ne se fit point de Sel volatil, ce qui d' ailleurs est assez naturel, vû que la quantité d' eau nouvellement ajoûtée n' a passé qu' en partie dans le récipient, le reste ayant été absorbé & retenu par la tête-morte, laquelle, de brûne qu' elle étoit, passa à un blanc éclatant, sa saveur étoit salée & amère comme l'eſt ordinairement le Sel fébrifuge; la partie du plomb qui touchoit le fond de la cucurbite n'a ſouffert d'autre altération que la fuſion, & une petite partie de celui qui étoit mêlé à l'Alkali fixe vers la ſurface ſupérieure avoit changé légerement ſa couleur, le reſte ne paroiſſoit avoir ſouffert aucun changement, & n'étoit pas même entré en fuſion.

XI.e EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac avec la Chaux de cuivre; ou avec le fer.

Eſprit volatil.

Ens veneris.

ou

Ens Martis.

111. La diſtillation d' $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de Sel ammoniac avec $\frac{4}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de vitriol de cuivre bien calciné m'a auſſi donné un eſprit urineux jaune très-pénétrant & cauſtique; des fleurs de Sel ammoniac teintes en jaune, & un peu en verd lorſque j'employois du Sel ammoniac impur au lieu de fleurs. La tête-morte étoit une matière rouſſe, un peu déliqueſcente & d'un goût ſtiptique.

La limaille de fer roüillée ou non me donna à-peu-près les mêmes réſultats, la tête-morte ſeulement me parut différer conſidérablement, en ce qu'elle contenoit plus d'acide, ſon goût étoit beaucoup plus âpre, ſe gonfloit davan-

davantage & se résolvoit entièrement en une liqueur épaisse & jaunâtre.

L' esprit urineux qu' on retire par l'intermède des Chaux ou des substances métalliques sous leur forme naturelle donne toujours des marques assûrées de la présence de l' acide marin, quelque soit le rapport qu' on ait observé entre le Sel ammoniac & l' intermède; il en est de même de l' opération du Sel ammoniac privé d'une partie de son eau, avec la Chaux, ce qui prouve que la décomposition n' est pas complette.

112. Si nous réflechissons maintenant sur toutes ces différentes décompositions & sur les circonstances qui les accompagnent, nous remarquerons que pour qu' elles puissent avoit lieu, il est nécessaire qu' il se dissipe une plus ou moins grande quantité de l' eau du Sel ammoniac, & que c' est pendant cette évaporation qu' elles arrivent.

Or il m'a paru avoir observé trois cas différens, savoir, le premier dans lequel est comprise la décomposition par les Alkalis fixes, & tous les intermèdes qui donnent très-peu d' esprit & beaucoup de Sel; les composés qui restent dans le fond du vaisseau sont des Sels qui retiennent à-peu-près autant d'eau que le Sel ammoniac, & la retiennent même avec plus de force.

Le second dans lequel doivent être comprises les Chaux & les substances métalliques sous leur forme naturelle; il demeure dans le fond des Vaisseaux des Sels qui attirent beaucoup l' humidité, mais qui la lâchent avec plus de facilité que les précédents.

Le troisième regarde la Chaux combinée avec le Sel ammoniac dans des circonstances différentes, savoir la Chaux-vive & le Sel ammoniac calciné, dont les resultats sont les mêmes que ceux des substances métalliques; la Chaux-vive & le Sel ammoniac avec toute son eau dont on ne retire aucun produit, excepté le phosphore

D'

D' Homberg ; la Chaux éteinte & le Sel ammoniac ſans être calciné ; la crême & l' eau de Chaux évaporée à ſiccité avec du Sel ammoniac contenant toute ſon eau.

De toutes ces combinaiſons de la Chaux on a pour réſidu un Sel ammoniac fixe à la verité, mais qui différe dans chaque opération par le plus ou moins d'eau qu'ils attirent; cependant en général ces composés peuvent en être privés aiſément par l' action d' un feu plus moderée que tous les précédents, & c' eſt ſelon moi, de cette force plus ou moins grande de ces nouveaux composés à retenir l' eau, que dépend la décompoſition en eſprit ou en Sel volatil; mais comme les Sels volatils emportent avec eux une plus grande quantité de parties concrêtes de l'intermède, il eſt naturel de penſer que du moment que l' acide marin eſt dans le dégré de concentration néceſſaire pour former avec une partie de l' intermède un nouveau Sel de nature fixe, l' Alkali volatil ſe combine par le moïen de l' acide plus délayé, & dont l'eau ſurabondante ne ſauroit être entièrement enlvée, avec les parties de l'intermède qui reſte, & forme le Sel volatil concrêt: la Chaux étant en effet une ſubſtance dont les parties quoique d' une nature différente, ainſi que le penſoit le célébre M. Hoffmann, & que nous avons eû occaſion de le conſtater, retient cependant ces parties avec une force que le feu ne fait qu' (*ee*) augmenter & que l'eau ſeule eſt capable de détruire : il eſt clair que plus la Chaux ſera vive, moins l' eau contenuë dans le Sel ammoniac, quoique ſurabondante, pourra opérer cette déſunion réciproque qui ne me paroît conſiſter qu' en ce que l' eau dégage la partie volatile de la Chaux, qui ayant attaqué la partie phlogiſtique du Sel ammoniac, facilite d' autant

(*ee*) Nous aurons occaſion de voir la raiſon de cette fixité de la partie volatile de la Chaux, & d' où lui vient cette derniere propriété.

d' autant plus la déſunion entre le Sel volatil & l' acide marin, que cet acide affoibli par beaucoup d'eau paroît avoir plus d' affinité avec la Chaux qu' avec l' Alkali volatil, comme nous le ferons remarquer par la ſuite; d' où il ſuit que pendant que la Chaux eſt dans ſon état naturel, c' eſt-à-dire, que ces principes ne ſont pas déſunis par l' eau, elle peut bien former un corps ſurcompoſé, en s' uniſſant au Sel ammoniac avec beaucoup de force, mais elle n' en peut pas procurer la décompoſition.

XII.E EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac diſſout dans l' eau de Chaux.

Sel ammoniac fluor.

Eſprit de Sel.

Sels ammoniacaux.

113. POur ce qui eſt de l' enlévement de la partie inflammable des Alkalis volatils par la partie de la Chaux qui ſe volatiliſe, elle me paroît très-probable par ce que j' ai fait obſerver §. 97. où je rendis compte d' une double décompoſition qui ſe fait par un tour de main particulier, & qui ne me paroît pas poſſible ſans le ſecours du phlogiſtique qui diminuë la force d' union que l' acide vitriolique a contractée avec la partie terreuſe, & cela paroît d' autant plus probable, que c' eſt en faveur du feu, que cette opération ſe fait (*ff*); car d'ailleurs la crême de Chaux ne procure point d' eſprit volatil

(*ff*) Cette opération dont j' ai parlé §. 97. a quelque choſe d'analogue à celle du Soufre artificiel.

til non plus que l' eau de Chaux, comme je m' en ſuis aſſûré en diſtillant $\frac{2}{onc.}$ $\frac{2}{8}$ de Sel ammoniac diſſous dans $\frac{1}{onc.}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{1}{2}$ d' eau de Chaux, qui contenoit beaucoup de crême de Chaux, & comme ce mélange étoit trop liquide, j'y ajoûtai encore environ $\frac{1}{onc.}$ de terre vitrifiable, mais les $\frac{7}{8}$ $\frac{1}{2}$ environ de la première liqueur que j' obtins n' étoient que du Sel ammoniac fluor très-limpide au fond de laquelle étoit un peu de liqueur très-jaune qui reſſembloit aſſez à de l' huile figée, & qui, en ſe mêlant par l' agitation avec l' autre, donnoit une grande quantité de bulles d' air (*gg*).

114. Par toutes les expériences que j' ai faites, je crois pouvoir conclurre que celles d' entre les décompoſitions qui méritent ce nom par excellence, ſont celles qui ſe font par le moïen de la Chaux éteinte, & de l' huile de tartre, celle de l' Alkali fixe concret ne donnant qu' un Sel volatil ſurchargé de parties hétérogènes, de même que les crayes & les autres terres abſorbantes: pour celles qui

(*gg*) La ſeconde liqueur qui paſſa dans le récipient étoit du véritable eſprit de Sel fumant, elle péſoit environ $\frac{46}{gr.}$ ce qui prouve que l' eau de Chaux contient un véritable acide vitriolique, le reſte du Sel ammoniac ſe ſublima en fleurs jaunes, parmi leſquelles il s' en trouvoit une petite quantité qui étoit d'un beau rouge, & que je me doûtai être du Sel ammoniacal ſecret de Glauber. La ſeconde liqueur mêlée à la première ſervit de diſſolvant à celle qui étoit au fond du matras, & toute la liqueur prit ainſi une couleur violette; je ne dois cependant pas laiſſer ignorer que les pierres à fuſil que j'avois calcinées & dont je fis uſage contenoient vraiſemblablement un peu de parties férugineuſes dont je cherchai à les délivrer par un peu d'eſprit de vitriol, & par des édulcorations reïtérées, j' en enlevai l' acide.

qui ſe font avec les ſubſtances métalliques, elles ſont très-imparfaites (*hh*).

115. Nous avons obſervé que le Sel ammoniac fluor éxige beaucoup d' Alkali fixe pour développer ſon odeur urineuſe §. 100., pendant que très-peu de Chaux produit cet effet, cela me paroît prouver que l'acide marin étendu dans beaucoup d' eau a plus d' affinité avec la Chaux qu'avec l' Alkali volatil, & qu' il en a davantage dans cette circonſtançe avec celui-ci qu' avec l'Alkali fixe.

116. Nous avons auſſi remarqué §. 101. & nous l'avons répeté ci-devant que le Sel ammoniac avant de ſe ſublimer en fleurs donne un peu de liqueur urineuſe, ce qui ſemble nous faire voir que l' acide marin s' unit à une plus grande quantité d' Alkali volatil lorſqu' il eſt foible, que lorſqu' il eſt concentré.

XIII.E EXPÉRIENCE.

Diſtillation du Sel ammoniac fluor avec l'Alkali fixe.

Sel ammoniac fluor.

117. POur m' aſſûrer ſi l'acide marin délayé dans beaucoup d' eau avoit plus d' affinité à l' Alkali volatil qu' à l' Alkali fixe, je pris $\frac{4}{\text{onc.}}$ $\frac{36}{\text{gr.}}$ de Sel ammoniac fluor, & j' y mis autant de Sel de potaſſe qu' il en fallut pour

(*hh*) Une marque certaine que la décompoſition du Sel ammoniac n'eſt pas complette & dont on peut juger par la ſeule inſpection, c' eſt la couleur jaune qui eſt toujours plus foncée à meſure qu' elle contient plus de Sel ammoniac fluor, & ce qui ſert à le prouver, c' eſt la facilité avec laquelle on peut l' enlever par l'addition d'un Alkali fixe ou de la Chaux.

J' ai

pour lui faire développer l' odeur urineuſe, ce qui monta à $\frac{2}{\text{onc.}}$, mais avant que l' Alkali fixe eut abſorbé toute la liqueur, ce qui je cherchois à faciliter par l' agitation du mélange, il ne s' élevoit plus d' odeur urineuſe; après avoir lutté avec ſoin le Chapiteau & le récipient, j' en fis la diſtillation au bain de ſable, & la liqueur qui paſſa péſoit environ 12 à 15 grains de plus que ne péſoit le Sel ammoniac fluor, & la tête-morte par conſéquent péſoit ces grains de moins, ce qui m' a fait voir que la liqueur avoit emporté un peu d' Alkali fixe; elle étoit de même couleur qu' auparavant, & n' avoit point d' odeur urineuſe ſenſible, mais elle la développoit par l' addition de la Chaux.

XIV.^E EXPÉRIENCE.

Diſtillation à feu nud du caput mortuum de l' expérience précédente.

Sel ſublimé.

118. COmme j' avois fait cette diſtillation dans une cucurbite de verre, j' en pris la tête-morte, & ayant reconnu qu'elle contenoit de l'acide marin, malgré que la liqueur dont nous avons parlé ne ſentit pas l'urineux, je me propoſai de voir ſi par la force du feu je pouvois détacher cet acide, pour éxaminer enſuite ſi par ces différentes opérations il avoit ſouffert quelque chan-

J' ai remarqué qu' elles ne ſont jamais parfaites, & qu' il arrive toujours de deux choſes l' une, ſavoir ou du Sel ammoniac ſublimé, ou de l' intermède non décompoſé: la première a lieu toutes les fois qu'on employe une trop grande quantité de Sel ammoniac, & la ſeconde lorſque cette quantité eſt trop petite.

changement; je fis donc piler $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{7}{8}\ \frac{50}{\text{gr.}}$ de cette tête-morte, je la mis dans une cucurbite de terre à creuſet avec environ $\frac{1}{8}$ d'eau diſtillée, & j'en retirai premièrement $\frac{1}{8}\ \frac{25}{\text{gr.}}$ d'une liqueur plus foible mais de même nature que la première, $\frac{1}{8}$ d'un Sel ſublimé à la voûte de la cornuë, & la tête-morte qui s'étoit réduite à $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{5}{8}\ \frac{25}{\text{gr.}}$ avoit priſe une couleur bleuâtre: j'éxaminai la liqueur & le Sel, l'un & l'autre donnerent beaucoup de vapeurs blanches avec l'huile de vitriol, développerent une odeur urineuſe aſſez forte avec la Chaux vive, ils paroiſſoient cependant avoir du goût du Sel marin, mais le Sel loin de décrépiter ſur une lame de fer rougie, ſe diſſipoit en fumée, ce qui me fit juger que c'étoit du véritable Sel ammoniac.

119. Cette expérience me fit reſſouvenir que j'avois obtenu le même effet une autre fois que j'avois voulu faire du Sel volatil, & que le vaiſſeau ayant caſſé par un coup de feu après que l'opération étoit déja fort avancée, j'ai entonné le fond de ma cornuë dans une cucurbite de terre, & j'en retirai par ce moïen du Sel ſublimé comme celui dont je viens de parler, ſavoir ſans odeur urineuſe, ſentant ſeulement un peu l'empireume.

120. En réfléchiſſant ſur les circonſtances des décompoſitions du Sel ammoniac pour en retirer le Sel volatil & peut-être l'eſprit, il me paroît d'entrevoir qu'il en eſt de ces ſublimations comme des précipitations, c'eſt-à-dire que la partie volatile enleve un peu de l'intermède fixe,

pendant que l' intermède retient auſſi quelque peu de la partie volatile.

Seroit-ce une loy générale des volatiliſations ?

Dépendroit-elle de ce que par des nouvelles combinaiſons une partie des ſubſtances fixes devint volatile, & une partie de celles qui ſont volatiles prit le caractère de fixité ?

Ou ſeroit-ce enfin que toutes les ſubſtances continſſent ces parties d'une manière diſtincte ?

La ſeconde de ces propoſitions peut fort bien être la véritable, mais comme il ſera toujours néceſſaire de quelques tours de mains pour les déſunir & les faire paroître chacune dans ſon état naturel, il me ſemble que la première eſt la plus générale & la plus conforme à l'expérience; car nous voyons qu' il eſt très-poſſible de faire prendre un caractère de fixité en entier à une ſubſtance volatile par des procédés très-connus, de même qu' on peut volatiliſer des ſubſtances très-fixes. Il eſt vrai cependant que dans pluſieurs ſubſtances il ſe trouve des parties plus ou moins doüées de ces propriétés.

XV.ᴱ EXPÉRIENCE.

Diſtillation de l' eſprit volatil avec le noir de fumée.

Eſprit urineux empireumatique.

121. JE tentai encore inutilement d' obtenir du Sel volatil, ou plutôt de convertir en Sel l' eſprit urineux en combinant $\frac{2}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ de noir de fumée avec $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{1}{2}$ d' eſprit volatil fait avec la Chaux, mais je ne retirai qu' une liqueur urineuſe graſſe un peu empireumatique; la ſurface de la tête-morte étoit de la couleur du verdet, je

je crus néanmoins devoir ſoûmettre la tête-morte à une chaleur plus forte, je la mis pour cela dans une cucurbite de terre, & après avoir retiré une liqueur très-limpide, d' un goût ſalé un peu empireumatique qui développoit une odeur fort agréable par le Sel de tartre & la Chaux qui faiſoit effervefcence avec l' huile de vitriol ſans répandre des fumées, il ſe ſublima environ $\frac{36}{gr.}$ de véritable Sel ammoniac alteré par une odeur très-empireumatique.

XVI.ᴱ EXPÉRIENCE.

Diſtillation d' une diſſolution de Sel ammoniac avec la tête-morte d' un Sel vitriolique calcaire qui avoit ſervi à une diſtillation d' urine putréfiée.

Eſprit urineux.

Sel ammoniac ſublimé.

122. JE ne me diſpenſerai pas de rendre compte d' une expérience que j' ai faite pour obtenir du Sel volatil en employant de la Chaux que j' avois chargée d'acide vitriolique après qu' elle avoit ſervi à retirer le phlegme d' une quantité d' urine putrefiée, & qui étant ainſi combinée avec beaucoup d' huile de vitriol, me donna une quantité conſidérable d' eſprit urineux très-pénétrant accompagné cependant d' une odeur un peu fœtide, cet eſprit boüillonnoit (*ii*) conſidérablement avec l' huile de vitriol

(*ii*) Cette combinaiſon eſt à-peu-près celle dont parle *M. Vallerius* dans un Mémoire ſur le nitre artificiel, & par laquelle il dit que le Docteur *Pietſch*, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin, a fait vitriol, jettoit des vapeurs blanches & épaiſſes, manifeſtoit un mouvement d'efferveſcence avec le Sel de tartre : d'où il ſuit inconteſtablement que cet eſprit d'urine tenoit du véritable Sel ammoniac en diſſolution : c'eſt donc du caput mortuum qui reſta dans cette opération que je me ſuis ſervi ; c'étoit une ſubſtance d'une ſurface unie, & ayant des crevaſſes comme la Chaux éteinte, deſſéchée, d'un grain tout-à-fait fin, d'une légereté ſurprenante ; elle étoit blanche dans ſa partie ſupérieure, un peu bleuâtre daus le centre, d'un goût fade, ne s'humectant point à l'air : je mêlai $\frac{6}{\text{onc.}}\ \frac{4}{8}$ de cette tête-morte avec $\frac{2}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac & environ $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{2}{8}$ d'eau diſtillée dans une cucurbite de terre, & j'en retirai $\frac{3}{\text{onc.}}\ \frac{36}{\text{gr.}}$ environ d'une eſprit urineux aſſez fort, $\frac{3}{8}$ d'un Sel ſublimé à la voûte, & la tête-morte dont la couleur bleuë étoit conſidérablement augmentée péſoit environ $\frac{6}{\text{onc.}}\ \frac{3}{8}$; ayant éxaminé le Sel ſublimé à la voûte, je trouvai que c'étoit du Sel ammoniac.

123. Cette expérience ſert à nous faire voir combien il eſt difficile d'enlever l'acide vitriolique à la Chaux, de même que le phlogiſtique dont elle ſe charge avec tant d'avidité, & confirme en même-tems ce que nous avons dit

fait du nitre artificiel ; je n'ai pas encore eû le tems de m'aſſûrer ſi je pouvois retirer de ce Sel, mais je puis avancer que cette tête-morte fait une grande efferveſcence avec l'huile de vitriol & manifeſte l'odeur inſupportable de l'eſprit de nitre, en répandant dans cette occaſion une grande quantité de fumées dont je ne pus pas diſtinguer aſſez bien la couleur ; il ne me fut cependant pas poſſible de retirer du ſalpêtre par la diſſolution, la filtration & l'evaporation de cette tête-morte.

dit §. 112. ſavoir que le Sel ſélénitique enleve la partie phlogiſtique du Sel ammoniac & facilite par-là ſa décompoſition ; & quoique le Sel ſublimé ait donné des marques de Sel ammoniac de même que la liqueur; ces ſignes cependant ont été beaucoup plus foibles que ceux que donnent les fleurs de ce Sel ou le Sel fluor, d'ailleurs la diminution de poids de la tête-morte nous prouve aſſez qu'il s'en eſt volatiliſé une partie, & il eſt probable qu'elle ſoit de la nature de la partie volatile qui ſe dégage de la Chaux par le moïen de l'eau, c'eſt-à-dire que ce ſoit un ſel ſéléniteux. Il eſt bon d'avertir auſſi que dans l'eſprit d'urine dont nous avons parlé ci-devant, l'on voyoit des petits corps précipités au fond de la liqueur, & d'autres qui y nageoient; or il eſt probable que ce n'étoit que de ce Sel ſélénitique.

XVII.E EXPÉRIENCE

Séparation du Sel volatil d'avec l'eau qui le tient en diſſolution au moïen du Sel ammoniac.

124. POur ne rien négliger de tout ce qui me paroiſſoit pouvoir contribuer à la formation d'un Sel volatil urineux par le moïen de la Chaux, je voulus éſſayer ſi la méthode que propoſe l'Illuſtre M. Lemery m'en fourniroit effectivement, & pour faciliter l'opération, j'ai diſſous deux parties de Sel ammoniac en gâteau qui comme on ſait contient beaucoup plus de parties inflammables que les fleurs, dans trois parties d'eſprit de Sel ammoniac, & je retirai ſur $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{5}{8}$ d'eſprit volatil & $\frac{1}{\text{onc.}}$ de Sel ammoniac une quantité aſſez conſidérable de très-beau Sel volatil criſtallin, mais dont il me ne fut pas poſſible

poſſible de ſavoir le poids, parceque la liqueur ayant boüilli dans le fond des matras le détruiſit dans peu de minutes; je l' avois cependant reconnu quelque tems avant cet accident, & ſon odeur étoit beaucoup plus pénétrante que n' eſt celle du Sel volatil fait avec l' Alkali fixe ou la craye.

XVIII.e EXPÉRIENCE.

Séparation du Sel volatil d' avec l' eau qui le tient en diſſolution.

125. CE réſultat me fit eſperer d' obtenir du Sel volatil avec le ſeul eſprit de Sel ammoniac, comme l' avance, ainſi que je l' ai dit, le Savant M. LEMERY, je mis pour cela $\frac{1}{\text{onc.}}\ \frac{6}{8}\ \frac{1}{2}$ d' eſprit de Sel ammoniac fait avec la Chaux dans un matras à long col garni de ſon Chapiteau, & comme j' avois obſervé qu' il eſt indiſpenſable pour réüſſir de ne donner qu' un petit dégré de chaleur afin que l' eau ne puiſſe en s' évaporant détruire la formation du Sel volatil, je crus devoir employer un bain-marie en prenant la précaution de ne jamais laiſſer boüillir l' eau en la tenant toujours entre 60. & 65 dégrez de chaleur au termométre ſelon la production de M. RAUMUR.

Il ſe fit effectivement du Sel volatil par ce moïen, mais ce Sel n' étoit pas ſi beau ni ſi volatil que le précédent; d' ailleurs il ſe détruit avec beaucoup de facilité, ſa couleur eſt un peu terne, & l' opération eſt dès-plus laborieuſes (*kk*).

126.

(*kk*) Cette opération, toute pénible qu' elle eſt, ne laiſſe pas d' être fort intéreſſante par les ſingularités qu' elle fournit, je tirai, avant tou-
tes

126. Ces expériences nous apprennent plusieurs vérités, & servent à confirmer ce que j'ai avancé §. 112. que la forme concrête ou liquide que prend le Sel volatil, ne dépend pas seulement de la quantité de l'intermède concrêt qu'il enleve avec lui dans cette opération, mais principalement de la force avec laquelle le nouveau Sel fixe qui résulte & qui reste dans le fond du vaisseau retient l'eau qui lui est nécessaire.

127. Nous déduirons encore qu'en emploïant de la Chaux-vive avec une suffisante quantité d'eau pour l'éteindre & pour opérer par la décomposition du Sel ammoniac, la chaleur étant assez grande pour résoudre en vapeurs l'humidité surabondante au Sel ammoniac fixe, il n'est pas étonnant que dès le commencement de l'opération où il n'est pas même nécessaire d'emploïer le feu, cette décomposition ne se fasse qu'en esprit.

tes choses, que je retirai par ce moïen environ trois gros de Sel volatil très-dur qui est sans contredit plus pénétrant que celui qu'on retire par d'autres méthodes.

Ce qu'il y a de plus singulier c'est qu'au dessous de 50. & à 70. il se détruit, & qu'il ne se forme qu'entre ces limites; outre cela pendant que le Sel se forme dans le col du matras on voit des vapeurs dans le Chapiteau, ce qui prouve que ce Sel est moins volatile que l'eau, apparemment à cause des parties de Chaux aux quelles il s'est associé, & ce qui me paroît servir de plus forte preuve à cela, c'est qu'il se dissout à un degré inférieur que celui au quel se forme le Sel; de manière que par cette chaleur il s'evapore une plus grande quantité d'eau qu'il ne s'éleve de Sel volatil pour former des cristaux avec elle; quant au degré supérieur, il est clair que cette proportion sera encore moins conservée, puisque l'evaporation à mobilité égale sera toujours proportionelle à la quantité absoluë des deux substances; & comme il se trouve dans l'esprit urineux assez d'eau pour tenir le Sel en dissolution, car sans cela il seroit sous la forme concrête; il s'en suit nécessairement qu'il doit toujours se faire une évaporation de parties aqueuses capable de tenir le Sel qui s'éleve avec dans une parfaite dissolution: je crois que la Chaux enlevée est aussi la cause de la grande force de ce Sel en ce qu'elle en dénature la partie grasse, au lieu que dans les autres elle leur donne des entrâves & en émousse l'odeur.

128. Si nous obſervons enfin les réſultats des dernières expériences §. 118. 119. 122. 123. nous voyons que la volatilité des intermèdes fixes n' eſt duë qu' à l' aſſociation des acides & de la matière inflammable. (*ll*)

129. Que dans les Alkalis fixes cette volatilité doit être entièrement aſſignée à l' acide marin, qui étant par lui-même volatile n' a pas beſoin d' autre ſecours pour communiquer cette propriété à ces ſubſtances.

130. Que dans la Chaux au contraire ſe rencontrant l' acide vitriolique qui n' eſt pas par lui-même volatile, & qui ne peut acquérir cette propriété que par le moïen de l' eau & du phlogiſtique, ce n' eſt que dans ces circonſtances que cette propriété peut ſe développer; & comme cet acide attaque avec plus de force le phlogiſtique que l' acide marin, il eſt naturel que ce ſoit lui qui éxerce par préférence cette fonction.

Il ſuit de-là que l' acide ſulphureux ne doit pas ſeulement ſa volatilité à la matière inflammable à laquelle il s' eſt uni, mais encore à l' eau dans laquelle il eſt délayé.

131. En rappellant ici l' obſervation faite par M. Malouin que les Sels ſéléniteux quand ils ont été une fois privés de toute l' eau qui les tenoit en diſſolution, il en faut une beaucoup plus grande quantité pour les rediſſoudre; il paroît que la fixité de la partie qui eſt diſpoſée à devenir volatile dans la Chaux dépend du même principe, ſavoir que l' acide vitriolique étant alors dans un grand dégré de concentration eſt ſurchargé de parties terreuſes dont il ne retient plus qu' une moindre quantité lorſqu' il eſt affoibli par l' eau, & qu' il peut exercer librement ſon action ſur les ſubſtances inflammables; en effet nous avons obſervé §. 73. que la Chaux peut décom-

(*ll*) C'eſt ce que j' ai avancé dans une note §. 17.

compoſer le Soufre en attaquant ſa partie phlogiſtique, mais que ce n' eſt qu' à la faveur de l' eau, comme il arrive dans toutes les décompoſitions de cette ſubſtance, qui ne peuvent abſolument avoir lieu ſans ſon ſecours.

132. En conſidérant l' opération qui eſt néceſſaire pour la formation du Soufre artificiel, il eſt naturel de voir que ce n' eſt que dans l' état de fluidité que l' acide vitriolique peut attaquer le phlogiſtique, mais qu' il ſe paſſe une grande différence dans la manière avec laquelle cette union ſe fait, car dans l' état de fonte cette union eſt la plus intime poſſible, & dans celui de diſſolution elle eſt bien petite, (*mm*) au reſte nous remarquerons que le tartre vitriolé paroît être la combinaiſon la plus parfaite de cet acide avec une ſubſtance d' une nature différente, parcequ' il eſt néceſſaire d' employer toute la violence du feu pour la détruire, pendant qu' il ne faut que des opérations très-ſimples & très-aiſées pour décompoſer le Soufre & les ſélénites que je regarde après le tartre vitriolé comme les compoſés de cet acide les plus difficiles à détruire, mais nous laiſſerons des diſcuſſions que je

 me

(*mm*) Les expériences dont je vais rendre compte me paroiſſent aſſez propres pour confirmer cette propoſition. Comme le mélange du charbon & du Sel ammoniac dont j' ai parlé §. 89. ne m' avoit rien donné ainſi que je l' avois prévû, j' y ajoûtai du vitriol vert bien calciné, & je retirai de ce mélange de l' eſprit de Sel mêlé à de l' eſprit ſulphureux très-puiſſant & du Sel ammoniacal vitriolique, ce qui ſert à nous faire voir encore qu'on peut tout auſſi bien emploïer ces ſortes de Sel pour dégager l' acide du Sel ammoniac que les acides libres, il eſt vrai qu' il ſeroit peut-être néceſſaire de repaſſer l' eſprit de Sel ſur du nouveau Sel ammoniac pour l' avoir pur, mais toujours eſt-il moins vrai qu'on obtiendroit par ce moïen le Sel ammoniac ſecret de *Glauber*, avec plus de facilité, & moins de danger.

Une ſeconde expérience ſert encore à appuïer les raiſonnemens ci-devant. Je pris $\frac{1}{\text{onc.}}$ d'eſprit volatile $\frac{3}{8}$ de Souſre & je laiſſai ce mélange

en

me réserve à traiter autre part dans toute l' étenduë qu'elles peuvent mériter.

133. Je reviendrai à ce que j' ai dit §. 130. que c' est l'acide vitriolique qui se volatilise avec des parties terreuses dans la Chaux en attaquant par préférence de l'acide marin la partie inflammable du Sel ammoniac, & l'attaquant même avec plus de force; je ne disconviendrai pas cependant que peut-être la partie que cet acide abandonne à la faveur de l' eau ne puisse être attaquée par l' acide marin & se volatiliser avec lui de manière que la décomposition fut d' autant plus intime par la Chaux, que les deux acides y concourrent, & il me paroît à propos d' observer qu' il en est de celle-ci comme de plusieurs dissolutions faites par l' acide marin dans lesquelles cet acide n' a de jeu, qu' autant que les substances ont déja été, pour ainsi dire, ouvertes & atténuées par des acides plus-forts.

J' en ai eû un exemple dans le plomb minéralisé par le Soufre dont j' ai parlé dans la note du §. précédent, ce plomb qui est si réfractaire, s' est pourtant réduit en plomb corné pour la plus grande partie en le mêlant à des fleurs de Sel ammoniac dans un creuset à un feu au

en digestion pendant la nuit sur des cendres tiédes & dans un vase d' un très petit orifice que j' eus soin de couvrir d' un cornet de papier ce qui me donna la teinture dorée dont parle le Célébre *M. Boherave*, mais dont le procédé n' est pas si simple, & comme il étoit resté du Soufre qui n' avoit point souffert de changement, j' ajoûtai à ce mélange $\frac{3}{\text{onc.}}$ de minium; j' en fis ensuite la distillation dont je retirai une liqueur mêlée d' esprit de Sel & d' acide sulphureux, un peu de Sel ammoniacal vitriolique, & le plomb calciné fut entiérement mineralisé par le Soufre, sa couleur étoit noire, sa consistance étoit friable, il s'attachoit aux doigts & donnoit une flamme bleüe étant exposé à une chaleur modérée de même que fait le Soufre, & ne discontinuoit à brûler qu'en lui interceptant la communication avec l' air libre, en un mot c' étoit du véritable plomb brûlé.

auquel un mélange de ce même plomb avec de la poudre de charbon n' avoit rien changé.

134. J' ai dit §. 109. en parlant de la différence entre les résultats de la combinaison du Sel ammoniac avec le plomb, & de ce même Sel avec le plomb & la Chaux-vive, que j'avois lieu de conjecturer que l' acide marin devoit être affoibli par beaucoup d' eau pour attaquer le plomb, & §. 110. dans la note que non seulement par cette raison, mais encore parceque dans le Sel ammoniac cet acide se trouve associé à un Alkali volatil (Sels qui sont toujours chargés de beaucoup de matière phlogistique) il éxerce son action sur le métal (*nn*) j' ai dit ensuite que lorsque cet acide est très-foible, il paroît avoir plus d' affinité avec la Chaux, qu' avec les Alkalis volatils, & qu' il en avoit davantage dans cet état avec ces derniers qu' avec les Alkalis fixes, ces inductions quoiqu' appuyées ne doivent cependant pas passer en maxime, & je ne les donne que comme des doûtes ou des conjectures qui ont besoin d' être prouvées d' une manière directe, ce que ne pouvant pas faire pour le présent d' une manière assez étenduë, je me contenterai d' exposer quelques expériences que j' ai faites sur cela.

135. Je mis de la grenaille de plomb dans de l' acide marin, & aprés douze heures il ne me parut pas qu' il en fut attaqué d' une maniére un peu considérable (*oo*).

J' affoibli cet acide par beaucoup d' eau, mais je n' observai pas qu' il y eut eû d' altération plus sensible au plomb après 6. heures.

J' ajoûtai

(*nn*) Cette proposition que je n' ai donnée que comme une conjecture à excité ma curiosité, & j' ai fait sur cela quelques expériences qu'on trouvera à la fin de ce mémoire.

(*oo*) Je dois avertir que mon esprit de Sel n' étoit pas d' une grande force, & que c'est peut-être pour cette raison que les effets qu' il a produits sur le plomb sous sa forme métallique ont été bien petits, mais comme je me suis servi de ce même esprit de Sel pour les Chaux, il me paroît que les résultats n' en sont pas moins concluants.

J' ajoûtai à l' acide un peu d' eſprit volatile, ce qui excita beaucoup d' effervefcence, & il me parut à 3. heures de-là que le plomb avoit changé conſidérablement.

136. Je mis du pareil plomb dans de l' eſprit volatile très-pénétrant, & j' en mis dans un autre affoibli par beaucoup d' eau; après 24. heures de tems le ſecond avoit ſouffert beaucoup plus d' altération que le premier; mais je remarquai que le plomb étoit au fond de la liqueur ſous la forme d' une Chaux précipitée, ce qui prouve que le plomb eſt attaqué par l' Alkali volatile, mais que ce n' eſt pas une véritable diſſolution.

J' ajoûtai un peu d' acide marin à ces eſprits urineux, & je remarquai de même une grande différence d'action de cet acide ſur ce métal par les deux liqueurs; car celle qui étoit plus foible agiſſoit avec beaucoup plus d'activité que l' autre, elle étoit très-limpide, les bulles d'air ſe dégageoient avec beaucoup de rapidité, & je remarquai qu'elle répandoit une grande quantité de vapeurs acides, pendant que l' autre n'en donnoit aucune; il eſt vrai que dans celle qui étoit plus concentrée le rapport entre l'acide & l' Alkali volatile étoit plus approchant du point de ſaturation; je mis une quanrité d' eau dans cette diſſolution & elle s' éclaircit un peu, mais elle n' étoit pas auſſi limpide que l' autre, je crois cependant qu' il ſe trouvoit une plus grande quantité de plomb diſſoûte.

137. Ces expériences nous apprennent clairement que l' acide marin agit avec d' autant plus de force ſur le plomb par le ſecours des Alkalis volatiles, que ces Alkalis ſont plus éloignés de leur plus grande concentration, quoiqu' il ſoit naturel de penſer que cette plus grande activité ne s' étende que juſqu' à un cerrain terme, qui je penſe ſera celui de leur parfaite diſſolution.

138. Il paroît de même qu' elle nous prouve que l' acide marin a très-peu, ou peut-être n' a aucune action de

de diſſolution ſur le plomb (*pp*), ſeroit-ce à cauſe de la grande quantité de phlogiſtique que contient ce métal? c' eſt effectivement ce que ſemblent me prouver les expériences ſuivantes.

139. Quant à ce que j' ai dit de l' affinité de cet acide avec la Chaux, les Alkalis volatils & les Alkalis fixes, il me paroît que la choſe eſt aſſez prouvée par les expériences dont j' ai rendu compte, & je ne m' y arrêterai pas davantage.

140. Voici en peu de mots ce qui m' a paru prouver que l' acide marin ne diſſout point le plomb à moins qu'on ne l' ait privé de ſon phlogiſtique, c' eſt que l' eſprit de Sel diſſout le minium avec beaucoup d' effervescence, il en fait de même à la céruſe mais avec quelque petite différence, & quoique ce même acide diſſolve le Sel de ſaturne, il le fait pourtant avec beaucoup moins d' activité & ſans effervescence: or perſonne n' ignore que le minium & la céruſe ſont deux chaux de ce métal imparfait, la première faite par le feu, & la ſeconde par les vapeurs acides du vinaigre, de manière qu' elles ſont entièrement privées de leur phlogiſtique, au lieu que le Sel de ſaturne par les digeſtions & les cohobations réitérées de l' eſprit de vinaigre en reprend indiſpenſablement, ce qui eſt aſſez prouvé par la révivification qu' on peut faire de ce Sel en plomb ſans addition de phlogiſtique.

Ce phénomène de la diſſolution du plomb par l' acide marin au moïen d' un peu d' Alkali volatil ſemble favoriſer le ſentiment de ceux qui prétendent que l' acide nitreux n' eſt que l' acide vitriolique altéré par du phlogiſtique

(*pp*) J' entends par diſſolution, une déſunion intime & uniforme de toutes les parties d' un corps, d'où il ſuit immédiatement la limpidité de la diſſolution, ce qui n' ayant pas lieu dans celle de l' eſprit de Sel ſur le plomb non préparé, ne me paroît par mériter ce nom, mais plutôt celui d' abraſion.

giſtique & de l'Alkali volatil, & que l'acide marin n'en diffère qu'en ce qu'il ne contient pas l'Alkali volatil; ſi cela étoit cependant, le Sel ammoniac fluor combiné à l'Alkali fixe devroit donner du véritable nitre, ce qui ne m'a pas réuſſi, non plus que d'en tirer d'une diſtillation que j'ai faite du mélange de l'eſprit de vin avec l'acide vitriolique ſaturé d'Alkali fixe après 12. heures de digeſtion, qui a été l'opération dont M. VALLERIUS dit en avoir retiré; pour moi je n'ai obtenu qu'un tartre vitriolé en criſtaux très-diſtincts, qui differoit cependant de l'ordinaire, en ce qu'il n'avoit point du tout de ſaveur amère. J'ai remarqué à cette occaſion que malgré que l'évaporation ſoit très-rapide les cryſtaux qui en reſultent ſont en grande quantité & très-bien figurés, qu'il ne ſe forme point de pellicules, & qu'ils ſe cryſtalliſent au fond de leur diſſolution, comme le Savant M. ROUELLE dit qu'il arrive dans l'évaporation inſenſible, aux diſſolutions ordinaires de ces Sels à l'air libre.

Quoique je me fuſſe propoſé de rendre compte dans ce Mémoire de l'action de la Chaux ſur différentes ſubſtances, les queſtions incidentes ne m'ayant pas permis d'être plus court, j'ai été dans l'obligation de me borner au Soufre, au Sel de Glauber, & au Sel ammoniac, me réſervant à en donner la continuation dans d'autres Mémoires.

EXPÉRIENCES

Pour chercher les cauſes des changemens qui arrivent au Sirop violat, par le mélange de différentes ſubſtances.

PAR LE MÊME.

L'Illuſtre M. NEUMANN a donné un Mémoire dans le quatrième volume des *Miſcellanea Berolinenſia* ſur le peu de confiance qu'on doit avoir aux changemens de couleurs qui arrivent au Sirop violat par le mélange de quelque ſubſtance pour en déduire la nature.

On ſait que la couleur verte ſert à caractériſer les ſubſtances alkalines, que le rouge dénote la préſence d'un acide, & que les Sels qui réſultent de la combinaiſon exacte de ces principes, & plus généralement que les Sels parfaitement neutres n'apportent aucune altération à la couleur bleüe des végétaux, ce ſont là des maximes généralement reçuës; quoique cependant ces axiômes ayent été depuis fort long-tems adoptés, ce Savant a fait voir qu'ils étoient ſujets à un grand nombre d'exceptions, & qu'on ne pouvoit être en droit de conclurre de ces changemens que la ſubſtance qu'on avoit employée fut acide ou alkaline, ou enfin neutre, lors qu'il ne ſurvenoit aucune altération à la couleur naturelle au ſirop.

Ce n'eſt point une ampliation de ces exceptions que je me propoſe, mais l'éxamen de ces changemens & celui des cauſes de ces exceptions mêmes.

Je diſtribuerai mes obſervations ſelon l'ordre qui me paroît le plus naturel, ſavoir celui que tiennent les acides,

& je chercherai enſuite à déduire les conſéquences qui en découlent.

1. Le ſirop violat mêlé avec l' huile de vitriol, prend une couleur rouge très-belle & plus ou moins foncée à meſure que la quantité d' eau dans laquelle on étend le ſirop eſt plus ou moins grande.

2. Il n' en eſt pas de même ſi on met l'huile de vitriol ſur le ſirop ſans le délayer dans une quantité d' eau conſidérable, quantité qui doit être fixée par l' eſpéce de diſſolution qui ſe fait ſans qu' il ne ſe précipite plus rien après qu' on l' a laiſſé repoſer ; car alors le ſirop ſe convertit en charbon.

3. Toutes les fois que la quantité d'eau excede le point de ſaturation, s' il eſt permis de me ſervir de cette expreſſion, la couleur ſe change en verd dans la diſſolution du ſirop.

4. Je ne parlerai dorénavant que des diſſolutions ſaturées, j' avertirai toutes les fois que cette circonſtance aura été altérée, & je les nommerai liqueur.

5. Le tartre vitriolé ſemble au commencement ne diminuer qu' un peu l' intenſité de la couleur bleüe, elle ſe change néanmoins après un certain tems en une couleur verte aſſez belle. Les fleurs de violette, ni le papier bleu ne ſouffrent aucun changement.

6. Le foye de Soufre, ou pour parler plus éxactement, du Soufre & de l' Alkali fixe mêlés à cette liqueur au moïen de l' agitation lui font prendre une couleur jaune dorée très-belle (*a*)

7. Le Sel volatil ſulphureux ſe diſſout en très-petite quantité dans la liqueur, elle ſe change cependant en un verd aſſez clair après quelque-tems.

8.

(*a*) Toutes les fois que je ne parlerai point des fleurs de violette & du papier bleu, c' eſt parceque je n' y aurai remarqué aucune altération ſenſible.

8. Le Sel de Glauber se dissout en très-grande quantité dans la liqueur, & lui fait prendre aussitôt une très-belle couleur verte.

9. L'alun se dissout de même en grande quantité, & produit une couleur violette qui disparoît ensuite & se change en un verd sale. Les fleurs de violette & le papier bleu changent aussi en rouge; il se fait au reste un précipité considérable dans le commencement qui semble cependant diminuer par la suite.

10. L'alun de plume artificiel dont j'ai rendu compte dans le mémoire précédent se dissout encore en plus grande quantité, & fait prendre une très-belle couleur de cerise à la liqueur, aux fleurs de violette & au papier bleu.

11. Le vitriol verd communiqua à la liqueur une couleur verd d'olive, parut changer foiblement en rouge les fleurs de violette, & le papier bleu prit une teinte d'un gris-rougeâtre; il y eut aussi dans ce mélange un précipité considérable (*b*)

12. Le vitriol de cuivre paroît produire dans le tems même de la dissolution un peu de changement, & la liliqueur prend à la suite une belle couleur verte, de même que les fleurs de violette qui se chargent d'une nuance tout-à-fait semblable à celle du verdet: le papier bleu au contraire semble relever un peu sa couleur naturelle.

(*b*) Dans le doûte que le vitriol vert que j'avois emploïé n'eut souffert une espéce de décomposition, j'y ajoûtai un peu d'acide vitriolique, ce qui produisit en effet une espéce de gonflement qui ne ressembloit pas mal à un mouvement de fermentation; pour m'assûrer néanmoins qu'il ne se trouvoit pas une surabondance d'acide, je projettai par intervalle des petites quantités de limaille de fer jusqu'à ce qu'il ne parut plus de mouvement; la liqueur en question prit une couleur brûne très-foncée qui étoit à peu-près la même que celle qu'on obtient en mettant de l'eau avec le charbon qui résulte de la combinaison de l'acide vitriolique & du sirop §. 2. de même que le papier bleu; les fleurs de violette au contraire devinrent d'un très-beau rouge.

13. L'huile de tartre commence par communiquer une couleur jaune à la liqueur qui se change ensuite en verd à mesure que la quantité du sirop est plus grande ; cette couleur cependant ne se soûtient pas & redevient jaune orangé ; les fleurs de violette dévéloppent un bien plus beau verd qui se change de même en jaune à mesure que l'humidité s'évapore & qui paroît d'un blanc sale lorsque les fleurs sont séches.

14. Le Sel de tartre se dissout en très-grande quantité, communique d'abord une belle couleur verte à la liqueur & paroît la partager en deux parties dont la supérieure est un coagulum blanc, & l'inférieure est une espéce de précipité vert trés-foncé : après quelque tems cependant cette liqueur prend une couleur jaune orangé.

15. La Chaux-vive change cette liqueur en un verd très-clair après avoir passé par le jaune comme celle qui est mêlée à l'huile de tartre §. 13., & jaunit de même ensuite.

16. La Chaux lavée change la liqueur dans le moment du mélange en verd-clair qui passe ensuite au jaunâtre.

17. Les os calcinés changent la liqueur en verd-clair, & cette couleur s'y soûtient.

Je crois devoir faire remarquer que le Sel de tartre, la Chaux-vive, la Chaux lavée, les os calcinés & le Sel volatil de Sel ammoniac produisent un mouvement dans la liqueur qui ressemble beaucoup à un mouvement de fermentation.

18. Le Sel volatil fait prendre une couleur verte à la liqueur qui se change ensuite en jaune orangé.

19. L'esprit volatil de Sel ammoniac change aussitôt en verd un peu jaunâtre cette liqueur qui ne se soûtient pas & qui passe au jaune &c. Et en un très-beau verd les fleurs de violette ; mais ce changement est encore plus prompt avec l'eau de luce, cette couleur néanmoins se change aussi en jaune.

20. L' huile de vitriol combinée avec l'huile & étenduë ensuite dans l' eau, procura une très-belle couleur à la liqueur, & changea les fleurs de violette en très-beau rouge.

21. Si l' eau-forte que l' on mêle avec la liqueur en question est en trop grande quantité, elle ne prend pas une belle couleur rouge, encore est-ce plutôt un jaune doré, qu' un véritable rouge qu'on peut lui faire prendre, quelque soit le rapport de ces substances entr' elles; il en est de même en emploïant le sirop tout pur; le papier bleu prend un rouge de brique de même que les fleurs de violette qui en différent cependant de quelques nuances; ce rouge quoiqu' il en soit n' est jamais beau & passe d' abord au jaune citron comme la liqueur reposée qui contient l' Alkali fixe.

22. Le Salpêtre se dissout en grande quantité dans la liqueur & lui fait prendre une couleur verte.

23. L' acide marin fait prendre une très-belle couleur rouge ponçeau à la liqueur qui est d' autant plus foncée, que la quantité de cet acide est moins grande: lorsqu'on en mêle au sirop sans être délayée, il se manifeste une très-belle couleur de rubis qui ressemble parfaitement à du vin.

24. Le Sel marin ne se dissout pas en aussi grande quantité dans cette liqueur que le salpêtre & lui fait prendre une couleur verte foncée.

25. Le Sel ammoniac fait changer en verd brun la liqueur en question.

26. La limaille de fer semble aussi faire prendre une couleur verte foncée à cette liqueur.

27. La pierre à cautere fait prendre dans l' instant du mélange une belle couleur verte à cette liqueur qui se change ensuite en jaune.

28. La ſubſtance ſaline dont j'ai parlé dans le mémoire précédent §. 69. paroît n'avoir produit aucun changement à la couleur du ſirop dans le moment du mélange, mais elle eſt dans la ſuite devenuë de la couleur des eaux croupiſſantes.

29. Le Sel de ſaturne a fait prendre une couleur verte à la liqueur en queſtion, & il s'eſt fait une ſéparation, en forme de précipité, des parties extractives qui n'avoient rien ſouffert dans l'intenſité de la couleur.

30. La crême de tartre n'a auſſi produit aucun changement dans le tems du mélange, mais elle lui a fait prendre une belle couleur de vin.

31. Le précipité blanc a converti la liqueur en bleu pâle & enſuite en verd-clair.

32. Le turbith minéral l'a changée en verd.

Je dois avertir, quoique la choſe ſoit fort naturelle, que ni l'une, ni l'autre de ces ſubſtances ne s'eſt pas diſſoûte dans la liqueur.

33. Un Sel ſéléniteux chargé de beaucoup de matière phlogiſtique & par conſéquent très-diſſoluble dans l'eau, comme je l'ai fait remarquer dans le mémoire précédent, a changé cette liqueur en verd qui ne s'eſt pas ſoûtenu, & qui a changé en jaune orangé avec un précipité très-abondant.

34. La pierre à plâtre qui n'eſt comme l'on ſait qu'une ſélénite calcaire naturelle, n'a point changé cette couleur au moment que je l'y ai miſe, elle parut cependant en avoir altéré la nuance dans la ſuite.

35. Le plâtre cependant m'a paru y avoir occaſionné quelque changement dans l'inſtant du mélange, qui devint d'autant plus ſenſible dans la ſuite; ſa couleur étoit d'un verd jaunâtre.

36. Le colcotar a fait prendre dans le moment du mélange une couleur rouge à la liqueur, & lorſqu'il ſe fut entiè-

entièrement précipité, elle devint d'un très-beau jaune doré.

37. La noix de galle lui a communiqué une couleur brûne olivâtre qui s'est soûtenuë & qui ne differoit pas de celle qui résulte d'un mélange de cette dissolution avec un peu d'huile grasse & beaucoup d'acide vitriolique ; elle ressembloit très-bien aussi à celles dont j'ai rendu compte dans la note du §. 11.

38. La liqueur délayée dans autant d'eau qu'il lui en fallut pour passer de la couleur bleüe à la verte est repassée au bleu par un peu de savon que j'y ai fait dissoudre.

39. Du Sel de Glauber, du salpêtre & du Sel marin dissous successivement dans la liqueur en question & mêlés ensuite avec de l'esprit urineux qui la fit changer tout de suite en verd-clair, repassa au bleu par l'addition du savon dissout & qui s'est coagulé dans ce mélange, comme il étoit assez naturel de le présumer, si quelqu'un des Sels n'avoit pas été à baze d'Alkali fixe, ce qui me fait conjecturer que l'esprit volatil contenoit apparemment encore un peu d'acide marin.

40. Je mêlai une petite quantité de liqueur renduë rouge par l'acide vitriolique avec une grande quantité de celle qui étoit d'un jaune-clair par le mélange de l'huile de tartre, & je vis, qu'au moment du point de saturation, le mélange commença à verdir & se fonça continuellement sans jamais perdre de sa couleur, comme faisoit l'huile de tartre malgré que je l'en eusse chargée.

41. Sans entrer dans une récapitulation métodique des faits dont j'ai rendu compte, il me paroît de pouvoir conclurre que la couleur rouge prouve tout au moins une surabondance d'acide dans la substance mêlée à la dissolution du sirop ; pour ce qui est de la couleur verte je me crois bien fondé à dire d'après le Célébre M. NEU-

MANN

MANN qu' elle eſt une preuve très-équivoque de la préſence d'un Alkali, & qu'elle eſt même fauſſe, c'eſt-à-dire qu'elle prouve la préſence d' une ſubſtance neutre très-diſſoluble lorſque cette couleur ſe ſoûtient; car ſi la ſubſtance qu'on a mêlée eſt un Alkali fixe ou (c) volatil, ou enfin ſi ce principe y domine la liqueur doit prendre une couleur jaune qui ſera plus ou moins foncée à meſure que ce principe s' y trouvera en plus ou moins grande quantité.

42. J' ai de même lieu de penſer que la couleur bleüe ne paſſe au verd par l' interpoſition des parties ſalines qui ſe ſont diſſoûtes dans la liqueur que parceque les parties blanches du mucilage ſe trouvent plus diviſées entr' elles (*d*) car du moment que ces parties ſe rapprochent, ou qu' on y en introduit de nouvelles, comme cela arrive par le mélange du ſavon, la couleur bleüe ſe manifeſte &

(*c*) En effet nous avons fait obſerver qu' une diſſolution renduë rouge par l' addition d' un acide, commençoit à ſe changer en verd avant d' avoir atteint le point de ſaturation lorſqu'on la mêloit à une diſſolution du même ſirop rendu jaune par l' action d' un Alkali fixe, & que cette couleur continuoit à ſe foncer à meſure que la quantité de la liqueur jaune étoit plus grande : *il ſuit de-là qu' il n' eſt pas néceſſaire que le Sel ſoit parfaitement neutre, mais je dois faire remarquer que ſi l' excès de ſaturation dépend de l' Alkali fixe, la couleur ne ſe ſoûtient pas & paſſe au jaune.*

(*d*) Je crois que ce n' eſt pas dans d' autres raiſons que dans celle de l'interpoſition produite par la diſſolution des ſubſtances ſalines qu' on doit chercher le changement de la couleur bleüe en verte, puiſque les Sels ou les matières qui ne ſont pas ou qui ſont du moins très-peu diſſolubles dans l' eau & qui d' ailleurs par la fineſſe de leurs parties ne peuvent ſe ſoûtenir dans la liqueur, n' y produiſent aucun changement & qu'au contraire plus les Sels ſont diſſolubles, ou plus les matières ſont réduites en des parties aſſez déliees pour être ſoûtenües, plus le changement eſt prompt & conſidérable. C'eſt auſſi ce qui paroît exactement prouvé par le retour au bleu au moïen du ſavon; car cette ſubſtance comme l' on ſait ne préſente pas une diſſolution parfaite dans l' eau, & elle n' y eſt que miſcible, d' où il ſuit naturellement l' opacité des parties aqueuſes qui ne tenant point du ſirop en diſſolution étoient auparavant diaphanes & faiſoient paroître la couleur verte.

Nous pouvons donc déduire de-là que la denſite du milieu produit ſeule ce changement.

& se soûtient tant que le nouveau coagulum se soûtient lui-même par petits floccons dans la liqueur.

43. Si la substance saline outre à l'interposition de ses parties dans celles du sirop dissout, a encore de l'action sur ces parties mêmes, il en résulte la couleur jaune ou la couleur rouge, suivant que cette action est plus ou moins vive, de manière que (*e*) la couleur jaune ne seroit que la dilatation des parties qui du bleu ont passé au verd,

(*e*) L'action des acides & des Alkalis sur les parties extractives dont est composé le sirop est si différente, qu'on peut avec fondement avancer que l'une est tout-à-fait opposée à l'autre ; il me paroît cependant qu'elle ne diffère que par l'activité avec laquelle elle se fait, mais ce seroit une question qui méneroit trop loin, & je me bornerai à faire observer que l'action de l'Alkali fixe consiste en ce qu'elle dispose les parties extractives à la fermentation putride : en effet en surchargeant une dissolution de sirop dans l'eau d'Alkali fixe il se développe après quelques heures une puissante odeur d'esprit urineux qui diminuë cependant ensuite par de nouvelles additions d'Alkali fixe & prend alors l'odeur & la couleur même de l'urine qui commence à se putréfier : or comme la putréfaction ne fait que désunir par une espéce d'extension les parties des substances qui en sont capables, je crois d'être bien fondé à penser que c'est de la raréfaction des parties qui constituent la couleur verte, qu'on doit répéter le changement de cette couleur en jaune. Les acides au contraire loin de disposer les matières à la fermentation putride sont faites pour en empêcher l'effet comme cela est connu de tout le monde, & j'ai lieu de croire que c'est en racornissant les molécules colorantes qu'ils produisent les changemens des couleurs ; de manière que ces parties présentent de plus grands interstices entr'elles pendant qu'elles sont réduites à un plus petit volume pour les nuances de la couleur rouge, & qu'elles le sont au plus petit possible pour le noir le plus foncé

Il me paroît qu'on ne peut mieux comparer cette action des acides & des Alkalis qu'à ce que l'on voit arriver aux substances animales ou végétales exposées à l'action immédiate du feu, ou bien à celle de cet agent modifiée par l'intermède de l'eau ; car dans le premier cas, ces substances souffrent une contraction plus ou moins grande à mésure que l'action est plus ou moins vive, & au contraire dans la seconde elles s'étendent & se raréfient.

Cette différence cependant ne me paroît produite que parceque dans les acides l'action étant trop vive attaque d'abord la surface des substances, & se porte par une succession rapide sur les parties intérieures, au lieu que dans les Alkalis cette action est plus uniforme & s'étend en même-tems sur toutes les parties de la substance.

& le rouge une plus grande atténuation de ces parties : le noir enfin ne ſauroit être que la deſtruction, ou pour parler plus exactement la diviſion mécanique la plus forte poſſible.

44. Cette diviſion ne me paroît être produite que par l'atténuation qui arrive au phlogiſtique, car je ſuis parvenu à faire du bleu par une ſurabondance de cette matière avec une diſſolution de vitriol vert que j' avois fait long-tems boüillir pour en ſéparer la terre férugineuſe, & cela au moïen d' une grande quantité d' une forte décoction de noix de galle dans la diſſolution en queſtion; ce mélange après avoir paſſé par la couleur noire de différentes nuances & par le violet devint bleu de Roi lorſqu' il eut été parfaitement deſſéché; je dois cependant avertir que M. Rouelle avoit déja fait une pareille préparation comme je l' ai vû rapportée depuis par M. l' Abbé Menon dans ſon ſecond mémoire ſur le bleu de Pruſſe inſéré dans les mém. de Math. & de Phyſ. préſentés à l' Ac. Roy. des Sci. par divers Savans Tom. premier pag. 580.

45. Nous déduirons enfin de ce mémoire que pour que la couleur bleüe ſe change en verd il n' eſt pas néceſſaire que la fécule colorante ſoit atténuée, & qu' il ſuffit qu' il ſe faſſe une interpoſition des parties d' une ſubſtance blanche ou jaune qui donnent de l' opacité aux interſtices du milieu interpoſé entre le molécules colorantes.

46. Qu' il n'en eſt cependant pas de même de la couleur jaune; car elle eſt ſans contredit le réſultat d' une dilatation qui ſe fait dans ces parties, de manière que leur denſité ſe trouve diminuée.

Que le rouge dépend d' une plus grande diviſion des parties de celles-ci, & que la noire n' eſt pour ainſi dire qu' une diviſion ſi intime, qu' on peut la nommer du nom de deſtruction.

47.

47. Tout ce mécanisme cependant ne fait son jeu qu' en vertu de l' action que les substances ont sur le phlogistique.

48. Lors qu' un corps est réduit en charbon, ce n'est pas qu' on en ait enlevé le phlogistique, je croirois plus volontiers qu' on n' a fait qu' en changer la distribution; les corps blancs me paroissent être ceux qui en sont les plus dépourvus, ou dumoins qui n' en retiennent que la quantité qui leur est nécessaire pour avoir les propriétés communes aux corps; d' où il résulte aussi une plus grande difficulté à les en priver. Ce qu' il y a de trés-positif, c' est que la Chaux & le Sel de potasse, de même que le Sel de tartre deviennent bleus étant calcinés, au moins, à vase clos avec des matières qui contiennent beaucoup de phlogistique.

J' aurai occasion de développer plus amplement & plus démonstrativement dans un autre mémoire les vérités que je n' ai fait pour ainsi dire qu' indiquer dans celui-ci; il me suffit en attendant de faire remarquer la conformité de ces expériences & de ces inductions avec ce qu' en pensoit le célébre Chevalier Newton: voici ses propres termes „ nec minus eodem facit, quod ex diversorum li-
„ quorum permixtione, certæ colorum species permiros
„ interdum ac notatu dignissimos ortus atque mutationes
„ habeant: quorum quidem caussa nulli rei verisimilius &
„ rationi congruentius attribui potest, quam quod corpus-
„ cula salina, quæ insunt in uno liquore, agant varie in
„ corpuscula colorata alterius, vel coalescant cum illis;
„ adeo ut illa inde adaugeantur vel extenuentur, (quo non
„ modo magnitudo, verum etiam densitas ipsorum immu-
„ tari potest) vel dividantur in corpuscula adhuc minora,
„ (quo liquor, qui fuerat coloratus, poterit pellucidus
„ evadere) vel consocientur complura inter se, & in gru-
„ mulos coalescant, (quo ex binis liquoribus pellucidis,
„ confieri poterit liquor coloratus.) Newt: Opt: L. II. P. 3.ª Prop. V.ª pag. 98.

Fautes qui se sont glissées dans le Mémoire sur la Chaux, & qu'on prie le Lecteur de corriger.

Page	Ligne	FAUTES.	LISEZ.
87	24	; - - - - - -	effacés
104	1	$\frac{6}{8}$ - - - - - - -	$\frac{6}{gr.}$
105	27	. - - - - - -	,
106	11	graisses . . .	goutes de graisse
123 (dans le texte)	4	caustique sublimé	caustique. Sublimé
143	derniere	il me ne - -	il ne me
144	2	des matras - -	du matras
Ibid.	21	production - -	graduation
Ibid.	22	Raumur - - -	Reaumur
Ibid.	24	il se détruit avec	il ne se détruit pas avec
Ib. dans la note		je tirai - - -	je dirai
147 dans la note		est-il moins vrai	n'est-il pas moins vrai.

JOHANNIS-BAPTISTAE GABER

De humoribus animalibus

SPECIMEN TERTIUM.

QUUM experimenta de ſpontanea humorum mutatione perſequerer, paullatim eo deductus ſum, ut varias etiam partes explorarem, quibus humores ſecundum naturam efficiuntur, atque adeo productiones varias tum albuminoſae partis, quae ſerum conſtituit, tum lymphaticae, & aqueae ad examen revocarem. Hinc varia de ruyſchiana membrana, de flocculis, quos in calida miſſus ſanguis gignit, de fibroſa baſi cruoris inſulam efformante, de ſale ſanguinis eſſentiali tentamina nata ſunt, quae minus fortaſſe perfecta, & abſoluta, hic nullo alio ordine deſcripſi, quam quo ſe mihi primum obtulerunt.

1. Seri partem concreſcibilem ab aquoſa frigoris ope ſeparabam, partem nempe aqueam, quae primum, & minori frigore concreſcebat a parte reliqua, quae tardius congelabatur, ſejungebam, eaſque in diſtinctis vaſis liqueſcere ſinebam. Prior illa liquorem exhibebat limpidum, penitus in ignem difflabilem, ex acidis mineralibus non coagulabilem, a quo per digeſtionem nihil ſeparabatur; pars altera liquorem praebebat denſiorem, ſero coloratiorem, viſcidulum, igne, & acidis coagulabilem, & digeſtionis ope in clauſis vaſis in puriforme liquamen prorſus abeuntem perpauca omnino aqua ſupernatante.

2. Ex quo confirmatur albuminoſam partem ſeri eam eſſe, quae in pus ſecedat, atque hinc fieri, ut eadem omnino depoſita ſupernatans liquor concreſcibilem naturam amittat (*a*). Ex eo etiam experimento definiri commode

a) Specim. II. §. 20.

poteſt, qua proportione albuminoſae partes ſe habeant ad aquoſas in ſero contentas: atque inſuper deprehendimus partem ſeri aquoſam concreſcibili parti propemodum aequalem eſſe. Quae porro methodus horum elementorum proportionem definiendi minime fallax, coeteriſque anteponenda videtur (*b*).

3. Diximus corium, quod cruoroſam inſulam pleuriticorum obtegit, alkalicis volatilibus ſolvi, mox eorum evaporatione iterum concreſcere, ita tamen ut priſtinam duritiem, & colorem non recuperet, ſed in tremulae gelatinae ſpeciem tantummodo coëat (*c*). Libuit autem experiri quid eveniret, ſi ejuſmodi ſolutioni, aut aqua, aut acida admiſcerentur. Itaque admixta aqua, ſoluta membrana gelatinae ſpecie ad liquoris ſuperficiem colligebatur; quo fit, ut ipſa ſic ſoluta ſaponaceam indolem non adquirat, quum aqua ſolubilis non efficiatur. Quod ſi vero in eam ſolutionem ſpiritum nitri immitterem, ſoluta cruſta ad fundum praeceps ferebatur, & priſtinam albedinem, & duritiem referebat. Conſtat igitur ſpeciem, quam exhibet, gelatinae aemulam, dum aut alkalini evaporatione, aut aquae admixtione concreſcit, tribuendam eſſe aquae, quam in poris ſuis concreſcendo retinet, indeque fieri, ut acida mineralia, quae aquam non minus, quam alkali abripiunt, priſtinam formam, ac denſitatem eidem reſtituant.

4. Libuit etiam indolem ſabuloſae materiae, in quam temporis progreſſu ſeri ſedimentum puriforme faceſſit per experimenta inveſtigare (*d*). Hujuſmodi itaque materiem in varios liquores immiſi, aquam, vini ſpiritum, acetum diſtillatum, acidum nitri, alkali volatile. Tribus prioribus menſtruis ſoluta nullatenus eſt; duobus poſtremis prompte, & perfecte ſolvebatur. Ex quo adparet ea concrementa

ſalina

(*b*) Confer *Ill. Haller* Elementor. Phyſiol. T. II. pag. 124.
(*c*) Specim. II. § 30.
(*d*) Confer. Specim. II. §. 20.

ſalina non eſſe, quum aqua non ſolvantur, & albuminoſae ſeri parti in eo eſſe ſimilia, quod alkohole ſolvi non poſſint, ſolvantur vero alkalicis volatilibus; in eo autem differre, quod ſolvantur acidis mineralibus, quum ſeri pars gelatinoſa ab iiſdem cogatur.

5. Ex iis etiam conſtat concrementa ea terrea a tophacea podagrorum materia differre; nam haec aceto diſtillato, & ſpiritu ſalis intra viginti-quatuor horas ſolvebatur, contra in ſpiritu ſalis ammoniaci, c. c., urinae integra perſtabat (*e*), ut propterea iis ſolveretur, in quibus terrea materies integra perdurabat, iiſque reſiſteret, a quibus terreum hoc puris concrementum ſolvebatur. Eodem modo a calculis differre conſtabit tum felleis, tum urinariis, quorum aliquos in alkalicis iiſdem integros permanere obſervavimus.

6. Quum porro corium pleuriticum in vaſis clauſis ſponte colliquatum (*f*) diu aſſervaſſem, animadverti turbidum eum liquorem in tophos abire iis omnino ſimiles, quos purulentum ſeri ſedimentum produxerat, quique ſimiliter tentati eamdem naturam oſtendebant (4), ut inde probabile fiat colliquatum corium a purulento ſeri ſedimento minus diſcrepare, quam ſubito aſpectu (*g*) ex aliqua conſiſtentiae, & coloris diverſitate nobis differre viſa fuerint, & confirmatur eorum ſententia, qui cenſent unam eamdemque utriuſque materiem eſſe (*h*), albuminoſam nimirum ſeri partem, quod aliis etiam experimentis conſentaneum eſt, quae hic continenter adnotamus.

7. Inſulam cruoroſam in minima fragmenta comminutam repetita aquae affuſione eluebam, ut cruore per aquam abrepto

(*e*) *Pinelli*. Saggio delle tranſazioni. T. IV. pag. 157.
(*f*) Specim. II. §. 20.
(*g*) Specim. II. §. 26.
(*h*) *Celeb. Sauvages* de l' inflammation §. 87.
Cl. De-Haen Part. II. Cap. II. pag. 22.
Cl. Queſnay de la ſaignée pag. 419. 420.

abrepto ſola ipſius inſulae pars fibroſa, albidaque ſupereſſet (*i*); tum eam partem fibroſam variis iis experimentis exploravi, quae circa corium pleuriticum alias inſtitueram. Eamdem omnino naturam conſtanter demonſtravit: nempe clauſis vaſis digeſta in liquamen abibat, alkohole, & acidis mineralibus indurabatur, alkalicis volatilibus perfecte ſolvebatur, eorum tamen evaporatione concretura.

8. Ex quibus demonſtratur corium pleuriticum ex eadem materie conſtare, ex qua fibrata, albidaque inſulae cruoroſae matrix conſtituitur, albuminoſa nempe ſeri portione, uti MALPIGHIO (*l*) HALLERO (*m*), aliiſque ſummis Viris viſum fuerat. Hinc porro intelligitur cur corium pleuriticum ad ſuperiorem inſulae cruoroſae faciem conſtanter adhaereat; cur interdum globulis cruoroſis interceptis nonniſi dilutiore colore, majorique duritie id corium a cruoroſa inſula diſtinguatur (*n*); cur in ſcorbuto imminuta cohaeſione globulorum ſanguineorum ad fibroſam ſanguinis partem corium craſſius fiat (*o*); cur in inflammationibus prout cruoris quantitas imminuitur corii craſſities augeatur (*p*); cur denique corium a nobis obſervatum fuerit, quod flocculenta corona per ſerum diſperſa cingebatur (*q*); ac poſtremo cur & tota placenta, & corium pleuriticum aeque parum ferri contineat (*r*).

9. Omnino probabile eſt educto ſanguine, defectuque motus, vel caloris, vel utriuſque aqueam ſeri partem minorem

(*i*) Conſer *Malpighium* de polypo pag. 33.
Menghinum Comment. Bononienſ. T. II. Part. II. pag. 254.
Cl. Kronaver apud *Hallerum* in addendis Phyſiolog. T. VIII. Part. II. pag. 139. *Cl. Kronaver* enim opuſculo non ſine dolore careo.
(*l*) Loc. citat.
(*m*) Tom. II. Phyſiolog. pag. 126. 127. 128.
(*n*) *Queſnay* loc. citat. flag. 411. 412.
(*o*) *Lind.* Traité du Scorbut.
(*p*) *Queſnay* loc. citat. pag. 415. 416.
(*q*) Specim. II. §. 25. not. d.
(*r*) *Menghini* loc. cit. pag. 255.

norem jam albuminoſae partis quantitatem ſolutam ſervare poſſe, hinc excedentem portionem ſecedere quemadmodum quorumdam ſalium portio aqua calida ſolutorum ab eadem frigeſcente ſeparatur. Portionem hanc albuminis frigore, & quiete coëuntem globulos cruoroſos abripere, & inſulam conſtituere, corium vero pleuriticum fieri ab albuminoſa parte, quae aut nullos, aut pauciores globulos ſanguineos concreſcendo abripuit, ſive quod frigori magis expoſita promptius coierit, ſive quod in concretionem magis prona eſſet, ſive quod minorem, quam ſecundum naturam ad globulos ſanguineos adhaeſionem haberet, & quidem promptiorem ex frigore congelationem ad corium pleuriticum conſtituendum conferre, inde erui videtur, quod corium ad ſuperiorem inſulae faciem perpetuo adhaereat frigori magis expoſitam, quamquam corium ipſum ſero gravius ſit, tum ex eo etiam, quod hyeme corium frequentius occurrat. Majorem albuminoſae partis proclivitatem ad cohaeſionem ad cruſtam efformandam conferre oſtendunt inflammatorii morbi, in quibus adeſt frequentiſſime, ejuſque durities ſeri vim concreſcibilem auctam eſſe teſtatur. Demum eo etiam ſpectare imminutam cruoris ad albuminoſam partem ſeri adhaeſionem innuere videntur ſcorbutus, cachexia, hydrops ipſe, in quibus morbis aliquando ea alba cruſta ſanguinem obtegit (*s*).

10. Quum inſulae cruoroſae non lotae fruſta in acido minerali, & alkohole immitterem ſimiliter dureſcebant, alkalicis vero volatilibus non perinde ſolvebantur ac ſi lota fuiſſent; ſed ſpiritus volatilis cruore tantum inficiebatur, grumus autem nigrior evadebat, ac integer perſtabat (*t*). Ex quo conſtat cruoroſos globulos, quibus fibroſa ſanguinis

(*s*) Utramque hanc cauſam conjungit *Ill. Haller* in addendis T. VIII. Phyſiolog. pag. 142. 143.

(*t*) Eumdem eventum habuit experimentum *Ill. Halleri* T. II. Phyſiolog. pag. 81.

nis pars obvoluta eſt, impedire quominus ipſa ſalibus alkalicis volatilibus diſſolvi poſſit.

11. Quod ſi ſanguis e vena exiliens aqua excipiatur, aqua ipſa globuli ſanguinei eluuntur, pars vero albuminoſa ſeri ſola fere concreſcit in notiſſimos flocculos, qui tam pauco cruore colorantur, ut fere albidi ſint; & quidem eos flocculos eamdem iterum naturam habere, ac corium pleuriticum, aut lotam cruoroſam inſulam deprehendi, alkohole nimirum indurari, ac in eodem immutatos perſtare, ſpiritu volatili perfecte ſolvi, digeſtione in purulentum liquamen abire: perinde nimirum eſt ſive cruoroſi globuli per aquam, in quam ſanguis e vena exilit, ita diffundantur, ut a concreſcente albuminoſa ſeri parte abripi non poſſint, ſive jam abrepti, & cum eadem in inſulam coacti repetita aquae affuſione deinceps eluantur (7).

12. Ex eadem albuminoſa ſeri parte materies conſtitui videtur ejus membranae, quae ruyſchiana dicta eſt, quaeque ex concuſſo ſanguine paratur. Sanguinem ab animalis vena intra vitream lagenam excipiebam, exceptum agitata phiala vehementer, ac diu quatiebam, mox fracta phiala, eumdem ſanguinem in aliud vas transfundens, obſervabam totum illum fluidum, ſpumoſum, & admodum coccineum eſſe, ſed in eodem multa coagula dura, albidaque reperiebam, quae corium pleuriticum, & colore, & conſiſtentia referre videbantur. Coagula haec eaſdem etiam proprietates retinebant, quas modo dictum pleuriticum corium: nam iiſdem menſtruis ſolvebantur, iiſdem fluidis dura, ac incorrupta perſiſtebant, & intra vas clauſum digeſta in ſimile putridum liquamen immutabantur.

13. Igitur ea ruyſchiana membrana nihil aliud eſt niſi albuminoſa ſeri pars, quae ſponte concreſcens agitatione impeditur, quominus globulos ſanguineos ſecum abripiat; ſeu potius albuminoſa pars, quae interea dum concreſcit, intra ſerum ſic eluitur per agitationem, ut globulos ſanguineos

neos per ipſum diffundat, quo fit, ut & album colorem praeſeferat, & reliquas albuminoſarum concretionum proprietates poſſideat. Quum vero globuli ſanguinei non cogantur niſi quatenus a coëunte ea albuminoſa parte abripiuntur, inde intelligitur, cur ſanguis a quo ruyſchiana membrana ſeparata eſt, ſolutus maneat (*u*). Quum nonniſi quaedam albuminis portio ſponte a ſero ſecedat, inde intelligitur, cur ſerum, a quo ea determinata albuminis portio jam ſeceſſit, aut quiete in inſulam coëuns, aut agitatione in membranam ruyſchianam abiens, coagulabilem ex acidis mineralibus, alkohole, igne naturam praeſeferat (*v*), etſi nihil ulterius membranae ruyſchianae per agitationem ex illo elici poſſit (*x*). Nempe id ſerum tantam adhuc albuminis quantitatem retinet, quantam ſolutam ſervare poteſt, hinc concreſcibilem naturam ſervat; nec tamen membranam ullam amplius poteſt ſuppeditare, quum ſponte nihil amplius ejus albuminoſae partis dimittere poſſit.

14. Ex his etiam intelligitur cur agitatus ſanguis nullum corium pleuriticum exhibeat, ex eo nempe quod albuminoſa pars, quae in corium fuiſſet coitura, agitatione in Ruyſchii membranam tranſeat. Intelligitur etiam albuminis portionem, quae educto ſanguine ſponte coaleſcit, & inſulam efformat (*y*) non tam defectu motus, quam frigore coire, quum agitato ſanguine ſimiliter ſecedat, & in ruyſchianam membranam immutetur, quod & allatis ſuperius obſervationibus confirmari videtur, & pro demonſtrato haberi poteſt, ſi modo verum ſit ſanguinem in calore animalis aſſervatum diutiſſime fluidum permanere (*z*).

15. Ex his omnibus conſequens erit fibroſam inſulae cruoroſae partem, concrementa, quae ſanguis in aquam emiſ-

(*u*) *Cl. De Haen* pag. 90. 91. 92.
(*v*) Idem loc. citat.
(*x*) Idem pag. 88. 89. & 93. 94.
(*y*) *Sydenham* de Pleuritide.
(*z*) *Schwenche* Haematol. pag. 90. 103. 105.

emiſſus facit, ruyſchianam membranam, corium pleuriticum, unam eamdemque naturam praeſeferre, & ex eadem albuminoſa ſeri materie conſtitui: propterea arbitramur Auctores, qui a noſtris diſcrepantia experimenta propoſuerunt, & aut lotam cruoroſam inſulam, aut flocculos ex ſanguine in calidam miſſo procreatos vini ſpiritu ſolvi adfirmarunt, aut eodem aqueo nimis uſos fuiſſe, aut experimenta in apertis vaſis inſtituiſſe, ut ſpirituoſa parte abeunte, haec deinceps orta putredine ſponte ſolverentur, aut aliqua alia ratione in errorem inductos fuiſſe. In variis enim experimentis, in quibus vini ſpiritum communem, nec probe rectificatum adhibuimus, conſtanter tamen varia ea coagula non ſecus ac corium pleuriticum indurari obſervavimus, & ſic indurata a longo jam tempore in eo liquore integra ſervamus.

16. Placuit praeterea alkalinorum fixorum actionem in varias memoratas albuminoſas concretiones per experimenta inveſtigare, quum omnes ſpiritu volatili ſalis ammoniaci calce parato indiſcriminatim ſolvi conſtitiſſet; at contra comperimus perinde omnes oleo tartari per deliquium non ſecus, ac vini ſpiritu induratas fuiſſe, diuque in eodem, quamvis calori digeſtionis expoſitas, immutatas perſtitiſſe, ut cenſeam ſimiliter, ac in vini ſpiritu, in eo liquore ad plures etiam annos integras poſſe ſervari.

17. Ex his ipſis, quae hactenus attulimus experimentis lucem aliquam oriri exiſtimo ad eam quaeſtionem dirimendam inter Viros Cl. acriter noſtris temporibus agitatam, num alkalica ſalia putredinem arceant, vel promoveant. Quae quidem quaeſtio vix poterat ex odore definiri, quum alkalicum fixum ex animalibus humoribus etiam ſanis odorem extricet alkalini volatilis, volatile vero ſal ipſum odore ſuo dubium relinquat, utrum odor corporis, cui admixtum fuit ipſi adſcribendum ſit, an novo volatili ſali ex putredine orto. At cum certum ſit ſerum per

putredinem liquari, & coagulabilem indolem deponere, inde confirmari potest utrumque alkali putredinem impedire. Etenim in allatis experimentis pars seri gelatinosa liquore tartari indurescebat, & sic indurata in eodem diutissime persistebat, & licet in spiritu salis ammoniaci calce parato soluta satis diu servaretur, concrescibilem tamen indolem constanter servabat, quam dissipato per evaporationem alkali sponte concrescens ostendebat, ut propterea utrumque alkali inter antiseptica, & quidem actuosiora referri debeat.

18. Demum etiam aquae calcis actionem in crustam phlogisticam, aliasque albuminosas concretiones experimentis investigans comperi haud minus prompte ab hac, quam spiritu alkalino salis ammoniaci calce parato in tremulae gelatinae speciem primum conversas, mox perfecte dissolutas fuisse, adjecta aqua forti in pristinam albi coaguli speciem ad liquoris fundum iterum dejectas fuisse.

19. Cupiebam etiam salem sanguinis essentialem in aquea seri portione invenire. Quare aqueam eam portionem, tum congelatione (1) ab albuminosa separavi, tum a coagulato per ignem sero sponte extillantem excepi. Sed aut parciorem obtinui aquam, aut crassiorem, & turbidam, ut nihil inde ad propositum mihi finem exoriretur. Itaque alio rem eamdem tentamine adgressus sum. Noveram ex Haenio (z′) serum in fervidam immissum lacteam ipsam reddere, nec ullum coagulum exhibere, quantumvis aqua ebulliat; conjectabam igitur futurum, ut si albuminosas seri partes per aquam sic dispersas ab eadem secernerem, mox aquosam partem debito modo evaporare sinerem, salinae partis in eadem contentae crystallos obtinerem. At quum magnam aquae quantitatem, immisso in ipsam sero, per ebullitionem reddidissem lacteam, philtratione statim per

(z′) Loc. citat. pag. 86. 87.

chartam adeptus equidem ſum limpidam, ac aqueam ſeri partem a concreſcibili ita ſegregatam, ut in igne evaporando concentrari poſſet; ſed quamvis ſic evaporata ſalſum admodum ſaporem adquireret, tamen frigido loco ſervata cryſtallos nunquam dimiſit; ex quo conjicere eſt ſalem ſanguinis nativum hujuſmodi eſſe, ut nunquam, aut aegre in cryſtallos concreſcat. Sed de hac re alias fortaſſe.

20. Duo reliqua mihi ſunt experimenta, quae breviter indicabo, alterum in animalibus ex nimio calore ſuffocatis, alterum in iis, quae inedia conficiuntur. Quum enim ex his duobus cauſis Cl. Scriptores humorum putredinem induci, indeque ea animalia enecari tradiderint, idcirco opportunum cenſui eamdem rem experimento etiam meo explorare.

21. Duo cuniculi in hypocauſto ad 35° thermom. reaumuriani calefacto ex dyſpnaea, & virium proſtratione interierunt. Primus quidem ſpatio horarum XIII., alter horarum XVIII. Pulmones inflammati inventi ſunt, odor nullus foetidus, nec ſanguis, nec bilis cum acidis efferbuit. Feles robuſta in hypocauſto inter 38. & 40. ejuſdem therm. calefacto horis ſex interiit. Cuniculus alter, quum in eodem calore duabus horis permanſiſſet, vivus adhuc ex eodem eductus eſt, & brevi poſtea interiit: utrumque animal pulmones inflammatos oſtendit, neutrum vel foetuit, vel quodpiam aliud putredinis indicium praebuit. Conjectamus igitur Viros Cl., qui alium ſimilium experimentorum eventum ſortiti ſunt, forte animalia ad aliquod tempus in calente loco reliquiſſe poſtquam extincta eſſent, ubi mortuae carnes in corruptionem vergere citiſſime debuerunt: nec dubitamus calorem ex interna cauſa, auctoque motu natum, longe diverſum in animalium humores effectum gignere poſſe.

22. Illud exquirere volui, utrum animalia, quae inedia pereunt, orta humorum putredine extinguerentur. Quod

etſi

etſi pro certo a multis proponatur, dubia tamen de ea re Cl. Virorum me ad experimentum iterandum excitarunt (ʒ″). Cuniculum itaque, quem fames intra dies 21. confecerat ex convulſionibus diligenter explorabam. In eo pinguedineam telam adipe deſtitutam, & exſuccam obſervavi; ventriculum, & inteſtina vacua, niſi quod in inteſtinis identidem flavae bilis ramenta occurrerent, viſcera coetera ſana erant. Odor nihil putredinoſi emittebat, neque humores aut foetebant, aut cum acidis efferveſcebant; quare credibile eſt, aut in carnivoris animalibus alium futurum experimenti eventum, aut alias praeter inediam putredinis cauſas adjunctas fuiſſe, ut corrupta, & prava alimenta, quibus obſervata a Cl. Viris, quorum fides minime ſuſpecta eſt, putredinis ſigna tribui poſſint.

(ʒ″) *Morgagni* de cauſ. & ſed. epiſt. 24. §. 6.

CAROLI

CAROLI ALLIONII

Stirpium aliquot descriptiones cum duorum novorum generum constitutione.

DESCRIPTIO PRIMA.

ORTEGIA *dichotoma, axillis ramorum unifloris* Tab. IV. f. 1.

EX radice perenni, longa, tereti, fibrosa cespes nascitur caulium procumbentium, qui ad cubitalem usque longitudinem sese extendunt. Caules continuo dichotomi, quandoque in primis ramis trichotomi, quadrangulares, striati, subasperi, virides, articulati, supra nodosi nodo aliquantum albescente.

Folia primum elliptica, deinde linearia, crassula, acuminata, sessilia, opposita, ad geniculos tantum nascuntur, subaspera, supra canaliculata, subtus longitudinali prominente nervulo donata.

Flos in alis dichotomiae ubique sedet, raro pedunculatus, cujus calyx noctu connivet, diu sole praesertim percussus aperitur, calycinis foliis erectis. Postremi rami duobus floribus finiuntur, uno sessili in ala una foliorum, altero pedunculato, sive ramum finiente, qui paullo infra calycem duas bracteas habet, foliolis ramorum divisionibus oppositis similes.

Calyx ex quinque foliolis concavis, elliptico-lanceolatis, viridibus, margine membranaceo albicantibus componitur. Calycis foliolorum tria interiora florem proprie continent, & longiora sunt; folia duo exteriora aliquantum breviora.

Germen trigonum est instructum stylo viridi, simplici embryonis longitudinem habente, cum stigmate rotundo.

Antherae

Antherae luteae, trigonae, trisulcatae in gremio interiorum foliorum brevibus filamentis insident, calyce breviores, stylo parum altiores.

Capsula calyce persistente comprehensa, & ex ovato conica, apice trigona, tribus valvis aperitur, unilocularis, semina minuta continens oblonga coloris spadicei.

In saxosis prope *Javenium* nascitur nova haec *Ortegiae* species, cujus nullam mentionem apud rei herbariae Scriptores reperire licuit. Differt porro ab *Ortegia* LINNAEI spec. *plant. pag.* 49. sive *Juncaria Salmantica* CLUS. *hist. pag. CLXXIV.* radice perenni, habitu dichotomo, floribus in foliorum alis sessilibus, & caulibus quadrangularibus, qui in *Juncaria Salmaticensi* Juncorum ad instar teretes esse videntur, quemadmodum ex Clusiana Icone conjicere licet.

DESCRIPTIO II.

BASSIA *Tab. IV. f.* 2.

NOvum hoc plantae genus, cui *Bassiae* nomen instituo, radicem teretem, ramosam, fibrosam, perennem habet, caulem autem rotundum, parum firmum, continuo, & sine ordine ramosum, ramis iterum similiter ramosis. Primi caulis rami fere decumbunt. Tota planta villo hirsuta est. Ejus altitudo spithamam unam aut alteram ad summum aequat.

Folia lanceolato-linearia sunt, crassula, compressa, sessilia, alterne, seu potius inordinatim dense posita. Duo autem simul nasci solent, quorum unum duplo longius est, in cujus ala duo flores sessiles adsunt; alterum brevius cum flore uno sessili, & foliorum fasciculo novum ramum facturo.

Flores omnes sessiles sunt in foliorum alis. Flos apetalus; calyx monophyllus, quinquefidus segmentis acutis.

Sta-

Stamina quinque antheras luteas, didymas ſupra calycem exerunt.

Styli duo filiformes ex albo purpurei ex embryone naſcuntur.

Floreſcentia autem abſoluta calycis ſegmenta complanata & coaleſcentia florem claudunt, atque calyx capſula evadit, quae matura ſemen orbiculatum continet obſcuri coloris, non cochleatum, ſed in ſuperiori facie circularem ſulcum inſculptum habens. Ea proportione, qua embryo majorem magnitudinem acquirit, receptaculum in majorem amplitudinem extenditur, & ad baſim calycis quinque apparent flaveſcentes ſpinulae aequali diſtantia inter ſe poſitae. Calycis & receptaculi ſubſtantia firma & coriacea reddita fructum rotundum efficit complanatum, quinque firmulas ſpinas ex ambitu ſtellae in modum radiatas habentem.

Stirpis hujuſce genus inter *chenopodium* & *ſalſolam* ambigit. Ab utroque autem differt ſingulari praeſertim calycis in capſulam mutatione. Quamobrem cum ſui proprii generis conſtitutionem mereri videretur, *Baſſiam* appellandam cenſui in perpetuum amicitiae, gratitudinis, & exiſtimationis monumentum erga doctiſſimum Ferdinandum BASSIUM Bononienſem, Virum de univerſali naturali Hiſtoria maxime meritum, qui hujuſce plantae ſemina a praeclariſſimo Viro Vitaliano DONATI in Aegypto collecta, & in Italiam miſſa benevole communicavit.

DESCRIPTIO III.

LINDERNIA *Tab. V. fig.* 1.

PLantae quam *Linderniae* nomine voco, radix annua eſt, & ex capillitio teretium albarum fibrarum, modo ſimplicium, modo ramoſarum conſtituitur, ex quo nunc unus, nunc plures caules naſcuntur, qui ſpithamae altitudinem raro ro attingunt. Ad caulis initium duo oppositi rami saepe proveniunt; reliquo deinde caule & ramis saepius simplicibus. Caules tetragoni sunt, tenuiter striati, angulis acutis, intus cavi, sexdecim circiter membranas habentes, quae ex axe caulis radiatim nascuntur. Planta tota, tenera, succosa, glabra, & viridis est.

Folia opposita, integerrima, erecto-patentia, oblongo ovata, semi-amplexicaulia, sessilia, tribus aut quinque nervis in inferiori facie extantibus exarata, quae non male *Centaurii minoris* foliis comparari possunt; sed longe tenerioris substantiae sunt. Ex singulis alis foliorum pedunculus erigitur quadrangularis, foliorum circiter longitudine, florem sustinens.

Calyx ex quinque erectis linearibus foliolis fit, ex viridi purpurascentibus, acutis, & a tubo floris vix secedentibus.

Flos dilute purpureus, bilabiatus, tubo floris pene cylindrico: hiatus floris parvus. Labium superius admodum breve, parum concavum, bifidum segmentis subrotundis. Ab eo modice discedit labium inferius, quod recte fere protenditur, magnum, profunde trifidum segmentis rotundis, medio aliquantum majori.

Stamina quatuor ex tubo floris prope orificium orta: duo superiora simplicia, atque sub labio superiori inflexa, duo inferiora, sive infra superiora prope orificium floris nata ex nervo evidentiori, qui ex imo tubo floris nascitur, qui originem dat filamento uno antherifero, qui nempe inflectitur sub labio superiori, dum nervi producti extremitas recta procedens, & a tubo libera facta cornu simplex exhibet sterile, anthera omni destitutum, coloris dilute lutescentis.

Antherae sunt didymae, transversim positae, ex cinereo purpureae.

Stylus filiformis antheris immediate tectus, simplex, apice obscure bifido.

Embryo

Embryo in capſulam evadit viridem, ovalem, oblongam, calyce comprehenſam, unilocularem commiſſurae loco ſulco & linea aliquantum rubente ſignato, ſemina minima numeroſa ſordida albida continentem, cylindricae placentae affixa.

Pluribus locis collecta eſt rariſſima haec planta in *Pedemontio*; incolit vero loca ſpongioſa & paluſtria, & quae aquis inundata fuerunt. Secus *Seſiam* non longe ab urbe *Vercellarum* naſcitur. Legi etiam circa *Froſaſcum* in paluſtribus, uti etiam circa *la Marſaja*. Stirpem hanc collegerunt optimi mei diſcipuli & ſtrenui Botanicas cultores, nunc Medicorum Collegio adſcripti, Petrus DANA, & Ludovicus BELARDI, quorum prior circa *Envie*, & in finibus *Bargiarum*, alter autem circa lacum di *Majon*, & inter *Gajanì* & *Candeil* plantam hanc copioſe naſci obſervarunt. Solet autem ſaepe oriri iiſdem locis, quibus *Iſnardia* provenit. In America quoque hanc ſtirpem creſcere in literis poſtremo ad me datis ſignificavit Celeb. LINNAEUS, ad quem olim hujuſce plantae ſpecimen miſi, & ſuſpicatur hujuſce plantae ſemina cum oryza in Europa veniſſe.

Nova haec planta non eſt, ſed a LINDERNIO breviter etiam cum icone deſcripta. In *Tournefortii alſatici* editione pro novo genere oblata primum eſt *pyxidariae* nomine, deinde in Horto alſatico dicta eſt *Alſinoides paludoſa foliis anagallidi ſimilibus floſculis monopetalis rubeſcentibus capſula oblonga*. Una cum Cl. LINDERN circa Argentoratum anno 1727. legit elegantem hanc ſtirpem indefeſſus ſtirpium indagator D. GAGNEBIN, cujus ſpecimen etiam benevole ad me miſit aliquot ab hinc annis una cum ſchedula continente ea, quae habet LINDERNIUS, & brevem illam deſcriptionem, quam in *flora Irenenſi pag.* 237. adjecit Doctiſſimus HALLERUS. Ipſe quidem GAGNEBIN *antirrhinum* etiam *paluſtre minus centaurii minoris foliis* appellavit, ſed animadvertit ſui generis plantam eſſe, eamque *Linderniam*

poſſe

poſſe vocari. In honorem itaque Cl. LINDERN *Linderniam* appello, ſublato *pyxidariae* nomine, quo filicinum plantae genus recentiores Botanici deſignarunt.

Erit itaque *Lindernia* plantae genus flore bilabiato labio ſuperiore brevi, concavo; inferiori magno trifido, ſtaminibus quatuor inſtructum, quorum inferiora bifurcata ſunt, unum ſtylum habens, & fructum ferens unilocularem, polyſpermum.

Quod attinet ad vires medicas nihil certi ſtatuere licet. Loci natalis conditio, & totius plantae habitus, ejuſdemque ſapor cum *gratiola* conveniens ſimiles purgantes vires ſuadet, quod inſtituenda experimenta decernent.

DESCRIPTIO IV.

VIOLA, *acaulis fol. palmato multifidis, & lacinniatis.*
Tab. V. fig. 2.

RAra haec Violae ſpecies, atque a paucis Botanicis viſa, quae apud nos reperta eſt in jugo *aſſiette*, ex radice tereti, longa, ramoſa, alba, perenni, folia atque flores protrudit inſtar violae martiae. Foliorum petioli unciales fere ſunt, ſemiteretes, intus ſulcati, atque extus extante nervo praediti, qui deinde per omnes foliorum lacinias porrigitur.

Folia ſubrotunda ſunt laevia, ultra medium quinquefida, ſubſtantiae firmulae, ſuperius obſcure & nitide, ſubtus pallide virentia. Foliorum lobi poſteriores profunde & inaequaliter trifidi, medii ſimplices & tantum in exteriore facie dentati, medius & extremus lobus omnium maximus, in tria ſubaequalia ſegmenta profunda trifidus, lateralibus laciniis ſaepe exterius dentatis. Laciniae omnes lineares fere ſunt obtuſo fine reflexae, patentes, & divergentes. Haec eſt frequentior forma foliorum, ſed eadem vario ludunt modo; nempe lobi posteriores bifidi interdum sunt, modo medii & majoris lobi segmenta iterum magis aut minus profunde resecta sunt. Deficit quandoque etiam unus ex mediis lobis. Alias loborum posteriorum segmenta profunde ita secta sunt, ut ex novem lobis folia composita videantur.

Scapi florales inter folia eriguntur petiolis breviores, & a foliis ipsis saepius tecti duas oppositas squamas, sive bracteas supra sui medium habentes; purpuro virent, teretes, leviter striati, prope florem aliquantum complanati.

Flos nutat. Calyx viridis, conicus, ex quinque foliolis onniventibus compositus, gibbis, ovatis, acutiusculis.

Petala quinque in perfectis exemplaribus, sed saepius tria aut bina, inter calycis & germinis basim nascuntur, unguibus linearibus, pellucidis, germini appressis, quae, ubi in bracteas expanduntur, quinque antheras albidas, bifidas habent, quae supra germen coronae instar tubam circundant. Bractea ovato acutiuscula est concava, & cochleari formis apice reflexo & emarginato ex flavo purpurascente colore tincta, margine albo. Petala supra germen elata, conniventia, ipsum obtegunt.

Stylus simplex brevis cylindricus, cum stigmate barbato, crasso, arcuato, albido, albo staminum pulvere saepe conspersus.

Embryo in magnam capsulam excrescit propendentem, & versus terram incurvato scapulo reflexam de more reliquarum violarum, quae trigona est, obtusa, trivalvis, cordata, semina laevia ovata obscure purpurea quindecim & ultra continens.

Haec violae species fortasse eadem erit cum *Viola montana folio multifido* CLUS. *hist. pag.* 301. & BAUH. *hist. III. pag.* 545. sive *Viola acauli foliis pinnatifidis* LINN. *spec. pl.* 1323., quam nuperrime cum brevi descriptione recensuit inter helveticas stirpes Celeb. HALLERUS *emend. VI. n.* 61. Nonnulla quidem sunt huic Violae ab Auctoribus

tributa,

tributa, quae cum nostra Viola non consentiunt; numquam enim folia habet in decem angusta segmenta ad pediculum discissa, ut refert J. BAUHINUS, & icone exhibet. Praecl. HALLERUS suae Violae folia, ex tribus paribus pinnarum componi affirmat, & flores ad Violam martiam accedere. Non ausim tamen separare, cum sciam hujusmodi folia lobata, & multifida pro ratione locorum dissimilem faciem exhibere, atque minima nostrae Violae petala posse aliis in locis majorem fortasse amplitudinem obtinere. Cum itaque unice extet Bauhiniana icon, quae rudis & imperfecta est, opportunum visum est raram hanc stirpem & accurate describere, & ejusdem iconem exhibere.

Explicatio Tabularum ad has descriptiones pertinentium.

Tab. IV. fig. 1. ORTEGIA

- *a* Flos per microscopium auctus, ut stamina magis pateant.
- *b* Filamentum cum anthera.
- *c* Flos naturalis magnitudinis.
- *d* Embryo cum stylo in magnitudine auctus.
- *e* Capsula naturalis magnitudinis.

Tab. IV. fig. 2. BASSIA

- *a* Flos per microscopium auctus, ut stamina videantur.
- *b* Stamen separatum.
- *c* Calyx in naturali sua magnitudine.
- *d* Semen in sua magnitudine per microscopium auctum.
- *e* Semen a folliculo suo separatum.

Tab. V.

Tab. V. fig. 1. LINDERNIA

a Floris labium inferius cum portione tubi, ut appareant ſtamina inferiora bifurcata.

b Fructus ſive capſula.

c Fructus apertus cum ſeminibus placentae affixis.

Tab. V. fig. 2. VIOLA acaulis, foliis palmato-multifidis, & laciniatis.

a Embryo jam grandior factus cum petalis: omnia in ſua magnitudine per microſcopium aucta.

b Petalum cum anthera microſcopio auctum.

c Folium ſeparatim exhibitum, ſicuti ſolet frequentius eſſe.

Plantae omnes praeter floris partes in naturali ſua magnitudine pictae ſunt.

MANIPULUS
INSECTORUM TAURINENSIUM
A CAROLO ALLIONIO
EDITUS.

MANIPULUS hic inſectorum pertinet ad Cl. Virum Ottonem Fridericum MÜLLER, Danum, Acad. Imp. Nat. Cur., Societ. Scient. Boicae, & Helveticae Sodalem. Cl. hic Vir per Italiam litterarium iter facturus cum in hanc Urbem veniſſet, rerum hujuſce regionis ad hiſtoriam naturalem pertinentium feracitate excitatus, inſectorum, atque etiam novorum non exiguam copiam in noſtra patria adeſſe ratus, me quammaxime hortatus eſt, ut vellem hanc etiam naturalis hiſtoriae partem excolere, atque inſecta colligere, quod per optimorum diſcipulorum naturalis hiſtoriae ſtudio deditorum operam fieri curabo. Ipſe autem per loca quaedam a me ipſi indicata, uti per colliculum Cappucinorum, & ſecus fl. Duriam aliquot ambulationes proxime elapſi Julii poſtremis diebus ſuſcepit, excurſionum comite Petro DANA meo diſcipulo, & diligenti naturalis hiſtoriae cultore, cum optimum virum, quod gratiſſimum certo fuiſſet, ſequi non poſſem clinicis curis impeditus. Paucae vero ambulationes cum ſumma Cl. Viri oblectatione obtulere non pauca inſecta, & ipſe gaviſus plurimum eſt ſe reperiiſſe in noſtra regione Fridrichſdalina, Lapponica, Aegyptia, imo etiam Americana; tum etiam quaedam, quae minus nota, ac nova ſunt. Manipulum itaque ſollicite conſcripſit, quem Commentariis noſtris adjicio, ut rem gratam, utilemque naturalis hiſtoriae amatoribus faciam. In hoc autem manipulo ita recenſentur collecta inſecta, ut quae jam definita ſunt, nominibus tantum tri-

via-

vialibus erutis ex Perilluſtris LINNAEI *Siſt. natur. ed.* 10. Ejuſdem *Fauna Suecica*, & *Fauna ſua Fridrichſdalina* indicentur; quae autem nova, aut minus nota ſunt, ad ſua genera cum brevi deſcriptione referantur.

COLEOPTERA.

SCARABAEUS *auratus*
variabilis.
cervus.
virens, muticus capite thoraceque glabris, aeneis: elytris rugoſo-teſtaceis: pedibus nigris.

Totus glaber, ſed pectus villoſum. Color capitis, thoraciſque punctis minimis excavati ex aeneo viridis, uti quoque ſcutellum, & ſutura elytrorum. Abdomen lateribus maculis pallidis, ſubtus glaberrimum.

DERMESTES *mollis.*
ſtercoreus.

SILPHA *atrata.*

CASSIDA *viridis.*

COCCINELLA 2. *punctata.*
5. *punctata.*
7. *punctata.*
9. *punctata.*
13. *punctata.*
22. *punctata.*
2. *puſtulata.*

CHRYSOMELA *graminis*
alni.
nympheae.
ſtaphyleae.

CHRY-

CHRYSOMELA *populi.*
merdigera.
4. *punctata.*
Taurinensis, cylindrica, atra: elytris luteis, punctis sex nigris.
Elytra marginata flava, versus basim cujusvis punctum unicum nigrum, in medio duo.
luteola, oblonga, lutea: thorace bipunctato: elytris fascia longitudinali nigra.
Caput, thorax, elytra, pedes lutei; in fronte duo puncta, in thorace utrinque unum, in quovis elytro fascia lata, nigra. Oculi & antennae fusca. Abdomen nigrum, puncta duo obsoleta basim elytrorum versus.

CURCULIO *scrophulariae.*
crassus, brevirostris, niger: elytris convexis striatis.
Totus niger. Thorax globosus punctis elevatis; in cujusvis elytrorum striae cavitate series una punctorum distinctorum.
centaureae, brevirostris, oblongus, griseus: elytrorum fasciis duabus obliquis fuscis.
Inter majores est. Totus griseus, punctis elevatis, nigris, inaequalibus sparsus. Puncta haec faciunt, ubi pilis minimis obsita, colorem griseum, ubi glabra, subfuscum; hinc fasciae duae obliquae fuscae in quovis elytro formam duplicis V. mentientes.

ATTELABUS *coryli.*
apiarius.

CERAMBYX *cerdo*

textor.

moschatus.

linearis.

sartor, niger, thorace mutico subgloboso: elytris fuscis, lineolis, punctoque albis.

Minor: nigra sunt caput, thorax, oculi, antennae, pedes; elytra fusca; apice, lineaque media obliqua curva, ac basi puncto, lineolisque duabus albis, minimis.

LEPTURA *attenuata.*

melanura.

necydalea.

Thorax subglobosus punctis quatuor nitidis; margo elytrorum non purpureus; femora antica elevata nigra, reliqua ferruginea.

marginata, nigra thorace subgloboso: elytris subulatis utrinque marginatis lutescentibus.

Animalculum totum nigrum, elytris exceptis, quae flava, abdomineque breviora.

varia, thorace globoso, elytrisque flavo-virentibus: fasciis nigris.

Caput, thorax, abdomen, elytra flavo-virentia, in quibusdam individuis cinerea; in thorace fascia transversa nigra; ad basim elytri figura C, *medioque duae fasciae nigrae. Pedes nigricantes. Antennae nigrae.*

CANTHARIS *melanura.*

sanguinea.

viridissima.

In quibusdam femora postica valde crassa.

CAN-

CANTHARIS *tomentosa*, nigra, thorace, teretiusculo: elytris tomentosis fuscis.

Tota nigra. Elytra sola luteofusca subpilosa, ad lentem striata.

ELATER *aterrimus.*
ferrugineus.
badius.

CICINDELA *campestris.*

BUPRESTIS *nitidula.*
octo-maculata nigra: elytris maculis octo aureis.

Thorax glaberrimus, nitidus, niger; antennae, pedesque primi lutei. Elytra striato-punctata, basi macula curvata, medio subquadratae duae, quarum infima basim versus extenditur; apice macula reniformis fulva.

MORDELLA *aculeata.*
paradoxa, antennis pectinatis: capite, thorace, elytrisque luteis.

Thorax haud postice trilobus, nec elytra apice nigra. Abdomen truncatum segmentis omnibus margine, & dorso nigris. Pedes nigri, femora posteriorum uti & articuli plantarum basi lutea; varietatem tamen ejus, quae in Fauna Svec. describitur, credo.

STAPHYLINUS *niger.*

FORFICULA *auricularia.*

BLATTA *Lapponica.*

GRILLUS *viridissimus.*
verrucivorus.
rufus.
viridulus.

GRILLUS *bifasciatus* thorace subcarinato, rugosus: elytris griseis: fasciis duabus fuscis.

Color ex ruso-griseus. Caput & thorax rugosa. Pectus & abdomen subtus punctis sparsis fuscis. Antennae fuscae thorace paullo longiores. Elytra albidiora fascia altera in medio, altera media inter hanc & thoracem fuscis. Alae caerulescentes fascia nigra, apice albae.

caeruleus, thorace subquadrato: maculis, & punctis ubique caerulescentibus.

Color griseus, capite, thorace, basi elytrorum, pedibus, & dorso abdominis, ut Lucius elixus, caerulaeus. Alae hyalinae basi caeruleae. Antennae griseo, & caeruleo annulatae, thorace paullo longiores.

HEMIPTERA.

CIMEX *annulatus.*
marginatus.
haemorrhoidalis.
pabulinus.
laevigatus.
hyoscyami.
equestris.
griseus.
baccarum.
Italicus, sanguineus, scutello longitudine abdominis: subtus maculis, supra fasciis longitudinalibus nigris.

Ruber, in thorace sex fasciae longitudinales, in scutello quatuor nigrae, abdomi-

dominiſque margo & inferior pagina nigro, & rubro variegata. Alae ſuperiores apice nigrae, inferiores nigricantes.

4. *punctatus*, oblongus, lamina thoracis elytriſque luteo-teſtaceis: maculis quatuor nigris.

Caput, thorax, abdomen, ſcutellum ſubcaerulea; puncta duo nigra in thorace, huic adjacet lamina utrinque macula nigra. Elytra luteſcentia, margine lineola, apice macula alba, cui nigra contigua eſt. Apice elytri membranaceo punctum quoque album. Pedes flaveſcentes; femorum apex niger.

Seguſinus, antennis apice capillaribus: corpore oblongo nigro: elytrorum apicibus coccineis.

Totus niger, glaber; apice elytri macula coccinea, extremo apicis nigro. Pedes flaveſcentes, baſis femorum nigra.

APHIS *jaceae.*

LEPIDOPTERA.

PAPILIO *Jo.*
Ajax.
Machaon.
Atalanta.
Antiopa.
Maera.
Galathea.
Cardui.
Rhamni.
Braſſicae.

PAPI-

PAPILIO *Jurtina.*
Janira.
C album.
Hyale.
Aegeria.
Prorſa.
Urticae.
Lucina.
Cinxia.
Lathonia.
Arion.
Argiolus.
Idas.
Comma.
Malvae.
Tages.
Linea, alis integerrimis divaricatis fulvis immaculatis : primoribus ſupra lineola nigra.

Similis Pap. Comma, *at prorſus immaculatus.*

SPHINX *Populi.*
Stellatarum.
Porcellus.
Filipendulae.
Virginea, alis ſuperioribus cyaneis : maculis quinque, punctiſque totidem rubris albo marginatis.

Similis Filipendulae. *Alae inferiores coccineae, margine exteriori caeruleo, inferiori teſtaceo; differt tamen thorace virenti, margine collarique duplici albo, maculis punctiſque rubris peripheria alba cinctis. Puncta haec numero quinque occupant*

cupant

cupant locum sextae maculae Filipendulae *versus apicem alae.*

SPHINX *ligata*, alis omnibus nigris albo maculatis: abdominis fascia duplici aurea.

Antennae apice albido. Abdomen ceruleum basim, & medium versus fascia aurea. Macula aurea in claviculis 4. posticorum pedum.

variegata abdomine barbato: alis hyalinis, margine ferrugineis.

Segmentum abdominis primum, & secundum viridia, quartum, & quintum ferruginea, quintum, & sextum lutea, barba laterali horum alba, terminali nigra. Abdomen subtus ferrugineum. Thorax, & caput viridia. Pectus album. Antennae nigrae. Alae albae, pellucidae, margine ferrugineo.

PHALAENA *Caja.*
salicis.
plantaginis.
ypsilon.
pacta.
grossulariata.
glaucinalis.
verticalis.
purpuralis.
atomaria.
viridana.
trigonella.
Swamerdamella.
pentadactyla.

NEU-

LIBELLULA *quadrifasciata.*

Fridrichsdalensis.

sanguinea.

frumenti.

triedra, ε alis omnibus basi lutescentibus: puncto marginali albido: abdomine triangulari.

Pedemontana, alis hyalinis macula fusca: puncto marginali corporeque sanguineo.

β alis hyalinis macula fusca: puncto marginali luteo: abdomine fulvo.

In ε frons, pectus, abdomen punctumque marginale rubra. Thorax & macula alarum, quae puncto marginali approximatur, fusca. In β frons, pectus, punctum marginale lutea. Thorax abdomenque fulva. Pedes utriusque nigri.

virgo β, & ε.

puella α, β, δ.

EPHEMERA *bioculata.*

HEMEROBIUS *perla.*

Chrysops.

PANORPA *communis.*

Italica, lutea alis aequalibus, puncto marginali: abdomine falcato.

Facies omnino Tipulae, *at alae quatuor, rostrumque* Panorpae, *licet minus* communis. *Tota lutescens. Antennae setaceae, oculi ocelli, & apex rostri fusca. Abdomen falcatum, supra luteum, subtus subvirens apice fusco. Pedes longissimi, apice tibiae spina duplex. Alae aequales lutescentes puncto marginali concolori.*

HYME-

TENTHREDO *pratensis.*
viridis.
padi.
ustulata.
saltuum.
septentrionalis.
quadrimaculata, antennis clavatis, nigra pilosa: fronte, scutello, abdominisque maculis quatuor flavis.

Maxima. Tota nigra. Frons, scutellum, abdominis segmentum secundum, & tertium superne fascia lata flava; haec in secundo utrinque incisa, in tertio omnino interrupta maculas quatuor constituit. Thorax & segmenta superne, & inferne glabra, marginibus pilosa. Antennae clavatae; maxillae fortes. Pedes pilosi. Tarsi setis rubris. Alae fulvae.

bifasciata, antennis septemnodiis nigra: abdominis fasciis duabus, tibiisque posticis albis.

Tota atra. Segmentum abdominis secundum, & tertium supra album; tibiaeque posticorum. Quibusdam individuis duo puncta alba in quarto segmento.

ICHNEUMON *extensorius.*
compunctor.
manifestator.
glaucopterus.
appendigaster.
desertor.
luteus.

ICHNEUMON *comitator.*

punctator, niger, abdomine ſubtus albido bifariam punctato.: pedibus ſubflavis.

Niger immaculatus. Abdomen ſubtus albidum punctis utrinque quatuor nigris. Pedes luteſcentes..

SPHEX *ſabuloſa.*

Aegyptia.

VESPA *coarctata.*

quinquefaſciata, nigra, thorace lineis punctiſque, abdomine faſciis quinque, punctiſque quatuor luteis.

Apex antennarum, & pedes fulvi; femora baſi nigra; in baſi thoracis, alaſque verſus lineolae. Dorſo puncta quatuor, lateribus utrinque unum; verſus juncturam abdominis loco ſcutelli tres lineae, quarum ſuperior tranſverſa in quibuſdam interrupta, flava; in ipſa junctura abdominis maculae duae flavae. Abdominis faſciae quinque inciſae, quarum prima remota dorſum tantum occupat; quatuorque puncta lutea, duo majora inter primam, & ſecundam faſciam; minora in baſi abdominis. Apex quoque luteus. Datur varietas duplo minor.

horticola, nigra thorace lineola, punctiſque duobus: abdomine faſciis quinque interruptis, pedibuſque luteis.

Antennae fulvae; lineola interrupta baſi thoracis; integra inter alas.

6. *maculata*, nigra, thorace immaculato: abdomine maculis 6. albis: alis baſi fulvis.

Tota

Tota atra, punctis excavatis hirta, parum hirsuta. Ocelli nulli. Abdominis segmenti 2.i & 3.i dorso maculae 4. magnae aequales, 4.i duae minores albidae. Alae umbraticae a basi ad medium aureae.

APIS *manicata.*
succincta.
truncorum.
hortorum.
pratorum.
terrestris.
lapidaria.
acervorum.
muscorum.
insubrica, nigra nitida: alis caeruleis nitentibus.

Maxima. Tota nigra glabra. Margo thoracis, pectus, abdomen subtus, ac pedes parum hirsuta; tarsi posticorum hirsutissimi. Alae pulcherrimae. Iridis colore caeruleo nitentes, lumini obversae saturate fuscae.

fulva, hirsuta nigra: thorace abdomineque fulvis.
paludosa, hirsuta nigra: thorace antice, ac postice, abdomine antice flavis: ano albido.

Tota hirsuta atra; Thorax margine antico, & postico, abdomen antico luteo. Segmentum penultimum, ac antepenultimum abdominis lutescentia; apex niger.

FORMICA *Herculeana.*
fusca.

DIPTERA.

TIPULA *crocata.*

MUSCA *arbuſtorum.*

menthaſtri.

noctiluca.

carnaria.

domeſtica.

cadaverina.

ſcolopacea.

mellina.

valentina, antennis plumatis glabra: thorace ferrugineo: abdomine flavo cingulis duobus nigris.

Magna. Frons cornea flava. Oculi fuſci. Thorax, & ſcutellum ferruginea, nitida ſetis nigris cincta. Pedes obſcurius ferruginei. Abdomen flavum marginibus primi, & ſecundi ſegmenti nigris; ſubtus faſciae nigrae. Alae fulveſcentes.

cincta, antennis ſetariis piloſa, thorace caeruleſcente: abdomine ferrugineo: linea dorſali nigra.

Os argenteum. Thorax niger, glaber lineis tribus lacteis. Abdomen ovatum ſetoſum, ferrugineum, dorſo linea longitudinali interrupta nigra, medio cinctum lineola alba certo ſitu viſibili. Pedes nigri femora flaveſcentia.

CULEX *pipiens.*

ASILUS *forcipatus.*

tipuloides.

APTERA.

TERMES *fatidicum.*

ACARUS *gymnopterorum.*

JOH. PETRI MARIAE DANA

De Hirudinis nova specie, noxa, remediisque adhibendis.

HIRUDO *alpina, nigruans, ventre, ad medium bilineato, explanato, corpore ab ore, & cauda nulla depressione distincto* Tab. VI. fig. 1. ad 6.

ANimalculum est vulgarem Hirudinem habitu quadantenus referens, sed multo eadem constantissime minus, duarum linearum longitudinem in summo incremento non excedens, latitudinem linearem raro superans, crassitie lineam non attingens; quod non exiguam mutationem in motu progressivo subit. Primo enim brevius factum veluti in hemisphaerium parumper oblongum intumescit; postea porrectum, & extensum valde oblongam formam acquirit. Faciem ejusdem superiorem convexam *dorsum* appellabimus: inferiorem complanatam *ventrem* dicemus: attenuatum extremum, quod in motu progressivo anterius reperiri solet *oris*; quod vero posterius *caudæ* nomine, licet improprio, designabimus. Motum illum quo decurtatur, *contractionis*, quo autem extenditur, & porrigitur, *distensionis* seu *extensionis* nomine vocabimus. *In Tab. VI. fig. I.* animalis non contracti dorsum, *fig.* 2. ejusdem venter, *fig.* 3. ejusdem contracti dorsum, sed omnia naturali magnitudine exhibentur. Similia ostendunt *fig.* 4., 5., & 6., sed magnitudine per microscopium adaucta.

Animaculi non contracti (*Vid. fig.* 1., *&* 4.) dorsum universum primo aspectu lucido-nigrescens apparet. At, si attente observetur in media, elatiorique parte intensius nigrescit, quam versus margines, ubi sensim sensimque niger color in griseum obscuriorem transit. Quod si oculorum acies lentis vitreae adjumento intendatur, e fundo, ut ajunt,

gri-

griſeo-albeſcente nigri quidam villi elevari videbuntur, qui denſiores ſunt in ſummo dorſo, & paullatim rariores fiunt ad margines, atque ea propter magis apparentem prope hos griſeum colorem relinquunt.

Inferior corporis ſuperficies complanata eſt, (*Vid. fig.* 2. *&* 5.), & univerſe magis quam dorſum ad griſeum colorem accedit. Naſcitur ab ore linea prae caeteris animalis partibus albeſcens, quae ad duos longitudinis trientes recta extenditur: & in albam veſiculam *b* deſinit, quae in contractione animalis magis prominula, & quaſi tumeſcens, quam in extenſione obſervatur.

Hujuſmodi albeſcentem lineam utrinque ſequitur linea nigri obſcuri coloris (*Vid. fig.* 5.), quae veſiculam cingit, & ultra veſiculam nigrum quoddam punctum, ſive maculam nigram imprimit; linea nempe, quam albam diximus, area eſt duabus nigris lineis comprehenſa.

Extremum anterius *O* fit a corpore ſenſim, ad longitudinem ſemilineae attenuato, & producto in ſemiconum apice exacte truncatum, & in illius elongatione extantibus angulis quaſi cornutum. Hoc proprie nomen oris tantummodo meretur, cum in parte ſui inferiore explanata etiam levis emarginatura per lentem conſpicua ſiat, quae angulis eſt interpoſita, & ſemilunata videtur; cujus veſtigium apparet ad *O* (*fig.* 5.)

Poſterior animalculi extremitas *C* rotunda fere eſt, neque ullo notatur diviſionis veſtigio, quo a corpore ſeparetur, neque ita attenuatur, ut caudae nomen proprie mereatur.

Margines planam inferiorem, a convexa ſuperiori Hirudinis ſuperficie diſtinguentes concolores fere ubique apparent, & quemadmodum reliquae partes, vix ulla niſi per microſcopium conſpicua ruga in quolibet ejuſdem motu exaſperantur; quod in vulgari Hirudine ad oculum obſervatur.

Con-

Contractione, & elongatione alternata, ut diximus, motus suos progressivos absolvit Hirudinis ista species. Dum decurtatur anteriorem partem figit, & ad illam sui posteriorem extremitatem adducit. In hoc motu ita contrahitur, ut ad oblongum hemisphaerium aliquomodo accedat; dimensio verticalis, & transversa adaugentur, ad os usque totum corpus crascescit; tuncque magis nigrum, & lucens dorsum observatur (*Vid. fig.* 3., & 6.). Dum elongatur, & magis proprie progredi dici potest, caudam firmatam servat, & anteriorem partem cum ore elongando producit; verticalis, & transversa dimensio imminuitur, longitudo eousque saepius adaugetur, ut duplo major quam in priori contractione fiat. Nullo horum motuum tempore animalis os in orbiculum dilatatur, sed prope illud gracilescit, & extenuatur ita uniformiter, ut nulla depressio collum a reliquo corpore distinguat, & designet. Quae etiam de Cauda patentius vera sunt. Haec autem omnia constanter observavi ita se habere in triginta, & ultra individuis, quae ad examen revocavi.

Experimenta quaedam nunc addam suscepta, ut in hujus Hirudinis naturam inquirerem. Digito fonti immerso superscandere, aut morsu adhaerere constanter recusabat.

Cum aquae nativae parva portione simul educta haec Hirudo, quamdiu illa frigebat, alacriter vivere, & moveri pergebat: quoquomodo autem aqua incalesceret ex manus, Solis, aut atmosphcrae calore male se habere incipiebat; agitabatur primum, deinde languescebat, &, nisi frigida aqua renovaretur, brevi moriebatur. In arido autem relicta citius peribat. Tentatum est vivas Hirudines aqua immersas in planitiem transferre, ea adhibita diligentia, ut aquam neque Solis, neque manus calor calefaceret; sed, anteaquam ex montibus descensum esset, semper interierunt.

De industria resupinatum hoc animalculum extra aquam progredi non poterat, sed varie inflectebatur, donec cau-

dam

dam, vel os figere posset. Tunc facile in pronum, naturalemque situm restituebatur, unde facile motus suos progressivos libere absolvebat.

Multiplici ratione hujus hirudinis corpus dissecui, omnibus partibus diligenter examinatis microscropii octies multiplicantis auxilio. Nihil aliud autem in ipso detegere potui praeter tubum tenuissimum, pellucidum, & intestinulorum more per interiora, innumeris circumvolutionibus factis, serpentem, qui resectus pellucidum humorem plorabat. Post quatuor aut quinque horae minuta hujusmodi tubulus motus aliquos contractiles adhuc servabat. Viginti minutorum spatio Hirudo omnis arefacta nihil organici praeseferebat. Imo Hirudulae aliae integrae super calentem a Sole lapidem per semihoram expositae, ita exsiccatae sunt, ut ad nihilum fere redactae viderentur, in sui vestigium exsuccam tenuem pelliculam supra lapidem relinquentes. Manibus quoque paullo diutius contrectatae, aut asservatae cito exsiccabantur. Caeterum fere gelatinosa valdéque tenera animalculi interior substantia membrana tenui, & debili obtegitur, quae separata pellucescit, sed, dum contentis referta est, opaca apparet, & obscurior.

Inter Hirudines recenseo licet cum notis a Celeb. LINNAEO generi Hirudinis assignatis non plane consentiat. Neutiquam enim habet os, aut caudam in orbiculum expandendam, sed habitus omnis, formaque Hirudinis speciem esse declarat.

Augusto mense habitantem vidi in fundo alpinorum fontium, quotquot fere editiores, & Soli minus expositos secus viam invenimus, qua a R. P. Cisterciensium Monasterio per alpes, & sylvas ad Garexium itur. Neque infrequens etiam invenitur in vicinis, editisque alpibus ad Garexii Commune proprie pertinentibus versus *le Caranque*, & *Batifol.* Supra adversas quoque alpes *Bric d' Mindin* dictas non raro occurrere notatum est. In reliquis vero ejusdem loci mon-

montibus, & alpibus, in conterminis Ulmetanis, in Apenninis Ligurum proximis, nec non in caeteris Ulmetae, Tendae, Brigaeque ad Carlinum, & Viosennam fertilissimis, quas deinde, plantarum exquirendarum caussa, conscendimus, alpibus, nullibi harum Hirudinum aliquam reperire potuimus; quamquam acquisitae notitiae non immemores fontes singulos, quos offendimus, ideo diligenter inspexerimus.

Vernacula lingua apud eos alpicolas hae Hirudines dicuntur *le Sioure*, aut *Soûre*. Notissimae autem cuique ibi sunt, atque ab iis quam maxime cavent, cum vetusta, & malis eventibus nimium confirmata apud ipsos, observatione constet, tum pecoribus, tum hominibus adeo infensa haec animalcula esse, ut certam necem afferant, si incaute cum aqua deglutiantur, nisi prompte auxilium afferatur. Quamobrem solent non sine cautela horum fontium aquam bibere; aut enim prius accuratissime ab his animalculis mundant; aut, ut omne periculum tutius effugiant, cum eadem in sabuloso fundo vivant, profundius fontem excavant, & aquarum commotionem avertentes ex summo fonte hauriunt. Eadem adhibita cautela pecora ad fontes adducuntur.

Singulari harum Hirudinum specie, earumque noxa perculsus, diligentissime ab alpicolis sum sciscitatus ea omnia, quae longa observatio eosdem docuerat, atque animadverti fuisse singulos hac in re consentientes. Symptomata itaque, quae ex eorum communicatis notionibus collegi, haec sunt. AEgri hujusmodi primum conqueruntur post ingestionem animalculi de quodam sensu rosionis, terebrationis in ventriculo. Ventris totius tormina adeo acerba cum vomendi conatibus accedunt, ut, manibus ventri continuo appressis, & inflexo trunco, ipsum adsidue comprimere cogantur ad doloris atrocitatem aliquomodo diminuendam. Aliqui vehementer adeo memoratis doloribus torquentur, ut neque stare, neque se erigere, multoque minus domum redire

queant

queant, ſed in terram ſaepe concidant: aeſtus dolorifici ſenſum in ventre percipiunt; dentibus ſaepe ſtrident; exagitantur; concutiuntur; frigeſcunt; cum furore per intervalla delirant; ſingultiunt; vomunt; vultu livent. Alii protinus toto corpore poſt refrigerationem convelluntur vehementiſſime, & incaleſcunt. Omnes ſudore, ac frigore demum superveniente, moriuntur, ſaepiuſque ne integro quidem elapſo die miſerrime pereunt. Aliqui, licet rarius, diem alteram attingunt.

Atque haec ita quidem contingere viſa ſunt, ſi abſque remediis aegri perierunt. At ubi paullo ſerius remedia opportuna exhibita ſunt, pleraque morbi ſymptomata mitiora quidem fieri, alia vero plane tolli obſervatum eſt; difficile tamen, & tarde ſanitas perfecta, & priſtina reddita eſt.

Caeterum e mortis faucibus fere omnes ereptos generatim aſſerunt, quibus ſal, vel oleum, & agarium prompte dari potuerint, quae ideo tamquam antidota ab ipſis reputantur, ut maximum vitae periculum in mora poſitum declinetur. Pauciſſimos enim abſque remediis, vel ob loci diſtantiam, vel ob ſociorum defectum id fuerit, ſervatos fuiſſe norunt; eoſque nonniſi poſt convulſiones, & mentis alienationes, iiſdem poſtridie remittentibus, domum redire potuiſſe, & difficile convaluiſſe retulerunt.

Agarium quod pertinet apud ipſos remedium eſt prae vicinorum laricum copia vulgatiſſimum. Ideo exſiccatum domi ſervare, & in pulmento cum pipere mixtum in omnibus fere morbis indiſcriminatim adhibere ſolent. Non infrequenter ut perpurgentur, & vomant, cum oleo, rarius vero cum lacte miſcent. Nihil exinde mirum, ſi contra Hirudinis deſcriptae noxas ſimiliter adhibuerint; ſi ejuſdem vim, tamquam omnium efficaciſſimi antidoti, experimentis dudum probatam unanimes extollant.

Salis communis in ſimilibus caſibus utilitates eximias aliqui retulerunt, & Chirurgus ipſe confirmavit; rarius tamen

nec

nec nisi agarici, & aliorum defectu in hominibus usu venisse intellexi.

Sola aqua tepida, lactis sero, vel lacte copiose, & prompte ingestis propter reliquorum defectum tanta illa symptomata plerumque mitescere observarunt; non tamen cuncta, quemadmodum ab agarico, tolli deprehenderunt; imo saepius exinde nonnisi post menses aegros sanitati restitui ajunt, quo tempore cum ciborum inappetentia, & languore, ventris tumore, & levi dolore, inertes, & excolores vitam degunt.

Haec praecipua sunt, quae ex veridicorum hominum consentientibus responsionibus collegi, atque publici juris facienda esse putavi, tum ut iter per eas regiones facientes ab iisdem caveant, opemque, si opus fuerit, necessariam noscant; tum quod existimaverim hujusce Hirudinis Historiam omnibus rerum naturalium studii cultoribus acceptam esse futuram.

Huic commentariolo aliud adjungam, quod agit de aliquot animalibus, quæ vulgo *Urticae marinae* dicuntur. Has porro omnes observationes institui in postremo botanico itinere, quod, favente Excellentissimo, & Amplissimo Marchione CAISSOTTI Supremo rei literariae universae Moderatore, per extremas apenninas alpes suscepi, & in Comitatum Niceensem descendens ad usque maritimas oras produxi. Cum vero comitem itineris habuerim Franciscum PEYROLERIUM botanicum Regium Pictorem, idcirco horum animalium icones eo meliores subnectere possum, quod saepius viventia animalia vivis coloribus statim ab eodem accurate pingi curaverim.

EJUSDEM

De quibusdam Urticæ marinae vulgo dictae differentiis.

I.

ARMENISTARI.

GENUS. *Animal corpore sub-cartilagineo, tenui, complanato; basi ab erecto velo divisa, arcubus lineata, margine tentaculato.*

SPECIES. *Armenistari tentaculis in membranam perfecte coalitis.* Tab. VI. fig. 7. & 8.

EMinus visum hoc animal totum laete caeruleum apparet; sed propius, & diligenter inspectum una cum caeruleo argenteum colorem præsefert. Duabus planis, tenuibus cartilagineo-membranaceis partibus, componitur, quarum una *p q r s* (*fig.* 7. *&* 8.) amplior, & oblonga est; &, eo quod inferius in animali aquae imposito reperiri soleat, *basis* dicetur: altera vero *q z r* (*fig.* 8.) inaequaliter triangula, majorique suo latere D C A perpendiculariter priori affixa est, &, quoniam velum erectum repraesentat, *veli* nomine distinguetur, eoque libentius, quod ab hac voce generis hujus altera vera species *Velellae* nomen jamdudum habuerit.

Basis animalis *p q r s* ovali-oblonga est, valdeque obtusa. Summa illius longitudo *p* C *r* ad duas fere uncias extenditur; latitudo vero unciam vix aequat. Superior illius superficies leviter convexa, est, & in duas aequales partes a velo distinguitur, quod ita super ipsam oblique cadit, ut inde facta sectio A C D angulum acutum faciat cum linea *p* C *r* majorem longitudinem ipsius baseos repraesentante.

Inferior

Inferior ejuſdem baſis facies (quæ tota apparet in *fig.* 7.) leviter concava eſt, potiſſimum verſus centrum C: longe ellipticam ruffeſcentis coloris maculam habet ab eodem centro ad tres lineas utrinque productam juxta ipſius longitudinem, quae in ſui medio ultra lineam lata eſt. Hujus maculae centralis portio communicare videtur ſuperius cum ſinuoſa cavitate ſuperpoſita C X, quæ ad velum pertinet.

Utraque baſeos ſuperficies tota tegitur a membrana, ſive pellicula tenui, firmula, talcoſo, & argenteo fere nitore ſplendente. Utraque tenuiſſimam cartilagineae indolis ſubſtantiam intercipit, necnon plures caeruleos arcus, ſive potius canales caeruleum humorem continentes. Ex horum canalium, & cartilagineae ſubſtantiae arcta cum membranis unione, firmitudo, & elaſticitas vere cartilaginea baſeos pendere videtur, quamvis humores ipſi ad id etiam conferant. Exſiccati enim Armeniſtari baſis fragilis fit, atque tunc tenuiſſima cartilaginea ſubſtantia membranis, & canalibus interpoſita difficillime ab iiſdem ſeparatur, & potius ſub ſpecie ſquammarum, quam integrae cartilaginis oculis ſubjici poteſt.

Componi videtur velum *q z r* (*fig.* 8.) non modo ex productione membranarum baſeos, ſed etiam ex tenuiſſima cartilaginea lamina iiſdem incluſa. Quamvis enim per ſectionem oculis illa non ſubjiciatur; digitus tamen cartilagineas proprietates, & praecipue rigiditatem diſtinguit, quae a ſimplici membranarum unione vix produci poſſet. Nulli autem rei aptius comparari poteſt recens velum, quam tenui laminae talci ſupra baſin erectae, ſive pelluciditas, ſive tenuitas cum rigida flexilitate conjuncta attendantur. Margo rigidus veli ſuperior inaequaliter crenatus, aut irregulariter undulatus eſt, neque ultra eumdem cartilaginea ſubſtantia extenditur. Ipſius vero membranae ſub tenuiſſimae pelliculae ſpecie conjunctim ultra illum ad lineam extenduntur, & prae ſumma pelluciditate, & tenuitate in animali ab aqua educto

oculos

oculos pene fugiunt, & ſupra rigidam veli partem concidunt; ſed facillime rurſus velo aquae immerſo conſpiciendae ſunt ſub ſpecie fluctuantis, & mobiliſſimae pelliculae. In recenti velo *q z r* lineae quaedam verſus baſim adnotantur, quae ſenſim, ſenſimque adſcendendo verſus ſuperiora diſparent, & evaneſcunt. Nullas vero, ut in Velella, lineas juxta veli longitudinem arcuatas, & ipſius limbo ſubparallelas videre potuimus.

Exſiccatum velum omnino pellucidum, baſi multo tenuius, valdeque fragile fit; nullumque amplius in ipſo linearum veſtigium conſpici poteſt.

Ubi inferius veli latus incipit a convexa baſeos facie ſinus caeruleſcens D A ex fuſco notatur, qui verſus medium, major eſt; ſenſim vero verſus utramque extremitatem juxta D, & A evaneſcit. Producitur iſte ſinus a ſuperiori baſeos membrana, quae, dum ex utraque parte continuatur, ut in velum *q z r* faceſcat, hoc cavum ſpatium intercipit eo majus, quo centro C propius. Verticaliter quoque earumdem membranarum receſſus per medium velum a centro ſuperius continuatur. Et inde producta verticalis cavitas C X (*Tab. VI. fig.* 8.) verſus ſummitatem *z* dirigitur, & in apicem ſenſim extenuata paullo infra mediam veli ejuſdem altitudinem inconſpicua fit.

In recenti animali caeruleo-rufeſcens humor in memoratis cavis continetur, qui, quo baſi proprior, eo coloratior eſt. In majori etiam copia verſus centrum C reperitur. Ibi correſpondet ſuperiori portioni memoratae maculae, cum qua communicare quidem videtur, licet rufeſcens, & gelatinoſa materia maculam efformans per ſinum ex arte apertum ſuperius ad X, debitamque deinde compreſſionem digito factam vix educi patiatur.

Sexdecim, & ultra conici canales ſub ſpecie totidem arcuum caeruleorum utrumque baſeos ſegmentum pinguunt; horum ſubduplum numerum tantummodo exhibuimus in

fig.

fig. 7. & 8., ut diſtinctius earumdem decurſus conſpici poſſit. Major canalium inter ſe diſtantia, & amplitudo eſt in majore utriuſque ſegmenti portione, minor in minore reperitur. Ultra baſeos diametrum *p* C *r* a veli origine D C A majores prodeunt, deinde in arcus margini ſubparallelos flectuntur, poſtea ſenſim minuuntur, & ſibi viciniores facti, rectioreſque in oppoſitam, ſeu acutiorem ſegmenti ejuſdem partem inviſibili fine terminantur. Canalium propterea unius ſegmenti diſtincta, & major extremitas proxima quidem eſt juxta ACD tenuiſſimis extremis canaliculorum ſegmenti alterius; at per interpoſitum velum ita ſeparatur, ut nulla immediata cum alterius medietatis canalibus ejuſdem communicatio conſpiciatur. Neque etiam ſatis diſtincte utrum ibi extrema canalium baſeos deſinant, aut continuentur in veli canales cernere potui; etiamſi armato oculo tum recens, tum ſiccatum animal examinaretur. Certum tamen eſt in eamdem velo & baſi communem portionem, venire arcus baſeos attenuatos, a qua tenuiſſimae ceruleſcentes lineae per velum diſtributae diſcedunt. Baſeos canales in majori extremo digitis ipſis diſtinguuntur; quemadmodum etiam major ejuſdem partis inde facta craſſities ipſis percipitur. Spatium canalibus memoratis interpoſitum eſt plus, minuſve amplum, prout major eſt, vel minor eorumdem inter ſe diſtantia. Maximum propterea in majori cujuſque ſegmenti baſeos extremo, minimum in extremo minori, ubi canaliculorum diſtinctio ne armatis quidem oculis diſcerni poteſt. In exſiccato animali non difficile canales iidem ab ejuſdem membranis poſſunt ſeparari, & albidi apparent, minores, ſibique magis proximi, licet ſatis adhuc diſtincti.

A baſis macula ante deſcripta ſub inferiori membrana molles, & caeruleae quaedam lineae, quaſi radii verſus periphaeriam, undique dimittuntur arcus modo deſcriptos frequenter interſecantes.

Eaedem

Eaedem baſeos membranae ultra ipſum cartilagineum baſeos marginem circumquaque ad duas fere lineas conjunctim extenduntur, & in membranam laete caeruleo humore madentem, & mobilem continuantur. Haec membrana ex utriuſque, ſuperioris nempe, & inferioris membranae baſeos unione facta, mobilis eſt, libere in aqua fluctuans, vere tentacularis, integro margine, leviter tantum repando, & quaſi a plicis undulato praedita. Per ipſam intenſe caeruleae quaedam rectae lineae notantur, quae directionem ſequuntur radiatarum baſeos linearum, & plicas memoratas fere diſtinguunt. Valde tenera, & lubrica eſt iſta membrana, & plurimo caeruleo ſmegmate infecta; neque exſiccari facile patitur, ſed chartis tota adhaereſcit, eaſque caeruleo colore pingit; quod ſi recens contrectetur in caeruleum mucum, quo maxime abundat, fere tota faceſcit. Dum ſubter baſim reflexa eſt eandem caeruleam uniformiter reddit.

Totum animal valde lubrico mucoſo humore madet. Nullam autem omnino oris, aut alterius partis apertionem, etiamſi microſcopium adhibuerimus, in externis ejus partibus obſervare potuimus.

Appulit hæc Armeniſtari ſpecies ad extimam meridionalem Collis S. Albani Niceaenſis ripam maritimam poſt procellam flantibus Auſtris adducta. Illius novitate perculſus obtuli Piſcatoribus, ut intelligerem num alias illud adnotaſſent. Ignotam ſibi illius nomen eſſe, remque raro viſam reſponderunt; ſed cognoſcere ſimilem aliam edulem, quam vernali tempore copioſe poſt procellas expiſcantur, venientem, ut ipſi ajunt, ex Africae litoribus, atque ex eorum indicationibus comprehendi eos probabiliter intelligere Velellam Auctorum.

Non inquiram modo in oeconomiam, qua elegantiſſimum animal vitam, & ſpeciem conſervat. Commentitia enim plurima forent afferenda, cum vera ignorentur. Num per aptae ſubſtantiae abſoptionem ab inconſpicuis poris factam,

aut

aut per totam membranarum extensionem, aut per tentacularem solam membranam distributis nutricatum sumat; num ita absorptus humor per canales, & sinus memoratos peculiari dispositione sitos ad animalis centrum adducatur, tamquam ad praecipuam ejus partem oblonga illa macula inferius apparente notatam, ardua est investigatio; quoniam nullum os conspicere, nulla etiam viscera detegere licuit; multoque minus penetrare, quonam artificio hujusce animalis multiplicatio fiat.

Ad nullum cognitorum generum novam hanc speciem reduci posse, & ideo peculiarem generis constitutionem sibi promereri intelliget quicumque cum allata descriptione ea comparabit, quae Zoologi, & speciatim Celeberrimus Linnaeus ad hanc rem proximius spectantia tradiderunt. Animal, cum quo nostrum magis convenit, est *Velella* auctorum, quod a Celeberrimo *Viro* ad Medusae genus refertur, sed utrumque reapse a Medusis videtur separandum, & ideo fortasse idem perspicacissimus Linnaeus Medusae speciebus ultimo adjecit, quod minus, quam reliquas species cum Medusae genere convenire intelligeret. Si enim tributum a Veteribus Urticae nomen ab urticationis sensu, quem cuti imprimit, & commestibilitas excipiantur, quae reliquis Urticis marinis ad Medusam pertinentibus communia sunt, vix alia sufficiens ratio datur, qua ad easdem jure amandari queat. Neque enim reliquis Medusis similis partium structura competit, neque natura cartilaginea, aut saltem ad cartilagineam proxime accedens consistentia per totum corpus diffusa in illis conspicitur: tandem nullum os inferius centrale, aut in Velella descripserunt Auctores, aut in nostris observare potuimus. Quod tamen necessario conspici deberet, & demonstrari, ut, immutato Linnaeani generis carectere, ad Medusas illae reduci possent.

Et sane novi generis construendi necessitatem minime praetervisit, aut siluit sed aperte proposuit Cl. C. Marcus Car-

burius

RIUS (*a*) peculiarem Velellae fabricam admiratus. Nihilo tamen minus poſt ipſum multiplici ſcientia Clarus Johan. Baptiſta BOHADSCHIUS (*b*) ſolum urticationis ſenſum notis a ſtructura petitis antepoſuiſſe, & tanquam argumentum ſufficiens aſſumſiſſe videtur, propter quod aliis Urticis adjungi queat; quamquam Meduſis reliquis ſimilem ſtructuram, ſiquidem de eadem revera loquitur, Velellae tribuat. Verum neque Linnaeanis caracteribus, ut oſtendimus, illa aptatur, neque communiſſima illa figura cylindrica, vel orbiculata, quam in omnibus Meduſae ſpeciebus ineſſe dicit (*c*), neque demum interna fabrica ibidem adducta a Cl. VIRO in noſtra ſpecie, aut in Velella obſervantur: hinc dubitandi fortaſſe locus aliquis ſupereſt utrum VIR doctiſſimus idem animalis genus prae oculis habuerit, quod laudatus CARBURIUS deſcripſit, an potius aliud. Eo vel magis, quod dicat a ſe viſi animalis corpus adeo tenerum fuiſſe, ut in auram avolaverit, & in ſpiritu vini diffluxerit. Noſtrum vero, & Carburianum Armeniſtari praecipue vero ejuſdem baſis facile exſiccari, atque exſiccata conſervari poteſt. Praeterea ab ipſo praeſertim velo nota certa characteriſtica novi generis deſumi poſſe nobis videtur, quae duas allatas ſpecies fabrica in multis non valde diſſimiles, licet ſpecifica differentia ſatis diſtinctas complectetur. Prima igitur erit Velella a FERN. IMPERATO (*d*), FAB. COLUMNA (*e*), noviſſimque a citato CARBURIO eleganter deſcripta, & delineata. Altera vero tentaculorum integritate praecipue diſtinguenda ſpecies iſta erit, quam hic poſuimus.

Tandem quod pertinet ad nominis rationem non plane incongruum duxi *Armeniſtari* nomen retinere: quia primum

(*a*) Lettera ſopra un Inſetto marino &c. Nuova raccolta d'Opuſcoli ſcientifici, e filoſofici Tom. 3. *Venezia MDCCLVII.*

(*b*) De quibuſdam animalibus marinis, eorumque proprietatibus &c. liber. *Dreſdae* 1751. *pag.* 136.

(*c*) Pag. 135.

(*d*) Hiſt. natur. pag. 679. deſcr., & pag. 688. *delineatur tentaculis ex parte integris.*

(*e*) Aquatil. & terreſtr. obſerv. pag. XX. deſcr. & pag. XXII. delin. ed. Rom. MDCXVI.

mum cognita hujuſce generis vera ſpecies *Velella* dicta, *Armeniſtari* graeco nomine a laudato Cephaleno Auctore probe deſcripta fuerit. Poterit idcirco *Velellae* vocabulum pro primae ſpeciei triviali nomine inſervire; dum triviale aliud huic noſtrae adponendum relinquimus.

I I.

M E D U S A E

S P E C I E S   P R I M A.

MEDUSA *per contractionem hemiſphaerica, levis, tentaculis plurimis, membranae interius 24-punctatae revolutione detegendis.* Tab. VII. fig. 1, 2, 3, 4, & 5.

IN loco natali adhuc ſitum hoc animal ſi inſpiciatur hemiſphaerium coccineum magis, vel minus perfectum exhibet; quod per planam ſui inferiorem partem ſaxo arcte appreſſum, per convexam vero libere mobile eſt. Quacumque de cauſa illud contrahatur, perfecte hemiſphaericam formam induit (*Vid. Tab. VII. fig.* 1, 2, & 3). Quod ſi dilatatum, ſeu expanſum conſpiciatur, compreſſum fit, ſimulque incluſas quaſdam ſui partes videndas exponit. Priorem ſtatum *contractionis*, vel *coarctationis*, alterum *dilatationis*, ſeu *expanſionis* (*Vid. fig.* 4.) nomine vocabimus. Sub diverſis propterea iſtis, aliiſque etiam apparitionibus, quas ipſius motus, & anatome oſtendunt, ſigillatim hoc animal deſcribemus, atque multiplici icone, quantum fieri poterit, ejuſdem ſtructuram explicare conabimur.

Ut inferior hujus Meduſae ſuperficies integra in conſpectum veniat, a ſcopuli portione, cui firmiter adhaerens repetitur, (quemadmodum videre eſt in *fig.* 1.) accurate eſt ſeparanda. Vivente animali id facere non potui abſque

 lace-

laceratione. Sed, cum illud integrum, ſaxoque adhaerens in aqua dulci moriendum reliquerim, & ſubinde diſrupti ſaxi fragmenta paullatim ſeparaverim, tunc inferior ſuperficies nitide conſpici potuit, quae levis eſt, & laete rubens diametri circiter uncialis, prout ſiſtit *fig.* 3. *Tab. VII.* Plana quidem illa eſt, & uniformis; ſed per quaſdam ſaturatius rubentes, radiatas lineas diviſa, ſeu diſtincta apparet in plura fere triangularia ſegmenta apice ſuo ad centrum conniventia in punctum, ceu in apertionem communem ipſis interpoſitam.

In convexa contracti (*fig.* 1. & 2.) animalis facie per memoratam mediam ipſius apertionem introſpici poſſunt innumeri rubri dentes, ſeu tentaculorum, de quibus deinde dicemus, apices circumquaque in orbem poſiti, indeque latera efformantes interius in foramen productae apertionis ejuſdem. Prout adaugetur interdum, vel imminuitur apertio, magis vel minus diſtincta, & extantia tentaculorum extrema conſpici poſſunt. Reliquum hemiſphaericae convexitatis leve eſt, & vivide-rubro colore nitet; videturque fere cruoris coccinei coagulum hemiſphaericum levi membrana tectum repraeſentare, quam liceat *cuticulae* nomine impoſterum deſignare.

Communis eſt utrique ſuperficiei haec cuticula, ſed ubi ad memoratum foramen pervenit, interius reflectitur, ut ſupra interiores omnes partes producatur, & quamdam tegminis mobilis, ac retractilis ſpeciem per interpoſitam tenuem gelatinoſam ſubſtantiam efformat, quod trahitur, & retrahitur ſupra partes contentas, ſicuti praeputium ſupra glandem humanam; hinc eadem praeputii voce non male poſſet appellari. In contracto animali (*fig.* 1. & 2.) hemiſphaericae convexitatis apparentem, & maximam partem conſtituit hoc praeputium, & continuatur inferius cum reſidua parte convexitatis ipſius: revolvitur in expanſo animali,

mali, ſicque ipſius concava, & interna facies convexa fit, & internam ſui originem oſtendit (*fig.* 4.), quae eſt paullo infra mediam totius hemiſphaerii altitudinem.

Interna haec praeputii ſuperficies (*fig.* 4.) lucide rubens, & levis eſt, ſi vigintiquatuor griſea puncta excipias, quae parum, ſed aequaliter inter ſe, & ſemilineam ab ejuſdem circulari margine diſtant. Eadem cuticula laxe teguntur haec puncta, & ſi immiſſa acu eleventur tubulum caecum, brevem, griſeum fere exhibent.

Aliae quoque partes, revoluto praeputio, conſpicuae fiunt, quas ideo (*fig.* 4.) ſimul repraeſentari curavimus. Detegitur inde hemiſphaerium aliud parvum (*fig.* 4. *lit. ii*) priori concentricum, aeque leve, & rubellum, nuclei adinſtar priori incluſum, cujus convexitas ſuperius poſita ſimili, & juxtam eamdem directionem correſpondente foramine (*f*) previa eſt. Foramen iſtud conſtringi quidem ab animali, & dilatari poteſt, non autem, revolutis partibus ipſum conſtituentibus, evaneſcere; quemadmodum de foramine illo externo praeputii hemiſphaerii majoris ſuperius contingere innuimus.

Circumponitur ad hujus parvi hemiſphaerii baſim, coronae, ſeu zonae cujuſdam ſpecies (*zzzz fig.* 4.), ſaturatius rubro colore diſtincta, ultra duodecimam pollicis partem, inter allati hemiſphaerii baſim, & internam praeputii originem extenſa. Fit autem ex duplicis denſa ſerie binatarum concolorum mammillarium prominentiarum, ſive ex parviis fimbriis compreſſo-conicis, inter ſe ſe diſtinctis, liberis, ultra lineam cum ſemiſſe longis, vix ſemilineam in ſua baſim ſeu exortu latis, ſenſim exinde in acutiuſculum, mobiliſſimum, & libere fluctuantem apicem extenuatis. Tentaculorum apices in contractione animalis verſus interiora reſpiciunt; at in illius expanſione ad exteriora divergentes zonam radiatam exhibent.

Praeter

Praeter haec, quae ex viventis animalis variis motibus conſpicua fiunt, ut parvi hemiſphaerii (*ii*) partes internae luſtrentur, ſectio juxta ejuſdem convexitatem caute duci debet donec ſectae partes, ſimilem cum praeputio hemiſphaerii majoris ſubſtantiam habentes, attolli queant. His revolutis (*Vid. fig.* 5., in qua parvum hemiſphaerium ſectione apertum eſt, ut partes internae conſpiciantur), idem ruber color per totam ipſarum internam ſuperficiem extenſus obſervabitur; ſi albeſcentem, & fere tendineoſam lineam (*o t Tab. VII. fig.* 5.) excipias, quae a baſi interna ſectarum partium oritur, verſus rotundam illarum apertionem (*o*) dirigitur, atque deſinit ad ejuſdem apertionis viciniam.

Detegitur inſuper convexitas quaedam inaequalis, (*Vid. fig. ejuſdem mediam partem*) in ſui medio pervia, quae hujuſce parvi hemiſphaerii peculiarem nucleum conſtituebat.

E variis plicis haec convexitas componitur, quarum quinque ſuo limbo obtuſo, marginato, & circulari ad ſe ſe mutuo in centro illius approximatae ſtellatum quoddam ſpatium relinquunt, quod allatam foraminis ſpeciem efformat. Haec apertio ſtellata binis ſupra deſcriptis foraminibus in eadem directione ſubſternitur, & major, minorve fieri poteſt, prout eaedem plicae ſibi plus, minuſve arcte appreſſae ſunt, deſinitque in amplum cavum ab ipſis plicis, quaſi a valvulis, aut labiis obtectum, ad tres fere lineas extenſum, facta plicarum diductione, vel elevatione facile conſpiciendum. In hoc cavo cinerea quaedam, ac fere mucoſa ſubſtantia aquae mixta reperiebatur, quae animalculorum loco proximo vagantium contritam ſubſtantiam fere repraeſentabat.

Quamvis hanc Meduſae ſpeciem ſcopulis perpetuo affixam, numquam ſolutam invenerim, neque facile ab illis manu ſeparari potuerit; attenta tamen ejuſdem ſtructura, non plane negaverim a loco ad locum tranſire poſſe, & fortaſſe etiam aliquando ſolutam vagari. In peculiari tamen contractionis motu, quem firmata baſi, praeſertim ſi irritetur,

violente

violente perficit, ad dimenſionem fere tertia parte minorem coarctatur, & tunc praeputii apertio vix conſpicua, aut valde exigua fit, & per ipſam lenta mucoſa ſubſtantia, quam diximus in profundo ipſius cavo reperiri, veluti ſpuma quaedam ſaepius exit.

Feli porrectum animal avide deglutiebatur, neque ullum eidem damnum attulit. Ipſum vero, aliaſque varias Urticas marinas piſcatores vulgari nomine *reſtegets* appellant.

Habitantem reperiebam Auguſto menſe in perruptorum ſcopulorum excavationibus, foraminum, quae copioſe aderant, amplis lateribus a Sole tutis adhaerentem. Supra aquae marinae libellam extantia quidem erant illa foramina, attamen per intervalla a refluis majoribus undis allui, aut ſaltem inſpergi ſolebant.

Quae huic Meduſae plane conveniant ſynonima, & icones non invenio, niſi forte quis velit huc pertinere Urticas rubras, quas habent RONDELETIUS (*f*), & Petrus BELLONIUS (*g*), quae colore quidem conveniunt, magnitudine vero, ſitu tentaculorum, & partium ſtructura ſatis diverſae ſunt, ut conferenti patebit. Nullius vero cognitarum Meduſae ſpecierum icon proximius accedit ad noſtram in ſtatu ſuo contractionis repraeſentandam, quam exhibita a Cl. Theodoro GRONOVIO in Tom. IV. Act. Helveticorum; quamvis attenta ejuſdem deſcriptione plurimum hae ſpecies inter ſe, & ab aliis jam notis differant. Etenim in illa adnotat Vir Doctiſſimus admodum pellucidam, & tenerrimam totius corporis ſubſtantiam; quatuor tranſverſales coſtas, tentacula marginalia plurima minima, *magnitudine*, ut ait Auctor, *aequalia*, earumque *ope celerrime oblique per aquas ſaltabat animal, manente corporis parte ſemper antrorſum directa*. In noſtra ſpecie coccineus color eſt, ſubſtantia autem corporis non adeo tenera, ſed firmior, & forti cuticula obducta,

(*f*) De piſcibus *lib.* 7. *cap.* 17. *pag.* 530.
(*g*) Aquatil. *lib.* 20. *pag.* 340. 341.
(*h*) *Pag* 38. *Tab. IV. fig.* 7.

cta. Tandem noſtrum animal locali motu fere deſtitutum, neque per aquas ſaltare poſſe videtur. Primo quidem quod aquis innatans numquam videri potuerit, ſed ſemper ſaxo poſt mortem tenaciter adhaerens; deinde quod quatuor coſtis a Cl. GRONOVIO memoratis plane careat.

Denique monere juvat nullam ſpecierum, quas Cl. JANUS PLANCUS in egregio ſuo libro de *minus notis &c.* habet, ad hanc noſtram pertinere. Cum enim dubitarem utrum pro hujus ſynonimo ſumi poſſet globoſior Urticae ſpecies, quam Vir doctiſſimus ibidem (*i*) memorat; dubii ſolutionem ab Auctore petii per epiſtolam a Cl. ſui Amico, meique Praeceptore amantiſſimo D. ALLIONIO ipſi datam. Vir autem praeſtantiſſimus, cui cum deſcriptione pictura transmiſſa fuit, reſpondit novam ſibi ſpeciem videri, aut ſaltem minus notam, & deſcriptam; atque ab iis, quas ipſe in laudato libro deſcripſit, revera diſtinguendam.

SPECIES ALTERA.

Si in ulla Urticae marinae ſpecie certe in ea, quae cinerea dicitur ab Auctoribus, multiplices varietates occurrunt. Aliae enim ex cinereo ad album, aliae ad griſeum, aliae ad caeruleum, purpureumque vergunt; nonnullae etiam ex griſeo, purpureo, vel etiam viridi colore diverſimode variegatae reperiuntur. Quae tamen ſingulae, cum ſola colorum inconſtantia ludant, diſtinctam ſpeciem non videntur conſtituere, niſi peculiaris alia nota ex partium diverſa ſtructura petita accedat, qua diſtingui mereantur. Reliquis propterea miſſis hujus generis ſpeciebus, quae in Niceenſi mari copioſe reperiuntur, nonnulla de rariori una ſpecie memorem, quam exhibet *fig.* 6. & 7. *Tab. VII.* eritque.

Medu-

(*i*) *Pag.* 43.

Medusa orbiculata , utrinque compressa ; tentaculis marginalibus plurimis , perpetuo nudis .

Hujus Medusae corpus complanatum orbem repraesentat, cujus ad centrum media crassities, seu altitudo est duarum linearum , ad periphaeriam vero lineam parumper superat. Diameter autem , sive latitudo ad unciam circiter extenditur.

In una ejusdem facie quinque sunt arcuatae plicae (*zzzz fig. 6.*) convexitatibus suis versus centrum mutuo se se contingentes, & quinque-labiatum ideo Medusae os repraesentantes . Circumvolvitur exinde arcuatae plicae utraque extremitas , & post varios anfractuosos recessus versus periphaeriam simili extremitati proximae plicae occurrit , & cum ipsa continuatur . Fit inde ut omnes plicae simul sumptae totam superficiem efforment , & veluti intestinulum unicum proprio mesenterio alligatum , & in se demum redeuntem exhibeant.

Cavum quoddam spatium quinque illis plicis os constituentibus subjacet , quod ad duas circiter lineas amplum conspicitur.

Altera animalis superficies (*ooo fig. 7.*) magis complanata , & fere plana est ; albida etiam membrana minutissimis lineis a centro divergentibus radiata obtegitur , ex cujus disruptione fusco-flavescens gelatinosa , & ad lentem quasi stupea materies erumpere observatur .

Ad margines superficiebus descriptis comprehensos paullo magis versus primam illam duplex oritur series griseo-caerulescentium tentaculorum (*ssss Tab. VII. fig. 6.* & *7.*) , quae pollicarem longitudinem habent ; sensim sensimque versus extremum extenuantur , & ibi minus colorata fiunt . Hujusmodi autem tentacula nulla agitatione commota radiatim divergunt instar nectariorum Passiflorae incarnatae, aut si velis radiatum florem belle repraesentant , cujus discus albidus , & radius cinereus sit .

Hanc

Hanc Medusae speciem cum praecedente in aqua salsa quinque mensium spatio maceratam microscopio pluries subjeci. In utraque autem per microscopium observari cuticulam, quae totum corpus obtegit, satis firmam se se conservasse, & rugas tantummodo contraxisse, quae a peripheria ad centrum dirigebantur, satisque conspicuae erant in magis plana utriusque superficie; in facie vero, ubi Medusae os in utraque locatur, in praeputio prioris speciei, in plicis, & in tentaculis utriusque transversim circulariter eaedem rugae dirigebantur, & minutissimae erant.

De hujus Medusae motibus nihil addam, nisi quod per undas solutam vagari scripserit praeclarissimus Amicus VERANI, Medicus, & Historiae maritimorum amantissimus cultor, qui circa Villafrancam Niceaensem reperit, & hanc cum maritimis aliis in aqua maris probe servatam humanissime communicavit.

Synonima, & icones non habeo; nisi huc forte pertineat urtica cinerea RONDELETII, (*k*) quae tamen, si ex manca descriptione, & icone, quam dedit, neglecto colore, liceat judicare, est vivendi modo, tentaculorum longitudine, ac dispositione, aliisque valde diversa.

(*k*) De piscibus *lib. XVII. pag.* 529.

Imprimatur. PISELLI Vic. Gen. S. Officii Taurini.

Se ne permette la Stampa

GALLI per la Gran Cancelleria.

ÉCLAIRCISSEMENS SUR LE MOUVEMENT DES CORDES VIBRANTES

PAR M. EULER.

I. TOus ceux qui ont entrepris de déterminer le mouvement des cordes vibrantes ont borné leurs recherches à ces trois conditions:

1° Ils ont considéré la corde comme fixée en ses deux extrémités A & B (*fig.* 1.), & tendue par une force quelconque, en sorte que dans son état naturel sa figure soit représentée par la ligne droite AB: ce n'est que dans cet état que la corde peut demeurer en repos ou en équilibre.

2° Ils n'ont considéré que les mouvemens extrêmement petits d'une telle corde, en sorte que si la ligne AYB représente la figure que la corde prend pendant son mouvement à un instant quelconque, on puisse toujours regarder les appliquées XY de cette ligne comme infiniment petites.

3° Ils ont supposé que le mouvement de chaque élément de la corde Y se fasse toujours suivant la direction de l'appliquée YX ou qu'il ne s'en écarte qu'infiniment peu. On pourroit bien traiter plus généralement cette question, mais alors la Théorie conduit à un calcul si embarrassé qu'on n'en sauroit rien conclure.

II. La dernière condition se réduit à celle-ci, que l'inclinaison de chaque élément de la corde Yy à l'axe AB soit infiniment petite, ou bien que la tangente tirée à chaque point Y fasse avec l'axe AB un angle infiniment petit. Ce n'est que dans ce cas qu'on peut regarder chaque élément de la courbe Yy comme égal à l'élément répondant de l'axe Xx: or cette condition est absolument nécessaire, pour que le mouvement de chaque point Y ſe faſſe dans la direction de l'appliquée YX. Delà on comprend auſſi réciproquement que toutes les fois, que cette condition convient à la figure AYB, le mouvement de chaque point Y ne ſauroit s'écarter de la direction de l'appliquée YX.

III. Donc quand on demande le mouvement de la corde après qu'elle aura reçu une impulſion quelconque, il faut abſolument que la figure qui lui a été imprimée d'abord ſoit telle, que non ſeulement toutes les appliquées XY ſoient quaſi infiniment petites, mais que l'inclinaiſon de tous les élémens de la courbe AYB ſoit auſſi infiniment petite. On pourroit encore ajouter cette condition, qu'on ait imprimé en même tems à chaque élément de la corde un certain mouvement ſelon la direction de l'appliquée, & ce mouvement initial doit auſſi être tel, qu'il n'en réſulte aucun ſaut dans la ſuite; ou bien que la figure de la corde demeure toujours conforme aux loix preſcrites. Cela remarqué, examinons plus ſoigneuſement tant la queſtion en elle même, que la ſolution que la Théorie fournit.

QUESTION.

IV. *Aiant réduit la corde tendue à une figure quelconque, ſi au moment qu'on la relache, on imprime encore à chaque élément de la corde un mouvement quelconque: on demande, pour chaque moment du tems ſuivant, tant la figure, que le mouvement que la corde aura alors, ſuppoſant que tant la figure initiale que le mouvement qui lui aura été imprimé ſoient d'acord avec les loix preſcrites.*

EXPLICATIONS.

V. Soit AB (*fig.* 2.) la corde fixée dans ſes deux extrémités A & B, & tendue par une force quelconque, à laquelle on ait imprimé au commencement la figure ASB, & d' abord cette courbe doit être telle, que 1° toutes ſes appliquées ſoient quaſi infinimens petites, & 2° que toutes ſe tangentes ne s' écartent qu'infiniment peu de l' axe AB. Ces deux conditions ſont ſi naturellement liées avec la tenſion, qu'il ſeroit preſque impoſſible de réduire la corde à une telle figure, où ces deux conditions n'euſſent pas lieu. De là il eſt clair, que la figure initiale peut être variée à l' infini, & qu'elle dépend entiérement de notre volonté. Il eſt donc poſſible de donner à la corde une telle figure, qui ne ſauroit être exprimée par aucune équation analitique, comme ſi on la tiroit par un mouvement libre de la main, ſans qu'aucune loi de continuité y ait lieu.

VI. Il n'y a certainement aucun doute, qu'on ne puiſſe imprimer à la corde une telle figure, & où pourtant les deux conditions preſcrites aient lieu. Pour s' en aſſurer mieux, on n'a qu'à tirer de A à B une ligne courbe quelconque AMB en obſervant cette ſeule condition, qu'il n'y ait nulle part une tangente perpendiculaire à l'axe: alors en diminuant toutes les appliquées XM quaſi à l' infini ſelon un même rapport, de ſorte que $XS = \alpha\, XM$, prenant α pour une fraction extrémement petite, non ſeulement toutes les appliquées XS deviendront infiniment petites, mais auſſi les tangentes dans tous les points S ſeront infiniment peu inclinées à l'axe AB, tout comme les deux conditions preſcrites l'exigent.

VII. On ne ſauroit douter non plus qu'après avoir imprimé à la corde une telle figure diſcontinue ou irreductible à aucune équation analitique, la corde étant ſubitement relachée, ſoit qu'on lui imprime encore quelque mouvement ou non, n' en reçoive un certain mouvement de vibration. Mais on trouve ici bien des raiſons de douter ſi dans ces cas la Théorie eſt ſuffiſante de nous conduire à une ſolution, puiſqu'il ſemble que l'analiſe, comme elle a été traitée juſqu'ici, ne ſauroit être appliquée qu'à des courbes, dont la nature peut être renfermée dans une équation analitique. Mais il n' eſt pas encore tems de décider cette queſtion: ſi l'analiſe eſt incapable de nous fournir une ſolution pour ces cas, nous ne nous en appercevrons que trop tôt: & partant il n'eſt pas néceſſaire de reſtraindre d'abord la queſtion aux ſeules courbes continues, dont la nature eſt exprimée par quelque équation.

VIII. Mais ſi la Théorie nous conduit à une ſolution ſi générale, qu'elle s'étend auſſi bien à toutes les figures diſcontinues que continues il faudra avouer, que cette recherche nous ouvre une nouvelle carrière dans l' analiſe, en nous mettant en état d' appliquer le calcul à des courbes qui ne ſont aſſujetties à aucune loi de continuité, & ſi cela a paru impoſſible juſqu'ici, la découverte ſera d'autant plus importante. Or en effet j' ai remarqué à cette occaſion, que la partie de l'analiſe des infinis; à laquelle cette queſtion appartient, renferme eſſentiellement ce caractère, qu'elle reçoit des fonctions abſolumens arbitraires, pendant que de telles fonctions ſont entiérement bannies de l'analiſe ordinaire qu'on a cultivée juſqu'ici, & qui roule principalement ſur des fonctions d' une ſeule variable. Mais l' analiſe dont nous avons beſoin ici, s'occupe des fonctions de deux ou pluſieurs variables: où cela arrive de bien remarquable, que chaque intégration introduit dans le calcul une fonction abſolument arbitraire au lieu d' une ſimple quantité conſtante.

IX. Après avoir réduit la corde à une figure quelconque ASB, on ſuppoſe communement qu'on la relache ſubitement, ſans lui imprimer aucun mouvement, de ſorte que dans ce premier inſtant tous les élémens de la corde ſont en repos, ou leur viteſſe nulle. Mais il eſt poſſible que dans le moment même, où l'on relache la corde, on imprime à chacun de ſes élémens un certain mouvement, dont la direction doit toujours être perpendiculaire à l'axe. Pour tenir compte de cette circonſtance on peut décrire ſur l'axe *A B* l'échelle des viteſſes initiales *A V B* dont chaque appliquée *X V* marque la viteſſe, qui aura été imprimée au point de la corde *S* ſelon la direction *S X*. Puiſque les extrémités de la corde *A* & *B* demeurent toujours immobiles, il eſt évident que cette courbe *A V B* doit paſſer par les deux termes *A* & *B*, de même que la figure initiale *A S B*.

SOLUTION DINAMIQUE DE LA QUESTION.

X. Poſons maintenant la longueur de la corde $AB = a$ (*fig.* 2.) ſon poids $= P$, & la force dont elle eſt tendue $= T$; or prenant une partie quelconque $AX = x$, ſoit le poids de cette partie $= p$, qui marque une fonction quelconque de x, afin que la ſolution s'étende à des cordes dont l'épaiſſeur eſt variable. Enſuite pour l'état forcé auquel la corde a été réduite au commencement, ſoit l'appliquée $XS = s$, & la viteſſe qui aura été imprimée au point *S* dans la direction *S V* ſoit $XV = u$, enſorte que u marque l'eſpace parcouru par cette viteſſe dans une ſeconde. Cela poſé on demande quelle figure, & quel mouvement la corde aura, après un tems quelconque écoulé depuis cet état initial.

XI. Soit donc écoulé depuis ce commencement un tems $= t$ *ſecondes*, & ſuppoſons que la corde ait à préſent la figure *A Y B* (*fig.* 3.), pour laquelle poſons l'appliquée

$XY = y$, qui répond à la même abſciſſe $AX = x$, où au commencement l'appliquée étoit $XS = s$, & il eſt clair que y ſera une certaine fonction tant de l'abſciſſe x que du tems t, dont la nature doit être déterminée par l'état initial, auquel nous ſuppoſons que la corde a été réduite. Tout revient donc à trouver cette fonction y, dont la valeur elle même nous découvre la figure AYB, & la formule différentielle $(\frac{dy}{dt})$ la viteſſe du point Y dans le ſens XY, de ſorte que ſi le point Y ſe meut vers X, ſa viteſſe ſera $= -(\frac{dy}{dt})$.

XII. Delà il eſt évident, que la fonction y que nous cherchons doit avoir les propriétés ſuivantes:

1° Poſant le tems $t = 0$, il faut qu'il devienne $y = s$, puiſqu'au commencement la corde eſt ſuppoſée avoir eu la figure donnée ASB (*fig.* 2.) dont l'appliquée répondante à la même abſciſſe $AX = x$ vient d'être nommée $XS = s$.

2° Poſant encore $t = 0$, il faut que la formule différentielle $-(\frac{dy}{dt})$ devienne $= u$, puiſque u marque la viteſſe initiale, dont le point S aura été pouſſé ſelon la direction SX. Donc ſi la corde n'avoit reçu aucun mouvement au commencement, mais qu'elle eut été ſimplement relachée, il faudroit qu'il fut $-(\frac{dy}{dt}) = 0$, en ſuppoſant le tems $t = 0$.

3° Enſuite puiſque les deux extrémités A & B de la corde demeurent immobiles, l'appliquée y doit auſſi être une telle fonction des deux variables x & t, que poſant ou $x = 0$, ou $x = a$ elle s'évanouiſſe toujours dans l'un & l'autre cas; par la même raiſon il faudra que dans ces deux cas la formule de la viteſſe $(\frac{dy}{dt})$ s'évanouiſſe auſſi.

XIII. Maintenant pour découvrir les forces, dont l'élément de la corde en Y eſt pouſſé à préſent, tirons en Y la tangente YT, & poſons l'angle qu'elle fait avec l'axe $XYT = \omega$, que nous ſuppoſons être infiniment petit, & puiſque en vertu de la tenſion T l'élément Y eſt tiré ſuivant la direction YT par cette même force T, il en réſulte ſuivant la direction YX la force T ſin. $\omega = T\omega$, & ſuivant la direction de l'axe XA la force T coſ. $\omega = T$, qui eſt détruite par la tenſion de l'autre coté, d'où l'on voit que la tenſion eſt par tout la même. Mais de l'autre côté, dans l'élément ſuivant, l'angle ω devient $\omega + d\omega$, & partant l'élément Y ſera pouſſé par la force $T\,(\omega + d\omega)$ ſuivant la direction contraire XY. Donc puiſque l'élément Y eſt ſollicité par ces deux forces enſemble, il ſera pouſſé ſuivant la direction XY par la force $= T\,d\omega$.

XIV. Tant que nous enviſageons la courbe AYB, le tems t demeure le même: donc puiſque l'angle $XTY = \omega$ eſt infiniment petit, nous aurons $\omega = (\frac{dy}{dx})$, & partant $d\omega = dx\,(\frac{ddy}{dx^2})$, de ſorte que l'élément en Y eſt ſollicité dans le ſens XY par la force motrice $T\,dx\,(\frac{ddy}{dx^2})$. Or le poids de la partie de la corde AX ou AY a été ſuppoſé $= p$, d'où le poids de l'élement en queſtion ſera $= dp$, qui exprime en même tems ſa maſſe; donc la force accélératrice dans le ſens XY ſera $= \frac{T\,dx}{dp}\,(\frac{ddy}{dx^2})$, où puiſque p eſt une fonction de x connue par l'épaiſſeur variable de la corde, la formule $\frac{T\,dx}{dp}$ aura auſſi une valeur connue. Si la corde avoit partout la même épaiſſeur, le poids de toute la longueur $AB = a$

aiant été posé $= P$, nous aurions $a : P = x : p$, & partant $\frac{dx}{dp} = \frac{a}{p}$, ou bien la force accélératrice seroit $= \frac{Ta}{P} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$.

XV. Aiant trouvé la force accélératrice de l'élèment Y dans le sens $YY = \frac{Tdx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$. Nous n'avons qu'à considérer le mouvement de ce même élément. Or aiant déja remarqué (XI.) que la vitesse de cet élément dans le sens XY est $= \left(\frac{dy}{dt}\right)$ son accélération dans le même sens sera $= \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, qui doit donc être proportionelle à la force accélératrice. Mais pour obtenir une équation déterminée puisque nous exprimons le tems t en secondes, & la vitesse par l'espace parcouru dans une seconde, nous n'avons qu'à introduire la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une seconde. Soit donc cette hauteur $= g$, & la comparaison de la force accélératrice avec l'accélération nous fournit cette équation :

$$\frac{2Tgdx}{dp} \left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

XVI. Voilà donc une équation différentielle du second dégré de la résolution de laquelle dépend la détermination du mouvement de la corde, & tout revient maintenant à chercher, quelle fonction des deux variables x & t doit être l'appliquée y, afin qu'elle satisfasse non seulement à cette équation, mais qu'elle renferme aussi les conditions marquées ci-dessus (XII.). Or j'observe ici que $\frac{2Tgdx}{dp}$ est une certaine fonction de la seule variable x, sans que le tems t y soit compris, & que cette fonction dépend de l'épaisseur de la corde. Mais il encore impossible de de résoudre cette équation en général, quelle que soit la variabilité de l'épaisseur de la corde, puisqu'ici je n'ai pu découvrir que certains cas, dont le nombre est bien infini, où la résolution réussit, mais à présent je me bornerai uniquement aux cordes, dont l'épaisseur est par tout la même, parceque c'est le cas, auquel presque tous ceux qui ont traité cette question se sont attachés.

Résolution analitique de la question pour le cas, où la corde a partout la même épaisseur.

XVII. Puisque la corde a partout la même épaisseur, à cause de $dx : dp = a : P$, notre équation sera

$$\frac{2Tga}{P}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où a marque la longueur de la corde, P son poids, & T la force dont elle est tendue, la valeur de g étant $15\frac{5}{8}$ pieds de Rhin; la quantité $\frac{2Tga}{P}$ est donc constante, & exprime une certaine surface, & partant pour abreger je poserai $\frac{2Tga}{P} = cc$, pour avoir à résoudre cette équation

$$cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right).$$

Il est aisé de trouver une infinité des fonctions des deux variables x & t, qui étant substituées au lieu de y satisfont à cette équation, & qui remplissent en même tems la condition qu'il devienne $y = 0$, soit qu'on pose $= 0$, ou $x = a$.

XVIII. Pour en donner un exemple supposons $y = \alpha$ sin. mx cos. nt, & puisque

$(\frac{dy}{dx}) = \alpha m$ cof. mx cof. nt, $(\frac{ddy}{dx^2}) = - \alpha mm$ fin. mx cof. nt

$(\frac{dy}{dt}) = - \alpha n$ fin. mx fin. nt, $(\frac{ddy}{dt^2}) = - \alpha nn$ fin. mx cof. nt

l' équation trouvée exige qu'il foit $mmcc = nn$, ou $n = mc$; de forte que $y = \alpha$ fin. mx cof. mct, laquelle valeur évanouit déja au cas où $x = 0$, mais pour qu'elle évanouiffe auffi au cas où $x = a$, il faut prendre $ma = i\pi$, où π marque la périphérie d'un cercle, dont le diamètre $= 1$, & i un nombre entier quelconque. Voilà donc une folution particulière de notre queftion renfermée dans cette équation :

$$y = \alpha \text{ fin } \frac{i\pi x}{a} \cdot \text{cof.} \frac{i\pi ct}{a}.$$

XIX. Puifqu'on peut prendre pour i un nombre entier quelconque, cette formule fournit une infinité de formules dont non feulement chacune donne une valeur convenable à y, mais auffi deux ou plufieurs jointes enfemble. D'où l' on tire une folution beaucoup plus générale renfermée dans cette expreffion qu'on peut continuer à l'infini:

$$y = \alpha \text{ fin.} \frac{\pi x}{a} \text{ cof.} \frac{\pi ct}{a} + \beta \text{ fin.} \frac{2\pi x}{a} \text{ cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

& puifqu'en écrivant fin. $\frac{i\pi ct}{a}$ au lieu de cof. $\frac{i\pi ct}{a}$ on fatisfait également aux conditions préfcrites, on peut donner cette folution encore plus générale:

$$y = \alpha \text{ fin.} \frac{\pi x}{a} \text{ cof.} \frac{\pi ct}{a} + \beta \text{ fin.} \frac{2\pi x}{a} \text{ cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

$$+ \alpha' \text{ fin.} \frac{\pi x}{a} \text{ fin.} \frac{\pi ct}{a} + \beta' \text{ fin.} \frac{2\pi x}{a} \text{ cof.} \frac{2\pi ct}{a} + \&c.$$

XX. Voyons maintenant, quel devroit être l'état initial de la corde, pour que cette formule exprimât le mouvement dont la corde fera agitée dans la fuite. Pour cet effet nous n' avons qu'à pofer $t = 0$, & puifque alors

y devient égale à l'appliquée s dans la figure initiale ASB (*fig.* 2.) nous aurons pour cette courbe l'équation qui suit :

$$s = \alpha \text{ fin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ fin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ fin. } \frac{3\pi x}{a} + \&c.$$

Or pour les viteffes u qui doivent être imprimées à tous les élémens de la corde, puifque $u = -\left(\frac{dy}{dt}\right)$, en pofant $t = 0$; nous aurons

$$u = -\frac{\pi c}{a}\alpha' \text{ fin. } \frac{\pi x}{a} - \frac{2\pi c}{a}\beta' \text{ fin. } \frac{2\pi x}{a} - \frac{3\pi c}{a}\gamma' \text{ fin. } \frac{3\pi x}{a} - \&c.$$

Donc réciproquement toutes les fois qu'on aura imprimé à la corde une telle figure & un tel mouvement, la valeur de y donnée ci-deffus nous découvrira pour tout tems fuivant tant la figure, que le mouvement de la corde.

XXI. Comme les valeurs de s & de u contiennent une infinité de termes, il femble qu'elles renferment tous les cas poffibles, de forte que quelque figure & quelque mouvement, qu'on ait imprimé à la corde au commencement, ces deux valeurs y puiffent être ajuftées. Car en effet on peut toujours déterminer enforte les coéficiens α, β, γ &c. & α', β', γ' &c. que l'une & l'autre des courbes ASB & AVB paffe par une infinité de points donnés. Cependant quelque convainquant que paroiffe cet argument, je ne faurois envifager cette folution, que comme très-particulière ; & cela par la même raifon, qu'on regarderoit fort-mal à propos toutes les courbes poffibles comme renfermées dans cette équation parabolique $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ quoi qu'on puiffe faire paffer cette courbe par une infinité de points donnés.

XXII. Je foutiens donc que cette folution quelque générale qu'elle paroiffe, n'eft que très-particulière, & qu'elle n'épuife point l'étenduë de l'équation différentielle du ſecond dégré $cc\,(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2})$ qui renferme la ſolution complète de notre queſtion. Pour nous aſſurer entièrement de cette inſuffiſance, on n'a qu'à conſidérer le cas où l'on n'auroit ébranlé au commencement qu'une partie de la corde comme AX, le reſte BX aiant demeuré dans un repos parfait. Car poſant cette partie ébranlée $= b$, il faudroit déterminer en ſorte les expreſſions trouvées pour s & u, que prenant $x > b$ elles devinſent $= 0$, & cela pour toutes les valeurs poſſibles entre b & a, ce qui eſt manifeſtement impoſſible. Ainſi le mouvement, que la corde recevra dans ce cas, ne ſauroit jamais être repréſentée par l'expreſſion donnée ci-deſſus pour l'appliqué y.

Intégration complète de l'équation.

$$cc\,(\frac{ddy}{dx^2}) = (\frac{ddy}{dt^2}).$$

XXIII. Mais pourquoi vodroit-on s'arrêter à une ſolution particulière & exiger la détermination d'une infinité de coéficiens, tandis qu'on eſt en état d'aſſigner l'intégrale complète de cette équation, qui doit néceſſairement renfermer tous les cas poſſibles, & qu'on peut même aiſément appliquer à toutes les figures & à tous les mouvemens qu'on aura imprimés au commencement à la corde. Je me tiendrai donc uniquement à l'intégrale complète de cette équation différentio-différentielle qu'on trouve exprimée, de cette manière

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct),$$

où $\Gamma : (x - ct)$ marque une fonction quelconque de la quantité $x + ct$, & $\Delta : (x - ct)$ une fonction auſſi quelconque de la quantité $x - ct$. Donc puiſque cette expreſſion renferme deux fonctions abſolument arbitraires, c'eſt une marque certaine qu'elle eſt l'intégrale complète de notre équation différentio-différentielle.

XXIV. Pour faire voir comment cette expreſſion ſatisfait à la queſtion, on n'a qu'à en faire la ſubſtitution; pour cet effet je marquerai le différentiel d'une telle fonction générale $\Gamma : u$ par $du\, \Gamma' : u$; donc ſi nous poſons $z = \Gamma : (x + ct)$ nous aurons $dz = (dx + cdt)\, \Gamma' : (x + ct)$, & partant $\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct)$, & $\left(\frac{dz}{dt}\right) = c\Gamma' : (x + ct)$. De là notre expreſſion fournira par la différentiation :

$$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \Gamma' : (x + ct) + \Delta' : (x - ct),\quad \left(\frac{dy}{dt}\right) = c\Gamma' : (x + ct) - c\Delta' : (x - ct)$$

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + ct) + \Delta'' : (x - ct),\quad \left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\Gamma'' : (x + ct) + cc\Delta'' : (x - ct)$$

d'où il eſt évident, que $cc \left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ devient égal à $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, tout comme la nature de notre queſtion exige.

XXV. Puiſque cette intégrale contient deux fonctions abſolument arbitraires, il n'y a aucun doute qu'on ne les puiſſe prendre enſorte, qu'elles conviennent à l'état initial auquel la corde aura été réduite au commencement. On n'a qu'à remarquer que la fonction $\Gamma : (x + ct)$ repréſente l'appliquée d'une courbe quelconque, prenant l'abſciſſe $= x + ct$, & que l'autre fonction $\Delta : (x - ct)$, repréſente l'appliquée d'une autre courbe quelconque, qui répond à l'abſciſſe $x - ct$. Donc au lieu de ces deux fonctions arbitraires on peut ſubſtituer deux courbes quelconques ſoit régulières, ou compriſes dans quelques équations, ſoit irrégulières, ou tracées à volonté ſans qu'elles ſoient attachées à quelque loi de continuité.

XXVI. Comme la queſtion elle même renferme déja deux courbes abſolument arbitraires, l'une *ASB* (*fig.* 2.) qui eſt la figure qu'on a donnée au commencement à la corde, & l'autre *AVB*, qui eſt l'échelle des viteſſes imprimées à la corde au premier inſtant du relâchement; aucune ſolution ne ſauroit être compléte, à moins qu'elle ne fût applicable à ces deux courbes abſolument arbitraires. Donc puiſque ces deux courbes ne ſont ſujettes à aucune loi de continuité, il faut bien que la ſolution ne ſoit ſujette à aucune limitation à cet égard. Ainſi la nature de la queſtion elle même nous donne déja à connoitre que la ſolution, pour qu'elle ſoit compléte, doit néceſſairement renfermer deux fonctions abſolument arbitraires pour qu'on en puiſſe faire l'application à toutes les circonſtances de la queſtion.

XXVII. Cette reflexion eſt d'autant plus importante, que de telles ſolutions ont été tout-à-fait inconnues juſqu'ici dans l'Analiſe, & qu'on a cru même, que le calcul n'étoit applicable qu'à des quantités ſoumiſes à la loi de continuité, ou compriſes dans quelque expreſſion analitique. Ce préjugé, s'il eſt permis de le nommer ainſi, a été ſans doute la cauſe que ma ſolution générale des cordes vibrantes a paru fort ſuſpecte même à des Géomètres du premier ordre; mais à préſent j'eſpère que quand ils voudront bien peſer la nature de la queſtion, ils conviendront avec moi, que la ſolution ne ſauroit être moins générale, que celle que j'ai donnée, & tous les prétendus inconvéniens, dont on a chargé ma ſolution, ne tombent que ſur les premières limitations, auxquelles on eſt obligé de reſtraindre la queſtion.

XXVIII. Mais rien ne ſauroit mieux lever tous les doutes, que l'application de ma ſolution générale au mouvement déterminé d'une corde, après qu'on l'aura réduite au commencement dans un état déterminé quelconque. Car il faut bien considérer, qu'il ne s'agit pas ici de déterminer d'une manière vague les mouvemens dont une corde tendue est susceptible, mais je suppose expressément, qu'on ait forcé au commencement la corde à une certaine figure donnée, & qu'on lui ait imprimé en même tems un certain mouvement pareillement donné. Cet état initial de la corde étant donc entièrement déterminé, il faut bien que le mouvement suivant le soit aussi, & qu'il dépende nécessairement de toutes les conditions de l'état initial. Je m'en vais donc examiner de quelle manière les deux fonctions arbitraires de ma solution doivent être déterminées, pour qu'elles répondent à l'état initial, auquelle la corde a été réduite au commencement.

Application de la solution générale à l'état initial de la corde.

XXIX. Aiant trouvé pour l' état de la corde après un tems quelconque de t *secondes* écoulé depuis le commencement, cette équation intégrale complète.

$$y = \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x + ct)$$

qui exprime la figure que la corde aura alors, on en déduit aisément la vitesse, que le point Y aura dans la direction YX (*fig.* 3.); car puisqu'elle est $= -\left(\frac{dy}{dt}\right)$ nous aurons

$$-\left(\frac{dy}{dt}\right) = -c\,\Gamma' : (x + ct) + c\,\Delta' : (x - ct).$$

Maintenant nous n' avons qu'à poser $t = 0$ pour avoir l' état initial de la corde auquel nous avons vû, qu'il doit devenir $y = s$, & $-\left(\frac{dy}{dt}\right) = u$, où s & u sont des fonctions données de x; nous aurons donc

$$s = \Gamma : x + \Delta : x \quad \& \quad u = -c\,\Gamma' : x + c\,\Delta' : x,$$

& de ces deux équations il faut déterminer la nature des deux fonctions indiquées par les signes Γ & Δ, ou bien des deux courbes dont les appliquées représentent ces fonctions.

XXX. Pour cet effet multiplions la dernière équation par dx, & en prenant l'intégrale nous aurons

$$\frac{\int u\,dx}{c} = -\Gamma : x + \Delta : x,$$

cette équation jointe à la première nous fournit

$$\Gamma : x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2c}\int u\,dx \;\&\; \Delta : x = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2c}\int u\,dx,$$

où il faut remarquer que s marque l'appliquée XS de la courbe donnée ASB, qui répond à l'abscisse x, & que $\int u\,dx$ exprime l'aire AXV de l'autre courbe aussi donnée AVB, qui convient à la même abscisse x. D'où l'on comprend, que pour avoir les fonctions $\Gamma : (x + ct)$ & $\Delta : (x - ct)$ on n'a qu'à prendre au lieu de l'abscisse x, dans les deux courbes données, ou $x + ct$ pour la première, ou $x - ct$ pour l'autre fonction.

XXXI. De là on tire d'abord la construction suivante de notre question. Soit ASB (*fig.* 4.) la figure à laquelle a été réduite la corde au commencement, AVB l'échelle des vitesses, dont les appliquées XV représentent les vitesses que tous les points de la corde S ont reçues au commencement dans le sens SX. Cela posé après le tems écoulé $= t$, le point de la corde S sera parvenu en Y, de sorte que l'intervalle XY soit $= \Gamma : (x + ct) + \Delta : (x - ct)$; or nous venons de voir que $\Gamma : x = \frac{1}{2} XS - \frac{1}{2c} AXV$ & $\Delta : x = \frac{1}{2} XS + \frac{1}{2c} AXV$. Donc prenant de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$ pour avoir les abscisses $AT = x + ct$ & $At = x - ct$, nous aurons pour le lieu cherché

Y l'ap-

Y l'appliquée $XY = \frac{1}{2}\, TN - \frac{1}{2c}.\, ATU + \frac{1}{2} tn +$ $\frac{1}{2c}.\, Atu$ ou bien $XY = \frac{1}{2c}\,(TN + tn) - \frac{1}{2c}.\, tTUu.$

XXXII. Voici donc une construction bien simple pour déterminer le lieu de chaque point de la corde après un tems quelconque de *t secondes* écoulé depuis le commencement, & cette construction est uniquement fondée sur les deux courbes données ASB & AVB, par lesquelles l'état initial de la corde est déterminé. On voit aussi que cette construction réussit également bien, soit que ces deux courbes données soient renfermées dans quelque équation analitique, ou qu'elles soient tirées d'une manière quelconque sans qu'aucune loi de continuité y ait lieu. Il n'y a ici absolument rien, qui demande une expression analitique pour la nature de ces deux courbes, & dès qu'elles sont tracées leur route suffit toute seule pour déterminer le mouvement tout entier de la corde, puisque sachant pour tout tems les lieux de tous les points de la corde, on ne sauroit plus rien désirer pour une parfaite connoissance du mouvement. Je ne reconnois ici d'autres limitations, que celles que j'ai raportées au commencement, sans lesquelles notre solution ne sauroit avoir lieu.

XXXIII. Cette construction n'est assujettie à aucun inconvénient, tant que les points T & t tombent entre les termes de la corde A & B, mais quand ils tombent au delà, où ni l'une, ni l'autre courbe donnée ne fournit plus des appliquées, on voit bien qu'il faut continuer l'une & l'autre de ces courbes pour que cette construction puisse être mise en pratique. D'où résulte cette question bien importante, selon quelle loi il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà des termes de la corde A & B, afin que notre construction nous découvre le vrai mouvement de la corde; comme cette loi doit être commune à toutes les courbes données par l'état initial, ſoit qu'elles ſoient continues ou diſcontinues, je remarque d'abord que cette loi ne ſauroit être attachée à l'équation analitique qui exprimeroit peut-être la nature d'une telle courbe. Ainſi par exemple, ſi l'une de ces courbes étoit un arc de cercle, il ſeroit fort-mal à propos, ſi l'on vouloit continuer cet arc juſques à remplir un cercle tout entier.

XXXIV. Dans cette incertitude il faut s'en tenir uniquement à la Théorie, qui nous a conduit ſi bien juſqu'ici ſans que nous aions beſoin de nous livrer à des conjectures. En effet n'aiant pas encore tenu compte de toutes les circonſtances qui concourent à déterminer le mouvement de la corde, il ne faut pas être ſurpris que la continuation de ces courbes ne ſoit pas encore décidée. Or nous n'avons pas encore introduit dans le calcul cette circonſtance fort-eſſentielle à la queſtion, que la corde eſt fixée par ces deux bouts *A* & *B*, de ſorte que l'un & l'autre de ces points demeure toujours en repos. Sans cette condition la continuation de nos courbes ſeroit effectivement indéterminée, & partant c'eſt de là qu'il faut tirer la véritable loi que nous devons ſuivre dans cette opération. Je m'en vais donc rechercher cette loi dans les Articles ſuivans.

Continuation des deux courbes données pour achever notre conſtruction.

XXXV. Puiſque notre queſtion renferme eſſentiellement cette condition, que les deux points *A* & *B* demeurent toujours immobiles, la continuation des deux courbes *ASB* & *AVT* doit être telle, que ſi nous en déterminons pour un tems quelconque les éloignemens de ces deux points à l'axe, ils ſe trouvent conſtamment = o; donc ſi nous concevons le point *X* tranſporté ou en *A*, ou en *B*, il faut que dans l'un & l'autre cas on ait toujours

$$\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2c}\,tTUu = 0$$

quelque grands ou petits qu'on prenne de part & d'autre les intervalles égaux $XT = Xt$, qui sont proportionels au tems. C'est donc cette circonstance si essentielle à notre question, qui nous montrera de quelle manière il faut continuer les deux courbes données ASB & AVB au delà de l'étendue de la corde AB.

XXXVI. Comme cette expression qu'on doit égaler à zero dépend des deux courbes données à la fois, j'observe d'abord, que chaque partie doit évanoüir séparément. Car si au commencement la corde aiant été réduite à la figure ASB avoit été relachée sans lui imprimer du mouvement, la courbe AVB évanoüiroit ou seroit confondue avec l'axe même AB, & alors il s'agiroit de continuer la seule courbe ASB, d'où l'on tireroit $TN + tn = 0$. De la même manière, si au commencement la corde avoit été laissée dans son état naturel, & qu'on eut imprimé à chacun de ses points un certain mouvement représenté par la courbe AVB, de sorte que l'autre courbe ASB fût confonduë avec l'axe AB: on n'auroit qu'à continuer la seule courbe AVB, dont la continuation devroit être telle, qu'il fut $tLUu = 0$, en prenant le point X ou en A, ou en B.

XXXVII. Cependant il n'est pas absolument nécessaire, qu'on pose séparément $TN + tn = 0$, & l'aire $tTUu = 0$, car on verra facilement que tout revient au même, pour vû qu'on fasse ensorte que $TN + tn - \frac{1}{c}\,tTUu$ évanoüisse, sans que chaque partie séparément se réduise à rien. Ainsi quoique la continuation de nos deux courbes soit indéterminée en elle même, l'usage que nous en ferons est néansmoins déterminé, & partant rien n'empêche que nous ne continuïons chacune à part, sans avoir égard à l'autre,

& de là nous tirerons la méthode la plus ſimple pour la pratique. Donc puiſque nous avons à remplir ces deux conditions,

$$1^\circ\ TN + tn = 0 \ \& \ 2^\circ\ tTUu = 0$$

la première détermine la continuation de la courbe *ASB* au delà du terme *A*, & nous fait voir, que l' appliquée *tn* doit être égale à *TN*, mais poſée dans une ſituation contraire par rapport à l' axe *AB* continué. Or la même continuation doit auſſi avoir lieu dans l'autre courbe *AUB* afin que l' aire *tTUu* ſoit réduite à rien.

XXXVIII. Soit donc *AB* (*fig.* 5.) la corde dans ſon état naturel, que nous ſuppoſons de la même épaiſſeur par tout, & nommant comme ci-deſſus ſa longueur $AB = a$, ſon poids $= P$, & ſa tenſion $= T$, poſons pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$, où *g* marque la hauteur d'où un corps tombe dans une ſeconde. Cela poſé ſoit *ASB* la figure, à laquelle la corde a été réduite au commencement, & *AVB* l'échelle des viteſſes qui lui ont été imprimées au moment du rélachement, & pour déterminer le mouvement que la corde aura dans la ſuite, il faut continuer les deux courbes au delà de *A* enſorte, que prenant les intervalles *AX* & *Ax* égaux entr'eux, il ſoit $xs = XS$ & $xu = XV$. D'où l'on voit que les courbes continuées AsB' & AuB' ſeront égales & ſemblables aux données *ASB* & *AVB*. Par la même raiſon au delà du terme *B* il faut décrire les courbes $Bs'A'$ & $Bu'A'$ égales & ſemblables aux courbes *BSA* & *BVA*, mais dans une ſituation contraire à l' égard de l' axe continué *AB*.

XXXIX. Par cette opération on pouſſera la continuation de nos courbes par les eſpaces AB' & BA' égaux à la longueur de la corde *AB*. Aiant maintenant à droite du point *A* les courbes $ASBs'A'$ & $AVBu'A'$, il faut qu'on ait à gauche des courbes ſemblables & égales $AsB'S'A''$

& $A\,u\,B'\,V''\,A''$ décrites de l'autre côté de l'axe: & il en eſt encor de même au delà du terme B. D'où il eſt évident comment la continuation doit ſe faire de part & d'autre à l'infini; on n'a qu'à prendre ſur la continuation de l'axe les intervalles $A\,B'$, $B'\,A''$, $A''B'''$ &c. & $B\,A'$, $A'\,B''$, $B''A'''$ &c. égaux à la longueur de la corde $A\,B$, & décrire ſur chacun de ces intervalles les deux courbes données $A\,S\,B$ & $A\,V\,B$ alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe, comme l'ordre des lettres A & B le marque plus clairement qu'on ne le ſauroit expliquer par une longue deſcription. Voilà donc nos deux courbes continuées à l'infini, & cela conformément à la Théorie du mouvement.

Détermination de l'état de la corde pour chaque tems propoſé.

XL. Pour déterminer l'état de la corde à un tems quelconque de t *ſecondes* (*fig.* 5.) depuis le commencement, tout revient à déterminer le lieu où ſe trouvera alors chaque point de la corde, c'eſt-à-dire ſa diſtance de l'axe ou de l'état naturel de la corde $A\,B$. Conſidérons donc un point quelconque de la corde X, qui au commencement a été en S, & ſoit y la diſtance à laquelle il ſe trouvera à préſent au deſſus de l'axe ſelon la figure. Pour cet effet qu'on prenne ſur l'axe de part & d'autre du point X les intervalles $XT = Xt = ct$, & puiſque l'appliquée dans ces deux points ont une ſituation contraire à celle que nous avons ſuppoſées ci-deſſus, nous aurons en vertu du §. XXXI.

$$y = -\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2c}\cdot \text{aire } tTUu$$

en tant que cette aire tombe au deſſous de l'axe.

XLI. Or pour avoir cette aire de l'échelle des viteſſes $A\,V\,B$ continuée, qui eſt compriſe entre les appliquées

tu & TU, on voit qu'elle eſt compoſée de l'aire AVB au deſſous de l'axe, & des deux aires Atu & BTU au deſſus de l'axe : d'où nous aurons

$$y = -\frac{1}{2}(TN + tn) - \frac{1}{2}(AVB - Atu - BTU)$$

pour l'éloignement du point X au deſſus de l'axe, d'où l'on comprend que ſi la valeur de cette expreſſion eſt négative, le point X ſe trouve alors au deſſous ou de l'autre côté de l'axe. Comme ces deux courbes ſe trouvent alternativement an deſſus & au deſſous de l'axe, il eſt clair qu'avec le tems le point X paſſera tantôt au deſſus & tantôt au deſſous de l'axe, d'où réſultera un mouvement d'oſcillation ſemblable à celui d'un pendule que je m'en vais examiner plus ſoigneuſement, puiſque c'eſt à cet article auquel preſque tous ceux qui ont traité cette matière, ſe ſont attaché principalement.

Conſidérations ſur le mouvement de vibration des cordes également épaiſſes.

XLII. Cherchons d'abord l'état de la corde après le tems t, qui donne $XT = Xt = AB = a$, de ſorte que ce tems ſoit $t = \frac{a}{c} = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ exprimé en *ſecondes.* Donc puiſque $XT = AB$ & $Xt = AB$, nous aurons $BT = AX$ & $At = BX$. Prenons ſur la corde AB le point ξ enſorte que $B\xi = AX$, pour avoir $BT = B\xi$ & $At = A\xi$, & par la loi de continuation nous aurons les appliquées $TN = \xi\sigma$, $TU = \xi\upsilon$, & $tn = \xi\sigma$, $tu = \xi\upsilon$, & de là les aires $BTU = B\xi\upsilon$ & $Atu = A\xi\upsilon$; de ſorte que $AVB - Atu - BTU = \sigma$. Par conſéquent le point X de la corde ſe trouvera alors à la diſtance de l'axe $y = -\frac{1}{2}(TN + tn) = -\xi\sigma$

ou bien au deſſous de l'axe en y de ſorte que $Xy = \xi\tau$, d'où l'on voit qu'après le tems $t = a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \sqrt{\frac{Pa}{2Tg}}$, toute la corde aura la figure $Ay\zeta B$ ſemblable à la figure initiale, mais doublement renverſée, ſavoir de haut en bas, & de droite à gauche. Il y aura donc auſſi $\xi\zeta = XS$.

XLIII. De là on comprend déja qu'après le tems double $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde doit reprendre la première figure ASB, qui lui a été imprimé au commencement. Car ſuppoſant $t = \frac{2a}{c}$ les points T, t parviendront en X' & X'', de ſorte que $XX' = XX'' = 2AB$, & les appliquées en X' & X'' les mêmes qu'en X, auſſi l'aire de l'échelle des viteſſes compriſe entre les appliquées $X'V'$ & $X''V''$ devient $= 0$. Alors donc l'éloignement du point X à l'axe AB en haut ſera $y = \frac{1}{2}(X'S' + X''S'')$ $= XS$, ou bien la corde ſe trouvera parfaitement rétablie dans ſa première ſituation ASB, & aura auſſi par conſéquent le même mouvement, qui lui a été imprimé au commencement. Il n'eſt pas beſoin d'avertir ici, que je fais abſtraction de tous les empêchemens & autres cauſes, qui affoibliſſent peu à peu le mouvement de la corde, & l'éteignent enfin tout-à-fait. Cette circonſtance ne touche pas plus la ſolution générale que je donne ici, que toutes les ſolutions particulières qui ont été publiées par d'autres.

XLIV. Puiſque nous venons de voir qu'après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde parvient dans ſon premier état, & qu'au milieu de ce tems elle s'eſt trouvée dans une ſituation renverſée, en comparant ce mouvement avec celui d'un pendule, on a raiſon de dire, que pendant le tems

$t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ la corde a achevé deux oſcillations ou deux vibrations, de ſorte que le tems de chaque vibration eſt cenſé d'être $= a\sqrt{\frac{P}{2Tga}}$ *ſecondes*, & partant le nombre des vibrations, que la corde achevera pendant une *ſeconde* ſera $= \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2Tga}{P}} = \sqrt{\frac{2Tg}{Pa}}$. C'eſt ce nombre qu'on regarde comme la meſure du ſon que la corde rend par ſon mouvement de vibration. Pour mieux comprendre cette meſure abſoluë, ſuppoſons la tenſion T équivalente au poids qu'auroit une corde de la même groſſeur dont la longueur ſeroit $= k$, de ſorte qu'on ait $T : P = k : a$, & alors nous aurons pour la meſure du ſon ce nombre $\frac{\sqrt{2gk}}{a}$, d'où l'on voit que le ſon eſt réciproquement proportionel à la longueur de la corde, la tenſion k demeurant la même.

XLV. Quoiqu'il ſoit certain que la corde revient toujours après le tems $t = 2a\sqrt{\frac{P}{2Tga}} = \frac{2a}{\sqrt{2gk}}$ dans le même état; il ne s'enſuit pas néceſſairement que la corde n'acheve dans ce tems que deux vibrations, & il ſeroit bien poſſible qu'elle en fit cependant ou quatre, ou 6, ou 8, ou pluſieurs ſelon un nombre pair quelconque, & alors le nombre des vibrations rendues dans une *ſeconde* deviendroit deux, ou 3, ou 4, ou pluſieurs fois plus grand que je l'ai ſuppoſé. Cela dépend d'une certaine diſpoſition de l'état initial, comme je l'ai remarqué autres fois, & d'où M. Bernoulli ſur tout a dérivé l'explication de tous les ſons qu'une corde peut rendre tant ſéparément qu'à la fois. Je remarque ici ſeulement que toutes les belles propriétés que ce profond Géomêtre a déduites de la nature des lignes courbes compriſes dans les équations des *ſinus* raportées ci-deſſus §. XIX. conviennent

nent également à toutes les autres courbes qui ont à peu près la même figure, quand même leur nature ne pourroit pas être exprimée par aucune équation analitique; ou bien les mêmes phénomènes résulteroient, si les plusieurs ventres, que M. Bernoulli considère dans les cordes, étoient des arcs circulaires, ou des portions de toute autre courbe, égales entr'elles.

XLVI. Ainsi si les deux courbes *A S B* & *A V B* qui déterminent l'état initial de la corde, étoient semblables à nos deux courbes représentées dans notre figure sur l'espace ou double *A A'* ou triple *A B''* &c. de la longueur de la corde *A B*, de sorte que ces courbes fussent réduites dans l'espace *A B*, alors la corde rendroit ou deux ou trois fois plus de vibrations, que je viens de marquer, tout comme si ces courbes étoient des lignes de *sinus*. Je remarque encore, que si les deux courbes *A S B* & *A V B* avoient deux moitiès semblables entr'elles, ou que la ligne droite tirée perpendiculairement par le milieu de la corde *A B*, fût un diamêtre de ces deux courbes, alors toute la corde parviendroit au même instant dans l'état naturel *AB*, de sorte que ce n'est pas non plus une propriété, qui ne convienne qu'aux seules lignes des *sinus*.

Du mouvement d'une corde qui n'est ébranlée que dans une partie.

XLVII. De là il est clair, que tant s'en faut que ma solution soit contraire à celles que M.rs Bernoulli & D'Alembert ont données de cette question, qu'elle les comprend plutôt parfaitement avec cette seule circonstance, qu'elle me paroit beaucoup plus générale. Si l'on me vouloit objecter, que l'équation générale pour les lignes des *sinus* donnée ci-dessus §. XIX. renferme en soi toutes les courbes possibles, je crois que le cas que je m'en vais développer détruira ce sentiment. Qu'on n'ébranle d'abord que la partie AD de la corde AB, en la réduisant à la figure AnD, & qu'on la relâche subitement sans lui imprimer du mouvement, de sorte que l'échelle des vitesses se confonde par tout avec l'axe pendant que l'autre ligne est composée de la courbe AnD, & de la droite DB, dont la continuation formera au delà de A la courbe Ad, & de part & d'autre du point A' les courbes $A'D'$, & $A'd'$ égales à AnD, & ainsi de suite.

XLVIII. Dans ce cas il ne s'agit point proprement d'un mouvement de vibration, mais on demande comment cette agitation initiale, est successivement répandue par toute la corde. Soit comme auparavant la longueur $AB = a$, le poïds $= P$, la tension $= T$, & pour abreger $c = \sqrt{\frac{2Tga}{P}}$: considérons un point quelconque de la corde X, qui depuis l'ébranlement restera en repos pendant le tems $= \frac{XD}{c}$ & alors il commencera à être agité pendant un tems $= \frac{2AD}{c}$ après quoi il sera encore en repos jusqu'à ce que le tems t multiplié par c atteigne la courbe $d'A'D'$, & ainsi de suite ; de sorte que chaque partie de la corde sera mise alternativement en mouvement & en repos. Dès le commencement on verra avancer l'agitation AnD jusqu'à B, d'où elle retournera jusqu'en A, & ainsi de suite, en faisant chaque tour en même tems, que la corde acheveroit une oscillation. Maintenant on m'accordera aisément que ce mouvement ne sauroit en aucune manière être représenté par les lignes des *sinus*.

RECHERCHES

Sur le mouvement des cordes inégalement grosses.

PAR M. EULER.

I. AIANT examiné dans le Mémoire précédent le mouvement des cordes également grosses, j'y ai donné l'équation générale pour le mouvement des cordes, dont la grosseur est variable selon une loi quelconque, où il faut toujours sous-entendre que les agitations de la corde sont quasi infiniment petites. Soit donc IK (*fig.* 1.) une telle corde quelconque tendue par la force $= T$, & prenant d'un point fixe I une portion indéfinie $IX = x$, posons l'épaisseur en $X = qq$, ensorte que $qqdx$ exprime la masse & le poids de l'élément $Xx = dx$, & partant $\int qqdx$ la masse & le poids de la portion $IX = x$, que j'avois nommé $= p$. Cela posé si à un tems quelconque de t *secondes* depuis une époque fixe le point de la corde X se trouve en Y, nommant l'intervalle $XY = y$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$\frac{2Tg}{qq}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right),$$

où g marque la hauteur, d'où la gravité fait tomber les corps dans une *seconde*.

II. Puisque la tension T est mesurée par un poids, en le prenant de la même matière dont est faite la corde, nous pouvons substituer sa masse, ou son volume à sa place, de sorte que T sera une grandeur de trois dimensions, & partant $\frac{2Tg}{qq}$ une de deux, que je nommerai $\frac{2Tg}{qq} = rr$, d'où l'on voit que r sera une certaine fonction de x donnée par la groſſeur & la tenſion de la corde. Tout revient donc à réſoudre cette équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, ou à trouver quelle fonction ſera l'appliquée y des deux variables x & t. Il faut donc chercher l'intégrale, & même l'intégrale compléte de cette équation, qui exigeant une double intégration, l'intégrale ne ſauroit être compléte à moins qu'elle ne renferme deux fonctions arbitraires.

III. Or ſur ce ſujet je dois d'abord cette facheuſe remarque, que tous mes efforts ont été juſqu'ici inutiles pour trouver en général l'intégrale compléte de notre équation, quelque fonction que ſoit la quantité rr de x, cependant j'ai trouvé une infinité de cas, où l'intégration réuſſit, & partant où l'on peut déterminer le mouvement de la corde. Il faut donc abſolument borner nos recherches à de certaines eſpèces de cordes, dont la groſſeur $qq = \frac{2Tg}{rr}$ eſt exprimée par de certaines fonctions de x. Car il arrive à notre équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ à peu près la même choſe qu'à l'équation $dy + yydx = Xdx$ propoſée autrefois par le Comte Riccati, qu'elle n'eſt intégrable qu'en de certains cas, & ces cas ſuivent dans l'une & l'autre preſque la méme loi. Il eſt donc bien important de chercher ces cas ou les loix de la groſſeur variable, où l'on eſt en état de déterminer le mouvement de la corde.

IV. Comme dans le cas des cordes également groſſes, où rr étoit une quantité conſtante $= cc$ l'intégrale compléte a été trouvée $y = \Gamma:(x + ct) + \Delta:(x - ct)$; On comprend qu'en général toutes les fois que l'intégration réuſſit, la forme de l'intégrale doit être ſemblable, & après quelques eſſais j'ai trouvé que dans ces cas l'intégrale peut être repréſentée ſous cette forme; $y =$

$P\Gamma:(\int udx+t)+Q\Gamma':(\int udx+t)+R\Gamma''(\int udx+t)+$&c. où P, Q, R &c. de même que u sont de certaines fonctions de la seule variable x. Ensuite puisque la quantité t se peut prendre aussi bien négativement que positivement, pour compléter l'intégrale on y doit ensuite ajouter encore ces termes:
$P\Delta:(\int udx-t)+Q\Delta':(\int udx-t)+R\Delta''(\int udx-t)+$&c. qui n'exigent donc point une recherche particuliére. De là il est clair que pour trouver des cas intégrables, on n'a qu'à pousser successivement plus loin les termes de cette expression générale, ce qui me fournit le sujet des problemes suivans.

PROBLEME I.

V. Trouver les conditions de la fonction rr, pour que l'intégrale de notre équation $rr\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme $y=P\Gamma:(\int udx+t)$.

SOLUTION.

Puisque P & u sont des fonctions de la seule variable x, prenons de cette forme les différentiels du premier dégré $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dP}{dx}\Gamma:(\int udx+t)+Pu\Gamma':(\int udx+t)$ & $\left(\frac{dy}{dt}\right)=P\Gamma':(\int udx+t)$, & de là passons aux différentiels du second dégré: $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=\frac{ddP}{dx^2}\Gamma:(\int udx+t)$ $+\frac{2udP+Pdu}{dx}\Gamma':(\int udx+t)+Puu\Gamma'':(\int udx+t)$ & $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)=P\Gamma'':(\int udx+t)$. Maintenant faisons

$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{1}{rr}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, enſorte que chaque eſpace de fonctions ſoit ſéparément réduite à zero, & nous aurons ces trois égalités

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0, \quad \frac{2udP + Pdu}{dx} = 0, \text{ \& } Puu = \frac{P}{rr},$$

dont la première donne $P = \alpha x + \beta$, la ſeconde $PPu = A$ ou $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2}$, & la troiſiéme $uu = \frac{1}{rr}$ ou $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$.. Ainſi notre équation eſt intégrable dans le cas $rr = \frac{(\alpha x + \beta)^4}{AA}$ où la groſſeur de la corde devient $qq = \frac{2Tg \cdot AA}{(\alpha x + \beta)^4}$, & alors on aura $P = \alpha x + \beta$ & $u = \frac{1}{r} = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^4}$.

C O R O L L. 1.

VI. Poſant $\alpha = 0$ & $\beta = 1$ nous aurons le cas des cordes également groſſes ou $qq = 2Tg \cdot AA$, donc poſant la groſſeur $= ff$, à cauſe de $AA = \frac{ff}{2Tg}$, il en réſulte $rr = \frac{2Tg}{ff}$, $P = 1$, & $u = \frac{f}{\sqrt{2Tg}}$; de ſorte que l'intégrale compléte de cette équation $\frac{2Tg}{ff}\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ſera $y = \Gamma : \left(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} + t\right) + \Delta : \left(\frac{fx}{\sqrt{2Tg}} - t\right)$.

C O R O L L. 2.

VII. Si α n'eſt pas zero il eſt permis de poſer $\beta = 0$ & $\alpha = 1$, puiſqu'on peut prendre le point I où l'on veut indépendamment des points A & B, où l'on veut ensuite fixer la corde. Soit donc la grosseur de la corde en $X = \frac{c^6}{x^4} = qq$, & nous aurons $2Tg \cdot AA = c^6$, donc $A = \frac{c^3}{\sqrt{2Tg}}$, $P = x$, & $u = \frac{c^3}{xx\sqrt{2Tg}}$, par conséquent $\int u\,dx = \frac{-c^3}{x\sqrt{2Tg}}$.

COROLL. 3.

VIII. Donc si l'épaisseur de la corde en X est $qq = \frac{c^6}{x^4}$, la tension étant $= T$, le mouvement de la corde sera contenu dans cette équation:

$$y = x\Gamma: \left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} - t\right) + x\Delta: \left(\frac{c^3}{x\sqrt{2Tg}} + t\right),$$

& on peut maintenant fixer la corde en tels deux points A & B que l'on veut.

SCHOLIE.

IX. Voilà donc déja une certaine espèce de cordes, dont on peut déterminer le mouvement; une telle corde est formée par la révolution d'une hyperbole Fab (*fig.* 2.) autour de son asymtote IB, la nature de cette hyperbole étant exprimée par cette équation $XQ = \frac{b^3}{gX^2} = \frac{b^3}{xx}$ car alors la section de la corde au point X devient $= \frac{\pi b^6}{x^4}$ qui étant égale à $qq = \frac{c^6}{x^4}$, on aura $c^6 = \pi h^6$ & $c^3 = h^3\sqrt{\pi}$. Donc si nous exprimons la tension T par le poids d'un cylindre fait de la même matière, dont le demi diamêtre de la base est $= h$ & la hauteur $= k$;

on aura $T = \pi hhk$, & partant $\frac{c^2}{x\sqrt{2Tg}} = \frac{hh}{x\sqrt{2gk}}$. Puisque l'épaisseur de cette corde au point I devient infiniment grande, on comprend aisément, que la partie de la corde qu'on veut ébranler, AB, doit être assès éloignée du point I, afin que la corde ne soit pas trop grosse.

PROBLEME 2.

X. Trouver les conditions de la fonction rr, ou bien de la grosseur qq, pour que l'intégrale de notre équation $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{qq}{2Tg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma : (\int u\,dx + t) + Q\Gamma' : (\int u\,dx + t).$$

SOLUTION.

Puisque P, Q & u sont des fonctions de la seule variable x, en prenant les différentiels du second dégré comme dans le Problème précédent, & en omettant pour abréger la quantité $\int u\,dx + t$ après les signes de fonctions Γ, Γ', Γ'', &c. nous aurons:

$$\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \frac{ddP}{dx^2}\Gamma : + \frac{2u\,dP + P\,du}{dx}\Gamma' : + Puu\Gamma'' :$$

$$+ \frac{ddQ}{dx^2}\Gamma' : + \frac{2udQ + Qdu}{dx}\Gamma'' : + Quu\Gamma''' :$$

qu'il faut égaler à

$$\frac{qq}{2Tg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = \frac{qqP}{2Tg}\Gamma'' : + \frac{qqQ}{2Tg}\Gamma''' :$$

d'où nous tirons d'abord $\frac{qq}{2Tg} = uu$, & ensuite

$$\frac{2udQ + Qdu}{dx} = 0;\ \frac{2u\,dP + P\,du}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} = 0,\ \&\ \frac{ddP}{dx^2} = 0$$

dont l'intégration fournit:

QQu

$QQu = A$; $PPu + \int \frac{PddQ}{dt} = B$ & $P = \alpha x + \beta$.
Or $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{PdQ}{dx} - \int \frac{dP}{dx} dQ$, & puisque $\frac{dP}{dx} = \alpha$, nous aurons $\int \frac{PddQ}{dx} = \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q$, de sorte que notre seconde équation sera : $(\alpha x + \beta)^2 u + \frac{(\alpha x + \beta) dQ}{dx} - \alpha Q = B$, ou bien à cause de $u = \frac{A}{QQ}$ par la première :

$$\frac{A(\alpha x + \beta)^2 dx}{QQ} + (\alpha x + \beta) dQ - \alpha Q dx = B dx.$$

Posons maintenant $Q = (\alpha x + \beta) z$, pour avoir

$$\frac{A dx}{zz} + (\alpha x + \beta)^2 dz = B dx,$$

d' où nous tirons

$$\frac{dx}{(\alpha x + \beta)^2} = \frac{zzdz}{Bzz - A}, \; \& \; C - \frac{1}{\alpha(\alpha x + \beta)} = \int \frac{zzdz}{Bzz - A}$$

& de là nous aurons z déterminé par x; ensuite aiant $Q = (\alpha x + \beta) z$, $u = \frac{A}{QQ}$, $P = \alpha x + \beta$, & $qq = 2Tguu$, on verra sous quelle loi de la grosseur notre équation admet l' intégration.

COROLL. I.

XI. Afin que z puisse aisément se déterminer par x, limitons les cas ensorte que $B = 0$, & $\int \frac{zzdz}{Bzz - A} = -\frac{z^3}{3A}$. Or alors il convient de distinguer deux cas selon que $\alpha = 0$ ou non. Soit premièrement $\alpha = 0$ & $\beta = 1$, pour avoir $x = e - \frac{z^3}{3A}$, donc $z = \sqrt[3]{3A(e - x)}$

$= Q$, $u = \frac{\sqrt[3]{A}}{\sqrt[3]{9(c-x)^2}}$, $P = 1$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AA}}{\sqrt[3]{81(c-x)^4}}$.

COROLL. 2.

XII. Posons pour ce cas $e = 0$, & soit la grosseur $qq = cc\sqrt[3]{\frac{c^4}{x^4}}$; nous aurons donc $\sqrt[3]{AA} = \frac{cc\sqrt[3]{81c^4}}{2Tg}$, & $\sqrt[3]{A} = \frac{c\sqrt[3]{9cc}}{\sqrt{2Tg}}$; donc $u = \frac{c}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{cc}{xx}}$, & $\int u\,dx = \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $Q = -\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}$, de sorte que pour ce cas l' équation intégrale sera

$$y = \Gamma:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} + t\right)$$
$$+ \Delta:\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right) - \frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3c\sqrt[3]{ccx}}{\sqrt{2Tg}} - t\right).$$

COROLL. 3.

XIII. Pour l'autre cas posons $\beta = 0$ & $\alpha = 1$ pour avoir $\frac{1}{x} + \frac{1}{c} = \frac{z^3}{3A} = \frac{c+x}{cx}$, donc $z = \sqrt[3]{\frac{3A(c+x)}{cx}}$, & ensuite $Q = \sqrt[3]{\frac{3A}{c}xx(c+x)}$, $u = \frac{\sqrt[3]{Acc}}{\sqrt[3]{9x^4(c+x)^2}}$, $P = x$, & $qq = \frac{2Tg\sqrt[3]{AAc^4}}{\sqrt[3]{81x^8(c+x)^4}}$. Soit donc la grosseur $qq = ff\sqrt[3]{\frac{f^8c^4}{x^8(c+x)^4}}$ pour avoir $\sqrt[3]{A} = \frac{f\sqrt[3]{9f^4}}{\sqrt{2Tg}}$, donc $Q = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{fxx(c+x)}{c}}$, & $u = \frac{ff}{c\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{ccf}{x^4(c+x)^2}}$.

C o r o l l. 4.

XIV. Dans ce même cas poſons $c = \infty$, de ſorte que la groſſeur de la corde ſoit $qq = ff \sqrt[3]{\frac{f^8}{x^8}}$, & puiſque $P = x$, $Q = \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}$, & $u = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x^4}}$, donc $\int u\,dx = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f}{x}}$, & l' équation intégrale ſera

$$= x\Gamma:\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Gamma':\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} - t\right)$$
$$+ x\Delta:\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right) + \frac{3ff\sqrt[3]{fxx}}{\sqrt{2Tg}}\Delta':\left(\frac{3ff}{\sqrt{2Tg}}\sqrt[3]{\frac{f}{x}} + t\right).$$

S c h o l i e.

XV. Prenant pour la groſſeur de la corde cette forme $qq = \frac{f^{2+n}}{x^n}$ nous avons déja decouvert quatre cas, qui admettent la réſolution, qui ſont $n = 0$, $n = 4$, $n = \frac{4}{3}$, $n = \frac{8}{3}$, & c' eſt auſſi dans ces mêmes cas que l' équation Riccatienne $dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{x^n}$ eſt intégrable : d' où l' on peut conclure, que les cas ſuivans $n = \frac{8}{5}$, $n = \frac{12}{5}$, $n = \frac{12}{7}$, $n = \frac{16}{7}$ &c. auront auſſi la même propriété, que le mouvement de la corde pourra alors être déterminé. Mais le cas du Coroll. 3. n'eſt pas moins remarquable, où la groſſeur de la corde eſt $qq = ff \sqrt[3]{\frac{f^8 c^4}{x^8 (c+x)^4}}$; pour la réſolution duquel j'obſerve que $\int u\,dx = \frac{-3ff\sqrt[3]{f}}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{c+x}{cx}} = \frac{-3ff}{\sqrt{2Tg}} \sqrt[3]{\frac{f(c+x)}{cx}}$ d' où l' on formera aiſément l'équation intégrale compléte. Mais notre réſolution s'étend beaucoup plus loin; d'abord aiant trouvé le raport entre x & z par cette équation $\frac{dx}{(\alpha x+\beta)^2}$ $= \frac{zzdz}{Bzz - A}$, on aura $P = \alpha x + \beta$, $Q = (\alpha x + \beta) z$ & $u = \frac{A}{(\alpha x + \beta)^2 zz}$, d' où nous tirons

$$\int u\,dx = \int \frac{A\,dx}{(\alpha x + \beta)^2 zz} = \int \frac{A\,dz}{Bzz - A},$$

de ſorte que toutes nos quantités peuvent être déterminées aſsés ſimplement par la nouvelle variable z, aiant $\frac{1}{\alpha x + \beta}$ $= - \alpha \int \frac{zzdz}{Bzz - A}$. Ainſi ce Probleme nous fournit une infinité d' eſpèces de cordes dont le mouvement peut être déterminé.

PROBLEME 3.

XVI. Trouver les conditions de la groſſeur de la corde qq, pour que l' intégrale de notre équation $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ $= \frac{qq}{2Tg}\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ait cette forme:

$$y = P\Gamma : \left(\int udx + t\right) + Q\Gamma' : \left(\int udx + t\right) + R\Gamma'' : \left(\int udx + t\right).$$

SOLUTION.

Faiſant le calcul comme dans le Probleme précédent; on trouve d' abord $qq = 2Tguu$, & enſuite il faut ſatisfaire à ces èquations;

$$\frac{ddP}{dx^2} = 0,\ 2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0, \text{ \& } 2udR + Rdu = 0,$$

dont la première & dernière donnent

$$P = \alpha x + \beta, \text{ \& } RRu = A, \text{ ou } u = \frac{A}{RR},$$

la seconde donne

$$PPu + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B, \text{ ou bien } \frac{APP}{RR} + \frac{PdQ}{dx} - \alpha Q = B,$$

& la troisiéme

$$QQu + \frac{QdR}{dx} - \int \frac{dQ}{dx} dR = C.$$

Je m' arrêterai ici uniquement aux cas, où l' épaisseur qq, & partant aussi u devient égale à une certaine puissance de x, & où les lettres Q & R peuvent aussi être exprimées par des puissances de x. Ici il faut considérer deux cas, l' un ou $P = 1$, & l' autre ou $P = x$.

1° Soit donc $P = 1$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+1}$, & $R = \gamma x^{2n+2}$, pour obtenir le même nombre de dimensions dans nos égalités, & puisque la premiére est remplie d' elle même, les autres donneront

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$n\alpha + (n+1)n\beta = 0,$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+1)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+2)(2n+1)\gamma = 0,$$

$$2udR + Rdu = 0,$$

$$4(n+1)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

donc $5n + 4 = 0$, & $n = -\frac{4}{5}$: or de la première nous tirons $\beta = -\frac{\alpha}{n+1} = -5\alpha$, & de la seconde $(3n+2)\alpha\beta + 2(n+1)(2n+1)\gamma = 0$ il résulte $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$. Donc si $u = \alpha x^{-\frac{4}{5}}$ ou bien la grosseur de la corde $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{8}{5}}$ à cause de $\int u\,dx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$, le mouvement de la corde sera exprimé par cette équation

$$y = \Gamma : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) - 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\,\Gamma' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t)$$

$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\,\Gamma'' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} + t) + \Delta : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t)$$

$$- 5\alpha x^{\frac{1}{5}}\,\Delta' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{2}{5}}\,\Delta'' : (5\alpha x^{\frac{1}{5}} - t),$$

où posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$ il faut prendre $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{4}{5}}$.

2° Soit $P = x$ & $u = \alpha x^n$, posons $Q = \beta x^{n+2}$, & $R = \gamma x^{2n+3}$, & nos égalités donneront

$$2u\,dP + P\,du + \frac{ddQ}{dx} = 0,$$

$$2\alpha + n\alpha + (n+2)(n+1)\beta = 0$$

$$2u\,dQ + Q\,du + \frac{ddR}{dx} = 0,$$

$$2(n+2)\alpha\beta + n\alpha\beta + (2n+3)(2n+2)\gamma = 0,$$

$$2u\,dR + R\,du = 0;$$

$$2(2n+3)\alpha\gamma + n\alpha\gamma = 0;$$

d'où nous tirons

$$\beta = -\frac{(n+2)\alpha}{(n+1)(n+2)} = -\frac{\alpha}{n+1},\ \gamma = -\frac{(3n+4)\alpha\beta}{(2n+3)(2n+2)},$$

& $5n + \beta = 0$; donc puisque $n = -\frac{6}{5}$, nous aurons $\beta = 5\alpha$, & $\gamma = \frac{25}{3}\alpha\alpha$, & ensuite $u = \alpha x^{-\frac{6}{5}}$,

$\int u\,dx = -5\alpha x^{-\frac{1}{5}}$, & $qq = 2Tg\alpha\alpha x^{-\frac{11}{5}}$, de sorte que posant $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{11}{5}}$ nous aions $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{6}{5}}$, & pour le mouvement

$$y = x\Gamma : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Gamma' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t)$$
$$+ \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Gamma'' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} - t) + x\Delta : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t)$$
$$+ 5\alpha x^{\frac{4}{5}}\Delta' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t) + \frac{25}{3}\alpha\alpha x^{\frac{3}{5}}\Delta'' : (5\alpha x^{-\frac{1}{5}} + t).$$

P R O B L E M E 4.

XVII. La grosseur de la corde qui répond à l' intervalle $IX = x$ étant exprimée ainsi $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{2-2n}$, trouver l' équation générale, qui en détermine le mouvement.

S O L U T I O N.

Prenons $u = \alpha x^{n-1}$, & il faut qu'il soit $\alpha = \frac{f^{2-n}}{\sqrt{2Tg}}$; d' où nous tirons $\int u\,dx = \frac{\alpha}{n} x^n$. Posons maintenant pour notre équation intégrale cherchée

$$y = P\Gamma : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + Q\Gamma' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right)$$
$$+ R\Gamma'' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + S\Gamma''' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n + t\right) + \&c.$$
$$+ P\Delta : \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + Q\Delta' \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right)$$
$$+ R\Delta'' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + S\Delta'' : \left(\frac{\alpha}{n} x^n - t\right) + \&c.$$

& soit $P = x^m$, $Q = Bx^{m+n}$, $R = Cx^{m+2n}$, $S = Dx^{m+3n}$ &c. où il faut remarquer que l'exposant m doit être ou $= 0$, ou $= 1$, afin que $\frac{ddP}{dx^2} = 0$. Cela posé nos égalités donneront comme il suit:

$$2udP + Pdu + \frac{ddQ}{dx} = 0$$

$$2m\alpha + (n-1)\alpha + (m+n)(m+n-1)B = 0$$

$$2udQ + Qdu + \frac{ddR}{dx} = 0$$

$$2(m+n)\alpha B + (n-1)\alpha B + (m+2n)(m+2n-1)C = 0$$

$$2udR + Rdu + \frac{ddS}{dx} = 0$$

$$2(m+2n)\alpha C + (n-1)\alpha C + (m+3n)(m+3n-1)D = 0$$

$$2udS + Sdu + \frac{ddT}{dx} = 0$$

$$2(m+3n)\alpha D + (n-1)\alpha D + (m+4n)(m+4n-1)E = 0;$$

d' où nous tirons	donc si $m = 0$	& si $m = 1$
$B = -\frac{\alpha(2m+n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n-1)}{n(n-1)}$;	$B = -\frac{\alpha(n+1)}{n(n+1)}$;
$C = -\frac{\alpha B(2m+3n-1)}{(m+2n)(m+2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n-1)}{2n(2n-1)}$;	$C = -\frac{\alpha B(3n+1)}{2n(n+1)}$;
$D = -\frac{\alpha C(2m+5n-1)}{(m+3n)(m+3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n-1)}{3n(3n-1)}$;	$D = -\frac{\alpha C(5n+1)}{3n(3n+1)}$;
$E = -\frac{\alpha D(2m+7n-1)}{(m+4n)(m+4n-1)}$;	$E = -\frac{\alpha D(7n-1)}{4n(4n-1)}$;	$E = -\frac{\alpha D(7n+1)}{4n(4n+1)}$.

Considérons séparément les deux cas où $m = 0$ & $m = 1$.

1er CAS OU $m = 0$, ET $P = 1$.

Dans ce cas nous voions que notre expression devient finie toutes les fois que n est une telle fraction $\frac{1}{\lambda}$ où λ est un nombre impair. Posons donc $n = \frac{1}{\gamma}$ pour avoir

$B =$

$$B = -\frac{\alpha\lambda(\lambda-1)}{1(\lambda-1)} = -\lambda\alpha$$

$$C = -\frac{\lambda\alpha B(\lambda-3)}{2(\lambda-2)} = +\frac{\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-3)}{1\cdot2(\lambda-1)(\lambda-2)}\alpha^2$$

$$D = -\frac{\lambda\alpha C(\lambda-5)}{3(\lambda-3)} = -\frac{\lambda^3(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{1\cdot2\cdot3(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)}\alpha^3$$

$$E = -\frac{\lambda\alpha D(\lambda-7)}{4(\lambda-4)} = +\frac{\lambda^4(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{1\cdot2\cdot3\cdot4(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)}\alpha^4$$

&c. &c.

Je n' ai pas ici effacé les facteurs qui se détruisent dans les numérateurs & dénominateurs, puisque toutes les fois qu'un numérateur évanoüit, non seulement le coéficient qui lui répond, mais aussi tous les suivans peuvent être négligés. Voici donc les cas qui en résultent.

1° Si $\lambda = 1$, $n = 1$; $qq = ff$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}}$, $\int udx = \alpha x$; $P = 1$, $Q = 0$, $R = 0$ &c.

2° Si $\lambda = 3$, $n = \frac{1}{3}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4}{3}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}} \cdot f^{\frac{2}{3}}$, $\int udx = 3\alpha x^{\frac{1}{3}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{3}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \alpha x^{\frac{1}{1}}$, $R = 0$, $S = 0$ &c.

3° Si $\lambda = 5$, $n = \frac{1}{5}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{8}{5}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}} \cdot {}^{\frac{4}{5}}$, $\int udx = 5\alpha x^{\frac{1}{5}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{5}{1} \cdot \frac{4}{4}\alpha x^{\frac{1}{5}}$, $R = +\frac{5\cdot5}{1\cdot2} \cdot \frac{4\cdot2}{4\cdot3}\alpha^2 x^{\frac{2}{5}}$, $S = 0$ &c.

4° Si $\lambda = 7$, $n = \frac{1}{7}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{12}{7}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Ig}} \cdot f^{\frac{6}{7}}$, $\int udx = 7\alpha x^{\frac{1}{7}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{7}{1} \cdot \frac{6}{6}\alpha x^{\frac{1}{7}}$, $R = +\frac{7\cdot7}{1\cdot2} \cdot \frac{6\cdot4}{6\cdot5}\alpha^2 x^{\frac{2}{7}}$, $S = -\frac{7\cdot7\cdot7}{1\cdot2\cdot3} \cdot \frac{6\,4\cdot2}{6\cdot5\cdot4}\alpha^3 x^{\frac{3}{7}}$, $T = 0$ &c.

5° Si $\lambda = 9$, $n = \frac{1}{9}$; $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{16}{9}}$, $\alpha = \frac{f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{8}{9}}$; $\int u dx = 9\alpha x^{\frac{1}{9}}$; $P = 1$, $Q = -\frac{9}{1} \cdot \frac{8}{8}\alpha x^{\frac{1}{9}}$, $R = +\frac{9 \cdot 9}{1 \cdot 2} \cdot \frac{8 \cdot 6}{8 \cdot 7}\alpha^2 x^{\frac{2}{9}}$, $S = -\frac{9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{8 \cdot 7 \cdot 6}\alpha^3 x^{\frac{3}{9}}$, $T = +\frac{9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}\alpha^4 x^{\frac{4}{9}}$, $V = 0$ &c.

Posons donc en général $\lambda = 2\mu + 1$, & soit $\lambda\alpha = \beta$; de sorte que la grosseur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu}{2\mu+1}}$; on prendra $\beta = \frac{(2\mu+1)f}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{2\mu+1}}$ & $\int u dx = \frac{\alpha}{n} x^n = \beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coéficiens P, Q, R &c. seront déterminés ainsi;

$$P = 1$$

$$Q = -\frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta x^{\frac{1}{2\mu+1}}}{1}$$

$$R = +\frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta\beta x^{\frac{2}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2}$$

$$S = -\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3 x^{\frac{3}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$T = +\frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-5)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4 x^{\frac{4}{2\mu+1}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \text{\&c.}$$

2^d CAS OU $m = 1$ ET $P = x$.

Dans ce cas notre expreſſion devient finie toutes les fois que n eſt une telle fraction $-\frac{1}{\lambda}$ prenant pour λ un nombre impair quelconque. Poſons donc $n = -\frac{1}{\lambda}$, de ſorte que la groſſeur de la corde ſoit $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{2\lambda+2}{\lambda}}$. Soit enſuite $\alpha = \frac{ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$ ou $\lambda\alpha = \beta = \frac{\lambda ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{\frac{1}{\lambda}}$, & nous aurons $\int udx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{\lambda}}$, d'où les autres coéficiens ſeront

$$B = \frac{\lambda - 1}{\lambda - 1}\beta$$

$$C = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(\lambda-1)(\lambda-2)} \cdot \frac{\beta^2}{1 \cdot 2}$$

$$D = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)} \cdot \frac{\beta^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$E = \frac{(\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)(\lambda-7)}{(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4)} \cdot \frac{\beta^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ \&c.}$$

Soit maintenant $\lambda = 2\mu + 1$, ou bien la groſſeur de la corde $qq = ff\left(\frac{f}{x}\right)^{\frac{4\mu+4}{2\mu+1}}$. Qu'on prenne $\beta = \frac{(2\mu+1)ff}{\sqrt{2Tg}} f^{\frac{1}{2\mu+1}}$, & nous aurons $\int udx = \frac{\alpha}{n} x^n = -\beta x^{-\frac{1}{2\mu+1}}$. Or les coéficiens P, Q, R, S &c. ſe trouveront déterminés de cette manière

$$P = x$$

$$Q = \frac{2\mu}{2\mu} \cdot \frac{\beta}{1} \cdot x^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$$

$$R = \frac{2\mu(2\mu-2)}{2\mu(2\mu-1)} \cdot \frac{\beta^2}{1\cdot 2} \cdot x^{\frac{2\mu-1}{2\mu+1}}$$

$$S = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)} \cdot \frac{\beta^3}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot x^{\frac{2\mu-2}{2\mu+1}}$$

$$T = \frac{2\mu(2\mu-2)(2\mu-4)(2\mu-6)}{2\mu(2\mu-1)(2\mu-2)(2\mu-3)} \cdot \frac{\beta^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} \cdot x^{\frac{2\mu-3}{2\mu+1}} \quad \text{\&c.}$$

COROLL. I.

XVIII. Voions quelles valeurs obtiendront les coéficiens B, C, D &c. dans l'un & l'autre de nos deux cas, & d'abord au premier ou $m = 0$ & $n = \frac{1}{\lambda}$, nous aurons

	$\lambda = 1$	$\lambda = 3$	$\lambda = 5$	$\lambda = 7$	$\lambda = 9$	$\lambda = 11$	$\lambda = 13$
$P =$	1	1	1	1	1	1	1
$B =$	0	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$	$-\beta$
$C =$	0	0	$+\frac{1}{3}\beta^2$	$+\frac{2}{5}\beta^2$	$+\frac{3}{7}\beta^2$	$+\frac{4}{9}\beta^2$	$+\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$-\frac{1}{15}\beta^3$	$-\frac{2}{21}\beta^3$	$-\frac{3}{27}\beta^3$	$-\frac{4}{33}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$+\frac{1}{105}\beta^4$	$+\frac{1}{63}\beta^4$	$+\frac{2}{99}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$-\frac{1}{945}\beta^5$	$-\frac{1}{495}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$+\frac{1}{10395}\beta$

COROLL. 2.

XIX. Or pour l' autre cas où $m = 1$ & $n = -\frac{1}{\lambda} = -\frac{1}{2\mu+1}$ ces coéficiens auront les valeurs ſuivantes;

	$\lambda=1$	$\lambda=3$	$\lambda=5$	$\lambda=7$	$\lambda=9$	$\lambda=11$	$\lambda=13$
$P =$	x	x	x	x	x	x	x
$B =$	0	β	β	β	β	β	β
$C =$	0	0	$\frac{1}{3}\beta^2$	$\frac{2}{5}\beta^2$	$\frac{3}{7}\beta^2$	$\frac{4}{9}\beta^2$	$\frac{5}{11}\beta^2$
$D =$	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5}\beta^3$	$\frac{2}{3\cdot7}\beta^3$	$\frac{3}{3\cdot9}\beta^3$	$\frac{4}{3\cdot11}\beta^3$
$E =$	0	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7}\beta^4$	$\frac{3}{3\cdot7\cdot9}\beta^4$	$\frac{6}{3\cdot9\cdot11}\beta^4$
$F =$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9}\beta^5$	$\frac{3}{3\cdot5\cdot9\cdot11}\beta^5$
$G =$	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\beta^6$

qui ſont les mêmes que les précédentes.

PROBLEME 5.

XX. La groſſeur de la corde étant exprimée par cette formule $qq = \frac{f^6}{x^4}$, où x eſt l'intervalle IX (*fig.* 1.), & qq la groſſeur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de ſorte que $IA = a$, & $IB = b$, la tenſion étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au ſecond cas du Probleme précédent, en poſant $\mu = 0$, d'où l'on doit prendre

$\beta = \frac{f'}{\sqrt{2Tg}}$, & puisque $\int u\,dx = -\frac{\beta}{x}$, l' équation pour le mouvement sera

$$y = x\Gamma : (\frac{\beta}{x} - t) + x\Delta : (\frac{\beta}{x} + t) = XY$$

d' où l' on tire la viteſſe du point Y dans le ſens YX,

$$-(\frac{dy}{dt}) = x\Gamma' : (\frac{\beta}{x} - t) - x\Delta' : (\frac{\beta}{x} + t).$$

Pour repréſenter ces fonctions qu'on tire un autre axe ki (*fig.* 3.) ſur lequel on prenne $kx = \frac{\beta}{x}$, $ka = \frac{\beta}{a}$, & $kb = \frac{\beta}{b}$, de ſorte qu'ici les points a & b répondent aux deux termes A & B où la corde eſt fixée. Qu'on décrive ſur l' eſpace ab les deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$, de ſorte que l' appliquée de celle-là $x\Delta$ repréſente la fonction $\Delta : \frac{\beta}{x}$, & l'appliquée de celle-ci $x\Gamma$ négativement la fonction $\Gamma : \frac{\beta}{x}$, pour l'abſciſſe $kx = \frac{\beta}{x}$. Ces deux courbes ſont arbitraires, pourvû qu'elles aient certaines propriétés exigées par la condition, que les deux points de la corde A & B demeurent immobiles. Pour connoître ces propriétés conſidérons l' état initial de la corde, où le tems $t = 0$, & alors aiant

$$XY = y = x\,(\Delta - x\Gamma), \;\&\; (\frac{dy}{dt}) = x\;(\Delta' : \frac{\beta}{x} + \Gamma' : \frac{\beta}{x})$$

on voit que tranſportant le point X en A ou B, ou bien x en a & b, il faut qu'il ſoit $a\mu = am$ &; $b\nu = bn$. Outre cela pour que les viteſſes en A & B évanoüiſſent auſſi, il eſt néceſſaire que les tangentes de ces deux courbes tant en m & μ, qu'en n & ν ſoient paralelles entr'elles. En obſervant ces conditions la figure de ces deux courbes $m\Delta n$ & $\mu\Gamma\nu$ eſt arbitraire, & on les peut toujours décrire enforte, qu'il en réfulte l'état initial, qui aura été imprimé à la corde au commencement. Enfuite pour connoître l'état de la corde après le tems écoulé $= t$, on n'a qu'à prendre du point x les intervalles xT & $xt = t$, pour avoir $kT = \frac{\beta}{x} + t$ & $kt = \frac{\beta}{x} - t$, & partant les appliquées $TU = \Delta : (\frac{\beta}{x} + t)$ & $tu = - \Gamma : (\frac{\beta}{x} - t)$, d'où l'on aura l'écart du point X de l'axe dans cet inftant $XY = y = x\ (TU - tu) = IX\ (TU - tu)$ [*figg.* 1. & 3.]. Mais quand les points T & t tombent au delà des termes a & b, il faut continuer la courbe $n \Delta m$ au delà de a, & la courbe $\mu \Gamma \nu$ au delà de b, enforte que prenant le point x ou en a, ou en b, il y ait toujours $TU = tu$, d'où l'on entend que la partie continuée mn' doit être femblable à la courbe $\mu\nu$, & la partie $\nu\mu'$ à la courbe nm. Donc prenant de part & d'autre les intervalles ab', $b'a''$ &c. ba', $a'b''$ &c. égaux à l'efpace ab, les parties vers la droite nm, mn', $n'm''$ &c. feront alternativement femblables à nm & $\mu\nu$; & de la même manière les parties vers la gauche $\mu\nu$, $\nu\mu'$, $\mu'\nu''$ &c. alternativement femblables à $\mu\nu$ & nm; comme on le verra aifément par la figure.

Maintenant quelque grand que foit le tems écoulé t, on pourra affigner l'intervalle XY, auquel le point de la corde X fera alors éloigné de fon état naturel, d'où l'on voit qu'après le tems $t = 2ab$, où les points T & t tombent en x' & x'' analogues à x, on aura $XY = x\ (x'\delta' = x''\gamma'') = x\ (x\Delta - x\Gamma)$ tout comme au commencement, de forte que la corde eft parvenue au même état, après avoir achevé dans ce tems deux vibrations, ou felon les circonftances peut être 4 ou 6, ou même plufieurs felon un nombre pair quelconque. Le tems d'une vibration ſera donc $t = ab = \frac{\beta}{a} - \frac{\beta}{b} = \frac{\beta(b-a)}{ab}$ $= \frac{(b-a)f^3}{ab\sqrt{2Tg}}$, ou bien le nombre des vibrations rendues dans une ſeconde ſera $= \frac{ab\sqrt{2Tg}}{(b-a)f^3}$, ou ſelon les circonſtances 2, 3, 4 &c. fois plus grand.

C O R O L L. 1.

XXI. Une telle corde fera donc des vibrations régulières, de quelque manière qu'elle aura été ébranlée au commencement, & partant les ſons qu'elle rend, ſeront auſſi juſtes que ceux d'une corde partout également épaiſſe.

C O R O L L. 2.

XXII. Puiſque l'épaiſſeur de la corde en X eſt qq $= \frac{f^6}{x^4}$, la maſſe ou bien le poids de la portion AX ſera $= \frac{1}{3} f^6 (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{x^3})$, & partant le poids de la corde entière $AB = \frac{1}{3} f^6 (\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3})$. Soit ce poids $= P$ pour avoir $f^3 = \frac{ab\sqrt{3Pab}}{\sqrt{(b^3 - a^3)}}$, & le nombre des vibrations rendues par ſeconde ſera $= \sqrt{\frac{2Tg(aa+ab+bb)}{3Pab(b-a)}}$.

C O R O L L. 3.

XXIII. Poſant le poids de la corde $AB = P$ pour avoir $\frac{1}{3} f^6 = \frac{Pa^3b^3}{b^3 - a^3}$, le poids de la partie AX, en nommant

mant $I X = x$, ſera $= \frac{P b}{b^3 - a^3} (1 - \frac{a^3}{x^3})$. Mais il eſt plus convenable, pour ſe former une juſte idée de cette corde, de remarquer que la groſſeur en X eſt réciproquement proportionnelle au quarré-quarré de l' intervalle $I X = x$.

Scolie.

XXIV. Pour connoitre les circonſtances, ſous leſquelles cette même corde fera deux ou trois &c. fois plus de vibrations qu'à l'ordinaire, étant ébranlé d' une manière quelconque; on comprend de ce que j' ai dit des cordes de la même épaiſſeur, que cela arrive, lorſque la courbe $n m$ eſt ſemblable à la courbe $n n'$, ou $n m''$ &c., & en même tems la courbe $\mu \nu$ ſemblable à $\mu \mu'$ ou $\mu \nu''$ &c., ou bien ſi l' on applique à chaque point x dans l'eſpace $a b$ une appliquée $= x \Delta - x \Gamma$, il faut que cette nouvelle courbe ait deux ou pluſieurs parties ſemblables entr'elles, & alternativement ſituées à l'égard de l' axe $a b$ (*fig.* 4.). Ainſi pour le cas de deux fois plus d'oſcillations, cette nouvelle courbe doit avoir la figure $a y c y' b$, de ſorte que la partie $c y a$ ſoit égale & ſemblable à la partie $c y' b$, ou bien en prenant les intervalles $c x = c x'$, qu'il ſoit $x' y' = x y$. Donc puiſque $k a = \frac{\beta}{a}$, & $k b = \frac{\beta}{b}$, nous aurons $k c = \frac{\beta (a + b)}{2 a b}$; de là nous formerons ainſi la figure de la corde même au commencement. Aiant $I A = a$ & $I B = b$ (*fig.* 5.), le nœud tombera au point C, enſorte que $I C = \frac{2 a b}{a + b}$, c' eſt-à-dire que $I C$ ſera la moyenne harmonique entre $I A$ & $I B$; & prenant $I X$

$= \frac{\beta}{k x}$, l'appliquée XY sera $IX \times xy$. Pour rendre cela plus clair, posons $kc = c$; & $cx = cx' = u$; & puisque $IC = \frac{\beta}{c}$, prenons $IX = \frac{\beta}{c+u}$ & $IX' = \frac{\beta}{c-u}$, de sorte que $CX = \frac{\beta u}{c(c+u)}$, & $CX' = \frac{\beta u}{c(c-u)}$, & partant $CX : CX' = IX : IX'$. Maintenant, parceque $XY = IX \times xy$, & $X'Y' = IX' \times xy$, il est évident que $CX : XY = CX' : X'Y'$, & que la droite YY' passe par le nœud C. D'où nous tirons la construction suivante de la courbure de la corde, qui ne dépend plus de la fig. 4.

Aiant partagé la corde AB en C, de manière que IC soit la moyenne harmonique entre IA & IB, qu'on décrive sur AC une courbe quelconque AYC, & pour chaque point X qu'on prenne le point X', ensorte que les trois lignes IX, IC, IX' soient en proportion harmonique, alors la droite tirée de Y par le point C marquera sur l'appliquée $X'Y'$ le point Y' dans la courbe $CY'B$. Si l'on vouloit que la corde rendît trois fois plus de vibrations, il faudroit entre A & B établir deux nœuds C & D, de sorte que les distances IA, IC, ID, IB fissent une proportion harmonique, & aiant pris à volonté la figure d'une partie AYC on formeroit de la même manière la figure au delà du nœud C, & ensuite aussi au delà du nœud D. Cette même construction aura aussi lieu, lorsqu'on voudra établir un plus grand nombre de nœuds.

SCOLIE.

XXV. Voilà donc une espèce de cordes fort remarquable, puisqu'elle a cela de commun avec les cordes uniformément épaisses, que de quelque manière qu'on les ébranle, elles produiſent toujours des vibrations régulières; or nous verrons bientôt que cette propriété ne ſauroit avoir lieu dans aucune autre eſpèce. Le fondement de cette propriété eſt, qu'en quelque état que la corde ſoit miſe au commencement, elle y doit néceſſairement revenir après un certain tems; or dans les autres eſpèces de cordes ce rétabliſſement dans le premier état n'arrive peut-être jamais, & quand il arrive, ce n'eſt que ſous de certaines circonſtances, ſans leſquelles le ſon ne ſauroit être régulier ou formé par des vibrations iſochrones. D'abord les eſpèces ſuivantes, que nous ſommes en état de développer mettent cette différence dans tout ſon jour, & de là on pourra juger avec d'autant plus de raiſon, des autres eſpèces de cordes, qu'il ne nous eſt pas encore permis de ſoumettre au calcul.

PROBLEME 6.

XXVI. La groſſeur de la corde étant exprimée par cette formule $qq\, ff\, (\frac{f}{x})^{\frac{4}{3}}$, où x eſt l'intervalle IX (*fig.* 1.) & qq la groſſeur au point X: déterminer le mouvement de la corde fixée dans les deux points A & B, de ſorte que $IA = a$ & $IB = b$, la tenſion étant $= T$.

SOLUTION.

Cette corde apartient au premier cas du Probl. 4, en prenant $\mu = 1$, d'où l'on a $\beta = \frac{3\, ff}{\sqrt{2Tg}} \cdot f^{-\frac{1}{3}}$, & $\int u\, dx = \beta x^{\frac{1}{3}}$ & enſuite $P = 1$, & $Q = -\beta x^{\frac{1}{3}}$; tous les mouvemens de cette corde ſeront donc exprimés par cette équation;

$$y = \Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) + \Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

$$- \beta x^{\frac{1}{3}}\, \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) - \beta x^{\frac{1}{3}}\, \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

où y exprime l' intervalle XY, dont le point X eſt éloigné de l' axe après le tems $= t$ *ſecondes*, d'où la viteſſe de ce point Y dans le ſens YX ſera

$$- \left(\frac{dy}{dt}\right) = - \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) + \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t)$$

$$+ \beta x^{\frac{1}{3}}\, \Gamma'' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) - \beta x^{\frac{1}{3}}\, \Delta'' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t).$$

Qu'on tire maintenant un nouvel axe ik (*fig.* 6.), ſur lequel on prenne $ia = \beta a^{\frac{1}{3}}$, $ib = \beta b^{\frac{1}{3}}$ & $ix = \beta x^{\frac{1}{3}}$;

or poſons $ix = \beta x^{\frac{1}{3}} = v$, & ſur l' eſpace ab tirons les deux courbes $m\Gamma n$ & $\mu\Delta\nu$ pour repréſenter nos deux fonctions arbitraires, de manière qu'il ſoit $x\Gamma = \Gamma' : v$ & $x\Delta = \Delta' : v$, d' où nous aurons $\Gamma : v = am\,x\Gamma$, & $\Delta : v = a\mu\,x\Delta$, en remarquant que puiſque nous repréſentons ici la fonction Δ ſous l' axe, il faut changer le ſigne des fonctions Δ, Δ', Δ'' dans nos formules précédentes. Donc pour l' état initial de la corde où $t = 0$, nous aurons

$$y = am\,x\Gamma - a\mu\,x\Delta - v \,.\, x\Delta,$$

$$- \left(\frac{dy}{dt}\right) = - x\Gamma - x\Delta + \frac{v\, d.x\Gamma}{dv} + \frac{v\, d.x\Delta}{dv}.$$

Or puiſque aux points A & B, l'une & l'autre de ces deux valeurs doit évanoüir, nous aurons ces conditions à remplir; 1° $am = a\mu$; 2° $am + a\mu = ia \times \frac{d.am + d.a\mu}{dv}$; 3° $ambn - a\mu b\nu = ib\,(bn - b\nu)$; 4° $bn + b\nu = ib \times \frac{d.bn + d.b\nu}{dv}$, & pourvû que ces quatre propriétés aient lieu dans les deux courbes mn & $\mu\nu$, leur déſcription eſt arbitraire, & on les peut toujours tracer en ſorte qu'elles repréſentent un état initial quelconque donné de la corde.

Or maintenant il faut continuer la courbe $\nu\mu$ à gauche & la mn à droite; la première opération eſt déterminée par cette condition, que le point A ou a demeure immobile, & l' autre par l' immobilité du point b.

Pour la continuation de la courbe $\nu\mu$ prenons $ax' = ax = t$, & ſoit $x'\delta'$ l' appliquée cherchée au point x'; donc puiſque pour ce cas;

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = amx\Gamma \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}} \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = ia . x\Gamma$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = - a\mu x'\delta' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}} \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = ia . x'\delta'$$

il faut qu'il ſoit

$$o = amx\Gamma + a\mu x'\delta' - ia . x\Gamma + ia . x'\delta'.$$

Pour la continuation de la courbe mn prenons $bx'' = bx = t$, & ſoit $x''\gamma''$ l' appliquée cherchée au point x'' on aura donc

$$\Gamma : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = amx''\gamma'' \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}} \Gamma' : (\beta x^{\frac{1}{3}} + t) = ib . x''\gamma''$$

$$\Delta : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = a\mu x\Delta \quad , \quad \beta x^{\frac{1}{3}} \Delta' : (\beta x^{\frac{1}{3}} - t) = ib . x\Delta$$

& partant il faut qu'il ſoit

$$o = amx''\gamma'' - a\mu x\Delta - ib . x''\gamma'' + ib . x\Delta$$

Or $amx''\gamma'' = ambn + bnx''\gamma'' = a\mu b\nu + ib . bn - ib . b\nu + bnx''\gamma''$, d'où notre équation ſe change en cette forme:

$$o = bnx''\gamma'' + b\nu x\Delta + ib\,(bn - x''\gamma'') - ib\,(\beta\nu - x\Delta).$$

Aiant continué ainſi nos deux courbes, pour trouver l'eſpace $XY = y$ (*fig.* 1.) après un tems quelconque de t *ſecondes*, qu'on prenne $xT = tu = t$, & on aura

$$y = amTU - a\mu tu - \beta x^{\frac{1}{3}} (TU - tu);$$

c' eſt donc de cette formule qu'il faut déterminer l' état de la corde à un tems quelconque t depuis ſon état initial.

Coroll. 1.

XXVII. Par cette conſtruction on voit qu'on ne ſauroit aſſigner aucun tems, auquel la corde revienne néceſſairement à ſon état initial, & partant les ébranlemens dont une telle corde eſt ſuſceptible, ne ſauroient être réduits à un mouvement régulier de vibrations iſochrones, comme dans le cas précédent,

Coroll. 2.

XXVIII. Auſſi la continuation des deux courbes mn & $\mu\nu$ demande une conſtruction tranſcendente. Car poſant $ax = ax' = t$, $x\Gamma = p$ & $x'\delta' = z$, la continuation de la courbe $\mu\nu$ doit être tirée de cette équation : $\int p\,dt + \int z\,dt - ia\,(p - z) = 0$, ou poſant $ia = \alpha$ de celle-ci $\alpha\,dz + z\,dt = \alpha\,dp - p\,dt$, qui donne

$$\alpha e^{\frac{t}{\alpha}} z = \int e^{\frac{t}{\alpha}} (\alpha\,dp - p\,dt) = \alpha e^{\frac{t}{\alpha}} p - 2\int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt,$$

ou $z = p - \frac{2}{\alpha} e^{-\frac{t}{\alpha}} \int e^{\frac{t}{\alpha}} p\,dt.$

Coroll. 3.

XXIX. De la même manière pour la continuation de la courbe mn poſant $bx'' = bx = t$, $x\Delta = q$, $x''\gamma'' = z$ & $ib = \beta$, on aura $2m'x''\gamma'' = ambn + \int z\,dt$, $a\mu x\Delta = a\mu b\nu - \int q\,dt$, donc $ambn - a\mu b\nu + \int z\,dt + \int q\,dt - \beta z + \beta q = 0$, ou $\beta\,dz - z\,dt = \beta\,dq + q\,dt$, &

partant $\beta e^{-\frac{t}{\beta}} z = \int e^{-\frac{t}{\beta}} (\beta dq + q dt)$, ou $z = q + \frac{2}{\beta} e^{\frac{t}{\beta}} \int e^{-\frac{t}{\beta}} q dt$.

SCOLIE.

XXX. Or il n'eſt pas abſolument impoſſible qu'une telle corde produiſe des vibrations régulières ou iſochrones; cela dépend de l' état initial, auquel la corde a été réduite, qui peut bien être tel, que les vibrations deviennent régulières. Pour trouver de tels cas, ſoit pour abreger $\beta x^{\frac{1}{2}} = v$, & poſons

$$\Gamma : (v + t) = C \text{ſin.} (nv + nt + \zeta), \ \&$$
$$\Delta : (v - t) = C \text{ ſin.} (nv + \zeta - nt)$$

d' où nous aurons

$$\Gamma' : (v + t) = nC \text{ coſ.} (nv + \zeta + nt), \ \&$$
$$\Delta' : (v - t) = nC \text{ coſ.} (nv + \zeta - nt),$$

& partant

$$y = 2 C \text{ ſin.} (nv + \zeta) \text{ coſ.} nt - 2nCv \text{ coſ.} (nv + \zeta) \text{ coſ.} nt.$$

Maintenant, cette quantité devant évanoüir, ſoit qu'on poſe $x = a$ ou $x = b$, ſoit pour abreger $\beta a^{\frac{1}{2}} = h$ & $\beta b^{\frac{1}{2}} = k$, & il faudra remplir ces deux conditions;

1° $\text{ſin.} (nh + \zeta) - nh \text{ coſ.} (nh + \zeta) = 0$, &

2° $\text{ſin.} (nk + \zeta) - nk \text{ coſ.} (nk + \zeta) = 0$,

d' où nous tirons

$$\text{tang.} (nh + \zeta) = nh, \ \& \text{ tang.} (nk + \zeta) = nk,$$

Il s'agit donc de déterminer de ces deux égalités le nombre n avec l' angle ζ. Or éliminant l' angle ζ, nous aurons

$$\text{tang. } n\,(k - h) = \frac{n\,(k - h)}{1 + nnhk},$$

où il faut remarquer que $h = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{a}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$, & $k = \frac{3ff}{\sqrt{2Tg}} \left(\frac{b}{f}\right)^{\frac{1}{3}}$. Tout revient donc à déduire de l'équation trouvée le nombre n, ce qui se peut toujours exécuter d'une infinité de manières, attendu que cette équation renferme une infinité de racines, dont aiant trouvé une quelconque pour n, on voit qu'après le tems $t = \frac{2\pi}{n}$, la corde revient au même état, & le tems d'une vibration est par conséquent $= \frac{\pi}{n}$, de sorte que le nombre des vibrations rendues par seconde sera $= \frac{n}{\pi}$. Or pour trouver un tel nombre n on ne sauroit opérer qu'en tatonnant, en prenant successivement plusieurs valeurs pour en conclure enfin la véritable. Pour cet effet aiant pris pour n un nombre quelconque, qu'on cherche les angles φ & ψ, de sorte que $nh =$ tang. φ, & $nk =$ tang. ψ, & alors il faut qu'il provienne $n\,(k - h) = \psi - \varphi + i\pi$, où l'on peut prendre pour i ou zero ou un nombre entier quelconque, & quand cela arrivera on aura l'angle $\zeta = \varphi - nh$ ou $\zeta = \psi + i\pi - nk$.

S C O L I E 2.

XXXI. Cette question devient plus aisée à résoudre, si l'on regarde les points A & B où l'on doit fixer la corde, comme inconnus, & le nombre n comme connu, car alors, posant $nh = p$, & $nk = q$, pour avoir tang. $(p + \zeta) = p$ & tang. $(q + \zeta) = q$, ou tang. $(q - p) = \frac{q - p}{1 + pq}$, soit q

$- p$

$-p = r$ & $1 + pq = s$, & on aura $s = \frac{r}{\text{tang. } r}$. Qu'on prenne pour r un angle quelconque, & qu'on en cherche la valeur de s, de là on trouvera $q + p = \surd\,(rr + 4s - 4)$, & enſuite on aura $h = \frac{\surd\,(rr + 4s - 4) - r}{2n}$ & $k = \frac{\surd\,(rr + 4s - 4) + r}{2n}$, d'où l'on voit que s doit être plus grand que 1, & partant l'angle r plus grand que 180°, afin qu'on obtienne $r >$ tang. r. Maintenant pour connoître tous les mouvemens réguliers dont la même corde eſt ſuſceptible, on n'a qu'à prendre l'angle r en ſorte, qu'il en réſulte le même raport entre h & k; ſoit pour cet effet $k = mh$, & on aura $(m + 1)\,r = (m - 1)\,\surd\,(rr + 4s - 4)$ ou $mrr = (m - 1)^2 (s - 1)$, donc $s = 1 + \frac{mrr}{(m-1)^2} = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n(m-1)}$, & $k = \frac{mr}{r(m-1)}$, & pour chaque nombre m on peut trouver une infinité de valeurs pour l'angle r.

EXEMPLE.

XXXII. Prenons $m = 2$, de ſorte que $k = 2h$ & $b = 8a$, & l'équation à réſoudre ſera $1 + rr = \frac{r}{\text{tang. } r}$, d'où l'on tire $h = \frac{r}{n}$ & $k = \frac{2r}{n}$. Or il faut remarquer que pour réduire un angle exprimè en ſecondes à des parties du rayon, il faut ajouter 4, 6855749 au logarithme du nombre des *ſecondes*, mais puiſque nous ſavons que $r > \pi$, & que poſant $r = \pi + \varphi$, l'angle φ doit être plus grand que 10°, nous aurons à très-peu près tang. r = tang. $\varphi = \varphi$

$+ \frac{1}{3} \varphi^3$, donc $\varphi(1 + 2rr) = \frac{r}{1 + \frac{1}{3}\varphi^2} = r$ $(1 - \frac{1}{3}\varphi\varphi)$ ou bien

$$6\pi\pi\varphi + 13\pi\varphi\varphi + 7\varphi^3 = 3\pi,$$

d' où l' on tire à-peu près $\varphi = \frac{7 + 18\pi\pi + 12\pi^4}{\pi(21 + 52\pi\pi + 24\pi^4)}$, ou $\varphi = \frac{1}{2\pi} - \frac{13}{24\pi^3} + \frac{37}{36\pi}$ &c. Pour les autres valeurs on n' a qu'à poser successivement 2π, 3π, 4π &c. au lieu de π. Or pour ces derniers cas on a assès exactement $\varphi = \frac{1}{2i\pi}$, donc $r = i\pi + \frac{1}{2i\pi}$, & de là le nombre $n = \frac{r}{h}$ & le nombre des vibrations rendues par seconde $= \frac{i}{h} + \frac{1}{2i\pi\pi h}$.

Faisons donc le calcul pour trouver les valeurs du nombre r.

	si $i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
$\frac{1}{2i\pi} =$	0, 159153	0, 079576	0, 053051	0, 039788
$\frac{13}{24 i^3 \pi^3} =$	0, 017469	0, 002185	0, 000647	0, 000273
$\frac{37}{36 i^5 \pi^5} =$	0, 003359	0, 000105	0, 000014	0, 000003
$\varphi =$	0, 145043	0, 077496	0, 052418	0, 039518
$\pi =$	3, 141593	6, 283185	9, 424778	12, 566371
$r =$	3, 286636	6, 360681	9, 477196	12, 605889
$\zeta =$	65° 4′	76° 38′	80° 59′	83° 12′

d' où l' on voit que cette même corde peut rendre plusieurs sons réguliers qui soint entr'eux, comme ces valeurs de r, dont les plus bas s'écartent ſenſiblement de la ſuite des nombres naturels, mais les aigus s'y conforment de plus en plus. Aïant ainſi trouvé r, puiſque $nh = p = r$, on aura auſſi l'angle ζ = A: tang. $r - r$ = A: tang. $2r - 2r$ dont j'ai auſſi marqué les valeurs ci-deſſus.

CONCLUSION.

XXX. De la même manière on déterminera les ébranlemens des autres eſpèces de cordes, que nous ſommes en état de ſoumettre au calcul, & en général on verra, que tous ces ébranlemens ne ſont pas réductibles à des vibrations régulières. Mais on peut toujours aſſigner des conditions, ſous leſquelles ces cordes peuvent recevoir un mouvement régulier, & cela même d'une infinité de manière différentes. Or il eſt bon de remarquer ici, que tous les ſons, dont une même corde de ces eſpèces eſt ſuſceptible, ſont incommenſurables entr' eux; pendant que ceux des deux premières eſpèces ſuivent entr' eux la progreſſion des nombres naturels. C'eſt donc à cauſe de cette incommenſurabilité que les ſons des autres eſpèces ſont ſi irréguliers & contraires à l'harmonie, puiſqu'on les peut regarder comme un mélange de pluſieurs ſons ſimples, que la même corde pourroit rendre ſous de certaines conditions.

RECHERCHES

Sur l'intégration de l'équation

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{b}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{c}{xx}z$$

PAR M. EULER.

I. CETTE équation eſt d'un genre tout-à-fait différent de celui, auquel le calcul intégral a été appliqué jusqu'ici, puiſqu'elle renferme trois variables t, x, & z, & qu'il s'agit de déterminer la quantité z par les deux autres t & x, c'eſt-à-dire qu'on demande quelle fonction de t & x doit être priſe pour z, afin que la condition preſcrite ſoit remplie. Mais on cherche principalement une ſolution complète qui nous découvre à la fois toutes les fonctions poſſibles, qui étant ſubſtituées à la place de z, ſatisfaſſent à l'équation propoſée; comme cette équation contient des différentiels du ſecond dégré, ſon intégrale complète doit néceſſairement renfermer deux fonctions abſolument indéfinies & arbitraires, comme je l'ai prouvé autresfois.

II. Ce n'eſt pas une pure ſpéculation, qui a fourni cette équation, mais elle renferme la ſolution de pluſieurs queſtions phyſico-mathématiques de la dernière importance. Le cas, où les quantités b & c ſont zero, n'eſt que trop connu par les recherches ſur les vibrations des cordes, dont le mouvement en général eſt toujours déterminé par cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, pourvu que la corde ait par tout la même groſſeur, & que les excurſions ſoient quaſi infiniment petites. Enſuite la queſtion ſur la propagation du ſon m' aiant conduit à cette équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{4a^2}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$ il eſt aſsès clair, que l' équation propoſée étant plus générale eſt de la dernière importance.

III. Comme cette équation apartient à un genre de calcul tout particulier, dont les premiers élémens ne ſont pas encore aſsès bien développés, je me propoſe d'établir ici quelques méthodes, qui peuvent être d'un grand uſage dans ce nouveau calcul. Car quoique j'aie donné les intégrales complétes des deux cas mentionnés, c' eſt plutôt par une heureuſe induction, que j' y ai été conduit, que par une méthode certaine, & lorſque M^rs Bernoulli & D'Alembert ont traité le probleme des cordes vibrantes, ils ſe ſont contentés des ſolution particulières, ſans ſe ſoucier trop de toute l' étendue, que la queſtion renferme par ſa nature. Or avant que d' entreprendre l'intégration de l'équation générale miſe dans le titre, il ſera bon de traiter plus en détail l' équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & d' expoſer quelques méthodes, qui nous conduiſent à ſon intégrale compléte.

De l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$.

IV. Si l' on vouloit ſe contenter de ſolutions particulières, il ſeroit fort facile d' en trouver une multitude infinie, toutes les valeurs ſuivantes ſatisfont également à cette équation;

$z = A(x \pm at)^n$, $z = Ae^{n(x \pm at)}$, z A ſin. $n(x \pm at)$, & l' on peut encore joindre enſemble autant qu'on voudra de telles valeurs, de ſorte que par ce moyen on pourroit donner une ſolution qui renfermât une infinité de quantité de quantités constantes, & absolument arbitraires. Cependant une telle solution ne seroit pas encore compléte, & ne comprendroit point toutes les solutions possibles. Mais quand j'ai trouvé $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, où $\Gamma : (x + at)$ marque une fonction quelconque de $x + at$, & $\Delta : (x - at)$ de $x - at$, on voit bien que cette forme est infiniment plus générale, aussi est-elle l'intégrale compléte de notre équation.

V. Il est aisé de s'assurer, que cette formule convient à l'équation proposée; car en marquant le différentiel de $\Gamma : u$ par $du\,\Gamma' : u$, & celei de $\Gamma' : u$ par $du\,\Gamma'' : u$, on en tire

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + at) + \Delta'' : (x - at) \ \&$$

$$\left(\frac{dz}{dt}\right) = a\Gamma' : (x + at) - a\Delta' : (x - at)$$

& par la différentiation réitérée

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \Gamma'' : (x + at) + \Delta'' : (x - at) \ \&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a^2\Gamma'' : (x + at) + a^2\Delta'' : (x - at)$$

d'où l'on a évidemment $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Mais il s'agit ici d'une méthode, qui partant de l'équation différentio-différentielle nous conduise immédiatement à la formule $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, & par laquelle nous puissions être assurés, que cette formule est en effet l'intégrale compléte de l'équation différentio-différentielle. Je m'en vais proposer deux méthodes qui conduisent à ce but.

VI. *Première méthode.* Je transforme l'équation par cette substitution $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = u$, d'ou je tire:

$$\left(\frac{du}{dt}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) + a\left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) \ \& \ \left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt\,dx}\right) +$$

$a\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$, & partant $\left(\frac{du}{dt}\right) - a\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) - aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = 0$. Nous voilà donc parvenus à une équation différentielle du premier dégré $\left(\frac{du}{dt}\right) = a\left(\frac{du}{dx}\right)$, dont il s' agit de trouver la fonction u. Or, puisque $du = dt \left(\frac{du}{dt}\right) + dx\left(\frac{du}{dx}\right)$, nous aurons $du = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot (adt + dx)$; laquelle formule devant être intégrable, il faut que $\left(\frac{du}{dx}\right)$ soit une fonction de la quantité $x + at$. Posons donc $\left(\frac{du}{dx}\right) = \Gamma'' : (x + at)$, & l'équation $du = (dx + adt)$, $\Gamma'' : (x + at)$ donne $u = \Gamma' : (x + at)$. Maintenant nous avons à résoudre cette équation $\left(\frac{dz}{dt}\right) + a\left(\frac{dz}{dx}\right) = \Gamma' : (x + at)$ dont je cherche l' intégrale de la manière suivante.

VII. Posant $dz = pdx + qdt$, pour avoir $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $q = \left(\frac{dz}{dt}\right)$, à cause de $q = -ap + \Gamma' : (x + at)$, nous aurons :

$$dz = p\,(dx - adt) + dt\,\Gamma' : (x + at)$$

Posons $p = r + \alpha\,\Gamma' : (x + at)$, pour avoir :

$$dz = r\,(dx - adt) + [\alpha dx + (1 - \alpha a)\,dt\,]\,\Gamma' : (x + at)$$

& soit $\frac{1 - \alpha a}{\alpha} = a$ ou $\alpha = \frac{1}{2a}$, donc

$$dz = r\,(dx - adt) + \frac{1}{2a}(dx + adt)\,\Gamma' : (x + at),$$

& puisque le dernier nombre est intégrable, l' intégrale étant $\frac{1}{2a}\Gamma : (x + at)$ ou bien simplement $\Gamma : (x + at)$

pour rendre le premier membre également intégrable, il faut qu'il soit $r = \Delta' : (x - at)$, d'où nous tirons

$$z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$$

& il est évident en même tems, que cette forme est l'intégrale compléte de l'équation proposée.

VIII. *Autre méthode.* Changeons les variables t & x, dont z doit être une fonction, & posons $x + at = p$, & $x - at = q$, de sorte qu'il faille à présent trouver, quelle fonction de p & q doit être z. Il s'agit donc d'éliminer t & x, & de trouver une équation differentielle entre p, q, & z, ce qui se fera de la manière suivante. Puisque $dz = dt\left(\frac{dz}{dt}\right) + dx\left(\frac{dz}{dx}\right)$ & $dz = dp\left(\frac{dz}{dp}\right) + dq\left(\frac{dz}{dq}\right)$, à cause de $dp = dx + adt$, & $dq = dx - adt$, nous aurons

$$dt\left(\frac{dz}{dt}\right) + dx\left(\frac{dz}{dx}\right) =$$

$$(dx + adt)\left(\frac{dz}{dp}\right) + (dx - adt)\left(\frac{dz}{dq}\right).$$

Maintenant parceque t & x ne dépendent point l'une de l'autre, les membres affectés de dx & dt doivent être égales séparément, ce qui donne

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = \left(\frac{dz}{dp}\right) + \left(\frac{dz}{dq}\right) \;\&\; \left(\frac{dz}{dt}\right) = a\left(\frac{dz}{dp}\right) - a\left(\frac{dz}{dq}\right)$$

& de là nous tirons

$$\left(\frac{ddz}{dpdx}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) \;\&\; \left(\frac{ddz}{dpdt}\right) = a\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - a\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$$

$$\left(\frac{ddz}{dqdx}\right) = \left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \;\&\; \left(\frac{ddz}{dqdt}\right) = a\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) - a\left(\frac{ddz}{dq^2}\right)$$

IX. Pour achever la substitution, aiant

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dpdx}\right) + \left(\frac{ddz}{dqdx}\right) \;\&\; \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = a\left(\frac{ddz}{dpdt}\right) - a\left(\frac{ddz}{dqdt}\right)$$

on n'a qu'à substituer ici les valeurs, que nous venons de trouver, & nous obtiendrons

$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dp^2}\right) + 2\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + \left(\frac{ddz}{dq^2}\right) \ \&$$

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dp^2}\right) - 2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) + aa\left(\frac{ddz}{dq^2}\right).$$

Donc notre équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$ ſe change en celle-ci :

$2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = -2aa\left(\frac{ddz}{dpdq}\right)$, ou bien $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$ qui eſt beaucoup plus ſimple que la propoſée, ne contenant qu'un ſeul membre, qu'il faut égaler à zero, d'où l'on comprend de quelle importance peuvent ſouvent être de telles transformations, dans ce nouveau genre du calcul intégral.

X. Tout ſe réduit donc à trouver, quelle fonction des deux variables p & q doit être la quantité z, afin que l'on ait $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = 0$. Or cette équation eſt fort aiſée à réſoudre; qu'on poſe, pour mettre l'opération dans tout ſon jour, $\left(\frac{dz}{dq}\right) = u$; & puiſque $\left(\frac{ddz}{dpdq}\right) = \left(\frac{du}{dp}\right)$, il faut qu'il ſoit $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$; d'où il eſt clair que la quantité u ne ſauroit renfermer la variable p, & partant elle ſera fonction de la ſeule variable q, & une fonction quelconque de q miſe pour u ſatisfera à la condition $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$. Poſons donc $u = \Delta : q$, ce qui eſt l'intégrale compléte de l'équation $\left(\frac{du}{dp}\right) = 0$, & maintenant nous aurons $\left(\frac{dz}{dq}\right) = \Delta' : q$. Conſidérons ici l'autre quantité p conſtante, pour avoir $dz = dq\,\Delta' : q$, & partant ſon intégrale $z = \Delta : q +$ conſt.; mais cette conſtante renferme une fonction quelconque de p, au lieu de laquelle écrivant $\Gamma : p$ nous trouvons comme ci-dessus $z = \Gamma : p + \Delta : q$ ou bien $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$.

XI. Pour mettre devant les yeux toute l'étendue de cette solution, on peut décrire à volonté deux courbes quelconques EMS & FNT (*fig.* * *plan.* 1.) raportées à leur axes & BD, & alors pour avoir la valeur de z, qui répond à des valeurs quelconques des deux variables x & t, qu'on prenne dans la première courbe l'abscisse $AP = x + at$, & dans l'autre l'abscisse $BQ = x - at$, & la somme des deux appliquées $PM + QN$ ou bien aussi leur différence représentera en général la nature de la fonction cherchée z qui convient à l'équation $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)$. Cette construction est si générale, que des traits tirés librement sur le papier sans aucune loi peuvent être employés pour les deux lignes EMS & FNT.

XII. C'est aussi en quoi consiste le caractère essentiel de ce genre de calcul intégral, & qui le distingue des intégrations ordinaires, où aucune ligne courbe destituée de la loi de continuité, ne sauroit jamais avoir lieu. Mais ici les lignes EMS & FNT peuvent être tirées d'une maniére quelconque, sans qu'elles soient comprises dans quelque équation que ce soit; on les peut terminer brusquement où l'on veut, & les composer d'arcs de courbes tout-à-fait différentes. De quelque manière qu'on ait commencé à tirer ces lignes, on est toujours le maître de les continuer de part & d'autre comme on veut, sans qu'on soit astreint à aucune loi; toutes ces irrégularités n'empêchent pas que la construction donnée ne satisfasse aussi bien à l'équation proposée, que si ces deux lignes courbes étoient tout-à-fait régulières.

De l'équation $\frac{1}{aa}(\frac{ddz}{dt^2}) = (\frac{ddz}{dx^2}) + \frac{\alpha}{x}(\frac{dz}{dx}) + \frac{\beta}{xx}z.$

XIII. D'abord je remarque qu'on peut transformer cette équation en d'autres semblables, en supposant $z = x^{\lambda}u$, d'où l'on a

$(\frac{dz}{dt}) = x^{\lambda}(\frac{du}{dt})$, $(\frac{dz}{dx}) = \lambda x^{\lambda-1}u + x^{\lambda}(\frac{du}{dx})$, & de là

$(\frac{ddz}{dt^2}) = x^{\lambda}(\frac{ddu}{dt^2})$, $(\frac{ddz}{dx^2}) = \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2}u$

$+ 2\lambda x^{\lambda-1}(\frac{du}{dx}) + x^{\lambda}(\frac{ddu}{dx^2})$; & partant cette substitution, en divisant par x^{λ}, nous fournit l'équation :

$$\frac{1}{aa}(\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) + \frac{\alpha + 2\lambda}{x}(\frac{du}{dx}) + \frac{\beta + \alpha\lambda + \lambda(\lambda - 1)}{xx}u.$$

Donc si nous prenons $\lambda = -\frac{1}{2}\alpha$, de sorte que $z = x^{-\frac{1}{2}\alpha}u$, l'équation proposée se transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}(\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) + \frac{4\beta - \alpha\alpha + 2\alpha}{4xx}\cdot u$$

qui aiant un terme de moins, doit être regardée comme plus simple.

XIV. Par la même substitution on peut fair évanoüir le dernier terme, en posant $\beta + \alpha\lambda + \lambda\lambda - \lambda = 0$, ce qui donne

$\lambda = \frac{1-\alpha}{2} \pm \sqrt{(\frac{(1-\alpha)^2}{4} - \beta)}$ & $\alpha + 2\lambda = 1 \pm \sqrt{[(1-\alpha)^2 - 4\beta]}$

donc la substitution $z = x^{\lambda}u$ nous conduit à cette équation :

$$\frac{1}{aa}(\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) + \frac{1 \pm \sqrt{((1-\alpha)^2 - 4\beta)}}{x}(\frac{du}{dx}).$$

Donc sans restraindre la forme proposée nous pouvons d'abord supposer $\beta = 0$, de sorte que nous aions à résoudre cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right),$$

où il eſt remarquable que poſant $z = x^{1-\alpha} u$, elle ſe transforme dans celle-ci, qui lui eſt ſemblable.

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2-\alpha}{x}\left(\frac{du}{dx}\right),$$

& partant ſi la réſolution de l'équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

réuſſit dans le cas de $\alpha = n$, elle réuſſira auſſi dans le cas de $\alpha = 2 - n$.

XV. Mais puiſque la deſtruction du dernier terme pourroit conduire à des valeurs imaginaires, qu'il faudroit donner à l'expoſant λ, il vaudra mieux chaſſer l'avant dernier terme, ce qui ſe peut toujours faire ſans tomber dans cet inconvénient, & partant nos recherches rouleront ſur la réſolution de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z,$$

ſur laquelle je remarque, qu'on la peut réduire à une forme où le dernier terme manque d'une double manière, en poſant $z = x^{\frac{1 \pm \surd(1-4\beta)}{2}} u$, d'où l'on parvient à cette forme;

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{1 + \surd(1-4\beta)}{x}\left(\frac{du}{dx}\right).$$

Or ſi β eſt un nombre poſitif plus grand que $\frac{1}{4}$, cette forme devient imaginaire.

XVI. Or par raport à cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx} z$$

je dois avertir d'avance, que je ne la ſaurois réſoudre en général, quelque nombre qu'on prenne ponr β, il n'y a que certaines valeurs de cette lettre, où l'intégration réuſſiſſe, en quoi la réſolution eſt ſemblable à la fameuſe équation de Riccati, qui n'eſt réſoluble qu'en certains cas. Mais auſſi dans ces cas je dois avoüer, que je ne pas ſuis aſsès content de la méthode, qui m'a conduit à l'intégration de ces cas, puiſqu'elle m'a été fournie par la conſidération d'une ſolution particulière, comme on peut le voir dans mes Recherches ſur la propagation du ſon. Cependant j'expliquerai cette méthode, toute imparfaite qu'elle puiſſe paroître encore, peut être qu'elle donnera à d'autres occaſion de mieux approfondir les myſtères, que ce nouveau genre de calcul intégral renferme.

XVII. Après pluſieurs eſſais j'ai trouvé que l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\beta}{xx}z$ peut être repréſentée par une telle ſuite indéfinie :

$$z = Ax^n\Gamma:(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma':(x \pm at) + Cx^{n+2}\Gamma'':(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma''':(x \pm at) + \&c.$$

d'où nous tirons d'abord

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = Ax^n\Gamma'':(x \pm at) + Bx^{n+1}\Gamma''':(x \pm at) + Cx^{n+2}\Gamma^{\text{IV}}:(x \pm at) + Dx^{n+3}\Gamma^{\text{V}}:(x \pm at) + \&c.$$

pour la première partie de l'équation ; or pour l'autre nous trouvons

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = & n(n-1)Ax^{n-2}\Gamma:(x \pm at) & + 2nAx^{n-1}\Gamma':(x \pm at) & + Ax^n\Gamma'':(x \pm at) \\
 & & +(n+1)nB & +2(n+1)B \\
 & & & +(n+2)(n+1)C \\
\frac{\beta}{xx}z = & \beta A & +\beta B & +\beta C
\end{array}$$

qui devant être égalée à celle-là, nous en tirons les déterminations ſuivantes

$n(n-1) + \beta = 0$, ou $\beta = -n(n-1)$

$2nA + 2nB = 0$, ou $B = -A$

$2(n+1)\,B+2\,(2n+1)\,C=0$, ou $(n+1)\,B+2\,(n+\frac{1}{2})C=0$
$2(n+2)\,C+2\,(3n+3)\,D=0$, ou $(n+2)\,C+3(n+\frac{2}{2})D=0$
$2(n+3)\,D+2(4n+6)\,E=0$, ou $(n+3)\,D+4(n+\frac{3}{2})\,E=0$
$2(n+4)E+2(5n+10)\,F=0$, ou $(n+4)\,E+5(n+\frac{4}{2})\,F=0$.

XVIII. Voici donc les déterminations de tous nos coéficiens, en ſuppoſant $\beta=-n(n-1)$.

$$B=-A$$

$$C=-\frac{(n+1)\,B}{2(n+\frac{1}{2})}=+\frac{(n+1)}{2(n+\frac{1}{2})}A$$

$$D=-\frac{(n+2)C}{3(n+1)}=-\frac{(n+2)}{2.3(n+\frac{1}{2})}A$$

$$E=-\frac{(n+3)D}{4(n+\frac{3}{2})}=+\frac{(n+2)(n+3)}{2.3.4(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A$$

$$F=-\frac{(n+4)\,E}{5\,(n+2)}=-\frac{(n+3)(n+4)}{2.3.4.5(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})}A$$

$$G=-\frac{(n+5)\,F}{6(n+\frac{5}{2})}=+\frac{(n+3)(n+4)(n+5)}{2.3.4.5.6(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}A$$

$$H=-\frac{(n+6)\,G}{7(n+3)}=-\frac{(n+4)(n+5)(n+6)}{2.3.4.5.6.7(n+\frac{1}{2})(n+\frac{3}{2})(n+\frac{5}{2})}A$$

&c. &c.

XIX. De là nous voions que toutes les fois que n eſt un nombre entier négatif, la ſérie ſuppoſée devient finie, & partant c'eſt dans ces cas, que nous pouvons aſſigner l'intégrale de notre équation. Poſons donc $n=-i$, marquant par i un nombre entier quelconque, & l'équation, dont nous ſommes en état de trouver l'intégrale ſera

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)=\left(\frac{ddz}{dx^2}\right)-\frac{i(i+1)}{xx}z$$

de laquelle il eſt bon de remarquer, que poſant $z = x^{i+1}u$, elle ſe change dans cette forme:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) + \frac{2(i+1)}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

Or poſant $z = x^{-i}u$ elle ſe transforme dans celle-ci

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2i}{x}\left(\frac{du}{dx}\right)$$

d' où nous voions que cette forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{\alpha}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right)$$

eſt intégrable toutes les fois, que α eſt un nombre pair, ſoit poſitif, ſoit négatif.

1^r CAS $n = -1$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2}{xx}z.$$

XX. Puiſque $n = -1$, nous aurons $B = -A$, & les coéficiens ſuivans s'évanoüiront tous, donc l' intégrale de cette équation ſera, en prenant $A = 1$, & partant $B = -1$,

$$z = \frac{1}{x}\Gamma:(x \pm at) - \Gamma':(x \pm at)$$

& tenant compte du ſigne ambigu de la quantité a, l'intégrale compléte ſera exprimée ainſi

$$z = \frac{1}{x}\Gamma:(x - at) - \Gamma':(x - at)$$
$$+ \frac{1}{x}\Delta:(x + at) - \Delta':(x + at)$$

& de la même maniére on pourra aiſément trouver les intégrales complétes pour tous les autres cas intégrables. Aiant trouvé les coéficiens de la forme ſuppoſée, on n' a qu'à résoudre chaque terme en deux, en emploiant pour l'un la forme $x + at$, & pour l'autre la forme $x - at$.

2^d CAS $n = -2$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{6}{xx}z.$$

XXI. Aiant toujours $B = -A$ à cause de $n = -2$, nous aurons $C = \frac{1}{3}A$; prenant $A = 3$, & partant $B = -3$, & $C = 1$, l'intégrale compléte de notre équation sera

$$z = \frac{3}{x^2}\Gamma:(x + at) - \frac{3}{x}\Gamma':(x + at) + \Gamma'':(x + at)$$
$$+ \frac{3}{x^2}\Delta:(x - at) - \frac{3}{x}\Delta':(x - at) + \Delta'':(x - at)$$

où Γ & Δ signifient des fonctions quelconques, exprimées par des appliquées de lignes courbes quelconques, tant régulières qu'irrégulières, & puisque ces deux fonctions sont absolument indépendantes l'une de l'autre, c'est en quoi consiste le caractère de la solution compléte.

3^e CAS $n = -3$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{12}{xx}z.$$

XXII. Ici le quatrième coéficient D entre aussi dans l'intégral avec les trois précédens, dont voici les valeurs $B = -A, C = -\frac{2}{5}B = \frac{2}{5}A, D = -\frac{1}{6}C = -\frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6}A$.

Posons

Posons donc pour éviter les fractions
$A = 3 \cdot 5$, $B = -3 \cdot 5$, $C = 2 \cdot 3$, $D = -1$
& l'intégrale complète sera

$$z = \frac{3 \cdot 5}{x^3} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Gamma' : (x + at)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Gamma'' : (x + at) - \Gamma''' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5}{x^3} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5}{x^2} \Delta' : (x - at)$$
$$+ \frac{2 \cdot 3}{x} \Delta'' : (x - at) - \Delta''' : (x - at)$$

4^e CAS $n = -4$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa} \left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{20}{xx} z$$

XXIII. Ici les coéficiens sont déterminés ainsi ;

$$B = -A; \; C = -\frac{3}{7} B = \frac{3}{7} A,$$
$$D = -\frac{2}{9} C = -\frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 9} A, \; E = -\frac{1}{10} D = \frac{1.2.3}{7.9.10} A$$

de sorte qu'en entiers nous aurons
$A = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $B = -3 \cdot 5 \cdot 7$, $C = 3 \cdot 3 \cdot 5$, $D = -2.5$, $E = 1$
& l'intégrale complète sera

$$z = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4} \Gamma : (x + at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3} \Gamma' : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Gamma'' : (x + at) - \frac{2.5}{x} \Gamma''' : (x + at) + \Gamma^{\text{IV}} : (x + at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^4} \Delta : (x - at) - \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{x^3} \Delta' : (x - at)$$
$$+ \frac{3 \cdot 3 \cdot 5}{x^2} \Delta'' : (x - at) - \frac{2.5}{x} \Delta''' : (x - at) + \Delta^{\text{IV}} : (x - at)$$

5^e CAS $n = -5$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{a.a}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{30}{xx}z.$$

XXIV. Les coéficiens ſont déterminés de la manière ſuivante

$$B = -A,\ C = -\frac{4}{9}B,\ D = -\frac{3}{12}C;$$

$$E = -\frac{2}{14}D,\ F = -\frac{1}{15}E$$

& prenant $A = 3.5.7.9$, nous aurons

$$A = 3.5.7.9,\ B = -3.5.7.9,\ C = 4.3.5.7,$$
$$D = -3.5.7,\ E = 3.5,\ F = -1$$

& après avoir trouvé ces coéficiens, on n'a qu'à obſerver que l' intégrale compléte ſera

$$z = \frac{A}{x^5}\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x^4}\Gamma':(x+at)$$
$$+ \frac{C}{x^3}\Gamma'':(x+at) + \frac{D}{x^2}\Gamma''':(x+at) + \&c.$$
$$+ \frac{A}{x^5}\Delta:(x-at) + \frac{B}{x^4}\Delta':(x-at)$$
$$+ \frac{C}{x^3}\Delta'':(x-at) + \frac{D}{x^2}\Delta''':(x-at) + \&c.$$

6^e CAS $n = -6$

Ou intégration de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{42}{xx}z.$$

XXV. Pour les valeurs des coéficiens on aura

$$B = -A,\ C = -\frac{5}{11}B,\ D = -\frac{4}{15}C,$$

$$E = -\frac{3}{18}D,\ F = -\frac{2}{20}E,\ G = -\frac{1}{21}F$$

& prenant $A = 3.5.7.9.11$ les autres feront
$B = - 3.6.7.9.11$, $C = + 5.3.5.7.9$, $D = - 4.5.7.9$,
$E = + 2.3.5.7$, $F = - 3.7$, $G - 1$
d' où l' intégrale compléte devient

$$\begin{aligned} z = & \frac{A}{x^6}\Gamma:(x + at) + \frac{B}{x^5}\Gamma':(x + at) \\ & + \frac{C}{x^4}\Gamma'':(x - at) + \frac{D}{x^3}\Gamma''':(x + at) + \&c. \\ & + \frac{A}{x^6}\Delta:(x + at) + \frac{B}{x^5}\Delta':(x - at) \\ & + \frac{C}{x^4}\Delta'':(x - at) + \frac{D}{x^3}\Delta''':(x - at) + \&c. \end{aligned}$$

XXVI. En géneral pour cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}z$$

l' intégrale compléte fera

$$\begin{aligned} z = & \frac{A}{x^i}\Gamma:(x - at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Gamma':(x + at) \\ & + \frac{C}{x^{i-2}}\Gamma'':(x + at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Gamma''':(x + at) + \&c. \\ & + \frac{A}{x^i}\Delta:(x - at) + \frac{B}{x^{i-1}}\Delta':(x - at) \\ & + \frac{C}{x^{i-2}}\Delta'':(x - at) + \frac{D}{x^{i-3}}\Delta''':(x - at) + \&c. \end{aligned}$$

où les coéficiens doivent être déterminés de la manière fuivante

$$B = - A$$

$$C = - \frac{(i-1)B}{2i-1} = + \frac{(i-1)A}{2i-1}$$

$$D = - \frac{(i-2)C}{3i-3} = - \frac{(2i-4)A}{2.3(2i-1)}$$

$$E = - \frac{(i-3)D}{4i-6} = + \frac{(2i-4)(2i-6)A}{2.3.4(2i-1)(2i-3)}$$

$$F = -\frac{(i-4)E}{5i-10} = -\frac{(2i-6)(2i-8)A}{2.3.4.5(2i-1)(2i-3)}$$
$$G = -\frac{(i-5)F}{6i-15} = +\frac{(2i-6)(2i-8)(2i-10)A}{2.3.4.5.6(2i-1)(2i-3)(2i-5)}$$
&c. &c.

XXVII. Pour comprendre mieux la loi de ces coéficiens j' obſerve, qu'on trouve les mêmes coéficiens, en intégrant cette équation differentio-differentielle :

$$\frac{xxddy}{dx^2} + \frac{2xxdy}{dx} - i(i+1)y = 0$$

ſi l' on ſuppoſe l' intégrale exprimée par cette ſérie

$$y = \frac{A}{x^i} + \frac{B}{x^{i-1}} + \frac{C}{x^{i-2}} + \frac{D}{x^{i-3}} + \&c.$$

Or ſi i eſt un nombre entier, cette même équation nous fournit les coéficiens en ordre retrograde, car ſi nous ſuppoſons

$$y = A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \frac{D}{x^3} + \frac{E}{x^4} + \frac{F}{x^5} + \&c.$$

nous trouvons

$$B = -\frac{i(i+1)}{2}A$$
$$C = -\frac{(i-1)(i+2)}{4}B = +\frac{i(ii-1)(i+2)}{2\ .\ 4}A$$
$$D = -\frac{(i-2)(i+3)}{6}C = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1\ .\ 4\ .\ 6}A$$
$$E = -\frac{(i-3)(i+4)}{8}D = +\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(i+4)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8}A$$
$$F = -\frac{(i-4)(i+5)}{10}E = -\frac{i(ii-1)(ii-4)(ii-9)(ii-16)(i+5)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ .\ 8\ .\ 10}A$$
&c. &c.

XXVIII. Donc ſi nous marquions les fonctions en aſcendant par intégration, de cette maniére :

$${}^{\prime}\Gamma : s = \int ds\,\Gamma : s,\ {}^{\prime\prime}\Gamma : s = \int ds\,{}^{\prime}\Gamma : s,\ {}^{\prime\prime\prime}\Gamma : s = \int ds\,{}^{\prime\prime}\Gamma : s \quad \&c.$$

l' intégrale de notre équation $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{i(i+1)}{xx}z$ sera:

$$\begin{aligned} z = {} & A\Gamma:(x+at) + \frac{B}{x}\,{}'\Gamma:(x+at) \\ & + \frac{C}{xx}\,{}''\Gamma:(x+at) + \frac{D}{x^3}\,{}'''\Gamma:(x+at) + \&c. \\ & + A\Delta:(x-at) + \frac{B}{x}\,{}'\Delta:(x-at) \\ & + \frac{C}{xx}\,{}''\Delta:(x-at) + \frac{D}{x^3}\,{}'''\Delta:(x+at) + \&c. \end{aligned}$$

& pour les diverses valeurs de i ces coéficiens seront

i	A	$-$B	$+$ C	$-$ D	$+$ E	$-$ F
1	1	$\frac{1.2}{2}$				
2	1	$\frac{2.3}{2}$	$\frac{2.3.4}{2.4}$			
3	1	$\frac{3.4}{2}$	$\frac{3.8.5}{2.4}$	$\frac{3.8.5.6}{2.4.6}$		
4	1	$\frac{4.5}{2}$	$\frac{4.15.6}{2.4}$	$\frac{4.15.12.7}{2.4.6}$	$\frac{4.15.12.7.8}{2.4.6.8}$	
5	1	$\frac{5.6}{2}$	$\frac{5.24.7}{2.4}$	$\frac{5.24.21.8}{2.4.6}$	$\frac{5.24.21.16.9}{2.4.6.8}$	$\frac{5.24.21.16.9.10}{2.4.6.8.10}$
6	1	$\frac{6.7}{2}$	$\frac{6.35.8}{2.4}$	$\frac{6.35.32.9}{2.4.6}$	$\frac{6.35.32.27.10}{2.4.6.8}$	$\frac{6.35.32.27.20.11}{2.4.6.8.10}$
7	1	$\frac{7.8}{2}$	$\frac{7.48.9}{2.4}$	$\frac{7.48.45.10}{2.4.6}$	$\frac{7.48.45.40.11}{2.4.6.8}$	$\frac{7.48.45.40.33.12}{2.4.6.8.10}$
			&c.		&c.	

XXIX. J' observe encore, que l' intégrale de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}z$$

se peut exprimer d' une double manière, l' une finie, & l' autre infinie, puisque on peut mettre tant $i = n$ que $i = -n - 1$. Pour rendre l' une & l' autre plus évidente, posons $x + at = p$, & $x - at = q$, & que P marque une fonction quelconque de p, & Q de q; cela posé la première forme sera

$$z = \frac{A}{x^n}(P + Q) + \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

les coéficiens étant déterminés ainsi:

$$B = -A, \; C = -\frac{2(n-1)}{2(2n-1)}B, \; D = -\frac{2(n-2)}{3(2n-2)}C,$$
$$E = -\frac{2(n-3)}{4(2n-3)}D, \; F = -\frac{2(n-4)}{5(2n-4)}E \; \&c.$$

Or l' autre forme est

$$z = Ax^{n+1}(P + Q) + Bx^{n+2}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + Cx^{n+3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) + \&c.$$

où les coéficiens ont les valeurs suivantes

$$B = -A, \; C = -\frac{2(n+2)}{2(2n+3)}B, \; D = -\frac{2(n+3)}{3(2n+5)}C,$$
$$E = -\frac{2(n+4)}{4(2n+5)}D, \; F = -\frac{2(n+6)}{5(2n+6)}E \; \&c.$$

Il est bien remarquable que ces deux expressions sont équivalentes, & que dans les cas $n = 0$, & $n = -1$, l' une & l' autre devient infinie, & se réduit à $z = P + Q$.

XXX. Puisque cette réduction ne paroit pas d' abord, il est bon de la démontrer. Soit donc $n = 0$, & pour la premieère forme on aura

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{2}, \; D = -\frac{2^2}{2.3}, \; E =$$

$+ \frac{2^3}{2.3.4}$, $F = - \frac{2^4}{2.3.4.5}$ &c.

d' où nous tirons

$$z = 1\,(P + Q) - \frac{x}{1}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{2\,x^2}{1.2}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right)$$

$$- \frac{2^2 x^3}{1.2.3.}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \&c.$$

Puiſque chaque membre contient deux termes, ſoit M la ſérie qui contient les termes dépendans de P & N celle qui contient Q, de ſorte que $z = M + N$; maintenant puiſque $P = \Gamma : p = \Gamma : (x + at)$, à cauſe de $p = x + at$, ſi nous poſons $p - 2\,x$ au lieu de x, on aura par la nature des différentiels

$$\Gamma : (p - 2\,x) = P - \frac{2x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \times \frac{ddP}{dp^2}$$

$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1.2.3.4} \times \frac{d^4P}{dp^4} - \&c.$$

donc, puiſque $M = P - \frac{x}{1} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2\,x^2}{1.2} \times \frac{d\,d\,P}{dp^2} - \frac{2^2\,x^3}{1.2.3} \times \frac{d^3P}{dp^3} +$ &c., il eſt évident, que $2\,M - \Gamma : (p - 2x) = P = \Gamma : p$, & partant $M = \frac{1}{2}\,\Gamma : (p - 2\,x) = \frac{1}{2}\,\Gamma : (x + at) + \frac{1}{2}\,\Gamma : (at - x)$. De la même manière on verra que

$N = \frac{1}{2}\,\Delta : q + \frac{1}{2}\,\Delta : (q - 2\,x) = \frac{1}{2}\,\Delta : (x - at) + \frac{1}{2}\,\Delta : (-at - x)$, & par conſéquent $z = M + N$ ſe trouve égale à la ſomme de deux fonctions, l' une de $x + at$, & l' autre de $x - at$.

XXXI. L' autre forme posant $n = 0$ donne

$$A = 1, B = -1, C = \frac{2}{3}, D = -\frac{2^2}{3.4},$$

$$E = +\frac{2^3}{3.4.5}, F = -\frac{2^4}{3.4.5.6} \text{ \&c.}$$

d' où l' on obtient

$$z = x\,(P + Q) - \frac{2x^2}{2.3}\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right) + \frac{2^2 x^3}{1.2.3}\left(\frac{ddP}{dp^2} + \frac{ddQ}{dq^2}\right) - \frac{2^3 x^4}{1.2.3.4}\left(\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{d^3Q}{dq^3}\right) + \text{\&c.}$$

Posons $z = M + N$, de sorte que M contienne les termes renfermans P, & N les Q. Considérons à présent la forme $\int P\,dp = {}'\Gamma : p = {}'\Gamma : (x + at)$, & posons $p - 2x$ au lieu de p, pour avoir

$${}'\Gamma : (p - 2x) = {}'\Gamma : p - \frac{2x}{1} \times P + \frac{2^2 x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp} - \frac{2^3 x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \text{\&c.}$$

Or $M = \frac{x}{1}\, P - \frac{2x^2}{1.2} \times \frac{dP}{dp} + \frac{2^2 x^3}{1.2.3} \times \frac{ddP}{dp^2} + \text{\&c.}$

donc $2M + {}'\Gamma : (p - 2x) = {}'\Gamma : p$ & partant

$$M = \frac{1}{2}\,{}'\Gamma : p - \frac{1}{2}\,{}'\Gamma : (p - 2x) = \frac{1}{2}\,{}'\Gamma : (x + at) - \frac{1}{2}\,{}'\Gamma : (at - x)$$

& de la même manière on trouve

$$N = \frac{1}{2}\,{}'\Delta : q - \frac{1}{2}\,{}'\Delta : (q - 2x) = \frac{1}{2}\,{}'\Delta : (x - at) - \frac{1}{2}\,{}'\Delta : (-at - x)$$

d' où il est clair que $z = M + N$ devient comme ci-devant la somme des deux fonctions, l' une de $x + at$, & l' autre de $x - at$. Cette réduction pour le cas le plus simple est très remarquable.

XXXII.

XXXII. Par les mêmes principes on peut prouver l'identité des deux expressions pour les autres cas. Soit $n = 1$, & la première forme donnant $A = 1$ & $B = -1$, l'intégrale est $z = \frac{1}{x}(P + Q) - 1\left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right)$. Or l'autre forme donne ces coéficiens $B = -A$, $C = +\frac{3}{5}A$, $D = -\frac{2.4}{5.6}A$, $E = +\frac{2^2.5}{5.6.7}A$, $F = -\frac{2^3.6}{5.6.7.8}A$ &c.

Posons $A = \frac{2^3}{1.2.3.4}$, pour avoir la forme suivante de l'intégrale, dans laquelle je ne mets que les termes renfermant $P = \Gamma : (x + at)$, puisque la réduction pour les Q est la même:

$$z = \frac{2^3x^2}{1\,..\,4}P - \frac{2^3x^3}{1\,..\,4}\cdot\frac{dP}{dp} + \frac{2^3.3x^4}{1\,...\,5}\cdot\frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^4.4x^5}{1\,...\,6}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5.5x^6}{1\,...\,7}\cdot\frac{d^4P}{dp^4}\ \&c.$$

que je décompose en deux parties, savoir

$$z = \frac{2x^2}{1.2}P - \frac{2^2x^3}{1.2.3}\cdot\frac{dP}{dp} + \frac{2^3x^4}{1\,..\,4}\cdot\frac{ddP}{dp^2}$$
$$- \frac{2^4x^5}{1\,...\,5}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} + \frac{2^5x^6}{1\,...\,6}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} - \&c.$$
$$- \frac{2^2x^2}{1.2.3}P + \frac{2^3x^3}{1\,..\,4}\cdot\frac{dP}{dp} - \frac{2^4x^4}{1\,...\,5}\cdot\frac{ddP}{dp^2}$$
$$+ \frac{2^5x^5}{1\,...\,6}\cdot\frac{d^3P}{dp^3} - \frac{2^6x^6}{1\,...\,7}\cdot\frac{d^4P}{dp^4} + \&c.$$

pour avoir une telle forme $z = M - N$, où M & N marquent les séries trouvées, qui étant asses régulières, la valeur de l'une & de l'autre se découvrira ainsi.

XXXIII. Pour la première série M, je pose $P = \frac{ddR}{dp^2}$, où R est aussi une fonction de $x + at$, & j'aurai

$$M = \frac{2x}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2} - \frac{2^2x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \frac{2^3x^4}{1\,.\,.\,4} \cdot \frac{d^4R}{dp^4} - \&c.$$

Mais posant $R = \Gamma : p$, il me vient

$$\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddR}{dp^2}$$
$$- \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3R}{dp^3} + \&c.$$

& partant $\Gamma : (p - 2x) = R - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dR}{dp} + 2M$, d' où l' on tire la valeur de M, savoir

$$M = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) - \frac{1}{2}\Gamma : p + x\Gamma' : p.$$

Pour l' autre série je fais $P = \frac{d^3S}{dp^3}$ pour avoir

$$N = \frac{2^2x^2}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} - \frac{2^3x^3}{1\,.\,.\,4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} + \frac{2^4x^4}{1\,.\,.\,5} \cdot \frac{d^5S}{dp^5} - \&c.$$

Mais puisque $\frac{d^3S}{dp^3} = \frac{ddR}{dp^2}$, il suit que $\frac{dS}{dp} = R = \Gamma\ p$, donc $S = {}'\Gamma : p$ & ${}'\Gamma : (p - 2x) = S - \frac{2x}{1} \cdot \frac{dS}{dp}$ $+ \frac{2^2x^2}{1.2} \cdot \frac{ddS}{dp^2} - \frac{2^3x^3}{1.2.3} \cdot \frac{d^3S}{dp^3} + \frac{2^4x^4}{1\,.\,.\,4} \cdot \frac{d^4S}{dp^4} - \&c.$
& partant ${}'\Gamma : (p - 2x) = {}'\Gamma : p - 2x\Gamma : p + 2xx\Gamma' : p$ $- 2xN$, de sorte que $N = -\frac{1}{2x}{}'\Gamma : (p - 2x) +$ $\frac{1}{2x}{}'\Gamma : p - \Gamma : p + x\Gamma' : p$, par conséquent $M - N =$ $\frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2x}{}'\Gamma : (p - 2x) + \frac{1}{2}\Gamma : p -$ $\frac{1}{2x}{}'\Gamma : p$, ce qui est la valeur de z.

XXXIV. Puisque $p = x + at$, en doublant les termes, & posant Γ au lieu de ${}'\Gamma$, la partie de l' intégrale, qui renferme la lettre P, se réduit à cette forme

$$z = \Gamma' : (x + at) - \frac{1}{x} \Gamma : (x + at)$$

$$+ \Gamma' : (-x + at) + \frac{1}{x} \Gamma : (-x + at)$$

or la même méthode nous fournit pour les termes Q

$$z = \Delta' : (x - at) - \frac{1}{x} \Delta : (x - at)$$

$$+ \Delta' : (-x - at) + \frac{1}{x} \Delta : (-x - at)$$

& ces deux expreſſions combinées enſemble donnent l'intégrale trouvée par la premiere forme.

Soit pour cela $\Delta : (-x - at) - \Gamma : (x + at) = P =$ funct. $(x + at = p)$, & la différentiation donnera $-\Delta' : (-x - at) - \Gamma' : (x + at) = \frac{dP}{dp}$; poſant de même $\Gamma : (-x + at) - \Delta : (x - at) = Q =$ funct. $(x - at = q)$, on aura par la différentiation : $-\Gamma' : (-x + at) - \Delta' : (x - at) = \frac{dQ}{dq}$, & de là il eſt clair qu'on aura, comme ci-deſſus :

$$z = \frac{1}{x} (P + Q) - 1 \left(\frac{dP}{dp} + \frac{dQ}{dq}\right).$$

XXXV. Ces réductions que je viens de faire pour les cas $n = 0$ & $n = 1$, peuvent être appliquées avec le même ſuccès à des plus grands nombres pris pour n, mais il eſt aiſé de prevoir, qu'elles deviendront de plus en plus embarraſſantes. Cependant il ſuffit d' avoir fait voir la poſſibilité de réduire la forme infinie de l' intégrale à la finie, dans les cas, où n eſt un nombre entier. Mais pour les cas, où n eſt une fraction, les deux formes trouvées pour l'intégrale dans le §. XXIX. deviennent infinies, & il ne paroit aucun moyen de réduire l' une ou l' autre à une forme finie. On y rencontre les mêmes difficultés que dans les cas irréſolubles de l' équation de Riccati, & quoique j' aie trouvé moyen de conſtruire ces cas par une méthode tout-à-fait particulière, il ne ſemble point, que cette méthode puiſſe être appliquée aux cas dont il s'agit ici. Mais non obſtant le nombre infini des termes, dont les intégrales de ces cas ſont composées, elles ne ſont pas moins complétes, puiſqu'elles renferment deux fonctions abſolument indéterminées & arbitraires.

XXXVI. Or pour trouver plus facilement les intégrales complétes de cette équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{n(n+1)}{xx}z$$

qu'on poſe $x + at = p$ & $x - at = q$, enſuite ſoit P une fonction quelconque de p, & Q une fonction quelconque de q, qu'on faſſe outre cela pour abreger:

$P' = \int P dp$, $P'' = \int P' dp$, $P''' = \int P'' dp$, $P^{IV} = \int P''' dp$ &c.

$Q' = \int Q dq$, $Q'' = \int Q' dq$, $Q''' = \int Q'' dq$, $Q^{IV} = \int Q''' dq$ &c.

toutes ces valeurs pouvant aiſément être repréſentées par des quadratures de lignes courbes, enfin qu'on forme les coéficiens ſuivans

$$A = +1$$

$$B = +\frac{n(n+1)}{2}$$

$$C = +\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{2\cdot 4}$$

$$D = +\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)}{2\cdot 4\cdot 6}$$

$$E = +\frac{(n-3)(n-2)\ \ldots\ldots\ldots\ (r+4)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}$$

$$F = +\frac{(n-4)(n-3)\ \ldots\ldots\ldots\ (n+5)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10}$$

&c.

& l'intégrale cherchée sera

$$z = A(P+Q) - \frac{B}{x}(P' + Q') + \frac{C}{xx}(P'' + Q'')$$
$$- \frac{D}{x^3}(P''' + Q''') + \&c.$$

XXXVII. Aiant trouvé cette intégrale ou valeur de z, on aura aussi les intégrales de toutes les équations qui en sont transformées, comme posant $z = x^{-m} u$, à cause de $\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right)$ &

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = x^{-m}\left(\frac{du}{dx}\right) - m x^{-m-1} u$$
$$\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) = x^{-m}\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - 2mx^{-m-1}\left(\frac{du}{dx}\right) + m(m+1)x^{-m-2}u$$

l' équation transformée sera:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-n)(m+n+1)}{xx}u$$

& partant son intégrale sera:

$$u = Ax^m(P+Q) - Bx^{m-1}(P'+Q')$$
$$+ Cx^{m-2}(P''+Q'') - Dx^{m-3}(P'''+Q'''). \&c.$$

XXXVIII. Développons les cas les plus simples de cette équation généralisée, en conservant les mêmes significations $p = x + at$ & $q = x - at$, & des fonctions qui en sont formées P, P', P'', P''' &c. Q, Q', Q'', Q''' &c.

1° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{m(m+1)}{xx}u$

l'intégrale est: $u = x^m(P+Q)$

2° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-1)(m+2)}{xx}u$

l'intégrale: $u = x^m(P+Q) - \frac{1.2}{2}x^{m-1}(P'+Q')$

3° $\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x}\left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-2)(m+3)}{xx}u$

dont l' intégrale est

$$u = x^m (P + Q) - \frac{2.3}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{1.2.3.4}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'').$$

4° $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-3)(m+4)}{xx} u$

dont l' intégrale eſt

$$u = x^m (P + Q) - \frac{3.4}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{2.3.4.5}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{1.2.3.4.5.6}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

5° $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-4)(m+5)}{xx} u$

dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{4.5}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{3.4.5.6}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{2.3.4.5.6.7}{2.4.6} x^{-3} (P''' + Q''')$$

$$+ \frac{2.3.4.5.6.7.8}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{\text{IV}} + Q^{\text{IV}}).$$

6° $\frac{1}{aa} \left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{2m}{x} \left(\frac{du}{dx}\right) + \frac{(m-5)(m+6)}{xx} u$

dont l' intégrale

$$u = x^m (P + Q) - \frac{5.6}{2} x^{m-1} (P' + Q')$$

$$+ \frac{4.5.6.7}{2.4} x^{m-2} (P'' + Q'') - \frac{3.4.5.6.7.8}{2.4.6} x^{m-3} (P''' + Q''')$$

$$+ \frac{2.3.4.5.6.7.8.9}{2.4.6.8} x^{m-4} (P^{\text{IV}} + Q^{\text{IV}}) - \frac{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}{2.4.6.8.10} x^{m-5}$$

$$(P^{\text{V}} + Q^{\text{V}}).$$

XXXIX. Juſqu'ici je n' ai donné que les intégrales pour les cas de l' équation propoſée qui en ſont ſuſceptibles, ſans y avoir été conduit par une méthode certaine, &

directe, car toute l'analiſe dont je me ſuis ſervi eſt uniquement fondée ſur une heureuſe conjecture, qui regarde la forme de ces intégrales, & que le pur hazard m' a quaſi fournie. Il eſt donc d' autant plus important de découvrir une méthode directe, qui nous puiſſe mener au même but, qu'il n'y a aucun doute, qu'une telle méthode n'apporte de très-grands éclairciſſemens dans cette nouvelle carrière; or la conſidération de ces intégrales nous porte aiſément à penſer, qu'il doit y avoir une méthode, qui, moyennant une certaine transformation conduiſe des cas plus ſimples aux plus compliqués, de la même manière que dans le développement de la fameuſe équation de Riccati on a réuſſi à déduire les cas plus difficiles des plus ſimples, en y employant une certaine ſubſtitution. C' eſt donc par une ſemblable méthode, que je m'en vais enſeigner la réſolution de l' équation, que j'ai traitée juſqu'ici.

XL. L' équation propoſée étant donc:

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}z$$

je la transforme par le moyen de cette ſubſtitution:

$$u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$$

en cherchant une équation, qui détermine la fonction u par t & x; or il eſt aiſé de prevoir, que l' équation transformée aura une telle forme

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddu}{dx^2}\right) - \frac{k'}{xx}u$$

ſemblable à la propoſée, avec cette ſeule différence que le nombre k' ſera différent du nombre k; ou bien ſans ſuppoſer une telle prévoyance, on peut regarder cette dernière équation comme la propoſée, & introduire z à la place de u par la ſubſtitution indiquée.

XLI. Suppoſant donc $u = \left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{m}{x}z$, on en tire d' abord

$$\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dt^2\,dx}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right)$$

Or la première équation donnant

$$\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = aa\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{aak}{xx}z$$

si nous différentions par la seule variabilité de x, nous aurons :

$$\left(\frac{d^3z}{dt^2\,dx}\right) = aa\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) - \frac{aak}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2aak}{x^3}z$$

d' où nous tirons :

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddu}{dt^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{(m-2)k}{x^3}z.$$

Maintenant la même substitution donne :

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{m}{xx}z$$

& de là

$$\left(\frac{ddu}{dx^2}\right) = \left(\frac{d^3z}{dx^3}\right) + \frac{m}{x}\left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{2m}{xx}\left(\frac{dz}{dx}\right) + \frac{2m}{x^3}z\ ;$$

or $-\dfrac{k'}{xx}u = -\dfrac{k'}{xx}\left(\dfrac{dz}{dx}\right) - \dfrac{mk'}{x^3}z$

& partant ces deux dernières expressions ensemble doivent être égales à celle, qui vient d' être trouvée pour $\dfrac{1}{aa}\left(\dfrac{ddu}{dt^2}\right)$.

XLII. Puisque les termes $\left(\dfrac{d^3z}{dx^3}\right)$ & $\left(\dfrac{ddz}{dx^2}\right)$ se détruisent d'eux mêmes, il ne reste qu'à égaler séparément ceux qui sont affectés par $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$ & par z, d'où nous tirons ces deux égalités $-k = -2m - k'$ & $-(m-2)k = 2m - mk'$, ou $m = \dfrac{k-k'}{2}$, & $2k = m(k-k'+2)$ donc $(k-k')^2 - 2k - 2k' = 0$, & partant

$k' =$

$k' = k + 1 \pm \surd(1 + 4k)$, & $m = \frac{-1 \mp \surd(1+4k)}{2}$.

Par conséquent si nous avons réussi à trouver l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}(\frac{ddz}{dt^2}) = (\frac{ddz}{dx^2}) - \frac{k}{xx}z$, nous aurons aussi l'intégrale de celle-ci : $\frac{1}{aa}(\frac{ddu}{dt^2}) = (\frac{ddu}{dx^2}) - \frac{k'}{xx}u$ posant $k' = k + 1 \pm \surd(1 + 4k)$, puisque $u = (\frac{dz}{dx}) + \frac{k - k'}{2x}z$.

XLIII. Or aiant assigné ci-dessus, indépendamment de ces recherches, l'intégrale de notre équation pour le cas $k = 0$, cette nouvelle méthode nous fournit l'intégrale pour le cas $k' = 2$, & supposant ensuite $k = 2$, nous en tirons le troisiéme cas $k' = 3 + \surd 9 = 6$, & celui-ci, posant $k = 6$, nous conduit au quatriéme $k' = 7 + \surd 25 = 12$, lequel, en faisant $k = 12$, nous méne au cinquiéme $k' = 13 + \surd 49 = 20$, & ainsi de suite selon cette progression :

k	0	2	6	12	20	30	42	&c.
k'	2	6	12	20	30	42	56	&c.

d'où l'on voit que toutes les valeurs de k sont comprises dans cette formule générale $k = i(i + 1)$, & ce cas considéré en général nous conduit au suivant $k' = i(i + 1) + 1 + \surd[1 + 4i(i + 1)] = ii + 3i + 2 = (i + 1)(i + 2)$, d'où nous tirons tous les cas dont j'ai assigné ci-dessus les integrales.

XLIV. Donc si nous connoissons, pour le cas $k = n(n + 1)$ l'intégrale de cette équation $\frac{1}{aa}(\frac{ddz}{dt^2}) = (\frac{ddz}{dx^2}) - \frac{n(n+1)}{xx}z$, qui soit $z = V$, nous en tirerons, pour le cas $k' = (n + 1)(n + 2)$ l'intégrale de celle-ci :

$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{(n+1)(n+2)}{xx} z$, qui ſera $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x} V$, ou bien, puiſqu'on peut multiplier la valeur de z par une conſtante quelconque, cette dernière intégrale peut être exprimée ainſi: $z = \frac{1}{x} V - \frac{1}{n+1}\left(\frac{dV}{dx}\right)$. Par conſéquent, puiſque pour le cas, $k = 0$, l'intégrale eſt $z = \Gamma : (x + at) + \Delta : (x - at)$, en écrivant S pour cette double fonction, nous aurons pour l'équation

$$\frac{1}{aa}\left(\frac{ddz}{dt^2}\right) = \left(\frac{ddz}{dx^2}\right) - \frac{k}{xx} z$$

les intégrales ſuivantes:

ſi	
$k = 0$	$z = S$
$k = 1.2$	$z = \frac{1}{x} S - \left(\frac{dS}{dx}\right)$
$k = 2.3$	$z = \frac{3}{2x^2} S - \frac{3}{2x}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$
$k = 3.4$	$z = \frac{5}{2x^3} S - \frac{5}{2x^2}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{1}{x}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right)$
&c.	&c.

XLV. Soit, pour le cas $k = n(n+1)$, l'intégrale:

$$z = \frac{A}{x^n} S - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{D}{x^{n-3}}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \frac{E}{x^{n-4}}\left(\frac{d^4S}{dx^4}\right) - \&c.$$

& pour le cas $k = n(n+1)(n+2)$, à cauſe de $z = \left(\frac{dV}{dx}\right) - \frac{(n+1)}{x} V$, nous aurons:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = - \frac{nA}{x^{n+1}} S + \frac{A}{x^n}\left(\frac{dS}{dx}\right) - \frac{B}{x^{n-1}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right)$$
$$+ \frac{(n-1)B}{x^n} - \frac{(n-2)C}{x^{n-1}}$$

$$+ \frac{C}{x^{n-2}}\left(\frac{d^3 S}{d x^3}\right) - \&c.$$

$$+ \frac{(n-3)D}{x^{n-2}} \qquad \mp \&c.$$

$$-\frac{(n+1)}{x} V = -\frac{(n+1)A}{x^{n+1}} S + \frac{(n+1)B}{x^n}\left(\frac{dS}{dx}\right)$$

$$-\frac{(n+1)C}{x^{n-1}}\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) + \frac{(n+1)D}{x^{n-2}}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) - \&c.$$

& partant l'intégrale pour le cas $k = (n+1)(n+2)$ en changeant les signes sera :

$$z = \frac{(2n+1)A}{x^{n+1}} S - \frac{(A+2nB)}{x^n}\left(\frac{dS}{dx}\right) + \frac{(B+(2n-1)C)}{x^{n-1}}$$

$$\left(\frac{ddS}{dx^2}\right) - \frac{(C+(2n-2)D)}{x^{n-2}}\left(\frac{d^3S}{dx^3}\right) + \&c.$$

& il est évident que cette méthode nous fournit les mêmes intégrales que la précédente; quoique les valeurs pour chaque nombre n ne paroissent point si ouvertement, cependant une légère attention nous découvrira bientôt la même loi de progression entre les coéficiens A, B, C, D &c. qui a été trouvée ci-dessus.

RECHERCHES

Sur la conſtruction des nouvelles Lunettes à 5 & 6 verres & leur perfection ultérieure

PAR M. EULER.

I. DEPUIS quelque tems cette eſpèce de Lunettes eſt devenue fort commune, & l'emporte beaucoup ſur les Lunettes à 4 verres, dont on s'étoit ſervi jusqu'ici pour repréſenter les objets debout. L'invention de ces nouvelles Lunettes eſt apparemment dûe au célèbre M. Dollond, qui ſemble avoir porté l'art de polir les verres preſque au plus haut dégré de perfection, dont il eſt ſuſceptible. Auſſi les avantages de ces nouvelles Lunettes ſur les ordinaires à 4 verres ſont ils très-conſidérables: elles préſentent les objets plus nettement, elles découvrent un plus grand champ, & pour le même groſſiſſement elles ne ſont pas ſi longues que les ordinaires.

II. D'abord je me ſuis imaginé que ces Lunettes étoient conſtruites ſur le même principe que les ordinaires, qu'on peut regarder comme deux Lunettes aſtronomiques jointes enſemble, & que l'artiſte y avoit adroitement ajouté un cinquiéme & même un ſixiéme verre, tant pour augmenter le champ apparent, que pour délivrer des couleurs d'iris la repréſentation des objets. Mais aiant examiné quelques unes de ces Lunettes, j'ai remarqué que l'arrangement des verres eſt fondé ſur un principe tour-à-fait différent, & en particulier on y trouve une lentille, dont l'ouverture eſt beaucoup plus petite que dans les ordinaires, ſans que le champ apparent en ſouffre la moindre diminution. Cette petite lentille conſtitue quaſi l'eſſence de ces nouvelles Lunettes, en les distinguant de toutes les autres dont on s' est servi jusqu'ici.

III. Le principe sur lequel ces Lunettes sont fondées, consiste dans une disposition toute particulière des deux verres du milieu, qu' il faut bien distinguer tant de l'objectif que des oculaires. L'objectif étant placé en A (*fig.* 1. *pl.* 3.), on met le second verre QQ à peu près dans le foyer de l'objectif (je supposerai ici qu'il s' y trouve exactement, puisque cette situation ne cause aucune confusion); ensuite considérant l' objectif PAP comme un vrai objet qu'on marque le lieu C ou son image tomberoit par le second verre QQ, & c'est précisément ici qu'il faut placer le troisième verre RR; d' où l' on voit que son ouverture est déterminée uniquement par celle de l' objectif, de sorte que $RR = \frac{BC}{AB} \cdot PP$, & puisque la distance BC est ordinairement très-petite à l' égard de AB, c'est la raison pourquoi l'ouverture de ce troisième verre est si petite, en quoi consiste le caractère de ces Lunettes.

IV. Après ces trois verres en A, B, & C, on peut employer un ou deux, ou plusieurs oculaires pour gagner un champ apparent d' autant plus grand; car si l' on ne se servoit que d'un seul oculaire SDS le champ seroit au dessous des Lunettes ordinaires, & cependant comme ce cas renferme le fondement des suivans, il sera bon de le développer.

Soit donc p la distance de foyer de l' objectif, & x le demi-diamétre de son ouverture, & que pour les autres verres les distances de foyer soient exprimées par les lettres q, r, s, & les demi-diamètre de leurs ouvertures par πq, $\pi' r$, $\pi'' s$, entant que le champ apparent en dépend. Ensuite pour les nombres B, C, D de mes formules générales expliquées dans le XIII. Volume des Mém. de l'Acad. de Berlin, puisque le verre B est placé au foyer de l'objectif, nous aurons $B = -1$ & $\mathrm{B} = \infty$, pour le troisiéme verre posons $C = \frac{c}{1 - c}$, & partant $\mathrm{C} = c$, or le quatriéme verre étant l'oculaire, donne $D = \infty$, & $\mathrm{D} = 1$.

V. Maintenant, puisque les objets doivent être présentés debout, soit $m : 1$ le raport du grossissement selon le diamètre, & posant le demi-diamètre du champ apparent $= \varphi$ nous aurons d'abord $\varphi = -\frac{\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$, où je remarque que si l'on fait l'oculaire également convexe des deux côtés, on peut prendre $\pi'' = -\frac{1}{4}$, de sorte que le diamètre de son ouverture soit égal à la moitié de sa distance de foyer. Or pour rendre les déterminations plus générales, au lieu de la fraction $\frac{1}{2}$, qui répond à la plus grande ouverture, j'écrirai ω, & je poserai $\pi'' = -\omega$. Pour la lettre π', puisque l'ouverture du troisième verre n'influe point sur le champ, j'aurai $\pi' = 0$, & la lettre π ne pouvant être prise négative, je mettrai $\pi = \beta\omega$, où il faut prendre β aussi petite que les circonstances le permettent. De là nous aurons $\varphi = \frac{1 - \beta}{m - 1}\omega$, & posant pour abreger $\frac{1 - \beta}{m - 1} = M$, cette expression $\varphi = M\omega$.

VI. Aiant établi ces élémens, je tire de mes formules générales, à cause de
$\mathrm{B}\pi - \varphi = \infty\pi$, $\mathrm{C}\pi' - \pi\varphi = -(\beta - M)\omega$, &
$\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(1 - \beta + M)\omega$, tant pour les distances de foyer de nos verres, que pour leurs intervalles les valeurs suivantes :

$$q = \frac{B\varphi}{B\pi - \varphi}\, p = \frac{M}{\beta}\, p$$

$$r = \frac{B'C\varphi}{-(\beta - M)\,\omega}\, p = \frac{c\,M}{\beta - M}\, p$$

$$s = \frac{B\,C\varphi}{-(1 - \beta + M)\,\omega}\, p = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{1 - \beta + M}\, p,$$

$$A\;B = \frac{B\pi}{B\pi - \varphi}\, p = p$$

$$B\;C = \frac{\varphi\,B\pi}{B\pi\,(\beta - M)\,\omega}\, p = \frac{M}{\beta - M}\, p$$

$$C\;D = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{M}{(\beta - M)(1 - \beta + M)}\, p$$

& pour le lieu de l'œil, la diſtance $D\,O = \frac{s}{1 - \beta + M}$. Or la formule, qui ſert à détruire les couleurs d' iris, ne ſauroit être remplie, puiſqu'il faudroit qu'il fût $\frac{1}{1 - \beta + M} = 0$, & partant ce ſera un grand défaut de cette première eſpèce de Lunettes.

VII. Or l'autre défaut, par raport au champ apparent, eſt encore plus conſidérable, ſon demi-diamètre $\varphi = \frac{1 - \beta}{m - 1}\,\omega$ étant encore plus petit que dans les Lunettes aſtronomiques ordinaires; car non ſeulement le nombre β ne ſauroit évanoüir, mais il faut qu'il ſoit plus grand que M. Poſons donc $\beta = (1 + n)\,M$, & puiſque $1 - \beta = (m - 1)\,M$, nous aurons $M = \frac{1}{m + n}$, & partant $\varphi = M\omega = \frac{\omega}{m + n}$, & enſuite les autres déterminations:

$q = \frac{1}{1 + n}\, p,$ $\qquad AB = p$

$r = \frac{c}{n}\, p,$ $\qquad BC = \frac{1}{n}\, p$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{M}{1-nM} p, \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{n(1-nM)} p,$$

ou $t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{m} p$, ou $CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{m+n}{nm} p$

& pour le lieu de l' œil $DO = \frac{s}{1-nM} = \frac{m+n}{m} s$.

VIII. Si nous considérons les distances de foyer des trois premiers verres p, q, r, avec le grossissement m, comme données, nous en aurons $n = \frac{p-q}{q}$ & $c = \frac{(p-q)r}{pq}$, d' où le demi-diamètre du champ apparent sera $\varphi = \frac{q\omega}{mq+p-q}$; qui ne dépend donc point du troisiéme verre en C. Mais pour l' oculaire en D sa distance de foyer doit être $s = \frac{(p-q)r}{pq-(p-q)r} \cdot \frac{p}{m}$, & les intervalles entre les verres, $AB = p$, $BC = \frac{pq}{p-q}$, $CD = \frac{r(mq+p-q)}{m(pq-(p-q)r)} p = s\left(\frac{mq}{p-q} + 1\right)$. Cet arrangement des verres nous fournit donc la commodité que; quand même on pourroit donner à p une valeur très-petite, on pourroit se servir d' un oculaire, dont la distance de foyer fût aussi grande qu'on voudra.

IX. Pour rendre cet avantage plus sensible, soit la distance de foyer de l' oculaire donnée, $s = k$, & puisque $\frac{c}{1-c} = \frac{mk}{p}$, nous aurons $c = \frac{mk}{mk+p}$, d' où les déterminations de la Lunette seront les suivantes:

Dist. de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{1}{1+n} p$	$BC = \frac{1}{n} p$

Dist de foyer du verre	Intervalles entre les verres
en $C = r = \frac{mkp}{n(mk+p)}$	$CD = \frac{m+n}{n}\,k$
en $D = s = k$	$DO = \frac{m+n}{m}\,k$

où le nombre n eſt encore indéterminé; mais puiſque nous avons pour le champ apparent $\varphi = \frac{\omega}{m+n}$, il eſt bon de prendre n auſſi petit qu'il eſt poſſible; or on voit qu'en diminuant trop le nombre n, la longueur de la Lunette deviendroit exceſſive, défaut qu'on a encore plus de raiſons d' éviter, que la petiteſſe du champ apparent.

X. Conſidérons auſſi l' ouverture de chaque verre, & pour l'objectif le demi-diamètre de ſon ouverture x ſe détermine par le groſſiſſement, en prenant $x = \frac{m}{60}$ pouces ou bien $x = \frac{m}{50}$ pouces, ſi l' on craint que la pluralité des verres ne nuiſe à la clarté. Pour le ſecond verre QBQ, le demi-diamètre de ſon ouverture doit être $BQ = \beta\omega q = M\omega p = \frac{\omega}{m+n}p$. Pour le troiſiéme verre RCR, il faut avoir uniquement égard à l' ouverture de l' objectif, dont le demi-diamètre étant $AP = x$, nous aurons $CR = \frac{BC}{AB}\,x = \frac{x}{n}$, d' où l' on comprend la raiſon, pourquoi ce verre ſouffre une ſi petite ouverture. Mais au verre oculaire il faut donner la plus grande ouverture dont il eſt ſuſceptible, ſon demi-diamètre étant $DS = \omega k$ ou bien $\frac{1}{4}\,k$.

XI. Il eſt auſſi important de déterminer conformément à mes expreſſions générales la confuſion qui réſulte de tous nos quatre verres, où leur figure indiquée par les nombres λ, λ', λ'', λ''' entre principalement en considération. Puisque donc $B = -1$, $C = \frac{c}{1-c}$, $C\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega = -n\varphi$, on voit que le second verre ne cause aucune confusion; or de tous les autres ensemble résulte cette expression :

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c(1-c)}{nc^3} + \frac{\lambda'''(1-c)^3}{mc^3}\right)$$

qui ne doit pas excéder la valeur de $\frac{\mu}{4\kappa^3}$, prenant κ entre 40 & 50. Il faut donc qu'il soit

$$\frac{mx^3}{4p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda'' + \nu c(1-c)}{nc^3} + \frac{\lambda'''(1-c^3)}{mc^3}\right) < \frac{1}{\kappa^3}$$

ou, puisque $\frac{c}{1-c} = \frac{mk}{p}$, & $c = \frac{mk}{mk+p}$, nous aurons:

$$\frac{mx^3}{p^3}\left(\lambda + \frac{\lambda''(mk+p)^3}{nm^3k^3} + \frac{\nu p(mk+p)}{nmmkk} + \frac{\lambda''' p^3}{m^3k^3}\right) < \frac{1}{\kappa^3}.$$

XII. De là nons voyons que plus on prend petit le nombre n plus la confusion sera augmentée, ce qui est un nouveau motif de prendre toujours $n > 1$. Ensuite comme le second verre n'affecte point la confusion, on le fera également convexe des deux côtés, pourqu'il admette l'ouverture que je viens de lui assigner, sur tout quand j'employerai plusieurs oculaires. Or pour le troisiéme verre, comme il ne demande presque point d'ouverture, il sera bon de prendre $\lambda'' = 1$, & puisque sa distance de foyer est $= r$, & $C = c$, il faudra faire les rayons

de la face d'avant $= \frac{r}{\rho c + \sigma(1-c)}$

de la face de derrière $= \frac{r}{\sigma c + \rho(1-c)}$

où les nombres ρ & σ de même que le nombre ν dépendent de la raison de réfraction, comme je l'ai expliqué ailleurs. Mais pour l'oculaire SDS, on voit qu'en augmentant k audelà de $\frac{p}{m}$, la confuſion qui en réſulte, ne ſera d'aucune conſéquence.

XIII. Je ne m' arrêterai pas à développer cette eſpèce de teleſcopes, puiſqu'elle eſt aſſujettie à ces deux très-grands défauts, que premiérement le champ apparent eſt très-peu conſidérable, étant moindre que dans les Lunettes ordinaires compoſées des deux convexes, & en ſecond lieu parcequ'elle n' eſt pas délivrée de l'apparition des couleurs d' iris. Auſſi M. Dollond n' en a point fait, autant que je ſache, & ſi l' on veut des Lunettes qui n' aient pas plus de verres que quatre, on fera mieux de ſuivre la conſtruction ordinaire. Cependant cette première eſpèce me ſervira de baſe, pour en déduire les eſpèces ſuivantes, qui ne différent de celle-ci que par le nombre des verres oculaires. C'eſt de cette ſource qu'on peut non ſeulement amplifier le champ apparent, mais auſſi détruire les couleurs d'iris, & par là procurer à ces Lunettes les avantages, qui les ont rendues ſi recommendables; je tâcherai ſur tout de porter ces avantages au plus haut dégré de perfection, dont ils ſont ſuſceptibles.

XIV. Mais auparavant il eſt néceſſaire de donner un bon conſeil pour faire mieux réuſſir l' exécution de ces Lunettes. C' eſt au ſujet du troiſiéme verre RCR dont la confuſion eſt ſi grande, qu'elle pourroit bien ſurpaſſer celle de l'objectif même, & partant obliger d'étendre la diſtance de foyer de l' objectif bien audelà des bornes, que la conſtruction des Lunettes ordinaires preſcrit, ce qui allongeroit très-conſidérablement cette eſpèce de Lunettes; & puiſqu'alors la quantité p devroit ſurpaſſer mk, la confuſion qui en réſulte deviendroit encore plus conſidérable, ſans qu'il fût à propos d'y remédier par l'augmentation du nombre n, ce qui retreciroit trop le champ apparent. Il faut donc penſer à remédier à cet inconvénient d'une autre manière, qui puiſſe même contribuer à rendre ces Lunettes plus commodes.

XV. Pour cet effet je ne crois pas qu'il y ait un meilleur moyen que de doubler ce verre RCR, ou de le compoſer de deux verres immédiatement joints enſemble, ce qui ſe pourra exécuter d'autant plus aiſément, puiſque ce verre eſt très-petit, & que ſon épaiſſeur ne s'oppoſe pas à une telle jonction. Aiant donc déterminé la diſtance de foyer r que ce verre doit avoir, les deux verres dont il ſera bon de le compoſer, doivent être formés ſelon les meſures ſuivantes.

Du premier verre qui regarde l'objectif

$$\text{le rayon de la face} \left\{ \begin{array}{ll} \text{d'avant} & = 0,7481\,r \\ \text{de derrière} & = 1,0225\,r \end{array} \right.$$

De l'autre verre qui regarde l'œil

$$\text{le rayon de la face} \left\{ \begin{array}{ll} \text{d'avant} & = -0,5088\,r \\ \text{de derrière} & = +0,6657\,r \end{array} \right.$$

Ces deux verres étant joints enſemble laiſſeront un petit vuide entr'eux (*fig.* 2.), & on les pourra regarder comme un ſeul verre, dont la confuſion ſera inſenſible.

XVI. Aiant détruit de cette manière, ou au moins rendu inſenſible la confuſion, qui ſeroit à craindre de la part de ce troiſiéme verre, on pourra avec d'autant plus de ſuccès remédier à toute la confuſion cauſée par l'objectif, & tous les autres verres enſemble. On n'a qu'à compoſer l'objectif auſſi de deux verres, dont voici la conſtruction, la diſtance de foyer devant être $= p$

Du premier verre

$$\text{le rayon de la face} \left\{ \begin{array}{ll} \text{d'avant} & = 0,51467\,p \\ \text{de derrière} & = 4,05851\,p \end{array} \right.$$

De l'autre verre

$$\text{le rayon de la face} \left\{ \begin{array}{ll} \text{de devant} & = -0,59340\,p \\ \text{de derrière} & = +0,74127\,p \end{array} \right.$$

On mettra entre ces deux verres une telle diſtance, à déterminer par l'expérience, que l'on s'apperçoive le moins de toute confuſion. Quand cette conſtruction réuſſit bien, on pourra, peut être, prendre $p = \frac{m}{4}$ pouces ou encore plus petite, ce qui racourciroit très-conſidérablement ces Lunettes.

De Lunettes de cette eſpèce à 5 verres.

XVII. Ces Lunettes ne différent des précédentes, que parceque j'emploie ici deux verres oculaires, tant pour augmenter le champ apparent, que pour faire évanoüir les couleurs d'iris, dont la repréſentation des objets pourroit être troublée. Enſuite je nomme ces Lunettes à cinq verres, quand même on auroit doublé tant l'objectif que le troiſiéme petit verre RCR, puiſque cette duplication n'empêche pas qu'on ne puiſſe regarder dans le calcul ces verres comme ſimples. Mais quand il s'agit de fixer la diſtance de foyer l'objectif, que je nomme $= p$, & à laquelle l'intervalle des verres AB eſt toujours égale, il y faut faire attention à cauſe de la confuſion, qui pourroit réſulter de tous les verres. Car plus on réuſſit à diminuer cette confuſion, plus peut-on prendre petite la diſtance de foyer de l'objectif, laquelle doit pourtant être toujours au moins plus de quatre fois plus grande que le diamètre de ſon ouverture qui ſe détermine par le groſſiſſement exprimé par la lettre m.

XVIII. Poſant donc le lettres p, q, r, s & t pour les diſtances de foyer de nos 5 verres, ſoient les demidiamètres de leurs ouvertures:
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$ & $ET = \pi''' t$, & le demi-diamètre du champ apparent $= \varphi$. Cela poſé, puiſque le groſſiſſement eſt $= m$, & que les objets doi-

vent être représentés debout, mes formules générales me fournissent cette équation $\varphi = -\frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$, où comme j'ai remarqué cy-dessus, la lettre π doit avoir une valeur positive $< \omega$, & $\pi = 0$. Donc pour rendre le champ aussi grand qu'il est possible, je poserai $\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, & $\pi''' = \omega$, pour avoir $\varphi = \frac{2 - \beta}{m - 1}\omega$, ou $\varphi = M\omega$, en posant $M = \frac{2 - \beta}{m - 1}$.

XIX. Soient ensuite les nombres, qui déterminent dans mes formules tant les distances de foyer, que les intervalles des verres :

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1 - c},\ D = -\frac{d}{1 + d},\ E = \infty$$

$$\mathfrak{B} = \infty,\ \mathfrak{C} = c,\quad \mathfrak{D} = -d,\quad \mathfrak{E} = 1$$

d'où nous tirons d'abord les valeurs suivantes :

$$\mathfrak{B}\pi - \varphi = \infty\beta\omega$$
$$\mathfrak{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$$
$$\mathfrak{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\omega$$
$$\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(2 - \beta + M)\omega$$

& de là les distances de foyer avec les intervalles des verres :

$$q = \frac{M}{\beta}p$$

$$r = \frac{M}{\beta - M}p$$

$$s = \frac{c}{1 - c}\cdot\frac{dM}{d + \beta - M}p$$

$$t = \frac{cd}{(1 - c)(1 + d)}\cdot\frac{M}{2 - \beta + M}p$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{M}{\beta - M}p$$

$$CD = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{dM}{(\beta - M)(d + \beta - M)} p$$

$$DE = \frac{cd}{(1 - c)(1 + d)} \cdot \frac{(d + 2) M}{(d + \beta - M)(2 - \beta + M)} p$$

& pour le lieu de l'œil la diſtance $EO = \frac{t}{2 - \beta + M}$.

XX. Pour abreger ces expreſſions, poſons $\beta = (n + 1) M$, puiſqu'il faut néceſſairement qu'il ſoit $\beta > M$, ce qui four- $M = \frac{2}{m + n}$, & partant le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2}{m + n} \omega$, qui eſt le double du cas précédent, en donnant au nombre n la même valeur. Or nos formules deviendront :

$$q = \frac{1}{n + 1} p$$

$$r = \frac{c}{n} p$$

$$s = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{dM}{d + nM} p$$

$$t = \frac{cd}{(1 - c)(1 + d)} \cdot \frac{M}{2 - nM} p$$

$$AB = p$$

$$BC = \frac{1}{n} p$$

$$CD = \frac{c}{1 - c} \cdot \frac{d}{n(d + nM)} p$$

$$DE = \frac{cd}{(1 - c)(1 + d)} \cdot \frac{(d + 2)}{(d + nM)(2 - nM)} p$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{t}{2 - nM} = \frac{t}{mM}$, où les trois quantités c, d & n ſeroient arbitraires.

XXI. Mais il faut à cette heure tenir compte des couleurs d'iris, qui évanoüiront en satisfaisant à cette équation:

$$\frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} +$$

$$\frac{\pi'''}{E\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi} = 0$$

qui pour le cas présent se réduit à celle-ci:

$$-\frac{1}{d + nM} + \frac{1}{2 - nM} = 0$$

d'où nous trouvons $d = 2 - 2nM$ & $d + 2 = 2(2 - nM)$, & en substituant pour M sa valeur $\frac{2}{m+n}$, nous aurons $2 - nM = d + nM = \frac{2m}{m+n}$, $d = \frac{2(m-n)}{m+n}$ & $d + 2 = \frac{4m}{m+n}$, & partant:

$$q = \frac{1}{n+1}p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{c}{n}p \qquad BC = \frac{1}{n}p$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(m-n)}{m+n} \cdot \frac{p}{m}, \quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{m-n}{n} \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}, \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4(m-n)}{3m-n} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $EO = \frac{m+n}{2m}t$

XXII. On peut rendre ces formules encore plus simples en posant $n = \frac{m}{i}$, de sorte que le demi-diamètre du champ apparent devienne $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)}\omega$, & les autres déterminations seront:

$$q = \frac{i}{m+i} p \qquad AB = p$$

$$r = ci \cdot \frac{p}{m} \qquad BC = i \cdot \frac{p}{m}$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m} \qquad CD = \frac{c}{1-c} \cdot (i-1) \cdot \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m} \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4(i-1)}{3i-1} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil là diſtance $EO = \frac{i+1}{2i} t$, où le champ apparent demande de grandes valeurs pour le nombre i, mais la longueur de la Lunette auſſi bien que la diſtinction en demande de petites, puiſque (§. XI.) la quantité $\frac{\lambda''}{nc^3} = \frac{\lambda'' i}{mc^3}$ doit être fort petite par raport à l'unité à moins qu'on ne remédie à la confuſion, en doublant le troiſiéme verre.

XXIII. Poſons outre cela $\frac{c}{1-c} \times \frac{p}{m} = z$, pour mieux ſoumettre les verres oculaires à notre volonté, de ſorte, que $\frac{c}{1-c} = \frac{mz}{p}$, & $c = \frac{mz}{mz+p}$, d'où la fraction $\frac{i}{m}$ $(1 + \frac{p}{mz})^3$ devroit être aſsès petite, pour n'être pas obligé de doubler le troiſiéme verre. Donc les déterminations générales pour ces Lunettes ſeront :

$$q = \frac{i}{m+i} p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{ipz}{mz+p} \qquad BC = \frac{i}{m} p$$

$$s = \frac{2(i-1)}{i+1} z \qquad CD = (i-1) z$$

$$t = \frac{2(i-1)}{3i-1} z \qquad DE = \frac{4(i-1)}{3i-1} z$$

pour le lieu de l' œil $EO = \frac{i+1}{2i} t$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{2i}{m(i+1)} \omega$; où il eſt remarquable que les deux quantités i & z ſont indépendantes du groſſiſſement m, & de la diſtance de foyer de l'objectif p, & partant tant les deux verres D & E, que les diſtances CD, DE, & EO n'en dépendent pas non plus.

XXIV. Pour les ouvertures des verres, celles de l' objectif & du troiſiéme ſont déterminées par le dégré de clarté, & celles des autres par le champ apparent, de la manière ſuivante:

Demi-diamètres de l' ouverture des verres

$$AP = x = \frac{m}{60} \text{ ou } \frac{m}{50} \text{ pouces}$$

$$BQ = \frac{2i}{m(i+1)} \omega p$$

$$CR = \frac{i}{m} x = \frac{i}{60} \text{ ou } \frac{i}{50} \text{ pouces}$$

$$DS = \omega s = \frac{2(i-1)}{i+1} \omega z$$

$$ET = \omega t = \frac{2(i-1)}{3i-1} \omega z$$

où l'on peut prendre $\omega = \frac{1}{4}$, ſi l' on fait les verres B, D & E également convexes des deux côtés.

XXV. Si l'on vouloit ſe ſervir tant d'un objectif ordinaire, que du troiſiéme verre ſimple, il ſeroit bon pour diminuer la confuſion, de prendre z beaucoup plus grand que $\frac{p}{m}$; mais puiſque alors la diſtance de foyer des verres D & E deviendroit aſsès conſidérable pour les grandes multiplications, ces verres devroient être trop grands. Il conviendra donc de prendre un milieu, en poſant $z =$

$\frac{p}{m}$, & de donner plutôt au verre objectif une plus grande distance de foyer p pour rendre la confusion insensible. Alors aiant $c = \frac{1}{2}$, on n'aura qu'à déterminer la distance de foyer de l'objectif par cette formule $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 8i)}$ pouces, & lui donner une ouverture dont le demidiamètre $x = \frac{m}{60}$ pouces. Dans ce cas, le troisiéme verre C deviendra aussi également convexe des deux côtés. Or en supposant la raison de réfraction de l'air dans le verre, comme 1, 54 à 1, il sera bon de former l'objectif ensorte, que le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,60849\, p \\ \text{de derrière} = 4,79820\, p \end{cases}$
Pour les autres verres également convexes des deux côtés, la distance de foyer étant $= q$, on prendra le rayon de chaque face $= 1,08q$.

XXVI. Cela posé nous aurons les déterminations suivantes pour la construction de ces Lunettes, en prenant $\omega = \frac{1}{4}$.

Distance de foyer du verre	Demi-diamètre de l'ouverture	Intervalles entre les verres
$A \ldots p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 8i)}$ pouces	$AP = x = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
$B \ldots q = \frac{i}{m + i} p$	$BQ = \frac{i}{2(i + 1)} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = i \cdot \frac{p}{m}$
$C \ldots r = \frac{1}{2} i \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{i}{60}$ pouces	$CD = (i - 1) \frac{p}{m}$
$D \ldots s = \frac{2(i - 1)}{i + 1} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{i - 1}{2(i + 1)} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{4(i - 1)}{3i - 1} \cdot \frac{p}{m}$
$E \ldots t = \frac{2(i - 1)}{3i - 1} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{i - 1}{2(3i - 1)} \cdot \frac{p}{m}$	$EO = \frac{ii - 1}{i(3i - 1)} \cdot \frac{p}{m}$

la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{6i^2 - 3i - 1}{i(3i - 1)} \cdot \frac{p}{m}$ & le demi-diamètre du champ apparent $\phi = \frac{i}{2m(i+1)}$, qui étant réduit en minutes, donne $\phi = \frac{1718\,i}{m(i+1)}$ minutes. Or pour que le ſecond verre admette l'ouverture marquée, il faut qu'il ſoit $m > \frac{2i}{i-1}$.

XXVII. Le nombre i étant encore permis à notre choix à l'égard du champ apparent, il ſeroit bon de le prendre fort grand, cependant ſi on l'augmentoit à l'infini, on n'en tireroit que $\phi = \frac{1}{2m}$, & la Lunette deviendroit à deux égards infiniment longue, puiſque la diſtance de foyer de l'objectif devroit auſſi être priſe infinie. Mais prenant $i = 2$, à cauſe de $\phi = \frac{1}{3m}$, on perd bien daus le champ la ſixiéme partie, mais la Lunette devient auſſi plus courte à un double égard, ce qui eſt ſans doute bien préférable. Si l'on vouloit mettre $i = 3$, on gagneroit tant ſoit peu ſur le champ, mais la Lunette deviendroit aſsès conſidérablement plus longue. D'où je conclud qu'il eſt avantageux de ne pas ſuppoſer i plus grand que 2, attendu que ſi l'on ſouhaite un plus grand champ, on n'a qu'à ajouter encore un verre, qui l'augmentera de la moitié, pendant qu'en donnant ici au nombre i de plus grandes valeurs, les accroiſſemens du champ ſeroient inſenſibles.

XXVIII. Poſons donc $i = 2$, & prenant la diſtance de foyer de l'objectif $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$ pouces, nous aurons les déterminations ſuivantes :

Dist. de foyer du verre	Demi-diam. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{3m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30}$ pouc.	$CD = \frac{1}{m} p$
en $D = \frac{2}{3m} p$	$DS = \frac{1}{6m} p$	$DE = \frac{4}{5m} p$
en $E = \frac{2}{5m} p$	$ET = \frac{1}{10m} p$	$EO = \frac{3}{10m} p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{41}{10m} p$, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1}{3m}$ ou de $\frac{1146}{m}$ minutes, d'où il est aisé de tirer pour chaque multiplication proposée les mesures exprimées en pouces, & d'y régler la construction des Lunettes.

1° Devis d'une telle Lunette qui grossit 10 fois.

XXIX. A' cause de $m = 10$, nous aurons $p = \frac{15}{2}\sqrt[3]{34} = 24, 3$ pouces, prenons donc $p = 25$ pouces, puisqu'il vaut mieux de la prendre plus grande que plus petite, & nous obtiendrons les mesures suivantes en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 25, 00$	$\begin{cases} 15, 21 \\ 119, 95 \end{cases}$	$AP = 0, 17$	$AB = 25, 00$
en $B = 4, 17$	4, 50	$BQ = 0, 83$	$BC = 5, 00$
en $C = 2, 50$	2, 70	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 50$
en $D = 1, 67$	1, 80	$DS = 0, 42$	$DE = 2, 00$
en $E = 1, 00$	1, 00	$ET = 0, 25$	$EO = 0, 75$

la longueur de toute la Lunette $AO = 35, 25$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 114' = 1^\circ, 54'$.

2° Devis d'une telle Lunette que grossit 20 fois.

XXX. La valeur $m = 20$ donne $p = 15\sqrt[3]{44} = 53$, prenons donc $p = 55$ pouces, & nos mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55, 00$	$\begin{cases} 33, 47 \\ 263, 90 \end{cases}$	$AP = 0, 33$	$AB = 25, 00$
en $B = 5, 00$	$5, 40$	$BQ = 0, 92$	$BC = 5, 50$
en $C = 2, 75$	$2, 97$	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 75$
en $D = 1, 83$	$1, 98$	$DS = 0, 46$	$DE = 2, 20$
en $E = 1, 10$	$1, 19$	$ET = 0, 27\frac{1}{2}$	$EO = 0, 82$

la longueur de toute la Lunette $AO = 66, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 57'$.

3° Devis d'une telle Lunette qui grossit 30 fois.

XXXI. La valeur $m = 30$ donne $p = \frac{45}{2}\sqrt[3]{54} = 85$; donc

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 88$	$\begin{cases} 53, 55 \\ 422, 24 \end{cases}$	$AP = 0, 50$	$AB = 88, 00$
en $B = 6, 50$	$5, 94$	$BQ = 0, 98$	$BC = 5, 86$
en $C = 2, 93$	$3, 16$	$CR = 0, 03$	$CD = 2, 93$
en $D = 1, 95$	$2, 11$	$DS = 0, 49$	$DE = 2, 34$
en $E = 1, 17$	$1, 26$	$ET = 0, 29$	$EO = 0, 88$

la longueur de toute la Lunette $AO = 100, 01$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 38'$

XXXII. Si les verres objectifs quoique ſimples étoient ſi excellens, qu'ils admiſſent une plus grande ouverture, & qu'ils pûſſent être employés à des plus grands groſſiſſemens, alors on pourroit prendre pour les cas que je viens de développer, des objectifs d'une moindre diſtance de foyer que je n'ai marqué, & dans ces cas on n'aura qu'à diminuer toutes les meſures dans la même proportion, excepté les ouvertures de l'objectif, & du troiſiéme verre. Or ſi l'on doubloit le troiſiéme verre de la manière que j'ai indiquée dans le §. XV., pour diminuer la confuſion, on pourroit bien donner à l'objectif une moindre diſtance de foyer, & enſuite conformément diminuer les autres meſures. Je dois encore remarquer que dans l'application à la pratique j'ai pris $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$ au lieu de $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 16)}$, que la poſition $i = 2$ donne, pour tenir compte de la confuſion qui naît des deux verres oculaires, qui fournit à peu-près cet excès, mais on ne ſauroit ici rien préſcrire de précis, puiſque tout dépend de l'adreſſe de l'Artiſte.

XXXIII. Mais ſi l'Artiſte eſt aſsès habile pour exécuter les objectifs compoſés, dont j'ai donné ci-deſſus la deſcription (§. XVI.), de ſorte que toute confuſion puiſſe être réduite à rien, alors la diſtance de foyer de l'objectif p ſe déterminera uniquement par ſon ouverture, dont le demi-diamètre étant $x = \frac{m}{60}$ pouces, ou même $x = \frac{m}{50}$ pouces, on pourra bien ſe contenter de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, de ſorte que $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$. Alors pour que le verre oculaire ne devienne pas trop petit, il ſera bon de prendre

$c = \frac{3}{4}$, ou $\frac{c}{1-c} = 3$, & alors la confuſion du troiſiéme verre contenue dans la formule $\frac{\lambda'' i}{m c^3}$ ne ſera pas trop à craindre, quand même on prendroit ce verre ſimple, & également convexe des deux côtés, ſur tout en ſuppoſant comme auparavant $i = 2$, la conſtruction de l'objectif étant telle, qu'en approchant ou éloignant d'avantage les deux verres dont il eſt composé, cette confuſion avec celle des autres puiſſe être anéantie.

XXXIV. Poſant donc $p = \frac{m}{2}$ pouces, $c = \frac{2}{4}$ & $i = 2$, nous aurons les meſures ſuivantes pour la conſtruction de ces Lunettes :

Diſt. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{6}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{3}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = \frac{3}{2}$
en $D = s = 1$	$DS = \frac{1}{4}$	$DE = \frac{6}{5}$
en $E = t = \frac{3}{5}$	$ET = \frac{3}{20}$	$EO = \frac{9}{20}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 4\frac{3}{20}$ pouces, le demi-diamètre du champ apparent étant $= \frac{1146}{m}$ minutes.

XXXV. De là il eſt clair que nous pouvons bien donner à $\frac{c}{1-c}$ une valeur plus grande, & poſer $c = \frac{6}{7}$,

&

& alors rien n'empêche qu'on ne prenne $i = 3$ pour augmenter un peu le champ apparent. Or ces positions nous fournissent les mesures suivantes :

Dist. de foyer du verre	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$
en $C = r = \frac{9}{7}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 6$
en $D = s = 3$	$DS = \frac{3}{4}$	$DE = 3$
en $E = t = \frac{3}{2}$	$ET = \frac{3}{8}$	$EO = 1$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 11\frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1289}{m}$ minutes.

Cette hypothéſe paroit de beaucoup préférable à la précédente, parceque tous les verres ont ici plus d' un pouce de foyer, & cauſent par conſéquent une d' autant plus petite confuſion, & celle du troiſiéme pouvant être détruite par la conſtruction de l'objectif enſeignée dans le §. XVI.

XXXVI. Au reſte je ne dois pas oublier de faire obſerver un très-grand avantage, que le troiſiéme verre procure à cette eſpèce de Lunettes par la très-petite ouverture, que ce verre admet ſans que le champ apparent en ſoit diminué. Car cette petite ouverture eſt le moyen le plus propre d' exclure les rayons étrangers, & il eſt ſans doute beaucoup plus efficace que les diphragmes, dont on ſe ſert ordinairement dans cette vue ; car on eſt obligé de les placer dans les lieux où les images ſont repréſentées, &

partant leurs trous ne ſauroient être plus petits que les images mêmes. Or comme le ſecond verre QBQ ſe trouve préciſément dans le lieu de la première image, il tient lieu d'un tel diaphragme, mais ſon ouverture qui répond au trou du diaphragme, eſt beaucoup plus grande que celle du troiſiéme verre. Par cette raiſon il eſt bon de ne donner à ce verre que la petite ouverture, que je lui viens d' aſſigner, quoiqu'à d' autres égards une plus grande ne cauſeroit aucun inconvénient.

Des Lunettes de cette eſpèce à 6 verres.

XXXVII. Je marquerai les diſtances de foyer de nos ſix verres par les lettres p, q, r, s, t & u, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :

$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{\text{IV}} u$;

puiſque le diamètre du champ eſt $\phi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{\text{IV}}}{m - 1}$

le groſſiſſement étant $= m$, poſons :

$\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$ & $\pi^{\text{IV}} = -\omega$

pour avoir $\phi = \frac{-\beta + 3}{m - 1}\omega$ ou bien $\phi = M\omega$, en poſant

$M = \frac{3 - \beta}{m - 1}$. Enſuite ſoit:

$\mathfrak{B} = -1$, $\mathfrak{C} = \frac{c}{1 - c}$, $\mathfrak{D} = -\frac{d}{1 + d}$, $\mathfrak{E} = -1$, $\mathfrak{F} = \infty$

$\mathrm{B} = \infty$, $\mathrm{C} = c$, $\mathrm{D} = -d$, $\mathrm{E} = \infty$, $\mathrm{F} = 1$

& poſons les formules, qui en ſont formées :

$$Q = \mathrm{B}\pi - \phi = \infty\pi$$
$$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \phi = -(\beta - M)\omega$$
$$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \phi = (d + \beta - M)\omega$$
$$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \phi = \infty$$
$$U = \mathrm{F}\pi^{\text{IV}} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \phi = -(3 - \beta + M)\omega$$

XXXVIII. Cela posé, les déterminations tant des distances de foyer que des intervalles des verres seront

$$q = \frac{B\varphi}{Q}p \qquad AB = p$$

$$r = B \cdot \frac{C\varphi}{R}p \qquad BC = B\varphi\left(\frac{1}{Q} + \frac{1}{R}\right)p$$

$$s = BC \cdot \frac{D\varphi}{S}p \qquad CD = BC\varphi\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right)p$$

$$t = BCD \cdot \frac{E\varphi}{T}p \qquad DE = BCD\varphi\left(\frac{1}{S} + \frac{1}{T}\right)p$$

$$u = BCDE \cdot \frac{F\varphi}{U}p \qquad EF = BCDE\varphi\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{U}\right)p$$

& pour le lieu de l' œil $FO = \frac{1}{mM} \cdot u$; mais la destruction des coleurs d' iris exige cette condition:

$$\frac{\pi}{Q} + \frac{\pi'}{R} + \frac{\pi''}{S} + \frac{\pi'''}{T} + \frac{\pi^{\text{IV}}}{U} = 0$$

qui se réduit à celle-ci: $-\frac{1}{S} - \frac{1}{U} = 0$ ou $S = -U$ d' où nous tirons $d + \beta - M = 3 - \beta + M$, & $d = 3 - 2(\beta - M)$.

XXXIX. Soit maintenant $\beta = (n + 1)M$, de sorte que $M = \frac{3}{m+n}$, & $\beta - M = nM$. Or posons d' abord $n = \frac{m}{i}$, de sorte que $M = \frac{3i}{m(i+1)}$, $\beta - M = \frac{3}{i+1}$, $d = \frac{3(i-1)}{i+1}$, & $U = -\frac{3i}{i+1}\omega$, donc $S = \frac{3i}{i+1}\omega$, & puisque $\beta = \frac{3(m+i)}{m(i+1)}$, nous aurons:

$$\frac{B\varphi}{Q} = \frac{M}{\beta} = \frac{i}{m+i},\ R = -\frac{3}{i+1}\omega,\ \frac{\varphi}{R} = -\frac{i}{m};$$

$\frac{\varphi}{S} = \frac{1}{m}$, $\frac{\varphi}{T} = 0$; or $\frac{C\varphi}{T} = \frac{3i}{m(i+1)}$, & $\frac{\varphi}{U} = -\frac{1}{m}$, d'où nous tirons les déterminations suivantes :

$$q = \frac{i}{m+i} p \qquad AB = p$$

$$r = \frac{ci}{m} p \qquad BC = \frac{i}{m} p$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{i+1} \cdot \frac{p}{m} \qquad CD = \frac{c}{1-c} (i-1) \frac{p}{m}$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m} \qquad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m} \qquad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3(i-1)}{4i-2} \cdot \frac{p}{m}$$

& pour le lieu de l'œil $FO = \frac{i+1}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{m(i+1)} \omega$.

XL. Quand on se sert d'un objectif simple, en faisant les rayons des faces $\begin{cases} \text{de devant} = 0,60849\,p \\ \text{de derrière} = 4,79820\,p \end{cases}$, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{i}{c^3})}$ pouces. Je m'en vais donc développer les hypothéses suivantes :

1re *Hipothése* $i = 2$ & $c = \frac{1}{2}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+20)}$	$AP = \frac{m}{60} p$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{1}{2m} p$	$BC = \frac{2}{m} p$
en $C = r = \frac{1}{m} p$	$CR = \frac{1}{30} p$	$CD = \frac{1}{m} p$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Interval. entre les verres
en $D = s = \frac{1}{m} p$	$DS = \frac{1}{4m} p$	$DE = \frac{1}{2m} p$
en $E = t = \frac{1}{m} p$	$ET = \frac{1}{4m} p$	$EF = \frac{1}{2m} p$
en $F = u = \frac{1}{2m} p$	$FU = \frac{1}{8m} p$	$FG = \frac{1}{4m} p$

donc la longueur de la Lunette $AO = p + \frac{17}{4m} p$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{1}{2m}$ ou bien $\varphi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2^{de} *Hipothèse* $i = 3$ & $c = \frac{2}{3}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+15)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{9}{16m} p$	$BC = \frac{3}{m} p$
en $C = r = \frac{2}{m} p$	$CR = \frac{1}{20} p$	$CD = \frac{4}{m} p$
en $D = s = \frac{3}{m} p$	$DS = \frac{3}{4m} p$	$DE = \frac{6}{5m} p$
en $E = t = \frac{27}{10m} p$	$ET = \frac{27}{40m} p$	$EF = \frac{6}{5m} p$
en $F = u = \frac{6}{5m} p$	$FU = \frac{3}{10m} p$	$FO = \frac{8}{15m} p$

donc la longueur de toute la Lunette $AO = p + \frac{149}{15m} p$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{9}{16m}$ ou bien $\varphi = \frac{1933}{m}$ minutes.

XLI. Mais quand on veut employer un verre objectif composé, dont j'ai donné la description ci-dessus (16), de sorte qu'on puisse prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, on peut se régler sur l'une des hypothéses suivantes :

1.re *Hipothése* $i = 2$ & $c = \frac{4}{5}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$ pouces	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = \frac{m}{2}$ pouces
en $B = q = \frac{m}{m+2}$	$BQ = \frac{1}{4}$	$BC = 1$
en $C = r = \frac{4}{5}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = 2$
en $D = s = 2$	$DS = \frac{1}{2}$	$DE = 1$
en $E = t = 2$	$ET = \frac{1}{2}$	$EF = 1$
en $F = u = 1$	$FU = \frac{1}{4}$	$FO = \frac{1}{2}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 5\frac{1}{2}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{1}{2m}$, ou $\varphi = \frac{1718}{m}$ minutes.

2.de *Hipothése* $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{m}{2}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouces	$AB = \frac{m}{2}$
en $B = q = \frac{3m}{2(m+3)}$	$BQ = \frac{3}{16}$	$BC = \frac{3}{2}$

Dist. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $C = r = \frac{5}{4}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 5$
en $D = s = \frac{15}{4}$	$DS = \frac{15}{16}$	$DE = \frac{3}{2}$
en $E = t = \frac{27}{8}$	$ET = \frac{27}{32}$	$EF = \frac{3}{2}$
en $F = u = \frac{3}{2}$	$FU = \frac{3}{8}$	$FO = \frac{2}{3}$

donc la longueur de la Lunette $AO = \frac{m}{2} + 10\frac{1}{6}$ pouces, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{9}{16m}$ ou $\varphi = \frac{1933}{m}$ minutes. Si ces Lunettes réussissoient, on les pourroit regarder comme les plus parfaites dans leur espèce.

Des Lunettes de cette espèce à 7 verres.

XLII. Les distances de foyer de nos 7 verres étant marquées par les lettres p, q, r, s, t, u, & v, & les demi-diamètres de leurs ouvertures: $AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{\text{IV}} u$, $GV = \pi^{\text{V}} v$, puisque le demi-diamètre du champ est $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{\text{IV}} + \pi^{\text{V}}}{m - 1}$ posons $\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$, $\pi^{\text{IV}} = -\omega$, & $\pi^{\text{V}} = +\omega$, pour avoir $\varphi = \frac{-\beta + 4}{m - 1}\omega$, ou $\varphi = M\omega$, en posant $M = \frac{4 - \beta}{m - 1}$. Soient ensuite:

$$B = -1,\ C = \frac{c}{1-c},\ D = \frac{-d}{1+c},$$
$$\mathrm{B} = \infty,\quad \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,$$
$$E = \frac{-e}{1-e},\ F = \frac{-f}{f-1},\ G = \infty,$$
$$\mathrm{E} = -e,\ \mathrm{F} = f,\quad \mathrm{G} = 1;$$

d' où nous tirons les valeurs ſuivantes :

$Q = \mathrm{B}\pi - \omega = \mathrm{B}\beta\omega$
$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\,\omega$
$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\,\omega$
$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = -(e - 1 + \beta - M)\,\omega$
$U = \mathrm{F}\pi^{\mathrm{IV}} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(f + 2 - \beta + M)\,\omega$
$V = \mathrm{G}\pi^{\mathrm{V}} - \pi^{\mathrm{IV}} + \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = (4 - \beta + M)\,\omega$

XLIII. De là la deſtruction des couleurs donne :

$$-\frac{\omega}{S} + \frac{\omega}{T} - \frac{\omega}{U} + \frac{\omega}{V} = 0$$

pour ſatisfaire à cette équation, puiſque $-T > S$, & $-U > V$, poſant $S = V$, & $-T = -U = \zeta V$, ou $\zeta > 1$. Soit pour abreger $\beta = (1 + n)\,M$, de ſorte que $\beta - M = nM$ & $M = \frac{4}{m + n}$, & ſoit $n = \frac{m}{i}$, pour avoir $M = \frac{4i}{m(i+1)}$, $\beta - M = \frac{4}{i+1}$ & $\beta = \frac{4(m+i)}{m(i+1)}$ de là nous aurons :

$$V = \frac{4i}{i+1},\ S = \left(d + \frac{4}{i+1}\right)\omega = \frac{4i}{i+1},\ \text{donc } d = \frac{4(i-1)}{i+1}$$

$$-T = \left(e - 1 + \frac{4}{i+1}\right)\omega = \frac{4\zeta i}{i+1}\,\omega,\ \text{donc } e = \frac{(4\zeta + 1)i - 3}{i+1}$$

$$-U = \left(f + 2 - \frac{4}{i+1}\right)\omega = \frac{4\zeta i}{i+1}\,\omega,\ \text{donc } f = \frac{(4\zeta - 2)\,i + 2}{i+1}$$

Enſuite, $R = -\frac{4}{i+1}\,\omega$, & $Q = \frac{\mathrm{B}\cdot 4(m+i)}{m(i+1)}$, d'où nous tirons les valeurs ſuivantes:

$\frac{\varphi}{Q} =$

$\frac{\phi}{Q} = 0$, $\frac{B\phi}{Q} = \frac{i}{m+i}$, $\frac{\phi}{R} = -\frac{i}{m}$, $\frac{\phi}{S} = \frac{i}{m}$, $\frac{\phi}{T} = -\frac{1}{\zeta m} = \frac{\phi}{U}$, & $\frac{\phi}{V} = \frac{i}{m}$.

XLIV. De là résultent les déterminations suivantes :

$$q = \frac{i}{m+i} p, \qquad AB = p,$$

$$r = ci \cdot \frac{p}{m}, \qquad BC = i \cdot \frac{p}{m},$$

$$s = \frac{c}{1-c} \cdot d \cdot \frac{p}{m}, \qquad CD = \frac{c}{1-c}(i-1)\frac{p}{m},$$

$$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot e \cdot \frac{p}{\zeta m}, \quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot f \cdot \frac{p}{\zeta m},$$

$$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{2}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{p}{m},$$

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{f}{f-1} \cdot \frac{\zeta - 1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l'œil $GO = \frac{i+1}{4i} v$, le demi-diamètre du champ apparent étant $\phi = \frac{4i}{m(i+1)} \omega$, où pour les hypothéses $i = 2$ & $i = 3$, il est bon de marquer les valeurs des lettres d, e & f.

1° $i = 2$, $d = \frac{4}{3}$, $e = \frac{8\zeta - 1}{3}$, $f = \frac{8\zeta - 2}{3}$, $\phi = \frac{8}{3m}\omega$

2° $i = 3$, $d = 2$, $e = 3\zeta$, $f = 3\zeta - 1$, $\phi = \frac{\zeta}{m}\omega$.

XLV. Soit donc pour la première hypothése $i = 2$ & $\zeta = 2$, de sorte que $e = 5$, & $f = \frac{14}{3}$, & nous aurons les déterminations suivantes:

$q = \frac{2}{m+2} p$, $\quad BQ = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad AP = p$,

$r = 2c \cdot \frac{p}{m}$, $\quad CR = \frac{1}{30}$ pouc., $\quad BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$,

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad DS = \frac{1}{4} s$, $\quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}$,

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad ET = \frac{1}{4} t$, $\quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{p}{m}$,

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad FU = \frac{1}{4} u$, $\quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{p}{m}$,

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{20}{33} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad GU = \frac{1}{4} v$, $\quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{33} \cdot \frac{p}{m}$.

Pour le lieu de l'œil $GO = \frac{3}{8} v$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{2}{3m}$, ou bien $\varphi = \frac{2291}{m}$ minutes.

XLVI. L'autre hipothèſe $i = 3$, en prenant $\zeta = \frac{8}{3}$, de ſorte que $e = 8$, & $f = 7$ donne les déterminations ſuivantes :

$q = \frac{3}{m+3} p$, $\quad BQ = \frac{3}{4m} p$, $\quad AB = p$

$r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$ $\quad CR = \frac{1}{20}$, $\quad BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $\quad DS = \frac{1}{4} s$, $\quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $\quad ET = \frac{1}{4} t$, $\quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad FU = \frac{1}{4} u$, $\quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad GV = \frac{1}{4} v$, $\quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l'œil $GO = \frac{1}{3} v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$,

& le demi-diamètre du champ $\phi = \frac{3}{4m}\,\phi$ ou $= \frac{2578}{m}$ minutes, où il faut au moins prendre $\frac{c}{1-c} = 2$, & $c = \frac{2}{3}$, pour prevenir une trop grande confuſion de la part du troiſiéme verre, d'où les verres oculaires deviendront paſſablement grands.

XLVII. Ici on peut encore conſidérer deux cas, ſelon qu'on ſe ſert d' un objectif ſimple ou composé, propre à détruire toute confuſion. Dans le premier cas d' un verre objectif ordinaire, il faut prendre pour l' hipothéſe $i = 2$, $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c^3})}$, & partant:

ſi l'on poſe $c = \frac{1}{2}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 16)}$, ou

ſi l'on poſe $c = \frac{3}{5}$ on aura $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 9)}$.

Dans l'autre hipothéſe $i = 3$, en prenant $c = \frac{2}{3}$, il faut mettre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 11)}$, & je ne voudroit pas prendre $\frac{c}{1-c}$ plus grand, de pour que les oculaires ne dûſſent être trop grands. Or quand on ſe ſert d' un verre objectif compoſé, de ſorte qu'on puiſſe prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, à cauſe de $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$, ſi voudrois poſer dans l'une & l' autre hipothéſe $c = \frac{3}{4}$, afin que le dernier oculaire ait environ un pouce de foyer. D' où il eſt aiſé de tirer des devis pour tous les groſſiſſemens, qu'on ſouhaitera.

Des Lunettes de cette espèce à 8 verres.

XLVIII. Posant les distances de foyer de nous 8 verres p, q, r, s, t, u, v & w, & les demi-diamètres de leurs ouvertures :
$AP = x$, $BQ = \pi q$, $CR = \pi' r$, $DS = \pi'' s$, $ET = \pi''' t$, $FU = \pi^{IV} u$, $GV = \pi^{V} v$, $HW \pi^{VI} w$, puisque le demi-diamètre du champ apparent est $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi''' - \pi^{IV} + \pi^{V} - \pi^{VI}}{m - 1}$, supposons

$\pi = \beta\omega$, $\pi' = 0$, $\pi'' = -\omega$, $\pi''' = \omega$, $\pi^{IV} = -\omega$, $\pi^{V} = \omega$, $\pi^{VI} = -\omega$,

pour avoir $\varphi = \frac{-\beta + 5}{m - 1}\omega$, ou bien $\varphi = M\omega$, posant $M = \frac{5 - \beta}{m - 1}$. Ensuite donnons aux indices des verres les valeurs suivantes :

$$B = -1,\quad C = \frac{c}{1 - c},\quad D = \frac{-d}{1 + d},$$
$$\mathrm{B} = \infty,\quad \mathrm{C} = c,\quad \mathrm{D} = -d,$$
$$E = \frac{-e}{1 + e},\quad F = -1,\quad G = \frac{-g}{g - 1},\quad H = \infty,$$
$$\mathrm{E} = -e,\quad \mathrm{F} = \infty,\quad \mathrm{G} = g,\quad \mathrm{H} = 1,$$

& de là formons les expressions suivantes :
$Q = \mathrm{B}\pi - \varphi = \mathrm{B}\beta\omega$, à cause de $\mathrm{B} = \infty$,
$R = \mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi = -(\beta - M)\omega$,
$S = \mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi = +(d + \beta - M)\omega$,
$T = \mathrm{E}\pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = -(e - 1 + \beta - M)\omega$,
$U = \mathrm{F}\pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -\mathrm{F}\omega$, à cause de $\mathrm{F} = \infty$,
$V = \mathrm{G}\pi^{V} - \pi^{IV} + \pi''' - \pi'' + \pi' - \pi + \varphi = +(g + 3 - \beta + M)\omega$,
$W = \mathrm{H}\pi^{VI} - \pi^{V} + \pi^{IV} - \pi''' + \pi'' - \pi' + \pi - \varphi = -(5 - \beta + M)\omega$.

XLIX. Cela posé la destruction des couleurs fournit cette équation :

$$-\frac{\omega}{S}+\frac{\omega}{T}+\frac{\omega}{V}-\frac{\omega}{W}=0,$$

à la quelle je satisferai en posant $S=-W$ & $-T=V=-\zeta W$. Soit ensuite comme ci-dessus $M=\frac{5i}{m(i+1)}$, $\beta-M=\frac{5}{i+1}$ & $\beta=\frac{5(m+i)}{m(i+1)}$, d'où nous tirons :

$W=-\frac{5i}{i+1}\omega$, $S=(d+\frac{5}{i+1})\omega=\frac{5i}{i+1}\omega$, donc $d=\frac{5(i-1)}{i+1}$

$-T=(e-\frac{i+4}{i+1})\omega=\frac{5\zeta i}{i+1}\omega$, donc $e=\frac{(5\zeta+1)i-4}{i+1}$.

$V=(g+\frac{3i-2}{i+1})\omega=\frac{5\zeta i}{i+1}\omega$, donc $g=\frac{(5\zeta-3)i+2}{i+1}$

ensuite $R=-\frac{5}{i+1}\omega$ & $Q=\mathrm{B}\cdot\frac{5(m+i)}{m(i+1)}$, & après $\frac{\phi}{Q}=0$; $\frac{\mathrm{B}\phi}{Q}=\frac{i}{m+i}$, $\frac{\phi}{\mathrm{R}}=-\frac{i}{m}$, $\frac{\phi}{S}=\frac{1}{m}$, $\frac{\phi}{T}=-\frac{1}{\zeta m}$, $\frac{\phi}{U}=0$, or $\frac{\mathrm{F}\phi}{U}=-\frac{5i}{m(i+1)}$, $\frac{\phi}{V}=\frac{1}{\zeta m}$ & $\frac{\phi}{W}=-\frac{1}{m}$, d'où nous trouvons les déterminations suivantes :

$q=\frac{1}{m+1}p$, $\quad AB=p$,

$r=ci\cdot\frac{p}{m}$, $\quad BC=i\cdot\frac{p}{m}$,

$s=\frac{c}{1-c}\cdot d\cdot\frac{p}{m}$, $\quad CD=\frac{c}{1-c}(i-1)\cdot\frac{p}{m}$,

$t=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{\zeta}\cdot\frac{p}{m}$, $DE=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{\zeta-1}{\zeta}\cdot\frac{p}{m}$.

$u=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{1+e}\cdot\frac{5i}{i+1}\cdot\frac{p}{m}$,

$EF=\frac{c}{1-c}\cdot\frac{d}{1+d}\cdot\frac{e}{1+e}\cdot\frac{1}{\zeta}\cdot\frac{p}{m}$,

$$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

$$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{g-1} \cdot \frac{p}{m},$$

$$GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{d}{1+d} \cdot \frac{e}{1+e} \cdot \frac{g}{1-g} \cdot \frac{\zeta-1}{\zeta} \cdot \frac{p}{m},$$

& pour le lieu de l' œil la diſtance $HO = \frac{i+1}{5i} w$, le demi-diamètre du champ étant $\varphi = \frac{5i}{m(i+1)} \omega$.

L. Conſidérons ici trois hipothéſes, puiſqu'il vaut bien la peine examiner auſſi le cas $i = 4$.

1° Si $i = 2$, on aura $d = \frac{5}{3}$, $e = \frac{10\zeta - 2}{3}$,

$$g = \frac{10\zeta - 4}{3}, \quad \varphi = \frac{10}{3m}\omega.$$

2° Si $i = 3$, on aura $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{15\zeta - 1}{4}$,

$$g = \frac{15\zeta - 7}{4}, \quad \varphi = \frac{15}{4m}\omega.$$

3° Si $i = 4$, on aura $d = 3$, $e = 4\zeta$,

$$g = 4\zeta - 2, \quad \varphi = \frac{4}{m}\omega,$$

où la valeur de ζ doit être priſe enſorte, qu'aucune des diſtances entre les verres ne devienne trop petite, & cette condition eſt très-bien remplie en poſant $\zeta = 2$; donc ſi nous mettons enſuite $\omega = \frac{1}{4}$, nous aurons dans nos trois hypothéſes:

1° Si $i = 2$, $d = \frac{5}{3}$, $e = 6$, $g = \frac{16}{3}$,

$$\varphi = \frac{5}{6m}, \text{ ou } \varphi = \frac{2864}{m} \text{ min.}$$

2° Si $i = 3$, $d = \frac{5}{2}$, $e = \frac{29}{4}$, $g = \frac{23}{4}$,

$$\varphi = \frac{15}{16m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3222}{m} \text{ min.}$$

3° Si $i = 4$, $d = 3$, $e = 8$, $g = 6$,

$$\varphi = \frac{1}{m}, \text{ ou } \varphi = \frac{3437}{m} \text{ min.}$$

1re *Hipothéſe* $i = 2$ & $\zeta = 2$.

LI. Dans cette hypothéſe ſi l'on ſe ſert d'un objectif ſimple, il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{2}{c^3})}$. Mais ſi l'on eſt pourvu d'un objectif composé, on pourra prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Dans l'un & l'autre cas les déterminations ſeront :

$q = \frac{2}{m+2}\, p$, $\quad BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad AB = p$

$r = c \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $\quad CR = \frac{1}{30}$ pouc. $BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad DS = \frac{1}{4}\, s$ $\quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{8} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad ET = \frac{1}{4}\, t$ $\quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{16} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{25}{14} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad FU = \frac{1}{4}\, u$ $\quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{10}{7} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad GV = \frac{1}{4}\, v$ $\quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{15}{56} \cdot \frac{p}{m}$

$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{60}{91} \cdot \frac{p}{m}$, $\quad HW = \frac{1}{4}\, w$ $\quad GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{30}{91} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l'œil $HO = \frac{3}{10} w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{18}{91} \cdot \frac{p}{m}$, le demi-diamètre du champ étant de $\frac{2864}{m}$ minutes.

LII. Quand on ſe ſert d' un objectif composé, il conviendra de prendre $c = \frac{3}{4}$; mais n'en employant qu'un ordinaire, je voudrois prendre $c = \frac{3}{5}$ ou $\frac{c}{1-c} = \frac{3}{2}$, & on aura les meſures ſuivantes :

Diſtances de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+10)}$	$AP = \frac{m}{60}$	$AB = p$
en $B = q = \frac{2}{m+2} p$	$BQ = \frac{5}{6} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 2 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{6}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{30}$	$CD = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{15}{32} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{45}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{45}{64} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{75}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{75}{112} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{45}{112} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{15}{7} \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{15}{28} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{45}{91} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{90}{91} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{45}{182} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{27}{91} \cdot \frac{p}{m}$

qu'on appliquera aiſément à chaque cas propoſé.

2

2de *Hipothéſe* $i = 3$ & $\zeta = 2$.

LIII. En ſe ſervant d' un objectif ſimple il faut prendre $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{3}{c^3})}$, pendant que la diſtance de

foyer

foyer d'un objectif composé, peut être prise $p = \frac{m}{2}$ pouces. En voici les déterminations pour l' un & l' autre cas:

$q = \frac{3}{m+3} p$ $\quad BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}$, $AB = p$

$r = c \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$ $\quad CR = \frac{1}{20}$ pouc., $BC = 3 \frac{p}{m}$

$s = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad DS = \frac{1}{4} s$, $\quad CD = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$

$t = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{56} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad$ &c. $\quad DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{5}{14} \cdot \frac{p}{m}$

$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{725}{308} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m}$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{1848} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{145}{462} \cdot \frac{p}{m}$

$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$ $\quad GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3335}{8778} \cdot \frac{p}{m}$

Pour le lieu de l' œil $HO = \frac{4}{15} w$ & $\varphi = \frac{3222}{m}$ minutes.

LIV. Quand on se sert d' un objectif composé, où $\frac{p}{m} = \frac{1}{2}$ pouce, on prendra commodement $c = \frac{3}{4}$, mais en employant un objectif simple, je supposerai $c = \frac{2}{3}$, & on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+12)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{15}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$ pouc.	$CD = 4 \cdot \frac{p}{m}$

Diſt. de foyer des verres	Demid. des ouvertures	Interval. entre les verres
en $D = s = 5 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{5}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{5}{7} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{145}{28} \cdot \frac{p}{m}$	&c.	$EF = \frac{145}{231} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{725}{154} \cdot \frac{p}{m}$		$FG = \frac{145}{237} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = \frac{3335}{924} \cdot \frac{p}{m}$		$GH = \frac{3335}{4389} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{6670}{4389} \cdot \frac{p}{m}$		$HO = \frac{5336}{13167} \cdot \frac{p}{m}$

La ſeule difficulté qu'on rencontrera dans l'exécution, ſe trouvera dans la grandeur des verres oculaires, dont l'ouverture peut paſſer pluſieurs pouces dans les grands groſſiſſemens.

3^{me} Hipothéſe $i = 4$ & $\zeta = 2$.

LV. Lorſque l'objectif eſt ſimple, il faut prendre ſa diſtance de foyer $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + \frac{4}{c^3})}$ pouces, pendant que pour un composé il ſuffiroit de prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces. Les autres déterminations ſont :

$q = \frac{-4}{m+4} p$,	$BQ = \frac{p}{m}$	$AB = p$
$r = c \cdot 4 \cdot \frac{p}{m}$,	$CR = \frac{1}{15}$ pouc.	$BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$
$s = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$,	$DS = \frac{1}{4} s \cdot$	$CD = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$
$t = \frac{c}{1-c} \cdot 3 \cdot \frac{p}{m}$,	&c.	$DE = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$
$u = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}$,		$EF = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$

$v = \frac{c}{1-c} \cdot 2 \cdot \frac{p}{m}$, $\qquad FG = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$

$w = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$, $\qquad GH = \frac{c}{1-c} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Pour le lieu de l' œil la diſtance $HO = \frac{1}{4} w = \frac{c}{1-c} \times \frac{1}{5} \times \frac{p}{m}$, le demidiamètre du champ apparent étant $\varphi = \frac{1}{m}$, ou $\varphi = \frac{3437}{m}$ minutes.

LVI. Quand on ſe ſert d' un objectif compoſé, on pourra bien prendre $c = \frac{3}{4}$, ſans que les verres deviennent trop grands, mais pour les objectifs ordinaires il vaudra mieux d' augmenter la diſtance de foyer p, que d'admettre de trop grands oculaires ; je poſerai donc $c = \frac{1}{2}$.

Diſt. de foyer des verres	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{2}{4} m \sqrt[3]{(m+32)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{4}{m+4} p$	$BQ = \frac{p}{m}$	$BC = 4 \cdot \frac{p}{m}$
en $C = r = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{15}$ pouc.	$CD = 3 \cdot \frac{p}{m}$
en $D = s = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = 3 \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{3}{4} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{8}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{2}{3} \cdot \frac{p}{m}$	$FG = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{m}$
en $G = v = 2 \cdot \frac{p}{m}$	$GV = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$GH = \frac{2}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $H = w = \frac{4}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HW = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$HO = \frac{1}{5} \cdot \frac{p}{m}$

Donc la longueur de la Lunette $AO = p + 8\frac{77}{120} \times \frac{p}{m}$; d' où je tirerai les devis ſuivans pour la pratique.

LVII. Mais j' obſerve avant toutes choſes que dans le cas de huit verre les deux premieres hypothéſes, où $i = 2$ & $i = 3$ ne ſauroient avoir lieu dans la pratique, puiſque le ſecond verre B devroit avoir une ouverture, dont le demi-diamètre ſurpaſsât la quatriéme partie de ſa diſtance de foyer. Ce même inconvénient a bien encore lieu dans la troiſiéme hypothéſe, mais dès que le groſſiſſement eſt conſidérable, la quantité BQ ſurpaſſe ſi peu $\frac{1}{4}q$, que la figure du verre pourroit bien admettre une telle ouverture. Supposons que ce verre puiſſe ſouffrir une ouverture dont le demi-diamètre $BQ = \frac{1}{3}q$, & nous aurons $\frac{p}{m} = \frac{4}{3(m+4)}p$, donc $m = 12$, ou dès que le groſſiſſement m ſurpaſſe 12, l' exécution ſera poſſible. Il en eſt de même des Lunettes à 7 verres, où l' hypothéſe $i = 2$ ne ſauroit avoir lieu, & poſant $i = 3$, il faut que le groſſiſſement m ſurpaſſe 9 pour que le demi-diamètre de l' ouverture BQ devienne plus petit que le tiers de la diſtance de foyer q. Or dans le cas de 6 verres l' hypothéſe $i = 2$ n' a lieu que lorſque $m > 6$, mais l' autre $i = 3$ donne toujours $BQ = < \frac{1}{3}q$, & même $BQ < \frac{1}{4}q$, ſi $m > 9$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 15 fois.

LVIII. Il faudra bien prendre $p = 40$ pouces, & alors les mesures seront exprimées en pouces.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 40,00$	$\begin{cases} 24,34 \\ 191,93 \end{cases}$	0, 25	$AB = 40,00$
en $B = 8,42$	9, 09	2, 67	$BC = 10,67$
en $C = 5,33$	5, 76	0, 07	$CD = 8,00$
en $D = 8,00$	8, 64	2, 00	$DE = 1,00$
en $E = 8,00$	8, 64	2, 00	$EF = 0,89$
en $F = 7,11$	7, 68	1, 78	$FG = 0,89$
en $G = 5,33$	5, 76	1, 33	$GH = 1,07$
en $H = 2,13$	2, 30	0, 53	$HO = 0,53$

la longueur de toute la Lunette $AO = 63,05$.
le demi-diamètre du champ apparent $= 3°, 49'$

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 25 fois.

LIX. On prendra $p = 75$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = 3$ pouces, & on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 75,00$	$\begin{cases} 45,64 \\ 359,87 \end{cases}$	0, 42	$AB = 75,00$
en $B = 10,34\frac{1}{2}$	11, 17	3, 00	$BC = 12,00$
en $C = 6,00$	6, 48	0, 07	$CD = 9,00$
en $D = 9,00$	9, 72	2, 25	$DE = 1,12\frac{1}{2}$
en $E = 9,00$	9, 72	2, 25	$EF = 1,00$
en $F = 8,00$	8, 64	2, 00	$FG = 1,00$
en $G = 6,00$	6, 48	1, 50	$GH = 1,20$
en $H = 2,40$	2, 59	0, 60	$HO = 0,60$

la longueur de toute la Lunette $AO = 106, 92 \frac{1}{2}$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2^\circ\ 17'$.

Devis d'une Lunette à 8 verres qui grossit 50 fois.

LX. On prendra $p = 166 \frac{2}{3}$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{10}{3}$ pouces, & on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 166, 67$	$\begin{cases} 101, 42 \\ 799, 70 \end{cases}$	0, 83	$AB = 166, 67$
en $B = 12, 34$	13, 33	3, 33	$BC = 13, 33$
en $C = 6, 67$	7, 20	0, 07	$CD = 10, 00$
en $D = 10, 00$	10, 80	2, 50	$DE = 1, 25$
en $E = 10, 00$	10, 80	2, 50	$EF = 1, 11$
en $F = 8, 89$	9, 60	2, 22	$FG = 1, 11$
en $G = 6, 67$	7, 20	1, 67	$GH = 1, 33$
en $H = 2, 67$	2, 88	0, 67	$HO = 0, 67$

la longueur de toute la Lunette $AO = 195, 47$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^\circ, 8'$.

LXI. Comme la grandeur des verres pourroit arrêter l'exécution, en cas qu'on veuille se contenter d'un moindre champ qui surpasse pourtant encore le double de celui, qu'offrent les Lunettes ordinaires, les plus commodes de ces sortes de Lunettes semblent celles qui contiennent 6 verres, où posant $i = 3$, je prendrai $c = \frac{1}{2}$ pour éviter de grands verres, ce qui fournit ces déterminations.

Dist. de foyer des verres	Demid. de l' ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m+24)}$	$AP = \frac{m}{60}$ pouc.	$AB = p$
en $B = q = \frac{3}{m+3} p$	$BQ = \frac{9}{16} \cdot \frac{p}{m}$	$BC = 3 \frac{p}{m}$
en $C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$CR = \frac{1}{20}$	$CD = 2 \frac{p}{m}$
en $D = s = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$	$DS = \frac{3}{8} \cdot \frac{p}{m}$	$DE = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $E = t = \frac{27}{20} \cdot \frac{p}{m}$	$ET = \frac{21}{80} \cdot \frac{p}{m}$	$EF = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$
en $F = u = \frac{3}{5} \cdot \frac{p}{m}$	$FU = \frac{3}{20} \cdot \frac{p}{m}$	$FO = \frac{4}{15} \cdot \frac{p}{m}$

& le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{1933}{m}$ minutes.

Dèvis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 10 fois.

LXII. On prendra ici $p = 25$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$ pouces, & on aura les mesures suivantes.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 25,00$	$\begin{cases} 15,11 \\ 119,95 \end{cases}$	0, 17	$AB = 25,00$
en $B = 5,77$	6, 23	1, 40	$BC = 7,50$
en $C = 3,75$	4, 05	0, 05	$CD = 5,00$
en $D = 3,75$	4, 05	0, 94	$DE = 1,50$
en $E = 3,37\frac{1}{2}$	$3,64\frac{1}{2}$	0, 84	$EF = 1,50$
en $F = 1,50$	1, 62	0, 38	$FO = 0,67$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = 41,17$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $3^\circ, 13'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 15 fois.

LXIII. Je prendrai $p = 40$, d'où $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & les mesures seront :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 40, 00$	24, 34 191, 93	0, 25	$AB = 40, 00$
en $B = 6, 67$	7, 20	1, 50	$BC = 8, 00$
en $C = 4, 00$	4, 32	0, 05	$CD = 5, 33$
en $D = 4, 00$	4, 32	1, 00	$DE = 1, 60$
en $E = 3, 60$	3, 89	0, 90	$EF = 1, 60$
en $F = 1, 60$	1, 73	0, 40	$FO = 0, 71$

la longueur de toute la Lunette $AO = 57, 24$ pouces, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2°, 9$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 20 fois.

LXIV. Je prendrai $p = 55$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, & les mesures sont :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = 55, 00$	33, 46 263, 90	0, 33	$AB = 55, 00$
en $B = 7, 18$	7, 75	1, 55	$BC = 8, 25$
en $C = 4, 12\frac{1}{2}$	4, 45	0, 05	$CD = 5, 50$
en $D = 4, 12\frac{1}{2}$	4, 45	1, 03	$DE = 1, 65$
en $E = 3, 71$	4, 05	0, 93	$EF = 1, 65$
en $F = 1, 65$	1, 78	0, 41	$FO = 0, 73$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72, 78$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1°, 36'$.

Devis

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 25 fois.

LXV. Je prendrai ici $p = 70$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, &

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 70, 00$	$\begin{cases} 42, 59 \\ 335, 87 \end{cases}$	0, 42	$AB = 70, 00$
en $B = 7, 50$	8, 10	1, 57	$BC = 8, 40$
en $C = 4, 20$	4, 54	0, 05	$CD = 5, 60$
en $D = 4, 20$	4, 54	1, 05	$DE = 1, 68$
en $E = 3, 78$	4, 09	0, 95	$EF = 1, 68$
en $F = 1, 68$	1, 81	0, 42	$FO = 0, 75$

la longueur de toute la Lunette $AO = 88, 11$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1°, 17'$

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 30 fois.

LXVI. Je prendrai ici $p = 90$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces, & les mesures seront

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 90, 00$	$\begin{cases} 54, 77 \\ 431, 84 \end{cases}$	0, 50	$AB = 90, 00$
en $B = 8, 18$	8, 84	1, 69	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4, 86	0, 05	$CD = 6, 00$
en $D = 4, 50$	4, 86	1, 13	$DE = 1, 80$
en $E = 4, 05$	4, 37	1, 01	$EF = 1, 80$
en $F = 1, 80$	1, 94	0, 45	$FO = 0, 80$

la longueur de la Lunette $AO = 109, 40$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1°, 4'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 40 fois.

LXVII. Je prendrai ici $p = 120$ pouces, d'où $\frac{p}{m} = 3$ pouces &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Interval. entre les verres
en $A = 120, 00$	73, 02 575, 78	0, 67	$AB = 120$
en $B =$ 8, 37	9, 04	1, 69	$BC =$ 9, 00
en $C =$ 4, 50	4, 86	0, 05	$CD =$ 6, 00
en $D =$ 4, 50	4, 86	1, 13	$DE =$ 1, 80
en $E =$ 4, 05	4, 37	1, 01	$EF =$ 1, 80
en $F =$ 1, 80	1, 94	0, 45	$FO =$ 0, 80

la longueur de toute la Lunette $AO = 139, 40$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 48'$.

Devis d'une Lunette à 6 verres qui grossit 50 fois.

LXVIII. Je prendrai ici $p = 160$ pouces, d' où $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$ &c.

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 160, 00$	97, 36 767, 71	0, 83	$AB = 160, 00$
en $B =$ 9, 06	9, 79	1, 80	$BC =$ 9, 60
en $C =$ 4, 80	5, 18	0, 05	$CD =$ 6, 40
en $D =$ 4, 80	5, 18	1, 20	$DE =$ 1, 92
en $E =$ 4, 32	4, 66	1, 08	$EF =$ 1, 92
en $F =$ 1, 92	2, 07	0, 48	$FO =$ 0, 85

Donc la longueur de la Lunette $AO = 180, 69$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 39'$.

LXIX. J' ajouterai encore de ſemblables devis pour des Lunettes à 7 verres, en évitant les cas, où les verres deviendroient trop grands. Pour cet effet je ſuppoſerai dans les déterminations du §. XLVI. la lettre $c = \frac{1}{2}$, où à cauſe de $i = 3$, la diſtance de foyer de l' objectif doit être priſe $p = \frac{3}{4} m \sqrt[3]{(m + 24)}$, & les meſures, pour chaque groſſiſſement $= m$, doivent être tirées des formules ſuivantes.

en $B = q = \frac{3}{m+3} p$, $BQ = \frac{3}{4m} p$, $AB = p$

en $C = r = \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{m}$, $CR = \frac{1}{20}$, $BC = 3 \cdot \frac{p}{m}$

en $D = s = 2 \cdot \frac{p}{m}$, $DS = \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{m}$, $CD = 2 \cdot \frac{p}{m}$

en $E = t = 2 \cdot \frac{p}{m}$, $ET = \frac{1}{4} \cdot \frac{p}{m}$, $DE = \frac{5}{12} \cdot \frac{p}{m}$

en $F = u = \frac{14}{9} \cdot \frac{p}{m}$, $FU = \frac{7}{18} \cdot \frac{p}{m}$, $EF = \frac{4}{9} \cdot \frac{p}{m}$

en $G = v = \frac{56}{81} : \frac{p}{m}$, $GV = \frac{14}{81} \cdot \frac{p}{m}$, $FG = \frac{35}{81} \cdot \frac{p}{m}$

& pour le lieu de l' œil la diſtance $GO = \frac{56}{243} \cdot \frac{p}{m}$.

Or le demi-diamètre du champ apparent $= \frac{2578}{m}$ minutes, d' où je déduis les devis ſuivans.

Devis d' une Lunette à 7 verres qui groſſit 10 fois.

LXX. En prenant donc ici $p = 25$ pouces, de ſorte que $\frac{p}{m} = \frac{5}{2}$, on aura les meſures ſuivantes en pouces:

Dift. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en A = 25, 00	15, 21 / 119, 95	0, 17	AB = 25, 00
en B = 5, 77	6, 23	1, 87	BC = 7, 50
en C = 3, 75	4, 05	0, 05	CD = 5, 00
en D = 5, 00	5, 40	1, 25	DE = 1, 04
en E = 5, 00	5, 40	1, 25	EF = 1, 11
en F = 3, 89	4, 20	0, 97	FG = 1, 08
en G = 1, 73	1, 87	0, 43	GO = 0, 58

Donc la longueur de toute la Lunette AO = 41, 31, & le demi-diamètre du champ apparent = 4°, 18′.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui groſſit 15 fois.

LXXI. Je poſe pour ce groſſiſſement, comme auparavant $p = 40$ pouces, de ſorte que $\frac{p}{m} = \frac{8}{3}$, & de là on aura les meſures ſuivantes :

Dift. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en A = 40, 00	24, 34 / 191, 93	0, 25	AB = 40, 00
en B = 6, 67	7, 20	2, 00	BC = 8, 00
en C = 4, 00	4, 32	0, 05	CD = 5, 33
en D = 5, 33	5, 76	1, 33	DE = 1, 11
en E = 5, 33	5, 76	1, 33	EF = 1, 18
en F = 4, 15	4, 48	1, 04	FO = 1, 15
en G = 1, 85	2, 00	0, 46	GO = 0, 62

la longueur de toute la Lunette AO = 57, 39, & le demi-diamètre du champ apparent = 2°, 52′.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 20 fois.

LXXII. En prenant ici $p = 55$ pouces, d'où l'on a $\frac{p}{m} = \frac{11}{4}$, on aura les mesures suivantes:

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 55,00$	$\begin{cases} 33,46 \\ 263,90 \end{cases}$	0,33	$AB = 55,00$
en $B = 7,18$	7,75	2,06	$BC = 8,25$
en $C = 4,12\frac{1}{2}$	4,45	0,05	$CD = 5,50$
en $D = 5,50$	5,94	1,38	$DE = 1,15$
en $E = 5,50$	5,94	1,38	$EF = 1,22$
en $F = 4,28$	4,62	1,07	$FG = 1,19$
en $G = 1,90$	2,05	0,48	$GO = 0,63$

la longueur de toute la Lunette $AO = 72,94$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 2°, 9'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 25 fois.

LXXIII. En supposant comme auparavant $p = 70$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{14}{5}$, nous aurons les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 70,00$	$\begin{cases} 42,59 \\ 336,87 \end{cases}$	0,42	$AB = 70,00$
en $B = 7,50$	8,10	2,10	$BC = 8,40$
en $C = 4,20$	4,54	0,05	$CD = 5,60$
en $D = 5,60$	6,05	1,40	$DE = 1,17$
en $E = 5,60$	6,05	1,40	$EF = 1,24$
en $F = 4,36$	4,71	1,09	$FO = 1,21$
en $G = 1,94$	2,10	0,49	$GO = 0,65$

la longueur de toute la Lunette $AO = 88, 27$, & le demi-diamètre du champ apparent $1^\circ, 43'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 30 fois.

LXXIV. La distance de foyer de l'objectif étant prise $p = 90$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = 3$, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en $A = 90, 00$	54, 77 431, 84	0,50	$AB = 90, 00$
en $B = 8, 18$	8, 84	2, 25	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4, 86	0, 05	$CD = 6, 00$
en $D = 6, 00$	6, 48	1, 50	$DE = 1, 25$
en $E = 6, 00$	6, 48	1, 50	$EF = 1, 33$
en $F = 4, 67$	5, 04	1, 17	$FO = 1, 29$
en $G = 2, 07$	2, 24	0, 52	$GO = 0, 69$

la longueur de toute la Lunette $AO = 109, 56$, & le demi-diamètre du champ apparent $= 1^\circ, 26'$.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 40 fois.

LXXV. En prenant ici, comme ci-dessus, $p = 120$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m}$ soit $= 3$, on aura les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons des faces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en $A = 120, 00$	73, 02 575, 78	0, 67	$AB = 120, 00$
en $B = 8, 37$	9, 04	2, 25	$BC = 9, 00$
en $C = 4, 50$	4, 86	0, 05	$CD = 6, 00$

Dist. de foyer des verres	Rayons desfaces	Demid. de l'ouverture	Intervalles entre les verres
en D = 6, 00	6, 48	1, 50	DE = 1, 25
en E = 6, 00	6, 48	1, 50	EF = 1, 33
en F = 4, 67	5, 04	1, 17	FG = 1, 29
en G = 2, 07	2, 24	0, 52	GO = 0, 69

la longueur de toute la Lunette AO = 139, 56, & le demi-diamètre de l'ouverture = 1°, 5'.

Devis d'une Lunette à 7 verres qui grossit 50 fois.

LXXVI. Je prendrai ici, comme auparavant, $p = 160$ pouces, de sorte que $\frac{p}{m} = \frac{16}{5}$, & j'en trouve les mesures suivantes :

Dist. de foyer des verres	Rayons desfaces	Demid. de l'ouverture	Intervall. entre les verres
en A = 160, 00	{ 97, 36 767, 71	0, 83	AB = 160, 00
en B = 9, 06	9, 79	2, 40	BC = 9, 60
en C = 4, 80	5, 18	0, 05	CD = 6, 40
en D = 6, 40	6, 91	1, 60	DE = 1, 33
en E = 6, 40	6, 91	1, 60	EF = 1, 42
en F = 4, 98	3, 38	1, 25	FG = 1, 38
en G = 2, 22	2, 40	0, 56	GO = 0, 67

Donc la longueur de toute la Lunette AO = 180, 80, & le demidiamètre du champ apparent = 51'.

De la construction de ces Lunettes en y employant un verre objectif composé.

LXXVII. De la manière que j'ai ici considéré la confusion, celle qui résulte du troisiéme verre est repréſentée par cette formule $\frac{i}{mc^3}$, laquelle étant indiquée par la lettre M, j'ai fait voir ailleurs que pour détruire cette confuſion auſſi bien que celle de l' objectif, celui-ci doit être compoſé de deux verres l' un convexe, & l' autre concave enſorte qu'il ſoit, poſant p pour la diſtance de foyer de l' objectif entier :

Du premier verre

$$\text{le rayon de la face}\begin{cases}\text{de devant} = 0,51467\,p\\ \text{de derrière} = 4,05851\,p\end{cases}$$

De l' autre verre

$$\text{le rayon de la face}\begin{cases}\text{de devant} = -0,73978\,p + 0,7319\,Mp\\ \text{de derrier} = +1,01897\,p - 1,3885\,Mp\end{cases}$$

Cependant il faut ici remarquer, que comme les autres verres produiſent auſſi quelque confuſion, il faut prendre $M > \frac{i}{mc^3}$, & il eſt même bon d'en prendre la valeur un peu trop grande, puiſqu'on eſt en état de redreſſer cette faute, en éloignant les deux verres l' un de l'autre plus que je ne l' ai ſuppoſé dans le calcul, où leur diſtance a été ſuppoſée $= \frac{1}{80}p$.

LXXVIII. Je n' appliquerai ces objectifs qu'au cas de ſix verres, & à l' hypothéſe, où j' ai ſuppoſé $i = 3$ & $c = \frac{5}{6}$; de là j' aurai donc $\frac{i}{mc^3} = 5$, & partant, pour tenir compte des autres verres, je ſuppoſerai $M = \frac{10}{m}$, d' où l' on comprend aiſément que cette hypothéſe ne ſauroit être appliquée qu'aux cas, où le groſſiſſement eſt très-conſidérable, ou $\frac{10}{m}$ une fraction aſsès petite. Donc ſi nous prenons

$p =$

$p = \frac{m}{2}$, la conſtruction de notre objectif composé pour le groſſiſſement $= m$ ſera en pouces.

Du premier verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = 0,25734\, m \\ \text{de derrière} = 2,02926\, m \end{cases}$

De l'autre verre

le rayon de la face $\begin{cases} \text{de devant} = -(0,36989\, m - 3,659) \\ \text{de derrière} = +(0,50948\, m - 6,942) \end{cases}$

ce dernier verre eſt donc un meniſque tournant ſa face concave vers le premier verre.

Table pour la conſtruction de ces Lunettes.

Objectif composé

Groſſiſſement	Premier verre, Rayon de ſa face d'avant	Premier verre, Rayon de ſa face de derrière	L'autre verre Rayon de ſa face de devant	L'autre verre Rayon de ſa face de derrière	Diſt. de foyer du 2nd verre	Rayon de ſes deux faces	Demid. du champ apparent
m	+	+	—	+	—	+	
30	7, 72	60, 88	7, 44	8, 34	1, 36	1, 47	1°, 4′.
40	10, 29	81, 17	11, 14	13, 44	1, 39	1, 50	48′
50	12, 87	101, 46	14, 84	18, 53	1, 42	1, 53	38
60	15, 44	121, 75	18, 53	23, 63	1, 43	1, 54	32
70	18, 01	142, 05	22, 23	28, 72	1, 44	1, 55	28
80	20, 59	162, 34	25, 93	33, 82	1, 44	1, 55	24
90	23, 16	182, 63	29, 63	38, 91	1, 45	1, 56	21
100	25, 73	202, 93	33, 33	44, 00	1, 45	1, 56	19
125	32, 17	253, 66	42, 58	56, 74	1, 46	1, 57	16
150	38, 60	304, 39	51, 83	69, 48	1, 46	1, 57	13
175	45, 03	355, 12	61, 07	82, 22	1, 47	1, 58	11
200	51, 47	405, 85	70, 32	94, 95	1, 47	1, 58	9
250	64, 34	507, 32	88, 82	120, 43	1, 47	1, 58	$7\frac{1}{2}$
300	77, 20	608, 78	107, 31	145, 90	1, 48	1, 59	6
350	90, 07	710, 24	125, 81	171, 38	1, 48	1, 59	$5\frac{1}{2}$
400	102, 94	811, 70	144, 30	196, 85	1, 48	1, 59	5
450	115, 80	913, 17	162, 80	222, 32	1, 49	1, 60	$4\frac{1}{2}$
500	128, 67	1014, 63	181, 29	247, 80	1, 49	1, 60	4

Le ſecond verre B, dont la conſtruction eſt donnée ici, doit toujours être mis dans le foyer de l'objectif, & le demidiamètre de ſon ouverture eſt $\frac{3}{16}$ pouces, & de là jusqu'au troiſiéme verre C, la diſtance eſt $BC = 1\frac{1}{2}$ pouce.

Du troiſiéme verre C la diſtance de foyer eſt $= 1, 25$; donc le rayon de ſes deux faces $= 1, 35$, le demi-diamètre de ſon ouverture $= \frac{1}{20}$ pouce, & la diſtance $CD = 5$.

Du quatriéme verre D la diſtance de foyer eſt $= 3, 75$; donc le rayon de ſes faces $= 3, 89$, le demi-diamètre de ſon ouverture $= 0, 94$, & la diſtance $DE = 1, 5$.

Du cinquiéme verre E la diſtance de foyer eſt $= 3, 37\frac{1}{2}$; donc le rayon de ſes faces $= 3, 48$, le demi-diamètre de ſon ouverture $= 0, 84$, & la diſtance $EF = 1, 5$.

Du ſixiéme verre F la diſtance de foyer eſt $= 1, 50$; donc le rayon de ſes faces $= 1, 62$, le demidiamètre de ſon ouverture eſt $= 0, 37\frac{1}{2}$, & la diſtance de l'œil $FO = 0, 61$.

LXXIX. Mais en cas qu'on ne réuſſiſſe pas ſi heureuſement dans la conſtruction de ces objectis composés, qu'on puiſſe prendre $p = \frac{m}{2}$ pouces, il ſera bon de donner des régles plus générales pour les Lunettes, qu'on ſera en état d'en faire. Pour cet effet je poſe $p = nm$, afin qu'on puiſſe prendre pour n un nombre tel, que les circonſtances le permettront.

Je commencerai donc par le cas de 5 verres, en regardant la diſtance de foyer du dernier oculaire comme connue:

Du verre	Diſt. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{2(i+1)}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{3i-1}{2} t$
en D	$s = \frac{3i-1}{i+1} t$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EO = \frac{i+1}{2i} t$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(3i+1)}{2i} t$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{i}{2(i+1)m}$; or $\frac{c}{1-c} = \frac{3i-1}{2n(i-1)} t$; ce qui donne la valeur de c, & par conſéquent celle de r.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Diſt. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$ pouces	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{3in}{4(i+1)}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{4i-2}{3} u$
en D	$s = \frac{4i-2}{i+1} u$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = u$
en E	$t = \frac{3i}{i+1} u$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FO = \frac{i+1}{3i} u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n(m+i) + \frac{(i+1)(4i+1)}{3i} u$, & le demi-diamètre du champ $\varphi = \frac{3i}{4(i+1)m}$; or pour la diſtance de foyer r on a $\frac{c}{1-c} = \frac{4i-2}{3n(i-1)}$, d'où l'on doit tirer la valeur de c.

Pour le cas de 7 verres.

Poſant comme ci-deſſus $\zeta = 2$, nous aurons $\frac{c}{1-c} = \frac{5i-3}{4i-4} \times \frac{10i-2}{9i-3} \times \frac{5i+1}{6i+2} \times \frac{v}{n}$, d'où l'on doit tirer la valeur de c, alors on aura:

Du verre	Diſtance de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{i}{m+i} nm$	$BQ = \frac{in}{i+1}$	$BC = in$
en C	$r = cin$	$CR = \frac{i}{m} x$	$CD = \frac{5i-3}{4} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2}$
en D	$s = \frac{5i-3}{i+1} \cdot \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$	$DS = \frac{1}{4} s$	$DE = \frac{10i-2}{9i-3} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$
en E	$t = \frac{10i-2}{i+i} \cdot \frac{5i+1}{6i+2} \cdot \frac{v}{2}$	$ET = \frac{1}{4} t$	$EF = \frac{5i+1}{6i+2} \cdot v$
en F	$u = \frac{5i+1}{i+1} \cdot \frac{v}{2}$	$FU = \frac{1}{4} u$	$FG = \frac{1}{2} \cdot v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4} v$	$GO = \frac{i+1}{4i} \cdot v$

où le demi-diamètre du champ apparent ſera $\varphi = \frac{1}{(i+1)m}$; or afin que BQ ne ſurpaſſe point $\frac{1}{4} q$, il faut prendre $i > \frac{3m}{m-4}$.

LXXX. Donnons à i des valeurs convenables pour diminuer l'ouverture du second verre, & pour augmenter en même tems le champ apparent, & nous aurons les régles suivantes plus particulières.

Pour le cas de 5 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{3nm}{m+3}$	$BQ = \frac{3n}{8}$	$BC = 3n$
en C	$r = \frac{6nt}{2t+n}$	$CR = \frac{3x}{m}$	$CD = 4t$
en D	$s = 2t$	$DS = \frac{1}{2}t$	$DE = 2t$
en E	$t = t$	$ET = \frac{1}{4}t$	$EO = \frac{2}{3}t$

Donc la longueur de la Lunette $AO = n(m+3) + \frac{20}{3}t$, & le demidiamètre du champ apparent $\varphi = \frac{3}{8m}$, ou bien $\varphi = \frac{1289}{m}$ minutes.

Pour le cas de 6 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{5nm}{m+5}$	$BQ = \frac{5n}{8}$	$BC = 5n$
en C	$r = \frac{15nu}{3u+2n}$	$CR = \frac{5x}{m}$	$CD = 6u$

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en D	$s = 3\,u$	$DS = \frac{3}{4}\,u$	$DE = u$
en E	$t = \frac{5}{2}\,u$	$ET = \frac{5}{8}\,u$	$EF = u$
en F	$u = u$	$FU = \frac{1}{4}\,u$	$FO = \frac{2}{5}\,u$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n\,(m + 5) + \frac{42}{5}\,u$, & le demidiamètre du champ apparent $\varphi = \frac{5}{8\,m}$ ou bien $\varphi = \frac{2148}{m}$ minutes.

Pour le cas de 7 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = n\,m$	$AP = x$	$AB = n\,m$
en B	$q = \frac{7\,n\,m}{m+7}$	$BQ = \frac{7n}{8}$	$BC = 7\,n$
en C	$r = \frac{476\,nv}{68v+55n}$	$CR = \frac{7x}{m}$	$CD = \frac{408}{55}\,v$
en D	$s = \frac{204}{55}\,v$	$DS = \frac{51}{55}\,v$	$DE = \frac{51}{110}\,v$
en E	$t = \frac{153}{44}\,v$	$ET = \frac{153}{176}\,v$	$EF = \frac{9}{11}\,v$
en F	$u = \frac{9}{4}\,v$	$FU = \frac{9}{16}\,v$	$FG = \frac{1}{2}\,v$
en G	$v = v$	$GV = \frac{1}{4}\,v$	$GO = \frac{2}{7}\,v$

Donc la longueur de toute la Lunette $AO = n\,(m + 7) + \frac{332}{25}\,v$, & le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{7}{8\,m}$ ou bien $\varphi = \frac{3007}{m}$ minutes.

LXXXI. Si nous traitons de la même manière nos formules pour le cas de 8 verres, en supposant $i = 9$, & introduisant la distance de foyer du dernier oculaire, nous trouvons les formules suivantes, dont la connexion avec les cas précédens est remarquable.

Pour le cas de 8 verres.

Du verre	Dist. de foyer	Ouverture	Intervalles
en A	$p = nm$	$AP = x$	$AB = nm$
en B	$q = \frac{9nm}{m+9}$	$BQ = \frac{9n}{8}$	$BC = 9n$
en C	$r = \frac{9.1155nw}{1155w+988n}$	$CR = \frac{9x}{m}$	$CD = \frac{2310}{247}w$
en D	$s = \frac{1155}{247}w$	$DS = \frac{1155}{988}w$	$DE = \frac{231}{494}w$
en E	$t = \frac{231}{52}w$	$ET = \frac{231}{208}w$	$EF = \frac{11}{26}w$
en F	$u = \frac{99}{26}w$	$FU = \frac{99}{104}w$	$FG = \frac{11}{26}w$
en G	$v = \frac{11}{4}w$	$GV = \frac{11}{16}w$	$GH = \frac{1}{2}w$
en H	$w = w$	$HW = \frac{1}{4}w$	$HO = \frac{2}{9}w$

& le demi-diamètre du champ apparent $\varphi = \frac{9}{8m}$ ou $\varphi = \frac{3867}{m}$ minutes. De là on voit que la longueur de la Lunette croît à mesure qu'on augmente le champ apparent.

AVERTISSEMENT.

Comme le Mémoire précédent suppose celui que l'Auteur a donné dans le XIII. Volume de l'Académie de Berlin, on a cru devoir en extraire les formules principales, pour les mettre ici sous les yeux de nos Lecteurs.

FORMULES DE DIOPTRIQUE NÉCESSAIRES POUR L'INTELLIGENCE DU MÉMOIRE PRÉCÉDENT.

SOIENT (*fig.* * *plan.* 3) autant de lentilles qu'on voudra *PP*, *QQ*, *RR* &c. rangées sur le même axe $a\,o$, de manière qu'elles forment une Lunette quelconque. Imaginons que $a\alpha$ soit un objet donné, & que $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$, $e\,\varepsilon$ &c. soient les différentes images de cet objet formées par les lentilles *PP*, *QQ*, *RR* &c., de sorte que les points de l'axe b, c, d &c. soient les foyers des rayons qui partent du point a, & les points β, γ, δ &c., (qui se déterminent en tirant les perpendiculaires $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ &c., & menant ensuite les droites $\alpha A \beta$, $\beta B \gamma$, $\gamma c \delta$ &c.) soient les foyers des rayons qui partent du point α placé hors de l'axe. On voit aisément que le rayon αA, qui passe par le centre de la lentille *PP*, & qui doit être regardé comme le principal de tous ceux qui partent du point α, ira rencontrer la lentille *QQ* en *Q*, que de là il passera par γ, & rencontrera la lentille *RR* en *R*, ensuite la lentille *SS* en *S* &c., & enfin la lentille *XX* en *X*, d'où il sortira parallélement au rayon ηG, à cause que tous

tous les rayons doivent ſe trouver paralléles entr'eux au ſortir de la dernière lentille.

Soit maintenant O le point où le rayon XO coupera l'axe, ce point ſera celui où il faudra placer l'œil pour voir le point α, c'eſt-à-dire pour pouvoir découvrir un champ apparent égal à l'angle $\alpha A a$; l'angle $XOG = \eta Gg$, comparé à l'angle $\alpha A a$, déterminera le groſſiſſement de la Lunette; & les parties BQ, CR, DS &c. des lentilles ſeront les ouvertures qu'il faudra leur donner pour pouvoir joüir de tout le champ $aA\alpha$.

Cela poſé ſoit: $aA\alpha = \varphi$, $aA = \infty$, $GO = k$; enſuite $\frac{Bc}{bB} = B$, $\frac{Cd}{cC} = C$, $\frac{De}{dD} = D$, $\frac{Ef}{eE} = E$ &c.

Soient de plus p, q, r, s &c. les diſtances focales des lentilles PP, QQ, RR, SS &c., & πq, $\pi' r$, $\pi'' s$ &c. les demi-diamètres BQ, CR, DS &c. des ouvertures des verres QQ, RR, SS &c. en tant qu'elles contribuent au champ apparent, on aura, en faiſant pour abreger

$$\mathrm{B} = \frac{B}{B+1},\ \mathrm{C} = \frac{C}{C+1},\ \mathrm{D} = \frac{D}{D+1}\ \&c.$$

Diſtances focales
$$\begin{cases} q = \dfrac{\mathrm{B}\varphi}{\mathrm{B}\pi - \varphi}\,p \\[2ex] r = \dfrac{B\mathrm{C}\varphi}{\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi}\,p \\[2ex] s = \dfrac{B\mathrm{C}\mathrm{D}\varphi}{\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi}\,p \\ \&c. \end{cases}$$

Intervalles entre les verres
$$\begin{cases} AB = \dfrac{\mathrm{B}\pi}{\mathrm{B}\pi - \varphi}\,p \\[2ex] BC = \dfrac{(B\mathrm{C}\pi' - \mathrm{B}\pi)\varphi}{(\mathrm{B}\pi - \varphi)(\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi)}\,p \\[2ex] CD = \dfrac{B(\mathrm{C}\mathrm{D}\pi'' - \mathrm{C}\pi')\varphi}{(\mathrm{C}\pi' - \pi + \varphi)(\mathrm{D}\pi'' - \pi' + \pi - \varphi)}\,p \\ \&c. \end{cases}$$

Diſtances de l' œil

Pour un ſeul verre $k = 0$

Pour 2 verres $k = \frac{\varphi \pi}{(B\pi - \varphi)^2} p$

Pour 3 verres $k = \frac{B\varphi\pi'}{(C\pi' - \pi + \varphi)^2} p$

Pour 4. verres $k = \frac{BC\varphi\pi''}{(D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi)^2} p$

&c.

Enfin ſoit m le nombre qui exprime la multiplication des diamètres apparens des objets, on aura l' équation

$$\pm\, m = \varphi - \pi + \pi' - \pi'' + \&c.$$

le ſigne + eſt pour le cas, où les objets ſont repréſentés debout, & le ſigne — pour le cas oppoſé, de ſorte que l' on aura :

pour le premier cas . . . $\varphi = \frac{-\pi + \pi' - \pi''\ \&c.}{m - 1}$

& pour le ſecond cas . . . $\varphi = \frac{+\pi - \pi' + \pi''\ \&c.}{m + 1}$

Pour ce qui eſt de l' aberration des lentilles, on trouve;

1° Que celle qui vient de la diverſe refrangibilité des rayons ſera anéantie en ſatisfaiſant à cette équation

$$0 = \frac{\pi}{B\pi - \varphi} + \frac{\pi'}{C\pi' - \pi + \varphi} + \frac{\pi''}{D\pi'' - \pi' + \pi - \varphi} + \&c.$$

2° Que l' autre aberration, celle qui vient de la figure ſphérique des verres, eſt exprimée pour chaque lentille par la formule ſuivante :

$$\frac{\mu x^3}{p} (\lambda (A + 1)^2 + \nu A)$$

x étant le demidiamètre de l' ouverture, A le raport de la diſtance entre le point rayonnant & la lentille, à la diſtance entre le foyer des rayons rompus & la même lentille, μ, ν des nombres dépendans du raport de refraction dans le verre, & λ un nombre $=$ ou $>$ 1.

3° Que l'aberration étant donnée, la figure de la lentille doit être telle que l'on ait :

Rayon de la surface tournée vers le point lumineux $\left\{ \dfrac{p}{\rho A + \sigma(1-A) \pm \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} \right.$

Rayon de la surface opposée $\left\{ \dfrac{p}{\sigma A + \rho(1-A) \mp \tau\sqrt{(\lambda - 1)}} \right.$

où p est la distance focale, A est $= \dfrac{A}{A+1}$, & ρ, σ, τ sont des nombres, qui dépendent de la raison de refraction; d'où l'on voit qu'il y a toujours deux figures à donner à une lentille, pour qu'elle produise une aberration donnée, excepté dans le cas où $\lambda = 1$, qui est celui où l'aberration est la moindre; on voit de plus que le nombre λ ne peut être pris moindre que l'unité, sans que les rayons des faces deviennent imaginaires.

4° Que l'aberration qui résulte de toutes les lentilles ensemble est exprimée par

$$\frac{\mu m x^3}{4p^3} \times \left\{ \begin{array}{l} \lambda + \dfrac{(B+1)^2(\lambda'(B+1)+\nu B)\varphi}{B^3(B\pi-\varphi)} \\ \quad + \dfrac{(C+1)^2(\lambda''(C+1)+\nu C)\varphi}{B^3 C^3(C\pi-\pi+\varphi)} \\ \quad + \&c. \end{array} \right\}.$$

λ, λ', λ'' &c. étant les valeurs de λ qui conviennent aux lentilles *PP*, *QQ*, *RR* &c.

5° Qu'enfin cette aberration ne doit pas s'étendre au delà de la fraction $\dfrac{\mu}{4 \cdot 30^3}$.

OBSERVATIONES

Circa integralia formularum

$$\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n.)^{\frac{q}{n}-1}$$

Posito post integrationem $x = 1$

Auctore

L. EULERO.

I. FORMULAM integralem $\int x^{p-1}\,dx\,(1-x^n)^{\frac{q}{n}-1}$, seu hoc modo expressam $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, hic consideraturus, assumo exponentes n, p, & q esse numeros integros positivos, quandoquidem si tales non essent, facile ad hanc formam perduci possent. Deinde hujus formulæ integrale non in genere hic perpendere constitui, sed ejus tantum valorem, quem recipit, si post integrationem statuatur $x = 1$, postquam scilicet integratio ita fuerit instituta, ut integrale evanescat posito $x = 0$. Primum enim nullum est dubium, quin, hoc casu $x = 1$, integrale multo simplicius exprimatur; ac præterea quoties in analysi ad hujusmodi formulas pervenitur, plerumque non tam integrale indefinitum, pro quocunque valore ipsius x, quam definitum valori $x = 1$, utpote præcipuo desiderari solet.

II. Constat autem casu, quo post integrationem ponitur $x = 1$, integrale $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, hoc modo per productum infinitorum factorum exprimi, ut sit:

$$\frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \cdot \frac{3n(p+q+3n)}{(p+3n)(q+3n)} \cdot \text{\&c.}$$

cujus quidem primus factor $\frac{p+q}{pq}$ non legi sequentium adstringitur. Hoc tamen non obstante perspicuum est exponentes p & q inter se esse commutabiles, ita ut sit:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

quae quidem aequalitas etiam facile per se ostenditur. Verum productum istud infinitum nos ad alia multo majora perducet, quibus haec integralia magis illustrabuntur.

III. Ut autem brevitati in scribendo consulam, neque opus habeam scripturam hujus formulae $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$ toties repetere, pro quovis exponente n ejus loco scribam $\left(\frac{p}{q}\right)$, ita ut $\left(\frac{p}{q}\right)$ denotet valorem formulae integralis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, casu quo post integrationem ponitur $x = 1$. Et quoniam vidimus esse hoc casu:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-p}}}$$

manifestum est fore $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$, ita ut pro quovis valore exponentis n, hae expressiones $\left(\frac{p}{q}\right)$ & $\left(\frac{q}{p}\right)$ eandem significent quantitatem. Ita si fuerit exempli gratia $n = 4$, erit:

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}}$$

Per productum autem infinitum habebitur.

$$\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{2.3} \cdot \frac{4.9}{6.7} \cdot \frac{8.13}{10.11} \cdot \frac{12.17}{14.15} \cdot \&c.$$

IV. Jam primum observo, si exponentes p & q fuerint majores exponente n, formulam integralem semper ad aliam reduci posse, in qua hi exponentes infra n deprimantur. Cum enim sit:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \frac{p-n}{p+q-n}\int \frac{x^{p-n-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$$

erit, recepto hic scribendi more:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p-n}{p+q-n}\left(\frac{p-n}{q}\right)$$

quo si fuerit $p > n$, formula ad aliam, in qua exponens p minor sit quam n revocatur, quod etiam ob commutabilitatem de altero exponente q est tenendum. Quamobrem nobis has formulas examinaturis sufficiet pro quovis exponente n exponentes p & q ipso n minores accipere, quoniam his expeditis, omnes casus quibus majores habituri essent valores, eo reduci possunt.

V. Statim autem patet casus, quibus est vel $p = n$, vel $q = n$, absolute seu algebraice esse integrabiles. Si enim fuerit $q = n$, ob $\left(\frac{p}{n}\right) = \int x^{p-1}dx = \frac{x^p}{p}$, posito $x = 1$, erit $\left(\frac{p}{n}\right) = \frac{1}{p}$; similique modo $\left(\frac{n}{q}\right) = \frac{1}{q}$. Atque hi soli sunt casus, quibus integrale nostræ formulæ absolute exhiberi potest, si quidem p & q exponentem n non excedant. Reliquis casibus omnibus integratio vel quadraturam circuli, vel adeo altiores quadraturas implicabit; quas hic accuratius perpendere animus est. Post eas igitur formulas $\left(\frac{p}{n}\right)$, seu $\left(\frac{n}{p}\right)$, quarum valor absolute est $= \frac{1}{p}$, veniunt eæ, quarum valor per solam circuli quadraturam exprimitur; tum vero sequentur eæ, quæ altiorem quandam quadraturam postulant, atque has altiores quadraturas tam ad simplicissimam formam, quam ad minimum numerum revocare conabor.

VI. Cum numeri p & q exponente n minores ponantur, eæ formulæ $\left(\frac{p}{q}\right)$ per ſolam circuli quadraturam integrabiles exiſtunt, in quibus eſt $p + q = n$. Sit enim $q = n - p$, & formula noſtra:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}}$$

hoc producto infinito exprimetur:

$$\frac{n}{p(n-p)} \cdot \frac{n \cdot 2n}{(n+p)(2n-p)} \cdot \frac{2n \cdot 3n}{(2n+p)(3n-p)} \cdot \frac{3n \cdot 4n}{(3n+p)(4n-p)} \text{ \&c.}$$

quod hoc modo repræſentatum:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{nn}{nn-pp} \cdot \frac{4nn}{4nn-pp} \cdot \frac{9nn}{9nn-pp} \text{ \&c.}$$

congruit cum eo producto, quo *ſinus* angulorum expreſſi: Quare ſi π ſumatur ad ſemicirconferentiam circuli cujus radius ſit $= 1$, ſimulque menſuram duorum angulorum rectorum exhibeat, erit:

$$\left(\frac{p}{n-p}\right) = \left(\frac{n-p}{p}\right) = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{p\pi}{n}} = \frac{\pi}{n \text{ ſin. } \frac{q\pi}{n}}.$$

VII. Ceteris caſibus, quibus neque $p = n$, neque $q = n$, neque $p + q = n$, integrale etiam neque abſolute, neque per quadraturam circuli exhiberi poteſt, ſed aliam quandam altiorem quadraturam complectitur. Neque vero ſinguli caſus diverſi peculiarem hujuſmodi quadraturam exigunt, ſed plures dantur reductiones, quibus diverſas formulas inter ſe comparare licet. Hæ autem reductiones derivantur ex producto infinito ſupra exhibito cum enim ſit:

$$\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p+q}{pq} \cdot \frac{n(p+q+n)}{(p+n)(q+n)} \cdot \frac{2n(p+q+2n)}{(p+2n)(q+2n)} \text{ \&c.}$$

erit ſimili modo:

$$\left(\frac{p+q}{r}\right) = \frac{p+q+r}{(p+q)r} \cdot \frac{n(p+q+r+n)}{(p+q+n)(r+n)} \cdot \frac{2n(p+q+r+2n)}{(p+q+2n)(r+2n)} \text{ \&c.}$$

quibus in ſe invicem ductis obtinetur:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\frac{p+q+r}{pqr}\cdot\frac{nn(p+q+r+n)}{(p+n)(q+n)(r+n)}\cdot\frac{4nn(p+q+r+2n)}{(p+2n)(q+2n)(r+2n)}\ \&c.$$

ubi ternæ quantitates p, q, r ſunt inter ſe permutabiles.

VIII. Hinc ergo permutandis his quantitatibus p, q, r conſequimur ſequentes reductiones.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{q+r}{p}\right).$$

unde ex datis aliquot formulis plures aliæ determinati poſſunt. Veluti ſi ſit $q+r=n$, ſeu $r=n-q$, ob $\left(\frac{q+r}{p}\right)=\frac{1}{p}$ & $\left(\frac{q}{r}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}$ erit: $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{n-q}\right)$

$$=\frac{\pi}{np\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}},\ \text{nec non}\ \left(\frac{p}{n-q}\right)\left(\frac{n+p-q}{q}\right)=\frac{\pi}{np\,\text{ſin.}\,\frac{q\pi}{n}}$$

Deinde ſi ſit $p+q+r=n$, ſeu $r=n-p-q$, erit:

$$\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{r\pi}{n}}\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{q\pi}{n}}\left(\frac{p}{r}\right)=\frac{\pi}{n\ \text{ſin.}\ \frac{p\pi}{n}}\left(\frac{q}{r}\right)$$

unde inſignes reductiones aliarum ad alias oriuntur, quibus multitudo quadraturarum ad noſtrum ſcopum neceſſariarum vehementer diminuitur.

IX. Præterea vero pro p, q, r numeris determinatis aſſumendis, ſequentes adipiſcimur productorum ex binis formulis æqualitates:

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{2}{2}\right)=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{1}\right)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{3}\right)=\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{1}\right)$$

$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}\right)$$

$\left(\frac{3}{1}\right)$

$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{1}\right)$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{3}{3}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$$
$$\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{2}\right)\left(\frac{6}{2}\right)$$
$$\left(\frac{3}{1}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \left(\frac{4}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$
$$\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{5}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$
$$\left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{6}{2}\right) = \left(\frac{6}{1}\right)\left(\frac{7}{1}\right)$$
&c.

ubi quidem plures occurrunt, quæ jam in reliquis continentur.

X. His quaſi principiis præmiſſis formulam generalem $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}}$, in qua numeros p & q exponentem n non ſuperare aſſumo, in claſſes ex exponente n petitas diſtinguam, ita ut valores $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ &c. claſſes primam, ſecundam, tertiam &c. ſint præbituri.

Ac prima quidem claſſis, qua $n = 1$, unicam formulam complectitur $\left(\frac{1}{1}\right)$, cujus valor eſt $= 1$. Secunda claſſis, qua $n = 2$, has formulas $\left(\frac{1}{1}\right)$, $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ continet, quarum evolntio per ſe eſt manifeſta. Tertia claſſis, qua $n = 3$ has habet:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right).$$

Quarta vero claſſis, qua $n = 4$, iſtas:

$$\left(\frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}\right), \left(\frac{3}{1}\right), \left(\frac{4}{1}\right), \left(\frac{2}{2}\right), \left(\frac{3}{2}\right), \left(\frac{4}{2}\right), \left(\frac{3}{3}\right), \left(\frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{4}\right);$$

ſicque in ſequentibus claſſibus formularum numerus ſecundum numeros trigonales crescit. Has igitur classes ordine percurramus.

$$\textit{Classis } 2^{dæ} \textit{ formæ } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[2]{(1-x^2)^{2-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Perspicuum hic quidem est istas formulas vel absolute, vel per quadraturam circuli exprimi : nam hæ $\left(\frac{2}{1}\right)$ & $\left(\frac{2}{2}\right)$ absolute dantur, & reliqua $\left(\frac{1}{1}\right)$ ob $1 + 1 = 2$ est $\frac{\pi}{2 \sin. \frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$; si ergo brevitatis causa ponamus $\frac{\pi}{2} = \alpha$, uti scilicet in sequentibus classibus faciemus, omnes formulæ hujus classis ita definiuntur :

$$\left(\frac{2}{1}\right) = 1, \quad \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{1}{1}\right) = \alpha.$$

$$\textit{Classis } 3^{a} \textit{ formæ } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^{3-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Cum hic sit $n = 3$, formula quadraturam circuli involvens est $\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\pi}{3 \sin. \frac{\pi}{3}}$, ponamus ergo $\left(\frac{2}{1}\right) = \alpha$ reliquæ autem formulæ, quæ non absolute dantur, altiorem quadraturam involvunt, & quidem unicam $\left(\frac{1}{1}\right)$, quam littera A indicemus, qua concessa valores omnium formularum hujus classis assignari poterimus:

$$(\frac{3}{1}) = 1,\ (\frac{3}{2}) = \frac{1}{2},\ (\frac{3}{3}) = \frac{1}{3}$$

$$(\frac{2}{1}) = \alpha,\ (\frac{2}{2}) = \frac{\alpha}{A}$$

$$(\frac{1}{1}) = A.$$

Classis 4^{ta} *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^{4-q}}} = (\frac{p}{q})$

Cum hic ſit $n = 4$, duas habemus formulas a quadratura circuli pendentes, quarum valores, quia ſunt cogniti, ita indicemus

$$(\frac{3}{1}) = \frac{\pi}{4\ \text{ſin.}\ \frac{\pi}{4}} = \alpha \quad \&\ (\frac{2}{2}) = \frac{\pi}{4\ \text{ſin.}\ \frac{2\pi}{4}} = \beta.$$

Præterea vero unica opus eſt formula altiorem quadraturam involvente, qua conceſſa reliquas omnes cognoſcemus. Ponamus enim $(\frac{2}{1}) = A$, & omnes formulæ hujus claſſis ita determinabuntur:

$$(\frac{4}{1}) = 1,\ (\frac{4}{2}) = \frac{1}{2},\ (\frac{4}{3}) = \frac{1}{3},\ (\frac{4}{4}) = \frac{1}{4}$$

$$(\frac{3}{1}) = \alpha,\ (\frac{3}{2}) = \frac{\beta}{A},\ (\frac{3}{3}) = \frac{\alpha}{2A}$$

$$(\frac{2}{1}) = A,\ (\frac{2}{2}) = \beta$$

$$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

$$\textit{Classis } 5^{tae} \textit{ formae } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^{5-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Cum hic ſit $n = 5$, notemus ſtatim formulas a quadratura circuli pendentes:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\pi}{5 \text{ ſin. } \frac{\pi}{5}} = \alpha,\ \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\pi}{5 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{5}} = \beta$$

Duabus autem inſuper novis quadraturis opus eſt huic claſſi peculiaribus, quas ita deſignemus:

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A, \ \& \ \left(\frac{2}{2}\right) = B$$

ex quibus reliquæ omnes ita definientur:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = 1,\ \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{3},\ \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4},\ \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{1}{5},$$

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \alpha,\ \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\beta}{A},\ \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta}{2B},\ \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\alpha}{3A},$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = A,\ \left(\frac{3}{2}\right) = \beta,\ \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\beta\beta}{\alpha B},$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta},\ \left(\frac{2}{2}\right) = B,$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

$$\textit{Classis } 6^{tae} \textit{ formae } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^{6-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Hic eſt $n = 6$, & formulæ quadraturam circuli involventes ſunt:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{\pi}{6}} = \alpha,\ \left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{6}} = \beta,\ \left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\pi}{6 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{6}} = \gamma.$$

Reliquarum vero omnium valores inſuper a binis hiſce quadraturis pendent:

$$\left(\frac{4}{1}\right) = A \ \& \ \left(\frac{3}{2}\right) = B,$$

atque ita ſe habere deprehenduntur:

$\left(\frac{6}{1}\right) = 1, \left(\frac{6}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{6}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{1}{5}, \left(\frac{6}{6}\right) = \frac{1}{6}$

$\left(\frac{5}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}, \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\beta}{3B}, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\alpha}{4A},$

$\left(\frac{4}{1}\right) = A, \left(\frac{4}{2}\right) = \beta, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\beta\gamma A}{2\alpha BB},$

$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}, \left(\frac{3}{2}\right) = B, \left(\frac{3}{3}\right) = \gamma;$

$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}, \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha BB}{\gamma A},$

$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$

$$\textit{Claſſis } 7^{mæ} \textit{ formæ } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[7]{(1-x^7)^{7-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right).$$

Quia $n = 7$, formulæ a quadratura circuli pendentes ita deſignentur:

$$\left(\frac{6}{1}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{\pi}{7}} = \alpha, \left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{7}} = \beta, \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\pi}{7 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{7}} = \gamma$$

præterea vero hæ quadraturæ introducantur:

$$\left(\frac{5}{1}\right) = A, \left(\frac{4}{2}\right) = B, \left(\frac{3}{3}\right) = C$$

quibus datis omnes formulæ ita determinabuntur:

$\left(\frac{7}{1}\right) = 1, \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{7}{5}\right) = \frac{1}{5}, \left(\frac{7}{6}\right) = \frac{1}{6}, \left(\frac{7}{7}\right) = \frac{1}{7},$

$\left(\frac{6}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{6}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{6}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}, \left(\frac{6}{4}\right) = \frac{\gamma}{3C}, \left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\beta}{4B}, \left(\frac{6}{6}\right) = \frac{\alpha}{5A},$

$\left(\frac{5}{1}\right) = A, \left(\frac{5}{2}\right) = \beta, \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}, \left(\frac{5}{4}\right) = \frac{\gamma\gamma A}{2\alpha BC}, \left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\beta\gamma A}{3\alpha BC},$

$$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}, \left(\frac{4}{2}\right) = B, \left(\frac{4}{3}\right) = \gamma, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\gamma\gamma}{\alpha C};$$

$$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\gamma}, \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}, \left(\frac{3}{3}\right) = C;$$

$$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}, \left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\gamma A};$$

$$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}.$$

Classis 8^{va} *formæ* $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[8]{(1-x^8)^{8-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$

Quia hic eſt $n = 8$, formula quadraturam circuli implicantes erunt :

$$\left(\frac{7}{1}\right) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{\pi}{8}} = \alpha, \left(\frac{6}{2}\right) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{2\pi}{8}} = \beta,$$

$$\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{3\pi}{8}} = \gamma, \left(\frac{4}{4}\right) = \frac{\pi}{8 \text{ ſin. } \frac{4\pi}{8}} = \delta$$

Nunc vero tres frequentes formulæ tanquam cognitæ ſpectentur :

$$\left(\frac{6}{1}\right) = A, \left(\frac{5}{2}\right) = B, \;\&\; \left(\frac{4}{3}\right) = C$$

atque ex his omnes formulæ hujus claſſis ita determinabuntur.

$$\left(\frac{8}{1}\right) = 1, \left(\frac{8}{2}\right) = \frac{1}{2}, \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{1}{3}, \left(\frac{8}{4}\right) = \frac{1}{4}, \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{1}{5},$$

$$\left(\frac{8}{6}\right) = \frac{1}{6}, \left(\frac{8}{7}\right) = \frac{1}{7}, \left(\frac{8}{8}\right) = \frac{1}{8};$$

$$\left(\frac{7}{1}\right) = \alpha, \left(\frac{7}{2}\right) = \frac{\beta}{A}, \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B}, \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{\delta}{3C}, \left(\frac{7}{5}\right) = \frac{\gamma}{4C},$$

$$\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{\beta}{5B}, \left(\frac{7}{7}\right) = \frac{\alpha}{6A};$$

$(\frac{6}{1}) = A$, $(\frac{6}{2}) = \beta$, $(\frac{6}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$, $(\frac{6}{4}) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC}$, $(\frac{6}{5}) = \frac{\gamma\delta A}{3\alpha CC}$,

$(\frac{6}{6}) = \frac{\beta\gamma A}{4\alpha BC}$;

$(\frac{5}{1}) = \frac{\alpha B}{\beta}$, $(\frac{5}{2}) = B$, $(\frac{5}{3}) = \gamma$, $(\frac{5}{4}) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C}$, $(\frac{5}{5}) = \frac{\gamma\gamma\delta A}{2\alpha\beta CC}$;

$(\frac{4}{1}) = \frac{\alpha C}{\beta}$, $(\frac{4}{2}) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}$, $(\frac{4}{3}) = C$, $(\frac{4}{4}) = \delta$;

$(\frac{3}{1}) = \frac{\alpha C}{\delta}$, $(\frac{3}{2}) = \frac{\alpha\beta CC}{\gamma\delta A}$, $(\frac{3}{3}) = \frac{\alpha CC}{\delta A}$;

$(\frac{2}{1}) = \frac{\alpha B}{\gamma}$, $(\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}$;

$(\frac{1}{1}) = \frac{\alpha A}{\beta}$;

Hinc iſtas reductiones ad ſequentes claſſes, quouſque libuerit, continuare licet. Quemadmodum ergo hinc in genere ſingularum formularum integralia ſe ſint habitura exponamus.

Evolutio formæ generalis $\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = (\frac{p}{q})$

Primo ergo abſolute integrabiles ſunt hæ formulæ:

$(\frac{n}{1}) = 1$, $(\frac{n}{2}) = \frac{1}{2}$, $(\frac{n}{3}) = \frac{1}{3}$, $(\frac{n}{4}) = \frac{1}{4}$, &c.

deinde formulæ a quadratura circuli pendentes ſunt:

$(\frac{n-1}{1}) = \alpha$, $(\frac{n-2}{2}) = \beta$, $(\frac{n-3}{3}) = \gamma$, $(\frac{n-4}{4}) = \delta$ &c.

quarum quantitatum progreſſio tandem in ſe revertitur cum ſit etiam:

$(\frac{4}{n-4}) = \delta$, $(\frac{3}{n-3}) = \gamma$, $(\frac{2}{n-2}) = \beta$, $(\frac{1}{n-1}) = \alpha$.

Præterea vero altiores quadraturæ in ſubſidium vocari debent, quæ ita repræſententur:

$$\left(\frac{n-2}{1}\right)=A,\ \left(\frac{n-3}{2}\right)=B,\ \left(\frac{n-4}{3}\right)=C,\ \left(\frac{n-5}{4}\right)=D \text{ \&c.}$$

quarum numerum quovis caſu ſponte determinatur, quia hæ formulæ tandem in ſe revertuntur.

His autem formulis admiſſis omnes omnino ad eandem claſſem pertinentes definiri poterunt. Habebimus autem a formula $\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha$, uti ſupra iſtas formulas ordinavimus, deorſum deſcendendo:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{n-2}{1}\right)=A,\ \left(\frac{n-3}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\beta},\ \left(\frac{n-4}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\gamma},$$
$$\left(\frac{n-5}{1}\right)=\frac{\alpha D}{\delta},\ \left(\frac{n-6}{1}\right)=\frac{\alpha E}{\varepsilon} \text{ \&c.}$$

qui valores retro ſumti ita ſe habent:

$$\left(\frac{1}{1}\right)=\frac{\alpha A}{\beta},\ \left(\frac{2}{1}\right)=\frac{\alpha B}{\gamma},\ \left(\frac{3}{1}\right)=\frac{\alpha C}{\delta},\ \text{\&c.}$$

Tum vero ab eadem formula $\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha$ horizontaliter progrediendo definiuntur iſtæ formulæ:

$$\left(\frac{n-1}{1}\right)=\alpha,\ \left(\frac{n-1}{2}\right)=\frac{\beta}{A},\ \left(\frac{n-1}{3}\right)=\frac{\gamma}{2B},\ \left(\frac{n-1}{4}\right)=\frac{\delta}{3C} \text{ \&c.}$$

quarum ultima erit $\left(\frac{n-1}{n-1}\right)=\frac{\alpha}{(n-2)A}$, penultima $\left(\frac{n-1}{n-2}\right)=\frac{\beta}{(n-3)B}$, antepenultima $\left(\frac{n-1}{n-3}\right)=\frac{\gamma}{(n-4)C}$ &c.

Simili modo a formula $\left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta$ tam deſcendendo, quam progrediendo horizontaliter valores aliarum impetrabimus, ac deſcendendo quidem:

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)=\beta,\ \left(\frac{n-3}{2}\right)=B,\ \left(\frac{n-4}{2}\right)=\frac{\alpha BC}{\gamma A},\ \left(\frac{n-5}{2}\right)=\frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A},$$
$$\left(\frac{n-6}{2}\right)=\frac{\alpha\beta DE}{\delta\varepsilon A},\ \left(\frac{n-7}{2}\right)=\frac{\alpha\beta EF}{\varepsilon\zeta A} \text{ \&c.}$$

ubi

ubi erit ultima $(\frac{2}{2}) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}$, penultima $(\frac{3}{2}) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\epsilon A}$ &c.; at horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-2}{2})=\beta,\ (\frac{n-2}{3}) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ (\frac{n-2}{4}) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC},\ (\frac{n-2}{5}) = \frac{\delta\epsilon A}{3\alpha CD},\ (\frac{n-2}{6}) = \frac{\epsilon\zeta A}{4\alpha DE},\ (\frac{n-2}{7}) = \frac{\zeta\eta A}{5\alpha EF}\ \&c.$$

quarum erit ultima $(\frac{n-2}{n-2}) = \frac{\beta\gamma A}{(n-4)\alpha BC}$, penultima $(\frac{n-2}{n-3}) = \frac{\gamma\delta A}{(n-5)\alpha CD}$ &c.

Porro a formula $(\frac{n-3}{n-3}) = \gamma$ descendendo pervenimus ad has formulas:

$$(\frac{n-3}{3})=\gamma,\ (\frac{n-4}{3})=C,\ (\frac{n-5}{3}) = \frac{\alpha CD}{\delta A},\ (\frac{n-6}{3}) = \frac{\alpha\beta CDE}{\delta\epsilon AB},$$
$$(\frac{n-7}{3}) = \frac{\alpha\beta\gamma DEF}{\delta\epsilon\zeta AB},\ (\frac{n-8}{3}) = \frac{\alpha\beta\gamma EFG}{\epsilon\zeta\eta AB}\ \&c.$$

& horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-3}{3})=\gamma,\ (\frac{n-3}{4}) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C},\ (\frac{n-3}{5}) = \frac{\gamma\delta\epsilon A}{2\alpha\beta CD},\ (\frac{n-3}{6}) = \frac{\delta\epsilon\zeta AB}{3\alpha\beta CDE},$$
$$(\frac{n-3}{7}) = \frac{\epsilon\zeta\eta AB}{4\alpha\beta DEF},\ (\frac{n-3}{8}) = \frac{\zeta\eta\theta AB}{5\alpha\beta EFG}\ \&c.$$

Pari modo a formula $(\frac{n-4}{4}) = \delta$ descendendo nanciscimur:

$$(\frac{n-4}{4})=\delta,\ (\frac{n-5}{4})=D,\ (\frac{n-6}{4}) = \frac{\alpha DE}{\epsilon A},\ (\frac{n-7}{4}) = \frac{\alpha\beta DEF}{\epsilon\zeta AB},$$
$$(\frac{n-8}{4}) = \frac{\alpha\beta\gamma DEFG}{\epsilon\zeta\eta ABC},\ (\frac{n-9}{4}) = \frac{\alpha\beta\gamma\delta EFGH}{\epsilon\zeta\eta\theta ABC}\ \&c.$$

& horizontaliter progrediendo:

$$(\frac{n-4}{4})=\delta,\ (\frac{n-4}{5}) = \frac{\delta\epsilon}{\alpha D},\ (\frac{n-4}{6}) = \frac{\delta\epsilon\zeta A}{2\alpha\beta DE},\ (\frac{n-4}{7}) = \frac{\delta\epsilon\zeta\eta AB}{3\alpha\beta\gamma DEF},$$

$$\left(\frac{n-4}{8}\right) = \frac{\iota\zeta\eta\theta ABC}{4\alpha\beta\gamma DEFG},\ \left(\frac{n-4}{9}\right) = \frac{\zeta\eta\theta\iota ABC}{5\alpha\beta\gamma EFGH}\ \&c.$$

Atque hac ratione tandem omnium formularum valores reperiuntur.

Accommodemus has generales reductiones ad

$$\textit{Classem } 9^{na} \textit{ formulæ } \int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[9]{(1-x^9)^{9-q}}} = \left(\frac{p}{q}\right)$$

Ubi ob $n = 9$ formulæ quadraturam circuli involventes erunt:

$$\left(\frac{8}{1}\right) = \alpha,\ \left(\frac{7}{2}\right) = \beta,\ \left(\frac{6}{3}\right) = \gamma,\ \left(\frac{5}{4}\right) = \delta;$$

hinc $\varepsilon = \delta$, $\zeta = \gamma$, $\eta = \beta$, $\theta = \alpha$.

Deinde novæ quadraturæ huc requisitæ ponantur:

$$\left(\frac{7}{1}\right) = A,\ \left(\frac{6}{2}\right) = B,\ \left(\frac{5}{3}\right) = C,\ \left(\frac{4}{4}\right) = D;$$

sicque erit $E = C$, $F = B$, & $G = A$; atque his quatuor valoribus concessis omnium formularum nonæ classis valores assignari poterunt, quos simili ordine, ut hactenus fecimus, repræsentemus.

$$\left(\frac{9}{1}\right) = 1,\ \left(\frac{9}{2}\right) = \frac{1}{2},\ \left(\frac{9}{3}\right) = \frac{1}{3},\ \left(\frac{9}{4}\right) = \frac{1}{4},\ \left(\frac{9}{5}\right) = \frac{1}{5},$$
$$\left(\frac{9}{6}\right) = \frac{1}{6},\ \left(\frac{9}{7}\right) = \frac{1}{7},\ \left(\frac{9}{8}\right) = \frac{1}{8},\ \left(\frac{9}{9}\right) = \frac{1}{9};$$

$$\left(\frac{8}{1}\right) = \alpha,\ \left(\frac{8}{2}\right) = \frac{\beta}{A},\ \left(\frac{8}{3}\right) = \frac{\gamma}{2B},\ \left(\frac{8}{4}\right) = \frac{\delta}{3C},\ \left(\frac{8}{5}\right) = \frac{\delta}{4D},$$
$$\left(\frac{8}{6}\right) = \frac{\gamma}{5C},\ \left(\frac{8}{7}\right) = \frac{\beta}{6B},\ \left(\frac{8}{8}\right) = \frac{\alpha}{7A};$$

$$\left(\frac{7}{1}\right) = A,\ \left(\frac{7}{2}\right) = \beta,\ \left(\frac{7}{3}\right) = \frac{\beta\gamma}{\alpha B},\ \left(\frac{7}{4}\right) = \frac{\gamma\delta A}{2\alpha BC},\ \left(\frac{7}{5}\right) = \frac{\delta\delta A}{3\alpha CD},$$
$$\left(\frac{7}{6}\right) = \frac{\gamma\delta A}{4\alpha CD},\ \left(\frac{7}{7}\right) = \frac{\beta\gamma\alpha}{5\alpha BC};$$

$\left(\frac{6}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}$, $\left(\frac{6}{2}\right) = B$, $\left(\frac{6}{3}\right) = \gamma$, $\left(\frac{6}{4}\right) = \frac{\gamma\delta}{\alpha C}$, $\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{\gamma\delta\delta A}{2\alpha\beta CD}$,
$\left(\frac{6}{6}\right) = \frac{\gamma\delta\delta AB}{3\alpha\beta CCD}$;

$\left(\frac{5}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\gamma}$, $\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{\alpha BC}{\gamma A}$, $\left(\frac{5}{3}\right) = C$, $\left(\frac{5}{4}\right) = \delta$, $\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\delta\delta}{\alpha D}$;

$\left(\frac{4}{1}\right) = \frac{\alpha D}{\delta}$, $\left(\frac{4}{2}\right) = \frac{\alpha\beta CD}{\gamma\delta A}$, $\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{\alpha CD}{\delta A}$, $\left(\frac{4}{4}\right) = D$;

$\left(\frac{3}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\delta}$, $\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\alpha\beta CD}{\delta\delta A}$, $\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{\alpha\beta CCD}{\delta\delta AB}$;

$\left(\frac{2}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\gamma}$, $\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{\alpha\beta BC}{\gamma\delta A}$;

$\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\alpha A}{\beta}$.

Ordo harum formularum etiam in genere diagonaliter a ſiniſtra ad dextram procedendo notari meretur, ubi quidem duo genera progreſſionum occurrunt, prout vel a prima ſerie verticali, vel a ſuprema horizontali incipimus; hoc modo primum a ſerie verticali incipiendo:

$\left(\frac{n-1}{1}\right) = \alpha$, $\left(\frac{n-2}{2}\right) = \frac{\beta}{\alpha} \times \left(\frac{n-1}{1}\right)$, $\left(\frac{n-3}{3}\right) = \frac{\gamma}{\beta} \times \left(\frac{n-2}{2}\right)$, $\left(\frac{n-4}{4}\right) = \frac{\delta}{\gamma} \times \left(\frac{n-3}{3}\right)$ &c.

$\left(\frac{n-2}{1}\right) = A$, $\left(\frac{n-3}{2}\right) = \frac{B}{A} \times \left(\frac{n-2}{1}\right)$, $\left(\frac{n-4}{3}\right) = \frac{C}{B} \times \left(\frac{n-3}{2}\right)$, $\left(\frac{n-5}{4}\right) = \frac{D}{C} \times \left(\frac{n-4}{3}\right)$

$\left(\frac{n-3}{1}\right) = \frac{\alpha B}{\beta}$, $\left(\frac{n-4}{2}\right) = \frac{\beta C}{\gamma A} \times \left(\frac{n-3}{1}\right)$, $\left(\frac{n-5}{3}\right) = \frac{\gamma D}{\delta B} \times \left(\frac{n-4}{2}\right)$, $\left(\frac{n-6}{4}\right) = \frac{\delta E}{\varepsilon C} \times \left(\frac{n-5}{3}\right)$

$\left(\frac{n-4}{1}\right) = \frac{\alpha C}{\gamma}$, $\left(\frac{n-5}{2}\right) = \frac{\beta D}{\delta A} \times \left(\frac{n-4}{1}\right)$, $\left(\frac{n-6}{3}\right) = \frac{\gamma E}{\varepsilon B} \times \left(\frac{n-5}{2}\right)$, $\left(\frac{n-7}{4}\right) = \frac{\delta F}{\zeta C} \times \left(\frac{n-6}{3}\right)$

$\left(\frac{n-5}{1}\right) = \frac{\alpha D}{\delta}$, $\left(\frac{n-6}{2}\right) = \frac{\beta E}{\varepsilon A} \times \left(\frac{n-5}{1}\right)$, $\left(\frac{n-7}{3}\right) = \frac{\gamma F}{\zeta B} \times \left(\frac{n-6}{2}\right)$, $\left(\frac{n-8}{4}\right) = \frac{\delta G}{\eta C} \times \left(\frac{n-7}{3}\right)$

$\left(\frac{n-6}{1}\right) = \frac{\alpha E}{\varepsilon}$, $\left(\frac{n-7}{2}\right) = \frac{\beta F}{\zeta A} \times \left(\frac{n-6}{1}\right)$, $\left(\frac{n-8}{3}\right) = \frac{\gamma G}{\eta B} \times \left(\frac{n-7}{2}\right)$, $\left(\frac{n-9}{4}\right) = \frac{\delta H}{\theta C} \times \left(\frac{n-8}{3}\right)$

&c.

Deinde a ſuprema horizontali incipiendo:

$$\begin{array}{llll}
\left(\frac{n}{1}\right) = 1, & \left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{\beta}{A}\times\left(\frac{n}{1}\right), & \left(\frac{n-2}{3}\right) = \frac{\gamma A}{\alpha B}\times\left(\frac{n-1}{2}\right), & \left(\frac{n-3}{4}\right) = \frac{\delta B}{\beta C}\times\left(\frac{n-2}{3}\right) \\
\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}, & \left(\frac{n-1}{3}\right) = \frac{\gamma}{B}\times\left(\frac{n}{2}\right), & \left(\frac{n-2}{4}\right) = \frac{\delta A}{\alpha C}\times\left(\frac{n-1}{3}\right), & \left(\frac{n-3}{5}\right) = \frac{\varepsilon B}{\beta D}\times\left(\frac{n-2}{4}\right) \\
\left(\frac{n}{3}\right) = \frac{1}{3}, & \left(\frac{n-1}{4}\right) = \frac{\delta}{C}\times\left(\frac{n}{3}\right), & \left(\frac{n-2}{5}\right) = \frac{\varepsilon A}{\alpha D}\times\left(\frac{n-1}{4}\right), & \left(\frac{n-3}{6}\right) = \frac{\zeta B}{\beta E}\times\left(\frac{n-2}{5}\right) \\
\left(\frac{n}{4}\right) = \frac{1}{4}, & \left(\frac{n-1}{5}\right) = \frac{\varepsilon}{D}\times\left(\frac{n}{4}\right), & \left(\frac{n-2}{6}\right) = \frac{\zeta A}{\alpha E}\times\left(\frac{n-1}{5}\right), & \left(\frac{n-3}{7}\right) = \frac{\eta B}{\beta F}\times\left(\frac{n-2}{6}\right) \\
\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{1}{5}, & \left(\frac{n-1}{6}\right) = \frac{\zeta}{E}\times\left(\frac{n}{5}\right), & \left(\frac{n-2}{7}\right) = \frac{\eta A}{\alpha F}\times\left(\frac{n-1}{6}\right), & \left(\frac{n-3}{8}\right) = \frac{\theta B}{\beta G}\times\left(\frac{n-2}{7}\right)
\end{array}$$

&c.

Ubi lex, qua hæ formulæ a ſe invicem pendent, ſatis eſt perſpicua; ſi modo notemus, in utraque litterarum ſerie α, β, γ, δ &c. & A, B, C, D &c. terminos primum antecedentes inter ſe eſſe æquales.

Concluſio.

Cum igitur formulas ſecundæ claſſis, ſola conceſſa circuli quadratura, exhibere valeamus, formulæ tertiæ claſſis inſuper requirunt quadraturam contentam vel hac formula

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = A, \quad \text{vel hac} \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{\alpha}{A}$$

quandoquidem, data una, ſimul altera datur. Quod ſi iſtas formulas per productum infinitum exprimamus, earum valor reperitur:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdot \frac{6.8}{7.7} \cdot \frac{9.11}{10.10} \cdot \frac{12.14}{13.13} \text{ \&c.}$$

unde ejus quantitas vero proxime ſatis expedite colligi poteſt; ſimili modo eſt:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = 1 \cdot \frac{3.7}{5.5} \cdot \frac{6.10}{8.8} \cdot \frac{9.13}{11.11} \cdot \frac{12.16}{14.14} \text{ \&c.}$$

Deinde omnes formulas quartæ claſſis integrare poterimus ſi modo, præter circuli quadraturam, una ex his quatuor formulis fuerit cognita: $(\frac{2}{1})$, $(\frac{1}{1})$, $(\frac{3}{2})$, $(\frac{3}{3})$, quæ præbent has formas:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)^3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = A;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)^3}} = \frac{\alpha A}{\beta}; \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{\alpha}{2A};$$

$$\int \frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(1-x^4)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-xx)}} = \frac{\beta}{A};$$

at per productum infinitum erit

$$A = \frac{3}{1.2} \cdot \frac{4.7}{5.6} \cdot \frac{8.11}{9.10} \cdot \frac{12.15}{13.14} \cdot \frac{16.19}{17.18} \text{ \&c.}$$

Quinta claſſis poſtulat duas quadraturas altiores: $(\frac{3}{1}) = A$, & $(\frac{2}{2}) = B$, quarum loco aliæ binæ ab his pendentes aſſumi poſſunt, quæ quidem faciliores videantur, etſi ob 5 numerum primum aliæ aliis vix ſimpliciores reputari queant.

Pro ſexta claſſe etiam duæ quadraturæ requiruntur: $(\frac{4}{1}) = A$ & $(\frac{3}{2}) = B$. Verum hic loco alterius ea, quæ in tertia claſſe opus erat, aſſumi poteſt, ut unica tantum nova ſit adhibenda. Cum enim ſit

$$(\frac{2}{2}) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[6]{(1-x^6)^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}} = \frac{\alpha BB}{\gamma A}$$

erit $\frac{2\alpha BB}{\gamma A} = \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}$, quæ eſt formula ad claſſem tertiam requiſita. Hac ergo data, ſi inſuper innoteſcat formula:

$(\frac{3}{2}) = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1-x^6)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} = B$, vel etiam hæc $(\frac{4}{3}) = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt[3]{(1-x^6)}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha B}$, quæ ſunt ſimpliciſſimæ in hoc genere, reliquæ omnes per has definiri poterunt. His autem combinatis patet fore:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^3)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-xx)}} = \frac{6\beta\gamma}{\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Simili modo ex formulis quartæ claſſis colligitur:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2}$$

cujuſmodi Theorematum ingens multitudo hinc deduci poteſt: inter quæ hoc imprimis eſt notabile:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)}} = \frac{\pi \text{ ſin. } \frac{(m-n)\pi}{mn}}{(m-n) \text{ ſin. } \frac{\pi}{m} \cdot \text{ ſin. } \frac{\pi}{n}}$$

quod, ſi m & n ſint numeri fracti, in hanc formam tranſmutatur:

$$\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[r]{(1-x^p)^s}} \cdot \int \frac{x^{s-1}\,dx}{\sqrt[p]{(1-x^r)^q}} = \frac{\pi \text{ ſin. } (\frac{s}{r} - \frac{q}{p})\,\pi}{(ps-qr) \text{ ſin. } \frac{q}{p}\pi \cdot \text{ſin. } \frac{s}{p}\,\pi}$$

In genere vero eſt;

$$(\frac{n-p}{q}) \cdot (\frac{n-q}{p}) = \frac{(\frac{n-p}{p})\;(\frac{n-q}{q})}{(q-p) \cdot (\frac{n-q+p}{q-p})}$$

quod hanc formam præbet:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} \frac{(q-p)\pi}{n}}{n(q-p) \operatorname{fin.} \frac{p\pi}{n} \cdot \operatorname{fin.} \frac{q\pi}{n}}$$

unde non ſolum præcedentia Theoremata, ſed alia plura facile derivantur. Poſito enim $n = \frac{pq}{m}$ habebimus:

$$\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[p]{(1-x^q)^m}} \cdot \int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt[q]{(1-x^p)^m}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} (\frac{m}{p} - \frac{m}{q})\pi}{m(q-p) \operatorname{fin.} \frac{m\pi}{q} \cdot \operatorname{fin.} \frac{m\pi}{p}}$$

quam ita latius extendere licet:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{\pi \operatorname{fin.} (\frac{q}{n} - \frac{p}{m})\pi}{(mq-np) \operatorname{fin.} \frac{p}{m}\pi \cdot \operatorname{fin.} \frac{q}{n}\pi}$$

in qua ſi ponatur $n = 2q$ erit:

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{\pi \operatorname{cof.} \frac{p}{m}\pi}{q(m-2p) \operatorname{fin.} \frac{p}{m}\pi}$$

At in poſteriori formula integrali ſi ponatur $x^{2q} = 1 - y^m$ erit: $\int \frac{x^{q-1}dx}{\sqrt[m]{(1-x^{2q})^p}} = \frac{m}{2q} \int \frac{y^{m-p-1}dy}{\sqrt{(1-y^m)}}$, unde ſcripto x pro y

$$\int \frac{x^{p-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}dx}{\sqrt{(1-x^m)}} = \frac{2\pi \operatorname{cof.} \frac{p}{m}\pi}{m(m-2p) \operatorname{fin.} \frac{p}{m}\pi}.$$

Simili modo ſi in genere ponatur, pro altera formula integrali, $1 - x^n = y^m$, fiet: $\int \frac{x^{q-1}\,dx}{\sqrt[m]{(1-x^n)^p}} = \frac{m}{n} \int \frac{y^{m-p-1}\,dy}{\sqrt[n]{(1-y^m)^{n-q}}}$; unde, ſcripto iterum x pro y, obtinebitur:

$$\int \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^q}} \cdot \int \frac{x^{m-p-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{n-q}}} = \frac{n\pi \text{ ſin. } \left(\frac{q}{n} - \frac{p}{m}\right)\pi}{m(mq-np) \text{ ſin. } \frac{p}{m}\pi \cdot \text{ſin. } \frac{q}{n}\pi}$$

qui valor reducitur ad: $\frac{n\pi}{m\,(mq-np)}\left(\text{cot. } \frac{p}{m}\pi - \text{cot. } \frac{q}{n}\pi\right)$.

Atque hinc iſta forma concinnior reſultat:

$$\int \frac{x^{\frac{m-r}{2}-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n-s}{2}}}} \cdot \int \frac{x^{\frac{m+r}{2}-1}\,dx}{\sqrt[n]{(1-x^m)^{\frac{n+s}{2}}}} = \frac{2\,n\,\pi\,\left(\text{tang. } \frac{r\pi}{2m} - \text{tang. } \frac{s\pi}{2n}\right)}{m\,(nr - ms)}$$

Cum fundamentum harum reductionum ſitum ſit in hac æqualitate: $\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right) = \frac{\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)}{(q-p)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)}$,

quæ ad hanc formam reducitur:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right)\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right)$$

ejus veritas hoc modo directe oſtendi poteſt.

Sumtis in reductione §. VIII. tradita pro numeris ternis p, q, r his $n-q$, $q-p$, q habebimus:

$$\left(\frac{n-q}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{q}\right) = \left(\frac{n-q}{q}\right)\left(\frac{n}{q-p}\right)$$

tum vero ſumtis eorum loco $n-q$, $q-p$, p erit

$$\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right) = \left(\frac{n-q}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)$$

quibus

quibus æquationibus in se invicem ductis, & formula $\left(\frac{n-q}{q-p}\right)$ utrinque communi per divisionem sublata, erit:

$$\left(\frac{n-p}{q}\right).\left(\frac{n-q}{p}\right)\left(\frac{n-q+p}{q-p}\right)=\left(\frac{n}{q-p}\right)\left(\frac{n-p}{p}\right)\left(\frac{n-q}{q}\right).$$

Quin etiam hujusmodi ternarum æqualitas ab exponente n non pendens exhiberi potest, scilicet:

$$\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)\left(\frac{p+s}{r}\right)=\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{s}{q}\right)\left(\frac{q+s}{r}\right)=\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{r+s}{q}\right)$$

$\left(\frac{p+r}{s}\right)=\left(\frac{r+s}{p}\right)\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{q+r}{s}\right)$, quæ quatuor adeo litteras ab n non pendentes involvit, ac simili est æqualitati inter binarum formularum producta:

$$\left(\frac{r}{p}\right)\left(\frac{p+r}{q}\right)=\left(\frac{q+r}{p}\right)\left(\frac{r}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right).$$

Æqualitas autem inter ternarum formularum producta habetur etiam ista:

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{r}{s}\right)\left(\frac{p+q}{r+s}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{q+r}{p+s}\right)=\left(\frac{p}{r}\right)\left(\frac{q}{s}\right)\left(\frac{p+r}{q+s}\right)=$$

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{r}\right)\left(\frac{p+q+r}{s}\right)=\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p+q}{s}\right)\left(\frac{p+q+s}{r}\right)\ \&c.$$

In his enim litteræ p, q, r, s utrumque inter se permutari possunt.

Fautes à corriger dans les Mémoires précédens.

Page 1 ligne 8 après *fig.* 1. ajoutez *Pl.* 1.
P. 15 l. 19 au lieu de $\Delta : (x + ct)$ lisez $\Delta : (x - ct)$.
P. 22 l. 3 à compter d'en bas à la fin mettez o au lieu de σ.
P. 25 l. 4 au lieu de *plusieurs* lisez *différens*.
P. 27 l. 10 après *fig.* 1. ajout. *Pl.* 11.
P. 38 l. 2 à compter d'en bas au lieu de $5n + \beta$ lisez $5n + 6$.
P. 40 dans la troisiéme colonne au lieu de $n + 1$ au dénom. lisez $2n + 1$,
Ibid. dern. ligne au lieu de $\frac{1}{\gamma}$ lisez $\frac{1}{\lambda}$.
P. 42 ligne dern. au lieu de $(2\mu - 5)$ au numer. lisez $(2\mu - 6)$.
P. 46 l. 8 à compter d'en bas au lieu de $x(\Delta - x\Gamma)$ lisez $x(x\Delta - x\Gamma)$.
P. 47 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $(x\delta = x''\gamma')$ lis. $(x'\delta - x'\gamma'')$.
P. 52 l. 18 au lieu de $- v . x\Delta$ lisez $- v . x\Gamma + v . x\Delta$.
P. 53 l. 5 à compt. d'en bas au lieu de $- ib(\beta v - x\Delta)$ lis. $- ib(bv - x\Delta)$.
P. 54 l. 3 à compter d'en bas au lieu de $2m'x''\gamma''$ lisez $amx''\gamma'$.
P. 58 l. 4 au lieu de $18\pi\pi$ au numer. lisez $13\pi\pi$, & ligne suiv. au lieu de 36π au dénom. lisez $36\pi^3$.
P. 66 l. 6 à la fin ajoutez *AC*.
P. 79 l. 15 au lieu de $M = \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x)$ lisez $M = \frac{1}{2}\Gamma : p + \frac{1}{2}\Gamma : (p - 2x)$.
P. 94 l. 8 au lieu de $- \frac{\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$ lisez $\frac{-\pi + \pi' - \pi''}{m - 1}$, & l. 4 à compt. d'en bas au lieu de $- \pi\varphi$ lisez $- \pi + \varphi$.
P. 96 l. 2 au commenc. au lieu de t lisez s.
P. 102 l. 2 au lieu de $- \frac{\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$ lisez $\frac{-\pi + \pi' - \pi'' + \pi'''}{m - 1}$, & ligne 4 au lieu de π mettez π'.
P. 103 l. 3 à compter d'en bas après $(d + 2)$ au numer. ajoutez *M*.
P. 116 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{m}{60}\, p$ lisez $\frac{m}{60}$ *pouces*, & au lieu de $\frac{1}{30}\, p$ lisez $\frac{1}{30}$.
P. 117 dans la colonne du milieu au lieu de $\frac{1}{20}\, p$ lisez $\frac{1}{20}$.
P. 120 l. 3 à compter d'en bas au commencem. au lieu de $=$ mettez $-$.
P. 123 ligne prem. au lieu de φ *ou* lisez *ou* φ.
P. 138 lignes 3 & 16 au lieu de *&c.* lisez *&*.
P. 154 l. 9. au dessous de la barre écrivez φ.
P. 167 l. 4 au lieu de $\frac{\alpha C}{\beta}$ lisez $\frac{\alpha C}{\gamma}$.

SOLUTION

DE DIFFÉRENS PROBLÊMES

DE

CALCUL INTÉGRAL

Par M. DE LA GRANGE.

Sur l'intégration de l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \ldots (A),$$

dans laquelle L, M, N &c. T *sont des fonctions de* t.

I. JE multiplie cette équation par $z\,dt$, z étant une variable indéterminée, j'en prends l'intégrale, j'ai

$$\int Lzy\,dt + \int Mz\frac{dy}{dt}dt + \int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt + \int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt + \&c. = \int Tz\,dt;$$

je change les expressions $\int Mz\frac{dy}{dt}dt$, $\int Nz\frac{d^2y}{dt^2}dt$, $\int Pz\frac{d^3y}{dt^3}dt$ &c. en leurs égales, $Mzy - \int\frac{d\cdot Mz}{dt}ydt$, $Nz\frac{dy}{dt} - \frac{d\cdot Nz}{dt}y + \int\frac{d^2\cdot Nz}{dt^2}ydt$, $Pz\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{d\cdot Pz}{dt}\times\frac{dy}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2}y - \int\frac{d^3\cdot Pz}{dt^3}ydt$ &c.; j'ai, en ordonnant les termes par rapport à y,

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. +$$
$$\int\left(Lz - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \frac{d^3\cdot Pz}{dt^3} + \&c.\right) y\,dt =$$
$$\int Tz\,dt.$$

Soit maintenant

$$Lz - \frac{d\cdot Mz}{dt} + \frac{d^2\cdot Nz}{dt^2} - \frac{d^3\cdot Pz}{dt^3}\ \&c. = 0 \ldots (B),$$

& l' équation précédente ſe réduira à celle-ci

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$
$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. = \int Tz\,dt \ \ldots\ldots (C),$$

laquelle eſt d' un ordre moins élévé d' une unité que l' équation propoſée (A).

II. Donc 1.° ſi on peut trouver une valeur de z, laquelle ſatisfaſſe à l' équation (B), on aura tout de ſuite l' intégrale de l' équation propoſée (A), en mettant cette valeur dans l' équation (C). 2.° Si on avoit deux valeurs différentes de z, leſquelles ſatisfiſſent également à l' équation (B), on auroit, par la ſubſtitution ſucceſſive de ces valeurs dans l' équation (C), deux intégrales de l'équation (A), à l' aide deſquelles on élimineroit la plus haute différentielle de y; & l' équation réſultante feroit l' intégrale ſeconde de la propoſée. (J' entends par intégrale première ou intégrale ſimplement, une équation qui eſt d' un ordre moins élevé d' une unité que la propoſée; par intégrale ſeconde une équation qui eſt d'un ordre moins élevé de deux unités ; & ainsi de suite) 3.° De même si on avoit trois valeurs différentes de z, on trouveroit trois équations intégrales ; d'où éliminant les deux plus hautes différentielles de y, on auroit une équation qui seroit l'intégrale troisiéme de la proposée ; & ainsi de suite. D'où il est aisé de conclure, qu'en connoissant un nombre de valeurs de z égal à celui de l'exposant de l'ordre de l'équation (A), on pourra trouver l'intégrale finie, & algébrique de cette même équation.

III. Qu'on multiplie l'équation (B) par $y\,dt$, & qu'on en prenne l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ toutes les différences de z, par des intégrations par parties, comme nous l'avons pratiqué sur l'équation (A), on aura, en changeant les signes,

$$y\left(Mz - \frac{d\cdot Nz}{dt} + \frac{d^2\cdot Pz}{dt^2} - \&c.\right) +$$

$$\frac{dy}{dt}\left(Nz - \frac{d\cdot Pz}{dt} + \&c.\right) +$$

$$\frac{d^2y}{dt}\left(Pz - \&c.\right) + \&c. -$$

$$\int\left(Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c.\right) z\,dt = \text{const.}$$

Donc si on fait

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = 0 \quad \ldots (D)$$

& qu'on ordonne l'équation restante par rapport à z, on aura

$$z\left\{\left(M - \frac{dN}{dt} + \frac{d^2P}{dt^2} - \&c.\right)y + \left(N - \frac{dP}{dt} + \&c.\right)\frac{dy}{dt} + \left(P - \&c.\right)\frac{d^2y}{dt} + \&c.\right\} -$$

$$\frac{dz}{dt}\left\{\left(N - 2\frac{dP}{dt} + \&c.\right)y + \left(P - \&c.\right)\frac{dy}{dt} + \&c.\right\} +$$

$$\frac{d^2z}{dt}\left\{(P - \&c.)\,y + \&c.\right\} - \&c. = \text{conſt.} \quad . \quad (E)$$

IV. Donc, ſi on peut trouver une valeur de y qui ſatisfaſſe à l'équation (D), on aura l'intégrale première de l'équation (B); ſi on a deux valeurs différentes de y, qui ſatisfaſſent à la même équation (D), on aura l'intégrale ſeconde de l'équation (B); & ainſi de ſuite; de ſorte que, ſi on connoiſſoit un nombre de valeurs de y égal à celui de l'expoſant de l'équation (B), on pourroit trouver l'intégrale finie & algébrique de cette même équation (*Art. II.*).

V. Cette dernière intégrale contiendra, comme l'on voit, autant de conſtantes arbitraires qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'ordre de l'équation différentielle (B); car les équations (E), d'où elle réſulte, contiennent chacune une conſtante arbitraire. Donc ſi on fait ſucceſſivement toutes ces conſtantes, moins une; égales à zero, on aura autant d'intégrales particulières, & par conſéquent autant de valeurs différentes de z, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'ordre de l'équation (B); or il eſt facile de voir que cette équation eſt du même ordre que l'équation (A) (*Art. I.*); donc on trouvera auſſi l'intégrale finie, & algébrique de cette dernière équation (*Art. II.*).

VI. Donc l'équation (A), ſavoir

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + P\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T$$

ſera intégrable algébriquement toutes les fois qu'on aura m valeurs de y en t dans le cas de $T = 0$, m étant l'expoſant de l'ordre de cette équation.

VII. Si on ne connoiſſoit que $m - 1$ valeurs de y, dans le cas de $T = 0$, on pourroit néanmoins trouver l'intégrale algébrique de l'équation (A). Car on auroit dans ce cas $m - 1$ équations (E); d'où éliminant les plus hautes différences de z, on parviendroit à une équation de cette forme $Vz + X\frac{dz}{dt} = Y$, (V, X, & Y étant des fonctions de t) laquelle donneroit

$$z = e^{-\int \frac{V}{X} dt} (\text{const.} + \int \frac{Y e^{\int \frac{V}{X} dt}}{X} dt);$$ donc &c.

VIII. Donc l'équation (A) sera aussi intégrable algébriquement, toutes les fois qu'on aura $m - 1$ valeurs de y dans le cas de $T = 0$.

IX. Si les valeurs connues de y n'étoient qu'au nombre de $m - 2$, alors il faudroit, pour avoir les m valeurs de z, intégrer une équation de cette forme $Vz + X\frac{dz}{dt} + Y\frac{d^2z}{dt^2} = Z$, laquelle n'est intégrable que dans quelques cas particuliers; & ainsi de suite.

X. Au reste, si on ne connoissoit pas d'avance les valeurs particuliers de y dans le cas de $T = 0$, il vaudroit mieux chercher directement les valeurs de z par la résolution de l'équation (B), laquelle n'est guere plus compliquée que l'équation (D).

XI. Soit l'équation

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = T,$$

pour laquelle on connoit deux valeurs particulières de y, dans le cas de $T = 0$.

On aura d'abord l'équation en z (*Art. III.*)

$$z\left\{(M - \frac{dN}{dt})y + N\frac{dy}{dt}\right\} - \frac{dz}{dt}Ny = \text{const.}$$

donc supposant que $y'1$, & $y2$ soient les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, on aura

$$z \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt}\right) y_1 + N \frac{d \cdot y_1}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_1 = A,$$

$$z \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt}\right) y_2 + N \frac{d \cdot y_2}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_2 = B,$$

A, & B étant deux conſtantes arbitraires.
On tire de ces deux équations

$$z = \frac{A y_2 - B y_1}{N \left(y_2 \frac{d\ y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt}\right)}$$

Soit d' abord $A = 0$, on aura

$$z = - \frac{B}{N} \times \frac{y_1}{y_2 \frac{d\ y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt}} = z_1$$

Soit enſuite $B = 0$, on aura

$$z = \frac{A}{N} \times \frac{y_2}{y_2 \frac{d \cdot y_1}{dt} - y_1 \frac{d \cdot y_2}{dt}} = z_2.$$

Ayant deux valeurs de z, ſavoir z_1, & z_2, on les ſubſtituera ſucceſſivement dans l' équation (C), & l'on aura

$$y \left(M z_1 - \frac{d \cdot N z_1}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} N z_1 = \int T z_1 dt,$$

$$y \left(M z_2 - \frac{d \cdot N z_2}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} N z_2 = \int T z_2 dt;$$

d' où l' on tire :

$$y = \frac{z_2 \int T z_1 dt - z_1 \int T z_2 dt}{N \left(z_1 \frac{d \cdot z_2}{dt} - z_2 \frac{d \cdot z_1}{dt}\right)} \quad \ldots \quad (F)$$

C' eſt la valeur générale, & complete de y qui ſatisfait à l' équation propoſée.

Si on ne connoiſſoit que la valeur y_1, on auroit ſimplement l' équation

$$z \left\{ \left(M - \frac{dN}{dt}\right) y_1 + N \frac{d \cdot y_1}{dt} \right\} - \frac{dz}{dt} N y_1 = A;$$

laquelle

laquelle étant intégrée donneroit

$$z = e^{\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N\,dt} + \frac{d.y1}{y1\,dt}\right) dt}$$

$$\times \left\{ \text{conſt.} - A \int \frac{e^{-\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N\,dt} + \frac{d.y1}{y1\,dt}\right) dt}}{N y1}\, dt \right\}$$

ou bien

$$z = \frac{y1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} \left\{ C - A \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y1)^2}\, dt \right\}.$$

Donc, en faiſant $A = 0$, on auroit

$$z = \frac{C y1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} = z1,$$

& en faiſant $C = 0$

$$z = -\frac{A y1}{N}\, e^{\int \frac{M}{N} dt} \int \frac{e^{-\int \frac{M}{N} dt}}{(y1)^2}\, dt = z2.$$

Suppoſons que les quantités L, M, N ſoient conſtantes, on aura, comme l' on ſait, pour les deux valeurs de y qui ſatisfont à l' équation $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = 0$, e^{k1t}, & e^{k2t}; $k1$, & $k2$, étant les racines de l' équation $L + Mk + Nk^2 = 0$; donc $y1 = e^{k1t}$, $y2 = e^{k2t}$; & par conſéquent $z1 = -\frac{B}{N} \times \frac{e^{-k2t}}{k1 - k2}$, $z2 = \frac{A}{N} \times \frac{e^{-k1t}}{k1 - k2}$; donc

$$y = \frac{e^{k2t} \int T e^{-k2t} dt - e^{k1t} \int T e^{-k1t} dt}{N(k2 - k1)}$$

Si on vouloit employer les valeurs de $z1$, & de $z2$ trouvées à la fin de l' Article précédent, on auroit

$$z_1 = \frac{Cy_1}{N} e^{\frac{M}{N}t}, \quad \& \quad z_2 = -\frac{Ay_1}{N} e^{\frac{M}{N}t} \int \frac{e^{-\frac{M}{N}t}}{(y_1)^2} dt$$

ou bien, en mettant pour y_1 sa valeur $e^{k_1 t}$, $z_1 = \frac{C}{N}$ $e^{(k_1 + \frac{M}{N})t}$, & $z_2 = \frac{A}{M + 2Nk_1} e^{-k_1 t}$. Or k_1, & k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$, on aura $k_1 + k_2 = -\frac{M}{N}$; donc $k_1 + \frac{M}{N} = - k_2$, & $M + 2Nk_1 = N(k_1 - k_2)$; donc en faisant $C = -\frac{B}{k_1 - k_2}$, les valeurs de z_1, & de z_2 seront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourroient encore se trouver d'une manière plus simple par la remarque de l' Article X. Car l' équation (B) sera dans le cas présent $Lz - M\frac{dz}{dt} + N\frac{d^2z}{dt^2} = 0$; d'où l'on tire $z = Fe^{h_1 t} = z_1$; & $z = Ge^{h_2 t} = z_2$, F, G étant deux constantes arbitraires, & h_1, h_2 les racines de l' équation $L - Mh + Nh^2 = 0$; de sorte qu'on aura $h_1 = -k_1$, & $h_2 = -k_2$.

Recherche des cas d' intégration de l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + ayt^m = T.$$

XII. On aura ici $L = at^{2m}$, $M = 0$, & $N = 1$; donc l' équation (B) deviendra

$$azt^{2m} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G).$$

Supposons dt variable, nous aurons au lieu du terme

$\frac{d^2 z}{dt^2}$, ces deux-ci $\frac{d^2 z}{dt^2} - \frac{dz\, d^2t}{dt^3}$; donc faisant cette substitution, & divisant toute l'équation par t^{2m}, on aura la transformée

$$\frac{d^2z}{t^{2m}dt^2} - \frac{dz\, d^2t}{t^{2m}dt^3} + az = 0.$$

Soit maintenant $t^m dt = du$, c'est-à-dire $u = \frac{t^{m+1}}{m+1}$, on aura, en prenant du pour constante, $\frac{d^2t}{dt} + m\frac{dt}{t} = 0$, c'est-à-dire, à cause de $dt = t^{-m} du$, $\frac{d^2t}{dt} = -mt^{-m-1}du = -\frac{m}{m+1} \times \frac{du}{u}$; donc, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, & faisant pour abreger $\frac{m}{m+1} = n$, on aura

$$\frac{d^2z}{du^2} + n\frac{dz}{udu} + az = 0.$$

Si n étoit $= 0$ on auroit $\frac{d^2z}{du^2} + az = 0$, par conséquent $z = e^{ku}$, k étant une des racines de l'équation $k^2 + a = 0$.

Supposons donc $z = xe^{ku}$, on aura après les substitutions & les réductions

$$\frac{d^2x}{du^2} + \left(2k + \frac{n}{u}\right)\frac{dx}{du} + \frac{nkx}{u} = 0.$$

Qu'on fasse $x = Au^r + Bu^{r+1} + Cu^{r+2} +$ &c.; on trouvera, en égalant à zero les termes homogénes, les équations suivantes

$r(r-1)A + nrA = 0$

$(r+1)rB + 2krA + n(r+1)B + nkA = 0$

$(r+2)(r+1)C + 2k(r+1)B + n(r+2)C + nkB = 0$,

& ainsi de suite.

D'où l'on tire premiérement, ou $r = 0$, ou $r - 1 + n = 0$, savoir $r = 1 - n$, ensuite

$$B = -\frac{2r + n}{(r+1)(r+n)} kA$$
$$C = -\frac{2(r+1)+n}{(r+2)(r+1+n)} kB$$
$$D = -\frac{3(r+2)+n}{(r+3)(r+2+n)} kC$$
&c.

En combinant les deux cas de $r = 0$, & de $r = 1 - n$, & faisant $1 - n = \nu$, & $A = 1$, on aura

$$A = 1$$
$$B = -k$$
$$C = \frac{3 \mp \nu}{2(2 \mp \nu)} k^2$$
$$D = -\frac{(3 \mp \nu)(5 \mp \nu)}{2.3(2 \mp \nu)(3 \mp \nu)} k^3$$
$$E = \frac{(3 \mp \nu)(5 \mp \nu)(7 \mp \nu)}{2.3.4(2 \mp \nu)(3 \mp \nu)(4 \mp \nu)} k^4$$
&c.

le signe supérieur étant pour le premier cas, & le signe inférieur pour le second cas; d' où l' on voit que la serie se terminera toutes les fois que $\nu =$ à un nombre quelconque impair positif ou négatif, à l'exception de ± 1.

Ayant ainsi la valeur de x, on aura celle de z, par la supposition de $z = x e^{ku}$; & comme l' équation $k^2 + a = 0$ donne deux valeurs de k, savoir $k = \pm \sqrt{-a}$, on aura aussi deux valeurs de z, qu'on nommera, comme ci-dessus, $z 1$, & $z 2$, & qui étant substituées dans la formule (F) de l' Article précédent donneront la valeur de y.

Si a est une quantité positive, les deux valeurs de k seront imaginaires. Dans ce cas la valeur de x sera de cette forme $P \pm Q \sqrt{-1}$; & par conséquent on aura

$z = (P \pm Q\sqrt{-1})\, e^{\pm u\sqrt{a}.\sqrt{-1}} =$ (en mettant au lieu de $e^{\pm u\sqrt{a}.\sqrt{-1}}$ sa valeur, cos. $u\sqrt{a} \pm$ sin. $u\sqrt{a} \times \sqrt{-1}$) P cos. $u\sqrt{a} - Q$ sin. $u\sqrt{a} \pm (P$ sin. $u\sqrt{a} + Q$ cos. $u\sqrt{a}).\sqrt{-1}$.

Soit donc, pour abreger

$$P \text{ cos. } u\sqrt{a} - Q \text{ sin. } u\sqrt{a} = R$$

$$P \text{ sin. } u\sqrt{a} - Q \text{ cos. } u\sqrt{a} = S,$$

on aura $R + S\sqrt{-1} = z1$, & $R - S\sqrt{-1} = z2$, & la valeur de y deviendra

$$y = \frac{R\int T S\,dt - S\int T R\,dt}{N\left(S\frac{dR}{dt} - R\frac{dS}{dt}\right)}.$$

XIII. Si $m = 1$, on aura $n = \infty$, & la valeur de x sera exprimée par une suite infinie ; mais en reprenant l'équation (G), on aura

$$\frac{az}{t^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

laquelle en faisant $z = t^r$, se change en

$$a + r(r-1) = 0,$$

d'où l'on tire $r = \frac{1}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{1}{4} - a\right)}$.

Ainsi l'on aura les deux valeurs de z.

XIV. Soit $T = 0$ & $y = e^{\int q\,dt}$, l'équation proposée se changera en celle-ci

$$\frac{dq}{dt} + q + a t^{2m} = 0,$$

laquelle est connue sous le nom d'équation de Riccati ; on trouvera donc par la métode précédente l'intégrale de cette même équation.

Intégration de l'équation

$$Ay + B(h + kt)\frac{dy}{dt} + C(h + kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} +$$
$$D(h + kt)^3\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T \quad . \quad . \quad . \quad (H)$$

A, B, C &c. *étant des coéficiens constans.*

XV. En comparant cette équation avec la formule générale (A), on aura
$L = A$, $M = B(h + kt)$, $N = C(h + kt)^2$
$P = D(h + kt)^3$ &c.
Donc les équations (B) & (C) deviendront

$$Az - B\frac{d.(h + kt)z}{dt} + C\frac{d^2.(h + kt)^2z}{dt^2} -$$
$$D\frac{d^3.(h + kt)^3z}{dt^3} + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$$y\left\{B(h + kt)z - C\frac{d.(h + kt)^2z}{dt} +\right.$$
$$\left.D\frac{d^2.(h + kt)^3z}{dt^2} - \&c.\right\} +$$
$$\frac{dy}{dt}\left\{C(h + kt)^2z - D\frac{d.(h + kt)^3z}{dt} + \&c.\right\} +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left\{D(h + kt)^3z - \&c.\right\} + \&c.$$
$$= \int Tz\,dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (K).$$

Soit maintenant $z = (h + kt)^r$, & l'équation (I) étant divisée par $(h + kt)^r$ se réduira à celle-ci
$A - Bk(r + 1) + Ck^2(r + 1)(r + 2) -$
$Dk^3(r + 1)(r + 2)(r + 3) + \&c. = 0$. (L)
laquelle étant ordonnée par rapport à r montera à un dégré, dont l'exposant sera le même que celui de l'ordre de l'équation proposée (H).

Faisant la même substitution dans l'équation (K), on aura, aprés avoir divisé par $(h + kt)^{r+1}$

$$y\left\{B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \&c.\right\} +$$
$$\frac{dy}{dt}\left\{C - Dk(r+3) + \&c.\right\}(h+kt) +$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\left\{D - \&c.\right\}(h+kt)^2 + \&c.$$
$$= (h+kt)^{-r-1}\int T(h+kt)^r\,dt;$$

équation qui devra avoir lieu, en mettant pour r chacune des racines de l'équation (L).

Soit pour abreger

$$B - Ck(r+2) + Dk^2(r+2)(r+3) - \&c. = \alpha$$
$$C - Dk(r+3) + \&c. = \beta$$
$$D - \&c. = \gamma$$

&c.

$$(h+kt)^{-r-1}\int T(h+kt)^r\,dt = \theta,$$

l'équation dont il s'agit se réduira à celle-ci

$$\alpha y + \beta(h+kt)\frac{dy}{dt} + \gamma(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} + \&c. = \theta \quad (M).$$

Supposons que $r1$, $r2$, $r3$ &c. soient les racines de l'équation (L), & que $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$ &c. $\beta 1$, $\beta 2$, $\beta 3$ &c. &c. soient ce que deviennent les quantités α, β &c., lorsque r devient successivement $r1$, $r2$, $r3$ &c.; au lieu de l'équation (M), on aura celles-ci

$$\alpha 1\, y + \beta 1\,(h+kt)\frac{dy}{dt} + \gamma 1\,(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+ \&c. = \theta 1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M1)$$
$$\alpha 2\, y + \beta 2\,(h+kt)\frac{dy}{dt} + \gamma 2\,(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+ \&c. = \theta 2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M2)$$
$$\alpha 3\, y + \beta 3\,(h+kt)\frac{dy}{dt} + \gamma 3\,(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2}$$
$$+ \&c. = \theta 3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (M3)$$

&c.

dont le nombre sera le même que celui des quantités inconnues y, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., comme il eſt facile de s'en aſſurer. Ainſi en éliminant les quantités $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$ &c., on aura la valeur de y.

Pour cet effet je multiplie l'équation (M 1) par M', l'équation (M 2) par M', & ainſi de ſuite; après quoi je les ajoute enſemble, j'ai

$$(\alpha 1 M' + \alpha 2 M' + \alpha 3 M''' + \&c.)\, y +$$
$$(\beta 1 M' + \beta 2 M' + \beta 3 M''' + \&c.)\,(h + kt)\,\frac{dy}{dt} +$$
$$(\gamma 1 M' + \gamma 2 M'' + \gamma 3 M''' + \&c.)\,(h + kt)^2\,\frac{d^2y}{dt^2} + \&c.$$
$$= M'\theta 1 + M''\theta 2 + M'''\theta 3 + \&c.$$

Je ſuppoſe

$$\left.\begin{array}{l} \beta 1 M' + \beta 2 M' + \beta 3 M'' + \&c. = 0 \\ \gamma 1 M' + \gamma 2 M' + \gamma 3 M''' + \&c. = 0 \\ \&c. \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (N)$$

j'aurai

$$y = \frac{M'\theta 1 + M'\theta 2 + M'''\theta 3 + \&c.}{M \alpha 1 + M \alpha 2 + M \alpha 3 + \&c.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (P)$$

& toute la difficulté ſe réduira à déterminer les quantités M, M', M'' &c., par le moyen des équations (N).

Or ſi on ſubſtitue dans ces équations, les valeurs de $\beta 1$, $\gamma 1$, &c. $\beta 2$, $\gamma 2$ &c. &c., & qu'on ordonne les termes par rapport aux puiſſances de r, on verra qu'elles ſe réduiſent à celles-ci

$$M' + M' + M'' + \&c. + M^m = 0$$
$$M' r 1 + M' r 2 + M'' r 3 + \&c. + M^m (rm) = 0$$
$$M (r 1)^2 + M'' (r 2)^2 + M''' (r 3)^2 + \&c. + M^m (rm)^2 = 0$$
$$M' (r 1)^3 + M'' (r 2)^3 + M'' (r 3)^3 + \&c. + M^m (rm)^3 = 0$$
$$\&c.$$
$$M (r 1)^{m-2} + M'' (r 2)^{m-2} + M'' (r 3)^{m-2} + \&c. + M^m (rm)^{m-2} = 0$$

m étant

m étant l'exposant de l'ordre de l'équation proposée (H), & la quantité $M'\alpha 1 + M''\alpha 2 + M'''\alpha 3 +$ &c. deviendra

$$\pm V k^{m-1} [M' (r1)^{m-1} + M'' (r2)^{m-1} + M''' (r3)^{m-1} + \&c. + M^m (rm)^{m-1}]$$

dans laquelle V est le coéficient du terme $(h + kt)^m \frac{d^m y}{dt^m}$ de la même équation, le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & le signe inférieur pour celui de m pair.

Telles sont les équations, par lesquelles il faudra déterminer les inconnues M', M'', M''' &c. M^m.

Pour rendre cette recherche plus générale nous supposerons que l'on ait les équations suivantes

$$M' + M'' + M''' + \&c. + M^m = R$$
$$M' r1 + M'' r2 + M''' r3 + \&c. + M^m (rm) = R'$$
$$M' (r1)^2 + M'' (r2)^2 + M''' (r3)^2 + \&c. + M^m (rm)^2 = R''$$
$$M' (r1)^3 + M'' (r2)^3 + M''' (r3)^3 + \&c. + M^m (rm)^3 = R'''$$
&c.
$$M' (r1)^{m-1} + M'' (r2)^{m-1} + M''' (r3)^{m-1} + \&c. + M^m (rm)^{m-1} = R^{m-1}.$$

(Je prends ici une équation de plus afin que l'on ait autant d'équations que d'inconnues).

On multipliera la première de ces équations par N, la seconde par N', la troisiéme par N'', & ainsi des autres; on les ajoutera ensemble, & l'on aura

$$M' [N + N' r1 + N'' (r1)^2 + N''' (r1)^3 + \&c. + N^{m-1} (r1)^{m-1}] +$$
$$M'' [N + N' r2 + N'' (r2)^2 + N''' (r2)^3 + \&c. + N^{m-1} (r2)^{m-1}] +$$
$$M''' [N + N' r3 + N'' (r3)^2 + N''' (r3)^3 + \&c. + N^{m-1} (r3)^{m-1}] + \&c. +$$
$$M^m [N + N' (rm) + N'' (rm)^2 + N''' (rm)^3 + \&c. + N^{m-1} (rm)^{m-1}] =$$
$$N R + N' R' + N'' R'' + N''' R''' + \&c. + N^{m-1} R^{m-1}.$$

Maintenant pour avoir la valeur d'une M quelconque, comme M^μ, il n'y aura qu'à ſuppoſer $= 0$ les quantités qui multiplient toutes les autres M, & l'on aura

$$M^\mu = \frac{NR + N'R' + N''R'' + N'''R''' + \&c. + N^{m-1}R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + N'''(r\mu)^3 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}} \quad (Q)$$

Et les quantités N, N', N'' &c. N^{m-1} feront déterminées par ces équations

$$N + N'r1 + N''(r1)^2 + \&c. + N^{m-1}(r1)^{m-1} = 0$$
$$N + N'r2 + N''(r2)^2 + \&c. + N^{m-1}(r2)^{m-1} = 0$$

& ainſi de ſuite juſqu'à

$$N + N'(rm) + N''(rm)^2 + \&c. + N^{m-1}(rm)^{m-1} = 0$$

à l'exception de

$$N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1} = 0.$$

c'eſt-à-dire qu'on aura l'équation

$$N + N'r + N''r^2 + N'''r^3 + \&c. + N^{m-1}r^{m-1} = 0$$

laquelle devra avoir lieu en mettant ſucceſſivement, au lieu de r, $r1$, $r2$, $r3$, &c. (rm) à l'exception de $(r\mu)$.

Or comme $r1$, $r2$, $r3$ &c. (rm), ſont les racines de l'équation (L), ſi on repréſente cette équation par $a + br + cr^2 + dr^3 + \&c. + tu^{m-1} + ur^m$, on aura par la théorie des équations

$$1 + \frac{N'}{N}r + \frac{N''}{N}r^2 + \frac{N'''}{N}r^3 + \&c. + \frac{N^{m-1}}{N}r^{m-1}$$

$$= \frac{1 + \frac{b}{a}r + \frac{c}{a}r^2 + \frac{d}{a}r^3 + \&c. + \frac{u}{a}r^m}{1 - \frac{r}{(r\mu)}};$$

donc, multipliant par $1 - \frac{r}{(r\mu)}$, & comparant les termes, on aura

$$\frac{N'}{N} - \frac{1}{(r\mu)} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{N''}{N} - \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N'}{N} = \frac{c}{a},$$

$$\frac{N'''}{N} - \frac{1}{(r\mu)} \cdot \frac{N''}{N} = \frac{d}{a}$$

&c.

d' où l' on tire

$$N' = \frac{N}{a(r\mu)} \times \left\{ a + b(r\mu) \right\}$$

$$N'' = \frac{N}{a(r\mu)^2} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 \right\}$$

$$N''' = \frac{N}{a(r\mu)^3} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + d(r\mu)^3 \right\}$$

&c.

$$N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + d(r\mu)^3 \right.$$

$$\left. + \text{\&c.} + t(r\mu)^{m-1} \right\}.$$

Faisant ces substitutions dans la formule (Q), on verra que la quantité N disparoitra d' elle même ; de sorte que l' on aura la valeur de chacun des coéficiens M.

Soit maintenant $R = 0$, $R' = 0$, $R'' = 0$, &c. $R^{m-2} = 0$, on aura

$$M^{\mu} = \frac{N^{m-1} R^{m-1}}{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \text{\&c.} + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}$$

Or $N^{m-1} = \dfrac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times \left\{ a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 + \text{\&c.} \right.$ $\left. + t(r\mu)^{m-1} \right\}$; & comme $a + br + cr^2 +$ &c. $+ tr^{m-1} + ur^m = 0$, on a, en mettant $(r\mu)$ au lieu de r, $a + b(r\mu) + c(r\mu)^2 +$ &c. $+ t(r\mu)^{m-1} = - u(r\mu)^m$; donc

$$N^{m-1} = \frac{N}{a(r\mu)^{m-1}} \times - u(r\mu)^m = - \frac{Nu}{a}(r\mu).$$

De plus on a

$$\frac{N + N' r + N'' r + \&c. + N^{m-1} r^{m-1}}{N} =$$

$$\frac{a + b r + c r^2 + \&c. + u r^m}{a \left[1 - \frac{r}{(r\mu)} \right]};$$

donc, si on fait pareillement $r = (r\mu)$, on aura, en prenant la différence du numérateur & du dénominateur, à cause que l' un & l' autre s'évanouissent dans ce cas,

$$\frac{N + N'(r\mu) + N''(r\mu)^2 + \&c. + N^{m-1}(r\mu)^{m-1}}{N} =$$

$$-\frac{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c. + m u (r\mu)^{m-1}}{\frac{a}{(r\mu)}};$$

donc $M^{\mu} = \dfrac{u R^{m-1}}{b + 2c(r\mu) + 3d(r\mu)^2 + \&c.}$.

Soit

$A - Bk(r+1) + Ck^2(r+1)(r+2) - \&c.$
$\mp V k^m (r+1)(r+2) \ldots . (r+m) = P$,

de sorte que l' équation (L) soit représentée par $P = 0$; on aura

$$a + b r + c r^2 + \&c. + u r^m = P;$$

donc $u = \mp V k^m$, (le signe supérieur étant pour le cas de m impair, & l' inférieur pour celui de m pair);

& $\qquad b + 2cr + 3dr^2 + \&c. = \dfrac{dP}{dr}$.

Donc, si on fait $\dfrac{dP}{dr} = Q$, & qu'on dénote par $Q1$, $Q2$, $Q3$ &c. le valeurs de Q, lorsque r devient $r1$, $r2$, $r3$ &c., aura

$$M' = \frac{\mp V k^m R^{m-1}}{Q1}, \quad M'' = \frac{\mp V k^m R^{m-1}}{Q2} \ \&c.$$

Substituant donc ces valeurs dans la formule (P), & faisant attention que

$M'\alpha 1 + M''\alpha 2 + M'''\alpha 3 + \&c. = \pm V k^{m-1}$
$\times [M'(r1)^{m-1} + M''(r2)^{m-1} + M'''(r3)^{m-1} + \&c.]$
$= \pm V k^{m-1} R^{m-1}$, on aura enfin

$$y = -k \left\{ \frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2} + \frac{\theta 3}{Q3} + \&c. \right\} \quad . \quad (R)$$

D'où l'on voit que chaque racine de l'équation $P = 0$ donne dans la valeur de y un terme correſpondant tel que $- k \frac{\theta}{Q}$.

XVI. Toute la difficulté ſe réduit donc à réſoudre l'équation $P = 0$; or il peut arriver deux cas qu'il eſt bon d'examiner ; le premier eſt celui où cette équation auroit des racines égales, le ſecond celui où elle auroit des racines imaginaires.

1.° Suppoſons que l'on trouve deux racines égales, par exemple, $r2 = r1$; on fera $r2 = r1 + \omega$, ω étant une quantité évanouiſſante, & comme P peut être repréſenté en général par $(r - r1)(r - r2)\Pi$, on aura $Q = \frac{dP}{dr} = (r - r2)\Pi + (r - r1)\Pi + (r - r1)(r - r2)\frac{d\Pi}{dr}$; donc faiſant ſucceſſivement $r = r1$, & $= r2$, & ſubſtituant $r1 + \omega$ au lieu de $r2$, on aura $Q1 = -\omega\Pi 1$, & $Q2 = \omega\Pi 1$, $\Pi 1$ étant la valeur de Π, lorſque $r = r1$. Pour trouver cette valeur on remarquera que, puiſque $r2 = r1$, on a $(r - r1)^2\Pi = P$; d'où l'on tire, en différentiant deux fois, $2\Pi + 4(r - r1)\frac{d\Pi}{dr} + (r - r1)^2\frac{d^2\Pi}{dr^2} = \frac{d^2 P}{dr^2} = R$; & par conſéquent, en faiſant $r = r1$, $2\Pi 1 = R1$, & $\Pi 1 = \frac{R1}{2}$; donc $Q1 = -\frac{\omega}{2}R1$, & $Q2 = \frac{\omega}{2}R1$.

Maintenant on a

$\theta_1 = (h + kt)^{-r_1 - 1} \int T\,(h + kt)^{r_1} dt$, &

$\theta_2 = (h + kt)^{-r_2 - 1} \int T\,(h + kt)^{r_2} dt$;

or $(h + kt)^{-r_2 - 1} = (h + kt)^{-r_1 - 1 - \omega} = (h + kt)^{-r_1 - 1} [1 - \omega\, l(h + kt)$ &c.], & de même $(h + kt)^{r_2} = (h + kt)^{r_1} [1 + \omega\, l(h + kt)]$; donc négligeant les ω^2 on aura $\theta_2 = \theta_1 + \omega\,(h + kt)^{-r_1 - 1} \times [\int T\,(h + kt)^{r_1}\, l(h + kt)\, dt - l(h + kt) \times \int T\,(h + kt)^{r_1} dt]$, ou bien

$$\theta_2 = \theta_1 - \omega\,(h + kt)^{-r_1 - 1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T\,(h + kt)^{r_1} dt;$$

donc faisant ces substitutions dans les termes $- k\,\frac{\theta_1}{Q_1} - k\,\frac{\theta_2}{Q_2}$ de la valeur de y, lesquels répondent aux racines égales r_1, r_2, & effaçant ce qui se détruit, on aura

$$- k\,\frac{\theta_1}{Q_1} - k\,\frac{\theta_2}{Q_2} = k\,\frac{2\,(h + kt)^{-r_1 - 1}}{R_1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T\,(h + kt)^{r_1} dt.$$

On résoudroit de même le cas de trois racines égales, en faisant $r_2 = r_1 + \omega$, $r_3 = r_1 + \eta$, ω, η étant deux quantités infiniment petites, & ayant égard aux quantités du second ordre. De cette manière on trouvera que les trois termes $- k\,\frac{\theta_1}{Q_1} - k\,\frac{\theta_2}{Q_2} - k\,\frac{\theta_3}{Q_3}$ deviendront

$$- k\,\frac{6\,(h + kt)^{-r_1 - 1}}{S_1} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int \frac{k\,dt}{h + kt} \int T\,(h + kt)^{r_1} dt,$$

S étant $= \frac{d^3P}{dr^3}$, & S_1 exprimant la valeur de S, lorsque $r = r_1$; & ainsi de suite.

2.° Supposons maintenant que les deux racines r_1, & r_2 soient imaginaires, ensorte que $r_1 = F + G\sqrt{-1}$, & $r_2 = F - G\sqrt{-1}$; il est facile de voir que les quantités Q_1, & Q_2 seront de cette forme $Q_1 = M + N\sqrt{-1}$, $Q_2 = M - N\sqrt{-1}$; de plus les quantités $(h + kt)^{-r1-1}$, & $(h + kt)^{r1}$ deviendront $(h + kt)^{-F-1}(h + kt)^{-G\sqrt{-1}}$, & $(h + kt)^F \times (h + kt)^{G\sqrt{-1}}$. Or soit $(h + kt)^{G\sqrt{-1}} = \lambda$ (cos. φ + sin. $\varphi \sqrt{-1}$), on aura par les logarithmes $G\sqrt{-1}\, l(h + kt) = l\lambda + \varphi\sqrt{-1}$, donc $l\lambda = 0$, savoir $\lambda = 1$, & $\varphi = Gl(h + kt)$, donc $(h + kt)^{G\sqrt{-1}}$ $=$ cos. $Gl(h + kt)$ + sin. $Gl(h + kt) \cdot \sqrt{-1}$, & prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$, $(h + kt)^{-G\sqrt{-1}}$ $=$ cos. $Gl(h + kt)$ $-$ sin. $Gl(h + kt) \cdot \sqrt{-1}$; par ces substitutions on réduira les quantités $\theta 1$, & $\theta 2$ à la forme $X \pm Y\sqrt{-1}$, de sorte que les deux termes $-k\frac{\theta 1}{Q1} - k\frac{\theta 2}{Q2}$ de l'expression de y se changeront en

$$-k\,\frac{X + Y\sqrt{-1}}{M + N\sqrt{-1}} - k\,\frac{X - Y\sqrt{-1}}{M - N\sqrt{-1}} = -2\,\frac{MX + NY}{M^2 + N^2}.$$

Application à l'équation

$$Ay + B\frac{dy}{dt} + C\frac{d^2y}{dt^2} + D\frac{d^3y}{dt^3} + \&c. = T.$$

XVI. On aura dans ce cas $h = 1$, & $k = 0$, mais comme la supposition de $k = 0$ donneroit $P = A = 0$, on supposera simplement k infiniment petite, & ensuite r infiniment grande, ensorte que $kr =$ à une quantité finie ρ; de cette manière on aura
$P = A - B\rho + C\rho^2 - D\rho^3 + \&c. = 0$;
équation d'où l'on tirera autant de valeurs de ρ qu'il y a d'unités dans l'exposant de l'ordre de l'équation différentielle, de sorte que, si on appelle $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. les racines de cette équation, on aura $r1 = \frac{\rho 1}{k}$, $r2 = \frac{\rho 2}{k}$ &c. Or on a $Q = \frac{dP}{dr}$, donc si on fait $\frac{dP}{d\rho} = q$,

on aura $Q = kq$, & par conſéquent $Q1 = kq1$, $Q2 = kq2$ &c., donc

$$y = -\left(\frac{\theta 1}{q1} + \frac{\theta 2}{q2} + \frac{\theta 3}{q3} + \text{\&c.}\right).$$

Or $\theta = (h + kt)^{-r-1} \int T (h + kt)^r dt$, donc ſi on fait $h = 1$, & qu'on mette $\frac{\rho}{k}$ au lieu de r, on aura à cauſe de $r = \infty$, $\theta = (1 + kt)^{-\frac{\rho}{k}} \int T (1 + kt)^{\frac{\rho}{k}} dt$; mais on ſait que $(1 + kt)^{\pm\frac{\rho}{k}} =$ (dans le cas de k infiniment petite) $e^{\pm \rho t}$, e étant le nombre dont le logarithme hyperbolique eſt 1; donc $\theta = e^{-\rho t} \int T e^{\rho t} dt$, & par conſéquent $\theta 1 = e^{-\rho 1 t} \int T e^{\rho 1 t} dt$, $\theta 2 = e^{-\rho 2 t} \int T e^{\rho 2 t} dt$ &c.

Si l' équation $P = 0$ a deux racines égales on transformera d'abord les termes $-\frac{\theta 1}{q1} - \frac{\theta 2}{q2} = -k\left(\frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2}\right)$ en $k \frac{2(h+kt)^{-r1-1}}{R1} \int \frac{k\,dt}{h+kt} \int T (h + kt)^{r1} dt$ (Art. préc.), expreſſion qui ſe réduit dans le cas préſent à celle-ci $\frac{2k^2}{R1} e^{-\rho 1 t} \int dt \int T e^{\rho 1 t} dt$; mais $R = \frac{d^2 P}{dr^2} = \frac{k^2 d^2 P}{d\rho^2}$, donc, ſi on fait $\frac{d^2 P}{d\rho^2} = r$, on aura $\frac{2}{r1} e^{-\rho 1 t} \int dt \int T e^{\rho 1 t} dt$ au lieu des temes $-\frac{\theta 1}{q1} - \frac{\theta 2}{q2}$. On opéreroit de même ſi l' on avoit trois, quattre &c. racines égales.

Si $\rho 1$, & $\rho 2$ ſont imaginaires de ſorte, que $\rho 1 = f + g\sqrt{-1}$, & $\rho 2 = f - g\sqrt{-1}$, on aura

$$e^{\pm \rho 1 t} = e^{\pm f t}(\text{coſ.}\, gt \pm \text{ſin.}\, gt \cdot \sqrt{-1}), \text{ \&}$$
$$e^{\pm \rho 2 t} = e^{\pm f t}(\text{coſ.}\, gt \mp \text{ſin.}\, gt \cdot \sqrt{-1}),$$

de plus on trouvera $q1 = m + n\sqrt{-1}$, & $q2 = m -$

$m - n\sqrt{-1}$, donc les termes $-\frac{g_1}{q_1} - \frac{g_2}{q_2}$ se réduiront à

$$-\frac{2e^{-ft}}{m^2+n^2}\,[(m\,\text{cof.}\,gt - n\,\text{fin.}\,gt)\int Te^{ft}\,\text{cof.}\,gt\,dt$$
$$+(m\,\text{fin.}\,gt + n\,\text{cof.}\,gt)\int Te^{ft}\,\text{fin.}\,gt\,dt\,].$$

Résolution de l'équation
$\alpha\varphi\,[t + a(h+kt)] + \beta\varphi\,[t+b(h+kt)] + \gamma\varphi\,[t + c(h+kt)] + \&c. = T,$
dans laquelle φ *dénote une fonction inconnue.*

XVIII. On fait que $\varphi\,[t + a(h+kt)]$ peut se réduire en série de cette manière

$$\varphi t + a(h+kt)\frac{d.\varphi t}{dt} + \frac{1}{2}a^2(h+kt)^2\frac{d^2.\varphi t}{dt^2} + \frac{1}{2.3}a^3(h+kt)^3\frac{d^3.\varphi t}{dt^3} + \&c.;$$

donc si on développe de même $\varphi\,[t + b(h+kt)]$, $\varphi\,[t + c(h+kt)]$ &c., & qu'on fasse $\varphi t = y$, l'équation proposée deviendra

$$(\alpha+\beta+\gamma+\&c.)\,y +$$
$$(\alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.)\times(h+kt)\frac{dy}{dt} +$$
$$\frac{1}{2}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.)\times(h+kt)^2\frac{d^2y}{dt^2} +$$
$$\frac{1}{2.3}(\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.)\times(h+kt)^3\frac{d^3y}{dt^3} +$$
$$\&c.$$
$$= T \quad (S)$$

Comparant cette équation avec l'équation (H) de l'Art. XV. on a

$A = \alpha + \beta + \gamma + \&c.$
$B = \alpha a + \beta b + \gamma c + \&c.$

$C = \frac{1}{2}(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2 + \&c.)$

$D = \frac{1}{2.3}(\alpha a^3 + \beta b^3 + \gamma c^3 + \&c.)$

&c.

donc on aura

$$P = \alpha\left[1 - ka(r+1) + \frac{k^2a^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3a^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.\right] +$$
$$\beta\left[1 - kb(r+1) + \frac{k^2b^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3b^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.\right] +$$
$$\gamma\left[1 - kc(r+1) + \frac{k^2c^2}{2}(r+1)(r+2) - \frac{k^3c^3}{2.3}(r+1)(r+2)(r+3) + \&c.\right] + \&c. = 0\,;$$

équation, d'où l'on tirera les valeurs $r1$, $r2$, $r3$ &c. de r, dont le nombre sera infini ; de sorte que la valeur de y sera exprimée par une suite infinie, telle que

$$-k\left(\frac{\theta 1}{Q1} + \frac{\theta 2}{Q2} + \frac{\theta 3}{Q3} + \&c.\right),$$

θ étant $= (h + kt)^{-r-1} \int T (h + kt)^r dt$.

Maintenant il est clair que la valeur de P se réduit à $\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} + \gamma(1 + kc)^{-r-1} + \&c.$ donc $Q = -\alpha(1 + ka)^{-r-1}\, l\,(1 + ka) - \beta(1 + kb)^{-r-1}\, l\,(1 + kb) - \gamma(1 + kc)^{-r-1}\, l\,(1 + kc) - \&c.$

& l'équation à résoudre sera

$\alpha(1 + ka)^{-r-1} + \beta(1 + kb)^{-r-1} + \gamma(1 + kc)^{-r-1} + \&c. = 0$,

r étant l'inconnue ; or cette résolution réussira dans les deux cas suivans

1.° Lorsque l'équation n'a que deux termes, c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha(1+ka)^{-r-1}+\beta(1+kb)^{-r-1}=0;$$

car divisant par $\beta(1+kb)^{-r-1}$ on a $\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{1+ka}{1+kb}\right)^{-r-1}+1=0$, d'où l'on tire par les logarithmes

$$r+1=\frac{l-\frac{\alpha}{\beta}}{l\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Qu'on suppose, ce qui est toujours possible,

$$-\frac{\alpha}{\beta}=\lambda(\text{cos.}\,\omega+\text{sin.}\,\omega\sqrt{-1})$$

λ étant une quantité réelle & positive, on trouvera pour ω une infinité d'angles différens, & l'on aura $l-\frac{\alpha}{\beta}=l\lambda+\omega\sqrt{-1}$, ce qui donnera une infinité de valeurs de r.

Soit $\frac{\alpha}{\beta}$ une quantité réelle positive, on fera $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$, cos. $\omega=-1$, & sin. $\omega=0$, ce qui donne $\omega=(2\nu+1)\pi$, ν étant un nombre quelconque entier positif, ou négatif, & π dénotant l'angle de 180.°; donc

$$r+1=\frac{l\frac{\alpha}{\beta}+(2\nu+1)\pi\sqrt{-1}}{l\frac{1+ka}{1+kb}}$$

& l'on aura les différentes valeurs de r, en faisant successivement $\nu=1, -1, 2, -2$ &c.

Si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité réelle négative, $-\frac{\alpha}{\beta}$ sera réelle positive, c'est pourquoi on supposera $\lambda=-\frac{\alpha}{\beta}$, cos. ω

$= 1$, $\sin.\,\omega = 0$; d'où $\omega = 2\nu\pi$, & par conséquent

$$r + 1 = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta} + 2\nu\pi\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

Enfin si $\frac{\alpha}{\beta}$ est une quantité imaginaire de la forme $p + q\sqrt{-1}$, on aura $\lambda \cos.\,\omega = -p$, & $\lambda \sin.\,\omega = -q$, d'où l'on tire $\lambda = \sqrt{(p^2 + q^2)}$, $\sin.\,\omega = -\frac{q}{\lambda}$, & $\cos.\,\omega = -\frac{p}{\lambda}$. Donc si on suppose que ω' soit le plus petit angle dont le sinus $= -\frac{q}{\lambda}$, & le cosinus $= -\frac{p}{\lambda}$, on aura $\omega = \omega' + 2\nu\pi$, ν dénotant comme ci-devant un nombre quelconque entier positif ou négatif, d'où

$$r + 1 = \frac{l\lambda + (\omega' + 2\nu\pi)\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+ka}{1+kb}}.$$

2.° Lorsque $1 + kb = (1 + ka)^2$, $1 + kc = (1 + ka)^3$ &c.; car en faisant $(1 + ka)^{-r-1} = p$, l'équation proposée deviendra $\alpha p + \beta p^2 + \gamma p^3 +$ &c. $= 0$, d'où l'on tirera p par les méthodes connues; après quoi on trouvera r par la méthode précédente.

XIX. Si $k = 0$, & $h = 1$, ensorte que l'équation à résoudre soit

$\alpha\varphi(t + a) + \beta\varphi(t + b) + \gamma\varphi(t + c) +$ &c. $= T$, alors, suivant ce qui a été dit dans l'Article XVII., on trouvera

$P = \alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} + \gamma e^{-\rho c} +$ &c., &

$q = -\alpha a e^{-\rho a} - \beta b e^{-\rho b} - \gamma c e^{-\rho c} -$ &c.,

& la valeur de y, c'eſt-à-dire de φt, ſera exprimée par la ſuite infinie

$$-\frac{\theta 1}{q 1}-\frac{\theta 2}{q 2}-\frac{\theta 3}{q 3}-\&c.$$

dans laquelle on aura en général $\theta = e^{-pt} \int T e^{pt} dt$.

A l' égard des valeurs de ρ on les tirera de l' équation $P = 0$, laquelle eſt réſoluble dans les mêmes cas que ci-deſſus, ſavoir lorſque le coéficient γ, & tous les ſuivans ſont nuls, & lorſque $b = 2a$, $c = 3a$ &c. Dans le premier cas on aura $\alpha e^{-\rho a} + \beta e^{-\rho b} = 0$, d'où l'on tire, en diviſant par $\beta e^{-\rho b}$, & prenant les logarithmes $\rho = \frac{l - \frac{\alpha}{\beta}}{b - a} = \frac{l\lambda + \nu\sqrt{-1}}{b - a}$. Dans le ſecond on aura, en faiſant $e^{-\rho a} = p$, $\alpha + \beta p^2 + \gamma p^3 + \&c. = 0$, d' où l' on tirera p, & par conſéquent ρ.

Solutions de quelques problêmes concernant le mouvement des fluides.

XX. Si un fluide homogène & non élaſtique ſe meut dans un vaſe de figure quelconque, & qu'on ſuppoſe ſon mouvement arrivé à un état permanent, nommant p & q les viteſſes d' une particule quelconque du fluide paralellement à deux axes fixes perpendiculaires entr'eux, & t, x les coordonnées rectangles qui déterminent la poſition de cette particule par rapport aux mêmes axes, on aura les équations ſuivantes

$$\frac{dp}{dt} + \frac{dq}{dx} = 0, \ \& \ \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dt} = 0,$$

(Voyés l' Art. XLII. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente à la ſolution &c.* inſéré dans le Volume précédent).

De ces deux équations on tire celle-ci $\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$, dont l' intégrale eſt

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \psi(t - x\sqrt{-1})$$

φ, & ψ dénotant des fonctions quelconques.

Enſuite l' équation $\frac{dq}{dt} = \frac{dp}{dx}$ donnera

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \psi(t - x\sqrt{-1}).$$

Or dans chaque courbe que les particules du fluide décrivent, on a $\frac{dt}{dx} = \frac{p}{q}$, donc l' équation générale de ces courbes ſera $p\,dx - q\,dt = 0$, ou bien, en ſubſtituant les valeurs de p & q, & intégrant enſuite

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M$$

M étant une conſtante arbitraire, & Φ, Ψ dénotant des fonctions telles que $\frac{d.\Phi t}{dt} = \varphi t$, & $\frac{d.\Psi t}{dt} = \psi t$; & cette équation devra exprimer auſſi la courbure des parois du vaſe.

Suppoſons que l' axe des t diviſe le vaſe en deux parties égales & ſemblables, il faudra que l' équation dont il s' agit ne contienne aucune puiſſance paire de x; or

$$\Phi(t+x\sqrt{-1}) = \Phi t + \varphi t . x\sqrt{-1} - \varphi' t . \frac{x^2}{2} - \varphi'' t . \frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

$$\Psi(t-x\sqrt{-1}) = \Psi t - \psi t . x\sqrt{-1} - \psi' t . \frac{x^2}{2} + \psi'' t . \frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.}$$

(on ſuppoſe ici que $\varphi' t = \frac{d.\varphi t}{dt}$, $\varphi'' t = \frac{d.\varphi' t}{dt}$, & ainſi des autres); donc l' équation ſera

$$\Phi t - \Psi t + (\varphi t + \psi t)\, x\sqrt{-1} - (\varphi' t - \psi' t)\frac{x^2}{2}$$

$$- (\varphi'' t + x'' t)\frac{x^3}{2.3}\sqrt{-1} \text{ \&c.} = M.$$

Maintenant il est clair que les puissances impaires de x ne peuvent disparoître que dans ces deux cas, 1.° lorsque $\Phi t - \Psi t = M$, ce qui donne, en différentiant deux fois, $\varphi' t - \psi' t = 0$, & ainsi de suite; 2.°, lorsque $\varphi t + \psi t = 0$, ce qui donne aussi $\varphi'' t + \psi'' t = 0$ &c.

Dans le premier cas on aura $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = \Phi(t - x\sqrt{-1}) - M$, & l'équation deviendra

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Phi(t - x\sqrt{-1}) = 0$$

de plus on aura

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}) \quad \&$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$$

où il faut remarquer qu'en faisant x négative la valeur de p demeure la même, & que celle de q change de signe; d'où il s'ensuit que dans ce cas-là les particules du fluide auront autour du diamètre du vase des mouvemens semblables, & dans le même sens.

Dans le second cas on aura $\psi(t - x\sqrt{-1}) = -\varphi(t - x\sqrt{-1})$, & intégrant $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = N - \Phi(t - x\sqrt{-1})$, d'où

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) + \Phi(t - x\sqrt{-1}) = M + N,$$

& ensuite

$$p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$$

$$\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}).$$

Ici en faisant x négative p devient négative, & q demeure positive, ce qui fait voir que dans ce cas les particules du fluide décrivent de coté & d'autre du diamètre du vase des courbes égales & semblables, comme dans le cas précédent, mais avec des directions contraires.

Tout se réduit donc à trouver la fonction Φ par cette condition que

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) \pm \Phi(t - x\sqrt{-1}) = H,$$

x étant donnée en t par la figure des parois du vase, & H étant une quantité constante.

Soit $x = h + kt$, ce qui eſt le cas où les parois ſont des lignes droites, & l'équation dont il s'agit ſera réductible à la formule générale de l'Art. XVIII.

On fera donc $\alpha = 1$, $\beta = \pm 1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$, $T = H$, $y = \Phi t$, & l'on aura, 1.° $-\frac{\alpha}{\beta} = \mp 1$, & par conſéquent $\lambda = 1$, coſ. $\omega = \mp 1$, ſin. $\omega = 0$; donc $\omega = \mu\pi$, π dénotant la demie circonférence, & μ étant un nombre quelconque impair dans le premier cas, ſavoir dans le cas où l'on prend le ſigne ſupérieur, & un nombre quelconque pair dans l'autre cas; par conſéquent on aura $r + 1 = \frac{\mu\pi\sqrt{-1}}{l\,\frac{1+k\sqrt{-1}}{1-k\sqrt{-1}}}$;

or on ſait que $l\,\frac{1+\text{tang.}\,u.\sqrt{-1}}{1-\text{tang.}\,u.\sqrt{-1}} = 2u\sqrt{-1}$; donc, prenant u pour l'arc dont la tangente eſt k, on aura $r + 1 = \frac{\mu\pi}{2u}$. 2.° On aura, par le même Article $Q = -(1 + k\sqrt{-1})^{-r-1}\,l(1 + k\sqrt{-1}) \mp (1 - k\sqrt{-1})^{-r-1}\,l(1 - k\sqrt{-1})$; or, à cauſe de $k = \frac{\text{ſin.}\,u}{\text{coſ.}\,u}$, on a $(1 \pm k\sqrt{-1})^{-r-1} = \text{coſ.}\,u^{r+1}$ $(\text{coſ.}\,u \pm \text{ſin.}\,u\cdot\sqrt{-1})^{-r-1} = \text{coſ.}\,u^{r+1}\,[\text{coſ.}\,(r+1)u \mp \text{ſin.}\,(r+1)u\cdot\sqrt{-1}]$, & $l(1 \pm k\sqrt{-1}) = l\,\frac{\text{coſ.}\,u \pm \text{ſin.}\,u.\sqrt{-1}}{\text{coſ.}\,u} = \pm u\sqrt{-1} - l\,\text{coſ.}\,u$; donc on aura pour le premier cas $Q = -2\,\text{coſ.}\,u^{r+1}[u\,\text{ſin.}\,(r+1)u - l\,\text{coſ.}\,u\cdot\text{coſ.}\,(r+1)u] =$ (à cauſe de $(r+1)u = \frac{\mu\pi}{2}$) $\mp 2u\,\text{coſ.}\,u^{r+1}$, le ſigne ſupérieur étant pour le cas où μ ſera de la forme $4\nu + 1$, & le ſigne inférieur pour le cas où μ ſera de la forme $4\nu + 3$; & pour l'autre cas $Q = -2\,\text{coſ.}\,u^{r+1}\,[u\,\text{coſ.}\,(r+1)u$

$+ l$

$+ l \cos u \cdot \sin (r+1)u] \sqrt{-1} = \mp 2u \cos u^{r+1} \cdot \sqrt{-1}$, le signe supérieur étant pour le cas où μ est de la forme 4ν, & le signe inférieur pour le cas où μ est de la forme $4\nu + 2$; 3.° On aura, à cause de $T = H$,

$$\int T(h+kt)^r dt = \frac{H}{(r+1)k}(h+kt)^{r+1} + \text{const.};$$

donc $\theta = \frac{H}{(r+1)k} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.}$

Donc on aura en général dans le premier cas

$$-k\frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1)\cos u^{r+1}} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Et dans le second cas

$$-k\frac{\theta}{Q} = \pm \frac{H}{2u(r+1)\cos u^{r+1}\sqrt{-1}} + (h+kt)^{-r-1} \times \text{const.}$$

Ainsi substituant au lieu de $r+1$ sa valeur $\frac{\mu\pi}{2u}$, & mettant successivement au lieu de μ tous les nombres entiers positifs & négatifs, on aura tous les termes qui doivent entrer dans la valeur de y.

Il y a cependant un cas à excepter; c'est celui où $\mu = 0$, & par conséquent $r = -1$; dans ce cas on aura $\int T(h+kt)^r dt = \frac{H}{k} l(h+kt) + \text{const.}$, & par conséquent

$$-k\frac{\theta}{Q} = \frac{H}{2u\sqrt{-1}} l(h+kt) + \text{const.}$$

Donc faisant pour abreger $\cos u^{\frac{\pi}{2u}} = p$, $(h+kt)^{\frac{\pi}{2u}} = z$, & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c. a, b, c &c., on aura pour l'équation

$$\Phi[t+(h+kt)\sqrt{-1}] + \Phi[t-(h+kt)\sqrt{-1}] = H,$$

$$\Phi t = Az + az^{-1} + Bz^3 + bz^{-3} + \&c. + \frac{H}{\pi}$$

$$\left(p + \frac{1}{p} - \frac{1}{3}p^3 - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{5}p^5 + \frac{1}{5p} - \&c.\right),$$

& pour l' équation
$$\Phi[t+(h+kt)\sqrt{-1}]-\Phi[t-(h+kt)\sqrt{-1}]=H,$$
$$\Phi t=\frac{H}{2u\sqrt{-1}}\,l(h+kt)+Az^{2}+az^{-2}+Bz^{4}+bz^{-4}$$
$+$ &c. $+$ conſt.

Or $p-\frac{1}{3}p^{3}+\frac{1}{5}p^{5}-$ &c. $=$ arc. tang. p; & $\frac{1}{p}-\frac{1}{3p^{3}}+\frac{1}{5p^{5}}-$ &c. $=$ arc. cot. p; donc la ſomme de ces deux ſéries ſera $=\frac{\pi}{2}$; par conſéquent on aura pour la première équation
$$\Phi t=Az+az^{-1}+Bz^{3}+bz^{-3}+\text{\&c.}+\frac{H}{2}.$$

Connoiſſant ainſi la nature de la fonction Φ, on trouvera par la différentiation la fonction φ, & par conſéquent les expreſſions des viteſſes p & q; & l' on déterminera enſuite les conſtantes arbitraires A, a, B, b &c. par les valeurs connues, & données de p & q, lorſque $t=0$.

XXI. Si $k=0$, de manière que le fluide ſe meuve dans un canal rectiligne, & dont la largeur ſoit par tout $=2h$, on ſuppoſera k infiniment petite, & l' on aura d' abord $u=k$; faiſant enſuite $k=\alpha h$, α étant une quantité évanouiſſante, on aura $(h+kt)^{\frac{\pi}{2u}}=h^{\frac{\pi}{2u}}(1+\alpha t)^{\frac{\pi}{2\alpha h}}=h^{\frac{\pi}{2k}}\times e^{\frac{\pi t}{2h}}$; & $l(h+kt)=lh(1+\alpha t)=lh+\alpha t$; par conſéquent $\frac{H}{2u\sqrt{-1}}\,l(h+kt)=\frac{Hlh}{2k\sqrt{-1}}+\frac{Ht}{2h\sqrt{-1}}$. Donc ſi on fait $z=e^{\frac{\pi t}{2k}}$, on aura pour Φt les mêmes expreſſions que dans l' Article précédent, excepté qu'au lieu de $\frac{H}{2u\sqrt{-1}}\, l(h + kt)$, il faudra mettre $\frac{Ht}{2h\sqrt{-1}}$.

XXII. Si on ne vouloit pas que le vaſe eut deux parties égales & ſemblables, alors nommant x les ordonnées qui répondent à l'une des parois, & x' celles qui répondent à l' autre, on aura les deux équations

$$\Phi(t + x\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1}) = M, \quad \&$$

$$\Phi(t + x'\sqrt{-1}) - \Psi(t - x'\sqrt{-1}) = N,$$

par le moyen deſquelles on déterminera les fonctions Φ, & Ψ.

Si les deux parois ſont des lignes droites, de ſorte que $x = h + kt$, & $x' = h' + k't$, on en viendra à bout de la manière ſuivante. On ſuppoſera $h' = h + H$, $k' = k + K$, & la ſeconde équation deviendra, en faiſant $H + Kt = X$,

$$\Phi(t + x\sqrt{-1} + X\sqrt{-1}) - \Psi(t - x\sqrt{-1} - X\sqrt{-1}) = N.$$

Soit maintenant $\Phi(t + x\sqrt{-1}) = y$, & $\Psi(t - x\sqrt{-1}) = y'$; on aura ces deux équations

$$y - y' = M, \quad \&$$

$$y + \frac{dy}{dt}X\sqrt{-1} + \frac{d^2y}{2\,dt^2}(X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 + \&c.$$

$$- y' + \frac{dy'}{dt}X\sqrt{-1} - \frac{d^2y}{2\,dt^2}(X\sqrt{-1})^2 + \frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 - \&c. = N.$$

La première donne $y' = y - M$, $\frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y'}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ &c.; donc la ſeconde deviendra $2\frac{dy}{dt}X\sqrt{-1} + 2\frac{d^3y}{2.3\,dt^3}(X\sqrt{-1})^3 + \&c. + M = N$, ou bien

$$2\sqrt{-1}(H + Kt)\frac{dy}{dt} + 2\frac{(\sqrt{-1})^3}{2.3}(H + Kt)^3\frac{d^3y}{dt^3}$$

$$+ 2\frac{(\sqrt{-1})^5}{2.3.4.5}(H + Ht)^5\frac{d^5y}{dt^5} - \&c. = N - M,$$

équation qui eſt dans le cas de la formule (S) de l'Article XVIII.; & l'on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $a = \sqrt{-1}$, $b = -\sqrt{-1}$; $h = H$, $k = K$; donc &c.

On trouvera ainſi la valeur de y en t, après quoi on aura celle de y' par l'équation $y' = y - M$.

XXIII. Les équations $p = \varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})$, $\frac{q}{\sqrt{-1}} = \varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})$ trouvées dans l'Art. XX. donnent

$$p \pm \frac{q}{\sqrt{-1}} = 2\,\varphi(t \pm x\sqrt{-1});$$

ou bien, en faiſant $P = \frac{p}{2}$, $Q = -\frac{q}{2}$,

$$\varphi(t \pm x\sqrt{-1}) = P \pm Q\sqrt{-1};$$

ainſi pour trouver les viteſſes p, & q, il ne s'agit que de réduire l'expreſſion $\varphi(t + x\sqrt{-1})$ à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P, & Q étant des quantités réelles.

Lorſque la fonction φ eſt donnée algébriquement, on peut trouver les valeurs de P, & Q par les méthodes connues; mais ſi la fonction φ eſt inconnue, alors il faut avoir recours aux ſéries, leſquelles donnent

$$P = \varphi t - \frac{x^2}{2}\varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{IV} t - \&c. \quad \&$$

$$Q = x\varphi' t - \frac{x^3}{2.3}\varphi''' t + \frac{x^5}{2.3.4.5}\varphi^{V} t - \&c.$$

Or je remarque 1.° que ces deux ſéries deviennent divergentes, lorſque x eſt fort grande, 2.° qu'elles demandent qu'on connoiſſent les différences de la fonction φt, de ſorte qu'elles ne peuvent être d'uſage dans la pratique que lorſque la fonction φ eſt connue analitiquement, & nullement lorſque cette fonction n'eſt donnée que mécaniquement, c'eſt-à-dire par le moyen d'une courbe; ainſi je crois qu'il ne ſera pas inutile de faire voir, comment on peut transformer ces mêmes séries en d'autres qui dépendent uniquement de la fonction φ.

Pour cet effet je prends la quantité

$$\frac{\varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1})}{2},$$

laquelle étant réduite en série devient

$$\varphi t - \frac{x^2}{2}\varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}} t - \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{\text{VI}} t + \&c.$$

je prends de plus la quantité

$$\frac{\varphi(t + x) + \varphi(t - x)}{2},$$

laquelle se change de même en celle-ci

$$\varphi t + \frac{x^2}{2}\varphi'' t + \frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}} t + \frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{\text{VI}} t + \&c.$$

j'appelle la première de ces deux quantité y, & la seconde y; ensuite je suppose que Y, Y', Y'', Y''' &c. soient les valeurs de y, lorsque au lieu de x on y met o, $1x$, $2x$, $3x$ &c., & prenant des coéficiens arbitraires α, α', α'', α''' &c., j'aurai

$$\begin{aligned}
&y - \alpha Y - \alpha' Y' - \alpha'' Y'' - \alpha''' Y''' - \&c.\\
&= (1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c.)\varphi t\\
&- (1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c.)\frac{x^2}{2}\varphi'' t\\
&+ (1 - \alpha' - 2^4\alpha'' - 3^4\alpha''' - \&c.)\frac{x^4}{2.3.4}\varphi^{\text{IV}} t\\
&- (1 + \alpha' + 2^6\alpha'' + 3^6\alpha''' + \&c.)\frac{x^6}{2.3.4.5.6}\varphi^{\text{VI}} t\\
&\&c.
\end{aligned}$$

Soit

$$\left.\begin{aligned}
&1 - \alpha - \alpha' - \alpha'' - \alpha''' - \&c. = 0\\
&1 + \alpha' + 4\alpha'' + 9\alpha''' + \&c. = 0\\
&1 - \alpha' - 2^4\alpha'' - 3^4\alpha''' - \&c. = 0\\
&1 + \alpha' + 2^6\alpha'' + 3^6\alpha''' + \&c. = 0
\end{aligned}\right\}. (T)$$

& ainsi de suite, on aura

$y = \alpha Y + \alpha' Y' + \alpha'' Y'' + \alpha''' Y''' +$ &c.

Tout ſe réduira donc à tirer les valeurs de α', α'', α''' &c. des équations, (T). Pour y parvenir, je multiplie la ſeconde par β', la troiſiéme par β'', la quatriéme par β''' &c.; β', β'', β''' &c. étant des coéficiens indéterminés, après quoi je les ajoute toutes enſemble, ce qui me donne

$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' +$ &c. $- \alpha - 1$

$(1 - \beta' + \beta'' - \beta''' +$ &c.$)\, \alpha' -$

$(1 - 4\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' +$ &c.$)\, \alpha'' -$

$(1 - 9\beta' + 3^4\beta'' - 3^6\beta''' +$ &c.$)\, \alpha''' -$ &c. $= 0$.

A préſent pour avoir la valeur d' une α quelconque, comme α^m je fais égal à zero chacun des coéficiens des autres α; de cette manière j' ai d' abord

$$\alpha^m = \frac{1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. - \alpha}{1 - m^2\beta' + m^4\beta'' - m^6\beta''' + \&c.},$$

& enſuite les équations de condition

$1 - \beta' + \beta'' - \beta''' +$ &c. $= 0$

$1 - 4\beta' + 2^4\beta'' - 2^6\beta''' +$ &c. $= 0$

&c.

c'eſt-à-dire l' équation

$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 +$ &c. $= 0$,

laquelle doit avoir lieu, en mettant au lieu de u tous les nombres entiers 1, 2, 3 &c. à l' infini, excepté m. Donc ſi on multiplie cette équation par $1 - \frac{u^2}{m^2}$, & qu'on ſuppoſe $u = \frac{z}{\pi}$, on aura

$$1 - \frac{\beta' + \frac{1}{m^2}}{\pi^2} z^2 + \frac{\beta'' + \frac{\beta'}{m}}{\pi^4} z^4 - \frac{\beta''' + \frac{\beta''}{m^2}}{\pi^6} z^6$$

$+$ &c. $= 0$

équation, dont les racines ſeront π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c. à l' infini; donc comparant cette équation avec l'équation

$$\frac{\text{sin.}\, z}{z} = 1 - \frac{z^2}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4.5} - \frac{z^6}{2.3.4.5.6.7} + \&c. = 0,$$

dont les racines sont aussi, comme l'on sait, π^2, $4\pi^2$, $9\pi^2$, $16\pi^2$ &c., on aura

$$\beta' + \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{2.3},$$

$$\beta'' + \frac{\beta'}{m^2} = \frac{\pi^4}{2.3.4.5},$$

$$\beta''' + \frac{\beta''}{m^2} = \frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7};$$

&c.

par où l'on connoitra les valeurs des quantités β; mais pour notre objet il suffit de remarquer que

$$1 - \beta' u^2 + \beta'' u^4 - \beta''' u^6 + \&c. = \frac{\text{sin.}\, \pi u}{\pi u \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right)}.$$

Car, faisant 1.° $u^2 = -1$, savoir $u = \sqrt{-1}$, on aura

$$1 + \beta' + \beta'' + \beta''' + \&c. = \frac{\text{sin.}\,(\pi\sqrt{-1})}{\pi\sqrt{-1}\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)}.$$

2.° Si on suppose $u = m$ on trouvera, en différentiant le numérateur & le dénominateur, à cause que l'un & l'autre s'évanouissent lorsque $u = m$,

$$1 - \beta' m^2 + \beta'' m^4 - \beta''' m^6 + \&c. = -\frac{\text{cos.}\, m\pi}{2} = \pm \frac{1}{2},$$

le signe supérieur étant pour le cas où m est impair, & le signe inférieur pour le cas où m est pair; donc on aura

$$\kappa^m = \pm \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)} \mp 2\alpha,$$

ou bien, en faisant $\alpha = a\dfrac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi}$,

$$\alpha^m = \pm \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \frac{m^2(1-a) - a}{m^2+1};$$

donc enfin

$$y = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left\{ \frac{a}{2} Y + \frac{1-a-a}{1+1} Y' - \frac{4(1-a)-a}{4+1} Y'' + \frac{9(1-a)-a}{9+1} Y''' - \&c. \right\}.$$

Or puisque la quantité a est arbitraire, on la déterminera de manière que la série devienne la plus convergente qu'il est possible; c'est pourquoi on fera $1 - a = 0$, savoir $a = 1$; ce qui donnera

$$y = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left\{ \frac{Y}{2} - \frac{Y'}{1+1} + \frac{Y''}{4+1} - \frac{Y'''}{9+1} + \&c. \right\},$$

& par conséquent

$$\varphi(t + x\sqrt{-1}) + \varphi(t - x\sqrt{-1}) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \left\{ \frac{1}{2}\varphi . t - \frac{\varphi(t+x) + \varphi(t-x)}{1+1} + \frac{\varphi(t+2x) + \varphi(t-2x)}{4+1} - \frac{\varphi(t+3x) + \varphi(t-3x)}{9+1} + \&c. \right\}.$$

Qu'on différentie cette équation en faisant varier x, & qu'on l'intégre ensuite en faisant varier t, on aura

$$[\varphi(t + x\sqrt{-1}) - \varphi(t - x\sqrt{-1})]\sqrt{-1} = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \times \left\{ \frac{\varphi(t+x) - \varphi(t-x)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(t+2x) - \varphi(t-2x)}{4+1} + 3\,\frac{\varphi(t+3x) - \varphi(t-3x)}{9+1} - \&c. \right\}.$$

Donc si on fait

$$P = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}\varphi t - \frac{\varphi(t+x) + \varphi(t-x)}{1+1} \right.$$

+

$$+\frac{\varphi(t+2x)+\varphi(t-2x)}{4+1}-\frac{\varphi(t+3x)+\varphi(t-3x)}{9+1}+\text{\&c.}\Big\}\ \&$$

$$Q=\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\Big\{\frac{\varphi(t+x)-\varphi(t-x)}{1+1}-2\frac{\varphi(t+2x)-\varphi(t-2x)}{4+1}$$

$$+3\frac{\varphi(t+3x)-\varphi(t-3x)}{9+1}-\text{\&c.}\Big\},$$

on aura

$$\varphi(t\pm x\surd-1)=P\pm Q\surd-1\,;$$

& les quantités P & Q seront données, comme l'on voit, par des suites convergentes dont chaque terme pourra se déterminer mécaniquement sans qu'il soit besoin de connoître la nature de la fonction φ.

XXIV. Il est clair que l'intégrale de l'équation $\frac{d^2p}{dt^2} = -\frac{d^2p}{dx^2}$ (*Art. XX.*) est aussi

$$p=\varphi(x+t\surd-1)+\psi(x-t\surd-1)$$

ou ce qui revient au même

$$p=\frac{\varphi(x+t\surd-1)+\varphi(x-t\surd-1)}{2}$$

$$-\frac{\psi(x+t\surd-1)-\psi(x-t\surd-1)}{2\surd-1},$$

d'où l'on tire ensuite

$$q=\frac{\varphi(x+t\surd-1)-\varphi(x-t\surd-1)}{2\surd-1}$$

$$+\frac{\psi(x+t\surd-1)+\psi(x-t\surd-1)}{2}.$$

Imaginons que le vase soit formé de deux parois droites & paralelles ensorte qu'il ait par tout la même largeur a; en prenant une de ces parois pour l'axe des t, il faudra que la vitesse q soit nulle lorsque $x = 0$, & lorsque $x = a$, quel que soit t. Or en faisant $t = 0$, on a $p = \varphi x$, & $q = \psi x$; ainsi, en décrivant sur la portion de l'axe des x comprise entre les parois du vaſe, deux courbes qui ſoient les échelles des viteſſes p & q que doivent avoir les particules du fluide dans cette ſection du vaſe, les appliquées de ces courbes répondantes à une abſciſſe quelconque x repréſenteront les fonctions $\varphi\, x$ & $\psi\, x$.

Préſentement on trouvera par l'Art. préc.

$$p = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2}\varphi\, x - \frac{\varphi(x+t) + \varphi(x-t)}{1+1} + \frac{\varphi(x+2t) + \varphi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\} - \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$$
$$\times \left\{ \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{4+1} - 2\,\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\}$$

$$\& \; q = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi} \left\{ \frac{\varphi(x+t) - \varphi(x-t)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(x+2t) - \varphi(x-2t)}{4+1} + \&c. \right\} + \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{2\pi}$$
$$\times \left\{ \frac{1}{2}\psi\, x - \frac{\psi(x+t)+\psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t)+\psi(x-2t)}{4+1} - \&c. \right\}$$

Donc puiſque q doit être $= 0$, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = a$, il faudra que l'on ait

$$\frac{\varphi\, t - \varphi - t}{1+1} - 2\,\frac{\varphi\, 2t - \varphi - 2t}{4+1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\psi\, 0 - \frac{\psi\, t + \psi - t}{1+1} + \frac{\psi\, 2t + \psi - 2t}{4+1} - \&c. = 0$$

$$\frac{\varphi(a+t) - \varphi(a-t)}{1+1} - 2\,\frac{\varphi(a+2t) - \varphi(a-2t)}{4+1} + \&c.$$
$$+ \frac{1}{2}\psi\, a - \frac{\psi(a+t)+\psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t)+\psi(a-2t)}{4+1}$$
$$- \&c. = 0,$$

ou bien, afin que les fonctions φ & ψ ne dépendent point l'une dans l'autre

$$\frac{\varphi\, t - \varphi - t}{1+1} - 2\,\frac{\varphi\, 2t - \varphi - 2t}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{\phi(a+t)-\phi(a-t)}{1+1} - 2\,\frac{\phi(a+2t)-\phi(a-2t)}{4+1} + \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\psi\,0 - \frac{\psi t + \psi - t}{1+1} + \frac{\psi 2t + \psi - 2t}{4+1} - \&c. = 0$$

$$\frac{1}{2}\,\psi a - \frac{\psi(a+t)+\psi(a-t)}{1+1} + \frac{\psi(a+2t)+\psi(a-2t)}{4+1} + \&c. = 0.$$

Pour ſatisfaire à ces quattre conditions, on ſuppoſera que les fonctions ϕ & ψ ſoient telles que l' on ait en général, quelle que ſoit la valeur de u,

$$\phi u = \phi - u,\ \phi(a+u) = \phi(a-u),$$
$$\psi u = -\psi - u,\ \psi(a+u) = -\psi(a-u);$$

ce qui ſervira à déterminer la continuation des deux échelles données pour les abſciſſes négatives & pour les abſciſſes plus grandes que a, laquelle devra par conſéquent être telle que les ordonnées également diſtantes de part & d' autre des deux extrémités de l' axe a ſoient égales & de même ſigne dans la courbe des viteſſes p, & de ſignes différens dans la courbe des viteſſes q; d'où il s'enſuit que la première de ces courbes ſera compoſée d' une infinité de branches égales & ſemblables, toutes du même coté de l' axe, & diſpoſées alternativement en ſens contraire, & que l'autre aura de même une infinité de branches égales & ſemblables, mais ſituées alternativement au deſſus & au deſſous de l' axe.

Ayant donc décrit ces deux courbes, on aura par les ſéries données ci-deſſus les valeurs approchées des viteſſes p & q de chaque particule du fluide; d' où l' on voit que le mouvement d' un fluide qui ſe meut dans un canal droit eſt déterminé par le mouvement que ce fluide a dans une ſection quelconque de ce même canal.

De plus il eſt clair par la nature des courbes qui repréſentent les fonctions ϕ & ψ qu'en augmentant, ou en diminuant la quantité t de $2a$, ou de $4a$, ou de $6a$ &c. les valeurs de p & de q demeurent les mêmes; d' où il s'ensuit, que si on imagine le fluide divisé en portions égales par des droites perpendiculaires aux parois du canal, & placées à la distance $2a$ les unes des autres, chacune de ces portions du fluide aura nécessairement le même mouvement.

Si le fluide étoit terminé par une ligne droite perpendiculaire aux parois du vase, alors prenant cette même ligne pour l'axe des x il faudroit que $p = 0$ lorsque $t = 0$, donc $\varphi x = 0$, & par conséquent

$$p = -\frac{c^{\pi} - c^{-\pi}}{2\pi}\left\{\frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} - 2\,\frac{\psi(x+2t) - \psi(x-2t)}{4+1} + \&c.\right\} \;\&$$

$$q = \frac{c^{\pi} - c^{-\pi}}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\psi x - \frac{\psi(x+t) - \psi(x-t)}{1+1} + \frac{\psi(x+2t) + \psi(x-2t)}{4+1} - \&c.\right\}$$

Or puisque la valeur de p est nulle lorsque $t = 0$ elle le sera aussi lorsque $t = 2a$, ou $= 4a$ &c.; ainsi le fluide aura dans ce cas le même mouvement que s'il étoit renfermé dans un vase de figure rectangulaire dont la longueur fût double, ou quadruple &c. de la largeur.

On pourra encore trouver le mouvement du fluide lorsque la longueur du vase sera égale à sa largeur, & en général toutes les fois que les deux dimensions du vase seront commensurables entr'elles; mais il faudra pour lors que les valeurs données de q forment une courbe qui ait un, ou plusieurs nœuds, de sorte que la fonction ψx demeure la même en augmentant ou en diminuant x d'une quantité égale à la longueur du vase. Dans tous les autres cas, c'est-à-dire, lorsque les dimensions du vase seront incommensurables, on ne pourra déterminer le mouvement du fluide par la théorie précédente; & comme cette théorie est fondée sur la supposition que le mouvement du fluide ſoit dans un état conſtant, enſorte que les particules du fluide décrivent des courbes invariables, ce ſera une marque que l'hypothéſe dont nous parlons n'aura point lieu; ſur quoi voyés les Art. XLII. & XLIII. de la Diſſertation citée ci-deſſus.

Solution d'une queſtion rélative à la théorie des cordes vibrantes.

XXV. La queſtion que je vais examiner ici conſiſte à ſavoir ſi toutes les courbes qui rendent la ſolution du problême des cordes vibrantes poſſible, ſuivant la théorie de M. D'Alembert, ſont renfermées ou non dans l'équation

$y = \alpha \text{ ſin. } \frac{\pi x}{a} + \beta \text{ ſin. } \frac{2\pi x}{a} + \gamma \text{ ſin. } \frac{3\pi x}{a} + \text{\&c.};$

queſtion que ce grand Géomêtre a vivement agitée avec MM. Bernoulli & Euler dans le premier Mémoire de ſes Opuſcules Mathématiques.

Pour pouvoir réſoudre cette queſtion d'une manière directe & convaincante, je prends l'équation générale de la courbe que forme la corde vibrante, laquelle eſt comme l'on ſait,

$$y = \frac{\varphi(x + t) + \varphi(x - t)}{2},$$

& j'examine quelle doit être la forme de la fonction φ pour que l'on ait en général quel que ſoit t, $\varphi t + \varphi - t = 0$, & $\varphi(a + t) + \varphi(a - t) = 0$, conditions néceſſaires pour que les deux bouts de la corde ſoient fixes; or puiſque $\varphi t = - \varphi - t$ on aura $\varphi(a - t) = - \varphi - (a - t) = - \varphi(t - a)$; donc la ſeconde des deux conditions ſe réduira à celle-ci

$$\varphi(t + a) - \varphi(t - a) = 0.$$

Cette équation étant comparée avec la formule de l' Art. XIX., on aura $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 0$, $b = -a$, $T = 0$; donc $P = e^{-\rho a} - e^{\rho a}$; & faisant $\rho = -r\sqrt{-1}$, $P = 2$ sin. $ra \times \sqrt{-1}$; donc l'équation $P = 0$ donnera $ra = \mu\pi$, μ étant un nombre entier positif, ou négatif; par conséquent on aura $r = \frac{\mu\pi}{a}$, & $\rho = -\frac{\mu\pi}{a}\sqrt{-1}$; or, T étant $= 0$, on aura $\int T e^{\rho t} dt =$ const.; donc $\frac{\theta}{q} = e^{\frac{\mu\pi t}{a}\sqrt{-1}} \times$ const.; donc, donnant successivement à μ toutes ses valeurs $1, -1, 2, -2$ &c., & prenant des constantes arbitraires A, B, C &c., A', B', C', on aura

$$\varphi t = A e^{\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + A' e^{-\frac{\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B e^{\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + B' e^{-\frac{2\pi t}{a}\sqrt{-1}} + \text{\&c.}$$

équation qui revient à cette forme

$$\varphi t = \alpha \,\text{sin.}\, \frac{\pi t}{a} + \alpha' \,\text{cos.}\, \frac{\pi t}{a} + \beta \,\text{sin.}\, \frac{2\pi t}{a} + \beta' \,\text{cos.}\, \frac{2\pi t}{a} + \text{\&c.}$$

α, α', β, β' &c. étant pareillement des constantes arbitraires.

Or par la première condition il faut que $\varphi t + \varphi - t = 0$, donc $\alpha' \,\text{cos.}\, \frac{\pi t}{a} + \beta' \,\text{cos.}\, \frac{2\pi t}{a} + \text{\&c.} = 0$, donc $\alpha' = 0$, $\beta' = 0$ &c., donc

$$\varphi t = \alpha \,\text{sin.}\, \frac{\pi t}{a} + \beta \,\text{sin.}\, \frac{2\pi t}{a} + \gamma \,\text{sin.}\, \frac{3\pi t}{a} + \text{\&c.}$$

par conséquent l'équation de la figure initiale de la corde, lorsqu'elle en a une, ne peut être que de la forme

$$y = \alpha \,\text{sin.}\, \frac{\pi x}{a} + \beta \,\text{sin.}\, \frac{2\pi x}{a} + \gamma \,\text{sin.}\, \frac{3\pi x}{a} + \text{\&c.}$$

Sur l' intégration des équations

$$L y + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l y' + m \frac{dy'}{dt}$$
$$+ n \frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda y'' + \mu \frac{dy''}{dt} + \nu \frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T,$$

$$L' y + M' \frac{dy}{dt} + N' \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l' y' + m' \frac{dy'}{dt}$$
$$+ n' \frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda' y'' + \mu' \frac{dy''}{dt} + \nu' \frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T',$$

$$L'' y + M'' \frac{dy}{dt} + N'' \frac{d^2y}{dt^2} + \&c. + l'' y' + m'' \frac{dy'}{dt}$$
$$+ n'' \frac{d^2y'}{dt^2} + \&c. + \lambda'' y'' + \mu'' \frac{dy''}{dt^2} + \nu'' \frac{d^2y''}{dt^2} + \&c. = T'',$$

&c.

dans lesquelles L, M, N &c. l, m, n &c. &c. *sont des fonctions quelconques de* t.

XXVI. En suivant les mêmes principes que dans l'Art. I. on multipliera la première de ces équations par $z\,dt$, la seconde par $z'dt$, la troisiéme par $z''dt$, & ainsi de suite, z, z', z'' &c. étant de nouvelles indéterminées, & après les avoir ajoutées ensemble, on en prendra l'intégrale en faisant disparoître par des intégrations par parties, les différences des variables y, y', y'' &c. de dessous le signe $\int$; de cette manière on aura une équation de la forme suivante

$$U + \int (V y + V' y' + V'' y'' + \&c.)\, dt$$
$$= \int (T z + T' z' + T'' z'' + \&c.)\, dt,$$

dans laquelle

$$U = y\left(M z - \frac{d.Nz}{dt} + \&c. + M' z' - \frac{d.N'z'}{dt^2} + \&c.\right.$$
$$\left. + M'' z'' - \frac{d.N''z''}{dt} + \&c.\right)$$

$$+\frac{dy}{dt}(N z - \&c. + N' z' - \&c. + N'' z'' - \&c.) + \&c.$$

$$+ y'\left(m z - \frac{d.nz}{dt} + \&c. + m' z' - \frac{d.n'z'}{dt} + \&c.\right.$$

$$\left. + m'' z'' - \frac{d.n''z''}{dt} + \&c.\right)$$

$$+\frac{dy'}{dt}(n z - \&c. + n' z' - \&c. + n'' z'' - \&c.) + \&c.$$

$$+ y''\left(\mu z - \frac{d.\nu z}{dt} + \&c. + \mu' z' - \frac{d.\nu' z'}{dt} + \&c.\right.$$

$$\left. + \mu'' z'' - \frac{d.\nu'' z''}{dt} + \&c.\right)$$

$$+\frac{dy''}{dt}(\nu z - \&c. + \nu' z' - \&c. + \nu'' z'' - \&c.) + \&c.\ \&c.$$

$$\& V = L z - \frac{d.Mz}{dt} + \frac{d^2.Nz}{dt^2} - \&c.$$

$$+ L' z' - \frac{d.M'z'}{dt} + \frac{d^2.N'z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ L'' z'' - \frac{d.M''z''}{dt} + \frac{d^2.N''z''}{dt^2} - \&c.\ \&c.$$

$$V' = l z - \frac{d.mz}{dt} + \frac{d^2.nz}{dt^2} - \&c.$$

$$+ l' z' - \frac{d.m'z'}{dt} + \frac{d^2.n'z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ l'' z'' - \frac{d.m''z''}{dt} + \frac{d^2.n''z''}{dt^2} - \&c.\ \&c.$$

$$V'' = \lambda z - \frac{d.\mu z}{dt} + \frac{d^2.\nu z}{dt^2} - \&c.$$

$$+ \lambda' z' - \frac{d.\mu' z'}{dt} + \frac{d^2.\nu' z'}{dt^2} - \&c.$$

$$+ \lambda'' z'' - \frac{d.\mu'' z''}{dt} + \frac{d^2.\nu'' z''}{dt^2} - \&c.\ \&c.$$

Suppofant donc $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. on aura

$$U = \int (T z + T' z' + T'' z'' + \&c.)\, dt$$

équation, dans laquelle les plus hautes différences des variables y, y', y'' &c. ſe trouveront moins élevées d'une unité que dans les équations différentielles propoſées.

On aura donc autant de pareilles intégrales, qu'on trouvera de valeurs particulières de chacune des quantités z, z', z'', &c. par le moyen des équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. Or ſoit m la ſomme des expoſans des plus hautes différences de y, y', y'' &c. dans les équations propoſées, il eſt clair que la quantité U contiendra autant d'inconnues comme y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ &c. &c. qu'il y a d'unités dans le nombre m; donc ſi on a auſſi m valeurs particulières de z, de z', de z'' &c., on trouvera facilement les valeurs générales & complétes de y, y', y'' &c.

Soient maintenant Y, Y', Y'' &c. les premiers membres des équations propoſées, on aura

$$\int (Yz + Y'z' + Y''z'' + \&c.)\,dt = U$$
$$+ \int (Vy + V'y' + V''y'' + \&c.)\,dt \quad . \; . \; . \; (U);$$

donc faiſant $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c., on aura l'équation

$$U - \int (Yz + Y'z' + Y''z'' \&c.)\,dt = \text{conſt.},$$

laquelle aura néceſſairement toutes les valeurs de z, z', z'' &c. communes avec les équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. Or l'équation (U) eſt identique, & par conſéquent ne dépend point des valeurs de y, y', y'' &c.; donc on peut ſuppoſer ces valeurs telles que $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ &c.; & l'on aura par ce moyen l'équation $U =$ conſt., dans laquelle on regardera les quantités y, y', y'' &c. $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dy''}{dt}$ &c. &c. comme données, & les quantités z, z', z'' &c. $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$,

$\frac{dz''}{dt}$ &c. &c. comme indéterminées; or il eſt aiſé de voir que ces indéterminées ſeront auſſi au nombre de m; ſi donc on a m valeurs particuliéres de chacune des quantités y, y', y'' &c. dans les équations $Y = 0$, $Y' = 0$, $Y'' = 0$ &c., on aura auſſi, par la ſubſtitution ſucceſſive de ces valeurs dans l'équation $U =$ conſt., m équations particuliéres, d'où l'on tirera les valeurs de z, z', z'' &c., leſquelles contiendront néceſſairement m conſtantes arbitraires; de ſorte qu'en faiſant ſucceſſivement toutes ces conſtantes, hors une, égales à zéro, on aura m valeurs particuliéres de z, de z', de z'' &c. Donc &c.

XXVII. De là réſulte ce théorème.

Les équations propoſées ſeront intégrables algébriquement, ſi on peut trouver, dans le cas de $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ &c., autant de valeurs particuliéres de chacune des quantités y, y', y'' &c. qu'il y a d'unités dans la ſomme des expoſans des plus hautes différences de ces variables.

Au reſte ce théorème n'eſt qu'une ſuite de celui de l'Art. VI. Car il eſt clair que les équations propoſées peuvent toujours réduire à ne contenir chacune qu'une ſeule variable; & il eſt facile de s'aſſurer par le calcul que les réduites ſeront néceſſairement de l'ordre m; donc &c.

XXVIII. Les équations $V = 0$, $V' = 0$, $V'' = 0$ &c. ſont intégrables en général lorſque

$L = A(h + kt)^p$, $M = B(h + kt)^{p+1}$, $N = C(h + kt)^{p+2}$ &c., $L' = A'(h + kt)^p$, $M' = B'(h + kt)^{p+1}$ &c. &c.,

& de même

$l = a(h + kt)^q$, $m = b(h + kt)^{q+1}$, $n = c(h + kt)^{q+2}$ &c., $l' = a'(h + kt)^q$, $m' = b'(h + kt)^{q+1}$ &c. &c.,

& ainſi des autres.

On fera dans ce cas
$z = R(h + kt)^r$, $z' = R'(h + kt)^r$,
$z'' = R''(h + kt)^r$ &c.
R, R', R'', &c. étant ainsi que r des constantes indéterminées; on substituera ces valeurs dans les équations dont il s'agit, & divisant ensuite la première par $(h + kt)^{p+r}$, la seconde par $(h + kt)^{q+r}$ &c. on aura des équations sans t, qui donneront les valeurs de r, R, R', R'' &c.

XXIX. Si les coéficiens L, M, N &c., L', M', N' &c. étoient constans, on feroit $k = 0$, $h = 1$, & $r = \frac{\rho}{k}$, ρ étant une quantité finie, & l'on auroit $(h + kt)^r = e^{\rho t}$; par conséquent il faudroit supposer
$z = R e^{\rho t}$, $z' = R' e^{\rho t}$, $z'' = R'' e^{\rho t}$ &c.

Méthode générale pour déterminer le mouvement d'un sistéme quelconque de corps qui agissent les uns sur les autres, en supposant que ces corps ne fassent que des oscillations infiniment petites autour de leurs points d'équilibre.

XXX. Soit n le nombre des corps qui composent le sistéme, & nommons y', y'', y''' &c. les espaces infinimens petits que ces corps décrivent dans leus oscillations pendant le tems t, on aura, en négligeant les quantités infiniment petites du second ordre & des ordres plus élevés, des équations de cette forme

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y'}{dt^2} + A'y' + B'y'' + C'y''' + \&c. + N'y^n = 0,\\ &\frac{d^2y''}{dt^2} + A''y' + B''y'' + C''y''' + \&c. + N''y^n = 0, \end{aligned}\right\} (a)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^2y'''}{dt^2}+A'''y'+B'''y''+C'''y'''+\&c.+N'''y^n=0\\ \&c.\\ \frac{d^2y^n}{dt^2}+A^ny'+B^ny''+C^ny'''+\&c.\ N^ny^n=0,\end{array}\right\}(a)$$

A', B', C' &c. A'', B'', C'' &c. &c. étant des constantes données par la nature du problême.

Pour intégrer ces équations suivant la méthode expliquée ci-dessus, on multipliera la première par $\lambda' e^{\rho t} dt$, la seconde par $\lambda'' e^{\rho t} dt$, la troisiéme par $\lambda''' e^{\rho t} dt$, & ainsi de suite, λ', λ'', λ''' &c. étant, ainsi que ρ, des constantes indéterminées; ensuite on les ajoutera ensemble, & on en prendra l' intégrale en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ les différences des variables y', y'', y''' &c.; après quoi on fera $=0$ les coéficiens des quantités $\int y' e^{\rho t} dt$, $\int y'' e^{\rho t} dt$, $\int y''' e^{\rho t} dt$ &c.; de cette manière on aura d' abord l' équation intégrale

$$\left\{\begin{array}{l}\lambda'\left(\frac{dy'}{dt}-\rho y'\right)+\lambda''\left(\frac{dy''}{dt}-\rho y''\right)+\lambda'''\left(\frac{dy'''}{dt}-\rho y'''\right)\\ +\&c.\ +\lambda^n\left(\frac{dy^n}{dt}-\rho y^n\right)\end{array}\right\}e^{\rho t}=\text{const.}\ \ldots(b)$$

& ensuite les équations

$$\left.\begin{array}{l}\rho^2\lambda'+A\lambda'+A''\lambda''+A'''\lambda'''+\&c.+A^n\lambda^n=0\\ \rho^2\lambda''+B'\lambda'+B''\lambda''+B'''\lambda'''+\&c.+B^n\lambda^n=0\\ \rho^2\lambda'''+C\lambda'+C''\lambda''+C'''\lambda'''+\&c.+C^n\lambda^n=0\\ \&c.\\ \rho^2\lambda^n+N'\lambda'+N''\lambda''+N'''\lambda'''+\&c.+N^n\lambda^n=0\end{array}\right\}(c)$$

lesquelles serviront à déterminer les quantités ρ, λ', λ'', λ''' &c.

Soit, lorsque $t=0$, $y'=Y'$, $y''=Y''$, $y'''=Y'''$ &c. & $\frac{dy'}{dt}=V'$, $\frac{dy''}{dt}=V''$, $\frac{dy'''}{dt}=V'''$ &c., l'équation (b) deviendra en divisant par $e^{\rho t}$

$$\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \&c. + \lambda^n \frac{dy^n}{dt}$$
$$- \rho(\lambda'y' + \lambda''y'' + \lambda'''y''' + \&c. + \lambda^n y^n)$$
$$= [\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n$$
$$- \rho(\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)]\, e^{-\rho t}$$

Or comme la quantité ρ ne se trouve dans les équations (c) que sous la forme quadratique ρ^2, il s'ensuit qu'elle peut avoir indifférement le signe $+$ & le signe $-$; donc on aura aussi

$$\lambda' \frac{dy'}{dt} + \lambda'' \frac{dy''}{dt} + \lambda''' \frac{dy'''}{dt} + \&c. + \lambda^n \frac{dy^n}{dt}$$
$$+ \rho(\lambda'y' + \lambda''y'' + \lambda'''y''' + \&c. + \lambda^n y^n)$$
$$= [\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n$$
$$+ \rho(\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)]\, e^{\rho t};$$

Donc retranchant ces deux équations l'une de l'autre, & divisant ensuite par 2ρ on aura

$$(d) \ldots\ldots\ldots \lambda'y' + \lambda''y'' + \lambda'''y''' + \&c. + \lambda^n y^n$$
$$= (\lambda'Y' + \lambda''Y'' + \lambda'''Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)\, \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$$
$$+ (\lambda'V' + \lambda''V'' + \lambda'''V''' + \&c. + \lambda^n V^n)\, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}.$$

Qu'on reprenne maintenant les équations (c), & qu'on substitue dans une quelconque de ces équations les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda'}$, &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda'}$ en ρ^2 tirées de $n - 1$ autres, valeurs qui seront toujours données, comme l'on voit, par des équations linéaires, on aura une équation qui étant ordonnée par rapport à ρ^2 montera au dégré n, & aura par conséquent n racines. Donc ρ aura, indépendamment de l'ambiguité du signe dont nous avons déja tenu compte, n valeurs que nous dénoterons par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), ensorte que $(\rho 1)^2$, $(\rho 2)^2$, $(\rho 3)^2$ soient les racines de l'équation dont il s'agit. Donc, si on fait pour abreger

$$\theta = (\lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n)\, \frac{e^{pt} + e^{-pt}}{2}$$

$$+ (\lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n)\, \frac{e^{pt} - e^{-pt}}{2p}.$$

& qu'on déſigne par $\lambda'1$, $\lambda'2$, $\lambda'3$ &c. $(\lambda' n)$, $\lambda''1$, $\lambda''2$, $\lambda''2$, $\lambda''3$ &c. $(\lambda'' n)$ &c. les valeurs de λ', λ'' &c. qui réſultent de la ſubſtitution de $p\,1$, $p\,2$, $p\,3$ &c. $(p\,n)$ au lieu de p, & que de même $\theta\,1$, $\theta\,2$, $\theta\,3$ &c. $(\theta\,n)$ ſoient les valeurs correſpondantes de θ, on aura lieu de l'équation (d) les n ſuivantes

$$\lambda'1 y' + \lambda''1 y'' + \lambda'''1 y''' + \&c. + \lambda^n 1 y^n = \theta\,1$$
$$\lambda'2 y' + \lambda''2 y'' + \lambda'''2 y''' + \&c. + \lambda^n 2 y^n = \theta\,2$$
$$\lambda'3 y' + \lambda''3 y'' + \lambda'''3 y''' + \&c. + \lambda^n 3 y^n = \theta\,3$$
&c.
$$(\lambda' n) y' + (\lambda'' n) y'' + (\lambda''' n) y''' + \&c. + (\lambda^n n) y^n = (\theta\,n)$$

par leſquelles il faudra déterminer les n inconnues y', y'', y''' &c. y^n; c'eſt à quoi ſe réduit maintenant toute la difficulté du problême.

Pour en venir à bout, je multiplie la première de ces équations par μ', la ſeconde par μ'', la troiſiéme par μ''', & ainſi de ſuite, μ', μ'', μ''' &c. étant des coéficiens indéterminés, puis je les ajoute enſemble, ce qui me donne, en ordonnant les termes par rapport à y', y'', y''' &c.

$$[\mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda' n)]\, y'$$
$$+ [\mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda'' n)]\, y''$$
$$+ [\mu'\lambda'''1 + \mu''\lambda'''2 + \mu'''\lambda'''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''' n)]\, y'''$$
&c.
$$+ [\mu'\lambda^n 1 + \mu''\lambda^n 2 + \mu'''\lambda^n 3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n)]\, y^n$$
$$= \mu'\theta\,1 + \mu''\theta\,2 + \mu'''\theta\,3 + \&c. + \mu^n(\theta\,n);$$

d'où l'on tirera aiſément la valeur d'une y quelconque, comme y^s, en égalant à zero chacun des coéficiens des autres y; ainſi l'on aura

$$y^s = \frac{\mu'\theta\,1 + \mu''\theta\,2 + \mu'''\theta\,3 + \&c. + \mu^n(\theta\,n)}{\mu'\lambda^s 1 + \mu''\lambda^s 2 + \mu'''\lambda^s 3 + \&c. + \mu^n(\lambda^s n)} \quad \ldots \quad (e)$$

& ensuite ces équations de condition

$$\left.\begin{array}{l}\mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda'n) = 0\\ \mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''n) = 0\\ \text{\& ainsi de suite, jusqu'à}\\ \mu'\lambda^n1 + \mu''\lambda^n2 + \mu'''\lambda^n3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = 0\end{array}\right\}(f)$$

à l' exception seulement de celle qui répondroit à l' exposant s.

Supposons que l' on ait en général

$$\mu'\lambda'1 + \mu''\lambda'2 + \mu'''\lambda'3 + \&c. + \mu^n(\lambda'n) = \Delta'$$
$$\mu'\lambda''1 + \mu''\lambda''2 + \mu'''\lambda''3 + \&c. + \mu^n(\lambda''n) = \Delta''$$
$$\mu'\lambda'''1 + \mu''\lambda'''2 + \mu'''\lambda'''3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = \Delta'''$$
&c.
$$\mu'\lambda^n1 + \mu''\lambda^n2 + \mu'''\lambda^n3 + \&c. + \mu^n(\lambda^n n) = \Delta^n,$$

& qu'il faille trouver la valeur d' une μ quelconque comme μ^m. On multipliera ces équations par des coéficiens indéterminés ν', ν'', ν''' &c. ν^n, & après les avoir ajoutées ensemble, on fera les coéficiens des quantités μ', μ'', μ''' &c. chacun égal à zero, excepté celui de la quantité μ^m; de cette manière on aura

$$\mu^m = \frac{\nu'\Delta' + \nu''\Delta'' + \nu'''\Delta''' + \&c. + \nu^n\Delta^n}{\nu'(\lambda'm) + \nu''(\lambda''m) + \nu'''(\lambda'''m) + \&c. + \nu^n(\lambda^n m)} \quad . \quad . \quad (g)$$

& la détermination des quantités ν', ν'', ν''' &c. dépendra de cette condition que

$$\nu\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (h)$$

lorsque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm).

Or les équations (c) étant multipliées par ν', ν'', ν''' &c. & ajoutées ensemble donnent

$$\begin{array}{l}(\rho^2\nu' + A'\nu' + B'\nu'' + C'\nu''' + \&c. + N'\nu^n)\lambda'\\ + (\rho^2\nu'' + A''\nu' + B''\nu'' + C''\nu''' + \&c. + N''\nu^n)\lambda''\\ + (\rho^2\nu''' + A'''\nu' + B'''\nu'' + C'''\nu''' + \&c. + N'''\nu^n)\lambda'''\\ \&c.\\ + (\rho^2\nu^n + A^n\nu' + B^n\nu'' + C^n\nu''' + \&c. + N^n\nu^n)\lambda^n\\ = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (i)\end{array}$$

Donc si on suppose que les quantités v', v'', v''' &c. v^n, ou plutôt leurs rapports soient tels que les coéficiens de λ', λ'', λ''' &c λ^{n-1} dans cette équation soient nuls chacun en particulier, celui de λ^n le sera aussi; de sorte que l'on aura les n équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l} \rho^2 v' + A' v' + B' v'' + C' v''' + \&c. + N' v^n = 0 \\ \rho^2 v'' + A'' v' + B'' v'' + C'' v''' + \&c. + N'' v^n = 0 \\ \rho^2 v''' + A''' v' + B''' v'' + C''' v''' + \&c. + N''' v^n = 0 \\ \&c. \\ \rho^2 v^n + A^n v' + B^n v'' + C^n v''' + \&c. + N^n v^n = 0 \end{array}\right\} . (k)$$

Et il est bon de remarquer, qu'en éliminant de ces équations les quantités v', v'', v''' &c. on aura une équation finale en ρ^2 qui sera nécessairement la même que celle qui résulte des équations (c) par l'évanouissement des quantités λ', λ'', λ''' &c.; ce qui peut se voir aisément à *priori*.

Faisons maintenant $\rho = (\rho m)$, nous aurons

$$\begin{array}{l} A' v' + B' v'' + C' v''' + \&c. + N' v^n = -(\rho m)^2 v' \\ A'' v' + B'' v'' + C'' v''' + \&c. + N'' v^n = -(\rho m)^2 v'' \\ A''' v' + B''' v'' + C''' v''' + \&c. + N''' v^n = -(\rho m)^2 v'''. \\ \&c. \\ A^n v' + B^n v'' + C^n v''' + \&c. + N^n v^n = -(\rho m)^2 v^n; \end{array}$$

& l'équation (i) deviendra

$$[\rho^2 - (\rho m)^2] \times [v'\lambda' + v''\lambda'' + v'''\lambda''' + \&c. + v^n\lambda^n] = 0,$$

laquelle devant être vraie pour toutes les valeurs de ρ qui satisfont aux équations (e) d'où celle-ci est tirée, on aura en général

$$v'\lambda' + v''\lambda'' + v'''\lambda''' + \&c. + v^n\lambda^n = 0$$

lorsque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), excepté (ρm), auquel cas l'équation se vérifie d'elle-même, à cause du facteur $\rho^2 - (\rho m)^2$.

D'où l'on voit que les valeurs de v', v'', v''' &c. v^n qui satisfont à la condition (h) sont les mêmes que celles qui résultent des équations (k), en y faisant $\rho = (\rho m)$.

Donc

Donc ſi on dénote ces valeurs par $(\nu' m)$, $(\nu'' m)$, $(\nu''' m)$ &c., & qu'on les ſubſtitue dans l'équation (g) on aura

$$\mu^m = \frac{(\nu' m)\,\Delta' + (\nu'' m)\,\Delta'' + (\nu''' m)\,\Delta''' + \&c. + (\nu^n m)\,\Delta^m}{(\nu' m)(\lambda' m) + (\nu'' m)(\lambda'' m) + (\nu''' m)(\lambda''' m) + \&c. + (\nu^n m)\,(\lambda^n m)}.$$

Mais les équations (f) demandent que les quantités Δ', Δ'', Δ''' &c. Δ^n ſoient toutes nulles à l'excéption de Δ^s, donc ſi on fait pour abreger

$$\nu'\lambda' + \nu''\lambda'' + \nu'''\lambda''' + \&c. + \nu^n\lambda^n = Q$$

& qu'on dénote en général par $(Q\,m)$, la valeur de Q lorſque $\rho = (\rho\, m)$, on aura pour notre cas

$$\mu^m = \frac{(\nu^s\, m)\,\Delta^s}{(Q m)},$$

& par conſéquent

$$\mu' = \frac{(\nu^s\, 1)\,\Delta^s}{Q\,1},\ \mu'' = \frac{(\nu^s\, 2)\,\Delta^s}{Q\,2}\ \ \&c.$$

Donc enfin ſubſtituant ces valeurs dans la formule (e), & faiſant attention que

$$\Delta^s = \mu'\lambda^s 1 + \mu''\lambda^s 2 + \mu'''\lambda^s 3 + \&c. + \mu^n\,(\lambda^s\, n)$$

on aura

$$y^s = \frac{\nu^s 1}{Q 1}\,\theta 1 + \frac{\nu^s 2}{Q\,2}\,\theta 2 + \frac{\nu^s 3}{Q\,3}\,\theta\,3 + \&c. + \frac{(\nu^s\ n)}{(Q\ n)}\,(\theta n).$$

Ainſi le problême ne dépend plus que de la réſolution des équations (c) & (k).

XXXI. Nous avons trouvé que la quantité $(\nu' m)\,\lambda' + (\nu'' m)\,\lambda'' + (\nu''' m)\lambda''' + \&c. + (\nu^n m)\,\lambda^n$ eſt nulle lorſque $\rho = \rho\,1,\ \rho\,2,\ \rho\,3$ &c. $(\rho\, n)$, excepté (ρm); or il eſt facile de voir que les valeurs de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$, $\frac{\lambda'''}{\lambda'}$ &c. $\frac{\lambda^n}{\lambda'}$ tirées des équations (c) ſeront exprimées par des fractions telles que $\frac{q''}{q'}$, $\frac{q'''}{q'}$ &c. $\frac{q^n}{q'}$, les quantités q', q'', q''' &c. étant de la forme $a + b\,\rho^2 + c\,\rho^4 + \&c. + h\,\rho^{2\,(n-1)}$; de ſorte que ſi on fait, ce qui eſt permis, $\lambda' = q'$, on aura $\lambda'' = q''$, $\lambda''' = q'''$ &c.; & par conséquent la quantité $(\nu' m)\lambda' + (\nu'' m)\lambda'' + (\nu''' m)\lambda''' +$ &c. $+$ $(\nu^n m)\lambda^n$ deviendra de la forme $\alpha + \beta\rho^2 + \gamma\rho^4 +$ &c. $+ \zeta\rho^{2(n-1)}$; donc on aura

$$(\nu' m)\lambda' + (\nu'' m)\lambda'' + (\nu''' m)\lambda''' + \text{\&c.} + (\nu^n m)\lambda^n$$
$$= \chi\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right),$$

en prenant tous les facteurs depuis $1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}$ jusqu'à $1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}$, hormis $1 - \frac{\rho^2}{(\rho m)^2}$; & le coéficient χ étant égal à la valeur de $(\nu' m)\lambda' + (\nu'' m)\lambda'' +$ &c. $+$ $(\nu^n m)\lambda^n$ lorsque on fait $\rho = 0$ dans les quantités λ', λ'', λ''' &c.

Or soit $P = 0$ l'équation en ρ^2 tirée des équations (c), ou (k), on aura, en supposant que le terme tout connu de P soit 1,

$$P = \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right)$$

donc

$$\chi P = [(\nu' m)\lambda' + (\nu'' m)\lambda'' + (\nu''' m)\lambda''' + \text{\&c.} + (\nu^n m)\lambda^n]$$
$$\times \left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho m)^2}\right).$$

Prenons les différences de part & d'autre, en faisant varier ρ, & supposons ensuite $\rho = (\rho m)$, ce qui changera les quantités λ', λ'', λ''' &c. en $(\lambda' m)$, $(\lambda'' m)$, $(\lambda''' m)$ &c. nous aurons

$$\chi \frac{dP}{d\rho} = -\frac{2}{(\rho m)}[(\nu' m)(\lambda'' m) + (\nu'' m)(\lambda'' m) + (\nu''' m)(\lambda''' m)$$
$$+ \text{\&c.} + (\nu^n m)(\lambda^n m)] = \frac{2(Qm)}{(\rho m)};$$

donc on aura en général

$$Q = -\chi\rho \frac{dP}{2d\rho}$$

ce qui pourra ſervir à abreger le calcul de la valeur de Q dans pluſieurs occaſions.

XXXII. Examinons maintenant les différens cas, qui peuvent arriver rélativement aux racines de l'équation $P = 0$. Et d'abord il eſt clair que ſi toutes ces racines ſont réelles poſitives & inégales les valeurs de ρ ſeront auſſi réelles & inégales; ainſi ce cas n'aura aucune difficulté.

S'il y a des racines négatives, alors les valeurs correſpondantes de ρ deviendront imaginaires de la forme $r\sqrt{-1}$, ce qui réduira les exponentielles $\frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2}$ & $\frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$ à cette forme cof. $r t$, & $\frac{\text{ſin.}\, r t}{r}$; d'où il s'enſuit que ſi toutes les racines de l'équation $P = 0$ étoient réelles négatives & inégales, les valeurs de y', y'', y''' &c. ne contiendroient que des *ſinus* & des *coſinus*; nous verrons plus bas que ce cas eſt le ſeul où la ſolution ſoit bonne en général rélativement à la queſtion mécanique.

Paſſons au cas des racines égales, & ſuppoſons $\rho 2 = \rho 1$, il eſt facile de voir par les formules de l'Art. préc. que les valeurs de $Q 1$ & de $Q 2$ deviendront $= 0$; de ſorte que les deux premiers termes de la valeur de y' ſemblent devoir être infinis. Pour obvier à cet inconvénient, on ſuppoſera $\rho 2 = \rho 1 + \omega$, ω étant une quantité évanoviſſante, & à cauſe de $Q = -\chi\rho\frac{dP}{2d\rho} = -\frac{\chi\rho}{2d\rho}$

$$d\cdot\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 1)^2}\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 2)^2}\right)\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho 3)^2}\right) \ldots\ldots$$

$\left(1 - \frac{\rho^2}{(\rho n)^2}\right)$, l'on aura

$$Q 1 = \chi\left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 2)^2}\right)\left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \ldots \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

$$= 2\chi \frac{\omega}{\rho 1}\left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \;\vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots\; \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

& de même

$$Q 2 = - 2\chi . \frac{\omega}{\rho 1}\left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho 3)^2}\right) \;\vdots\;\vdots\;\vdots\; \left(1 - \frac{(\rho 1)^2}{(\rho n)^2}\right)$$

Donc si on fait $\frac{dQ}{d\rho} = R$, & qu'on dénote par $R\,1$ ce que devient R lorsque ρ devient $\rho\,1$, on aura $Q\,1 = - \frac{\omega}{(\rho 1)^2} R\,1$, & $Q\,2 = \frac{\omega}{(\rho 1)^2} R\,1$.

Or, en faisant $\rho\,2 = \rho\,1 + \omega$, on a $\nu^s 2\,\theta\,2 = \nu^s 1\,\theta\,1 + \frac{d.(\nu^s 1\,\theta\,1)}{d\rho 1}\,\omega$; donc

$$\frac{\nu^s 1\theta 1}{Q 1} + \frac{\nu^s 2\theta 2}{Q 2} = - \frac{(\rho 1)^2 \nu^s 1\theta 1}{\omega R 1} + \frac{(\rho 1)^2 \nu^s 1\theta 1}{\omega R 1} + \frac{(\rho 1)^2}{\omega R 1} \times \frac{d.(\nu^s 1\theta 1)}{d\rho 1}\,\omega = \frac{(\rho 1)^2}{R 1} \times \frac{d.(\nu^s 1\theta 1)}{d\rho 1}.$$

On résoudra de même le cas de trois racines égales, & ainsi des autres. Au reste il est évident que les termes de la valeur de y^s qui répondent aux racines égales contiendront toujours l'angle t, & de plus des exponentielles ordinaires, si ces racines sont positives, & des *sinus* & des *cosinus* si elles sont négatives.

Enfin s'il se trouvoit des racines imaginaires, on les réduiroit d'abord deux à deux à la forme $a + b\sqrt{-1}$, & $a - b\sqrt{-1}$, a & b étant des quantités réelles, de sorte que $(\rho\,1)^2 = a + b\sqrt{-1}$, $(\rho\,2)^2 = a - b\sqrt{-1}$, & ainsi de suite; ce qui donneroit $\rho\,1 = f + g\sqrt{-1}$, $\rho\,2 = f - g\sqrt{-1}$, & par conséquent $e^{\pm \rho 1 t} = e^{\pm f t} \times e^{\pm g t \sqrt{-1}} = e^{\pm f t}(\text{cos. } g\,t \pm \text{sin. } g\,t \times \sqrt{-1})$, & de même $e^{\pm \rho 2 t} = e^{\pm f t}(\text{cos. } g\,t \mp \text{sin. } g\,t \times \sqrt{-1})$. On rameneroit de même à la forme $p + q\sqrt{-1}$, & $p - q\sqrt{-1}$ les valeurs des quantités μ, ν, & Q répondantes à $\rho\,1$ & $\rho\,2$, & on trouveroit aprés les substitutions & les réductions, que les imaginaires se détruiroient dans les deux termes $\frac{r^{s}1}{Q1}\,\theta 1 + \frac{r^{s}2}{Q2}\,\theta 2$, lesquels contiendroient alors des *sinus* & des *cosinus* multipliés par des exponentielles ordinaires.

XXXIII. Au reste quand on veut appliquer la solution précédente au mouvement d'un sistème quelconque de corps, on doit supposer, comme nous l'avons fait, que les quantités y', y'', y''' &c. soient assès petites pour qu'on puisse négliger, sans erreur sensible, dans les expressions des forces accélératrices des corps, les termes qui contiendroient les produits y'^2, $y'y''$ &c. Ainsi il faudra pour que la solution soit bonne *mécaniquement* 1.° que les valeurs initiales Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. soient infiniment petites. 2.° que les expressions de y', y'', y''' &c. ne contiennent aucun terme qui augmente à l'infini avec le tems t; par conséquent il faudra que les racines de l'équation $P = 0$ soient toutes réelles négatives & inégales, auquel cas la valeur de y^s ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* (*Art. préc.*), ou au moins que les termes qui renfermeroient l'arc t disparoissent d'eux mêmes.

Donc 1.° si $(\rho 1)^2$ est une quantité positive, il faudra que l'on ait

$$\left.\begin{array}{l} \lambda'1\,Y' + \lambda''1\,Y'' + \lambda'''1\,Y''' + \&c. + \lambda^n 1\,Y^n = 0 \\ \lambda'1\,V' + \lambda''1\,V'' + \lambda'''1\,V''' + \&c. + \lambda^n 1\,V^n = 0 \end{array}\right\} . \,(l)$$

ce qui fera évanouir le premier terme $\frac{r^{s}1}{Q1}\,\theta 1$ de la valeur de y^s.

De même si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient toutes deux positives, mais inégales, on auroit, outre les deux conditions précédentes, encore ces deux-ci

$$\lambda'2\,Y' + \lambda''2\,Y'' + \lambda'''2\,Y''' + \&c. + \lambda^n 2\,Y^n = 0$$
$$\lambda'2\,V' + \lambda''2\,V'' + \lambda'''2\,V''' + \&c. + \lambda^n 2\,V^n = 0,$$

& il faudroit effacer les deux premiers termes de y'; & ainsi de suite.

2.° Si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ sont égales & négatives, on aura les mêmes conditions (l), & les deux termes $\frac{\nu s 1}{Q 1} \theta 1 + \frac{\nu s 2}{Q 2} \theta 2$ deviendront, en faisant $\rho 1 = r 1 \sqrt{-1}$,

$$\frac{r 1}{2 R 1} \times \frac{d . \nu s 1 (\lambda' 1 Y' + \lambda'' 1 Y'' + \lambda''' 1 Y''' + \&c. + \lambda^n 1 Y^n)}{d r 1} \text{ cos. } r 1 t$$

$$+ \frac{r 1}{2 R 1} \times \frac{d . \frac{\nu s 1}{r 1} (\lambda' 1 V' + \lambda'' 1 V'' + \lambda''' 1 V''' + \&c. + \lambda^n 1 V^n)}{d r 1} \text{ sin. } r 1 t.$$

Mais si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient égales & positives, alors on auroit encore deux autres conditions à remplir, savoir

$$\frac{d . \nu s 1 (\lambda' 1 Y' + \lambda'' 1 Y'' + \lambda''' 1 Y''' + \&c. \lambda^n 1 Y^n)}{d \rho 1} = 0$$

$$\frac{d . \frac{\nu s 1}{\rho 1} (\lambda' 1 V' + \lambda'' 1 V' + \lambda''' 1 V''' + \&c. + \lambda^n 1 V^n)}{d \rho 1} = 0;$$

& ainsi du reste.

Mais il y a ici une remarque importante à faire; c'est que les équations (a) n' étant qu'approchées, l' équation $P = 0$ doit aussi être regardée comme telle, de sorte que lorsque on trouve des racines égales, on n'est pas en droit d'en conclure que les valeurs de ρ sont égales, mais seulement qu'elles ne diffèrent que par des quantités infiniment petites; d' où il s' ensuit qu'à la rigueur, l' égalité des racines de l' équation $P = 0$, ne suffit pas pour introduire des arcs de cercle dans les valeurs de y', y'', y''' &c. en tant que ces quantités représentent les espaces parcourus dans les oscillations des corps. Cependant comme la supposition de $\rho 2 = \rho 1 + \omega$, ω étant une quantité très-petite, rend aussi les quantités $Q 1$ & $Q 2$ très-petites du même ordre, comme on peut s' en assûrer par ce qui a été dit dans l'Art. préc. ſur le cas des racines égales, il eſt clair que les quantités $\frac{\theta 1}{Q 1}$ & $\frac{\theta 2}{Q 2}$ contiendront des termes finis, & qu'ainſi il faudra, pour que les valeurs de y', y'', y''' &c. ſoient toujours très-petites, que les termes dont il s'agit diſparoiſſent entiérement de l'expreſſion de y'; ce qui donnera, en négligeant les quantités infiniment petites du ſecond ordre, les mêmes conditions & les mêmes réſultats que ci-deſſus. Il eſt clair que ce que nous venons de dire des racines égales, doit avoir lieu de même, lorſque elles ne différent que par des quantités très-petites.

3.° Si $(\rho 1)^2$ & $(\rho 2)^2$ étoient imaginaires, alors réduiſant les quantités $\lambda' 1$, $\lambda'' 1$, $\lambda''' 1$ &c., & $\lambda' 2$, $\lambda'' 2$, $\lambda''' 2$ &c. à la forme $p' + q'\sqrt{-1}$, $p'' + q''\sqrt{-1}$, $p''' + q'''\sqrt{-1}$ &c., & $p' - q'\sqrt{-1}$, $p'' - q''\sqrt{-1}$, $p''' - q'''\sqrt{-1}$ &c. on auroit les conditions ſuivantes

$$p'Y' + p''Y'' + p'''Y''' + \&c. + p^nY^n = 0,$$
$$p'V' + p''V'' + p'''V''' + \&c. + p^nV^n = 0,$$
$$q'Y' + q''Y'' + q'''Y''' + \&c. + q^nY^n = 0, \&$$
$$q'V' + q''V'' + q'''V''' + \&c. + q^nV^n = 0.$$

On aura de pareilles conditions pour chaque paire de racines imaginaires.

XXXIV. De là on tire une méthode générale pour voir ſi l'état d'équilibre d'un ſiſtème quelconque donné de corps eſt *ſtable*, c'eſt-à-dire, ſi les corps étant infiniment peu dérangés de cet état, ils y renviendront d'eux mêmes, ou au moins tendront à y revenir.

On ſuppoſera le ſiſtème dans un état infiniment proche de celui d'équilibre, & on cherchera les expreſſions des forces accélératrices des corps pour ſe remettre à cette état, leſquelles ſeront, aux infinimens petits du ſecond ordre & des ſuivans près, de cette forme $Ay' + By'' + Cy''' +$ &c., comme nous l'avons ſuppoſé dans les équations (a). On formera enſuite des équations telles que les équations (c), & on en tirera l'équation $P = 0$, dont ρ^2 ſera l'inconnue, & qui ſera néceſſairement d'un dégré égal à l'expoſant du nombre des corps. Cela poſé

1.° Si toutes les racines de cette équation ſont réelles négatives & inégales, l'état d'équilibre ſera *ſtable* en général quel que ſoit le dérangement initial du ſiſtème.

2.° Si ces racines ſont toutes réelles poſitives ou toutes imaginaires, ou en partie réelles poſitives, & en partie imaginaires, l'état d'équilibre n'aura aucune *ſtabilité*, & le ſiſtème une fois dérangé de cet état ne pourra le reprendre.

3.° Enfin ſi les racines ſont en partie réelles négatives & inégales, & en partie réelles négatives & égales, ou réelles & poſitives, ou imaginaires, l'état d'équilibre aura ſeulement une *ſtabilité rélative* & *conditionelle*, c'eſt-à-dire, que cet état ne ſe retablira, ou ne tendra à ſe retablir, que lorſque il y aura, entre les diſtances & les viteſſes initielles, les conditions marquées dans l'Art. préc.; dans tous les autres cas il ſera impoſſible que le ſiſtème revienne de lui même à ſon premier état.

XXXV. Lorſque toutes les racines de l'équation $P = 0$ ſont réelles inégales & négatives, il eſt clair, qu'en faiſant $\rho^2 = -r^2$, chaque terme de la valeur de y^s ſe réduira à la forme α coſ. $rt + \beta$ ſin. rt, laquelle repréſente, comme l'on ſait, le mouvement d'un pendule ſimple de longueur $\frac{1}{r^2}$; d'où il eſt aiſé de conclure que le mouvement de chaque corps ſera compoſé de n mouvemens pareils à ceux de n pendules dont les longueurs ſeroient

$\frac{1}{(r1)^2}$,

$\frac{1}{(r\,1)^2}$, $\frac{1}{(r\,2)^2}$, $\frac{1}{(r\,3)^2}$ &c. $\frac{1}{(r\,n)^2}$. C' eſt le théoréme que M. Daniel Bernoulli a déduit, par induction, de la conſidération du mouvement d' une corde chargée de pluſieurs poids.

Si on veut que les oſcillations des corps deviennent ſimples & iſochrones, on ſuppoſera que l' état initial du ſiſtème ſoit tel que l' on ait

$$\left.\begin{array}{l} \lambda' Y' + \lambda'' Y'' + \lambda''' Y''' + \&c. + \lambda^n Y^n = 0 \ \& \\ \lambda' V' + \lambda'' V'' + \lambda''' V''' + \&c. + \lambda^n V^n = 0 \end{array}\right\} (m)$$

pour toutes les valeurs de ρ^2, hors une quelconque à volonté comme $(\rho m)^2$; car alors les quantités $\theta\,1$, $\theta\,2$, $\theta\,3$ &c. ſeront nulles, à l'exception de $(\theta\,m)$; & par conſéquent la valeur de y^s ſe réduira à $\frac{(\nu^s m)}{(Q m)}(\theta\,m)$. Mais les équations (m) étant abſolument ſemblables à l' équation (h) de l' Art. XXX., il eſt clair qu'on aura pour la détermination des quantités Y', Y'', Y''' &c. V', V'', V''' &c. des équations analogues aux équations (k); d' où il s'enſuit que ces quantités ſeront en raiſon conſtante avec les quantités $(\nu' m)$, $(\nu'' m)$, $(\nu''' m)$ &c. $(\nu^n m)$; de ſorte qu'on aura

$$\frac{(\lambda' m)\,Y' + (\lambda'' m)\,Y'' + (\lambda''' m)\,Y''' + \&c. + (\lambda^n m)\,Y^n}{Y^s}$$

$$= \frac{(\lambda' m)\,V' + (\lambda'' m)\,V'' + (\lambda''' m)\,V''' + \&c. + (\lambda^n m)\,V^n}{V^s}$$

$$= \frac{(\lambda' m)\,(\nu' m) + (\lambda'' m)\,(\nu'' m) + (\lambda''' m)\,(\nu''' m) + \&c. + (\lambda^n m)\,(\nu^n m)}{(\nu^s m)}$$

$$= \frac{(Q m)}{(\nu^s m)};\ \text{donc}$$

$$y^s = Y^s \operatorname{cof.}(r\,m)\,t + V^s \frac{\text{ſin.}\,(r\,m)\,t}{(r\,m)};$$

Ainſi le mouvement des corps ſera le même, dans ce cas, que s' ils étoient peſans, & qu'ils fuſſent ſuſpendus chacun à un fil de longueur $\frac{1}{(rm)^2}$, la gravité étant prise pour l' unité des forces accélératrices ; d'où l' on voit que le sistème est susceptible d' autant de différens mouvemens isochrones que l' équation $P = 0$ a des racines réelles négatives & inégales.

Des oscillations d' un fil fixe par une de ses extrémités, & chargé d' un nombre quelconque de poids.

XXXVI. Soit n le nombre des poids que nous supposerons, pour plus de simplicité, égaux entr'eux & également éloignés les uns des autres ; imaginons que le fil ne fasse que des oscillations infiniment petites & dans le même plan ; & soient nommées y', y'', y''' &c. y^n les distances des corps à la verticale à commencer par le plus bas, & a la distance d'un corps à l'autre, on aura, comme il est très-aisé de le voir par les principes de la Dinamique, & comme on peut le déduire des formules générales que j'ai données à la page 227. du Vol. préc.,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} + \frac{y'' - y'''}{a} - \frac{y' - 2y'' + y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} + \frac{y''' - y^{\text{IV}}}{a} - 2\,\frac{y'' - 2y''' + y^{\text{IV}}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2y^{\text{IV}}}{dt^2} + \frac{y^{\text{IV}} - y^{\text{V}}}{a} - 3\,\frac{y''' - 2y^{\text{IV}} + y^{\text{V}}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^n}{dt^2} + \frac{y^n}{a} - (n-1)\,\frac{y^{n-1} - 2y^n}{a} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d^2 y'}{dt^2} + \frac{y' - y''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y''}{dt^2} + \frac{-y' + 3y'' - 2y'''}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y'''}{dt^2} + \frac{-2y'' + 5y''' - 3y^{\text{IV}}}{a} = 0$$

$$\frac{d^2 y^{\text{IV}}}{dt^2} + \frac{-3y''' + 7y^{\text{IV}} - 4y^{\text{V}}}{a} = 0$$

&c.

$$\frac{d^2 y^n}{dt^2} + \frac{-(n-1)y^{n-1} + (2n-1)y^n}{a} = 0.$$

Comparant ces équations avec les équations (a) de l'Art. XXX., on trouvera que les équations (c) du même Article deviennent celles-ci

$$\rho^2\lambda' + \frac{\lambda' - \lambda''}{a} = 0$$

$$\rho^2\lambda''' + \frac{-\lambda' + 3\lambda'' - 2\lambda'''}{a} = 0$$

$$\rho^2\lambda''' + \frac{-2\lambda'' + 5\lambda''' - 3\lambda^{\text{IV}}}{a} = 0$$

$$\rho^2\lambda^{\text{IV}} + \frac{-3\lambda''' + 7\lambda^{\text{IV}} - 4\lambda^{\text{V}}}{a} = 0$$

&c.

$$\rho^2\lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0;$$

d' où l' on tire

$$\lambda'' = (1 + a\rho^2)\lambda'$$

$$\lambda''' = \frac{-\lambda' + (3 + a\rho^2)\lambda''}{2}$$

$$= (1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2\rho^4}{2})\lambda'$$

$$\lambda^{\text{IV}} = (1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2\rho^4}{2} + \frac{a^3\rho^6}{2.3})\lambda'.$$

$$\lambda^{v} = \left(1 + 4a\rho^2 + \frac{6a^2\rho^4}{2} + \frac{4a^3\rho^6}{2.3} + \frac{a^4\rho^8}{2.3.4}\right)\lambda',$$

& ainſi de ſuite ; de ſorte que l' on aura en général

$$\lambda^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \&c.\right]\lambda'.$$

Or il eſt viſible que, pour ſatisfaire à la dernière équation $\rho^2\lambda^n + \frac{-(n-1)\lambda^{n-1} + (2n-1)\lambda^n}{a} = 0$, il faut ſuppoſer $\lambda^{n+1} = 0$; ce qui donne

$$1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c. = 0$$

équation, d'où l'on tirera n valeurs de ρ^2, qu'on déſignera par $(\rho 1)^2$, $(\rho 2)^2$, $(\rho 3)^2$ &c. $(\rho n)^2$, & qu'on ſubſtituera ſucceſſivement dans l' expreſſion de λ^m pour avoir les valeurs de $\lambda^m 1$, $\lambda^m 2$, $\lambda^m 3$ &c.

A l'égard des quantités ν, on les trouvera de la même manière par le moyen des équations (k), leſquelles deviennent dans le cas préſent

$$\rho^2\nu' + \frac{\nu' - \nu''}{a} = 0$$

$$\rho^2\nu'' + \frac{-\nu' + 3\nu'' - 2\nu'''}{a} = 0$$

$$\rho^2\nu''' + \frac{-2\nu'' + 5\nu''' - 3\nu^{\text{IV}}}{a} = 0$$

&c.

$$\rho^2\nu^n + \frac{-(n-1)\nu^{n-1} + (2n-1)\nu^n}{a},$$

d' où l' on tire comme ci-deſſus

$$\nu^m = \left[1 + (m-1)a\rho^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{4}a^2\rho^4 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{4.9}a^3\rho^6 + \&c.\right]\nu',$$

ou bien, en ſuppoſant pour plus de ſimplicité $\lambda' = \nu' = 1$, $\nu^m = \lambda^m$; & par conſéquent $\nu^m 1 = \lambda^m 1$, $\nu^m 2 = \lambda^m 2$ &c.

On aura donc

$$Q = (\lambda')^2 + (\lambda'')^2 + (\lambda''')^2 + \&c. + (\lambda^n)^2$$

$$= 1 + (1 + a\rho^2)^2 + \left(1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4\right)^2 + \&c.$$

$$+ \left[1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \&c.\right]^2.$$

Mais on peut trouver une expreſſion plus ſimple de cette quantité par la méthode de l' Article XXXI. Car, on a d' abord

$$P = 1 + na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{4}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.9}\rho^6 + \&c.$$

d' où l' on tire

$$\rho\frac{dP}{2d\rho} = na\rho^2 + \frac{n(n-1)a^2}{2}\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)a^3}{4.3}\rho^6 + \&c.$$

Or en faiſant $\rho = 0$, on a $\lambda' = 1$, $\lambda'' = 1$, $\lambda''' = 1$ &c. donc

$$\chi = \nu' + \nu'' + \nu''' + \&c. + \nu^n$$

$$= 1$$

$$+ 1 + a\rho^2$$

$$+ 1 + 2a\rho^2 + \frac{a^2}{2}\rho^4$$

$$+ 1 + 3a\rho^2 + \frac{3a^2}{2}\rho^4 + \frac{a^3}{2.3}\rho^6$$

&c.

$$+ 1 + (n-1)a\rho^2 + \frac{(n-1)(n-2)a^2}{4}\rho^4 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9}\rho^6$$

$$+ \&c.$$

$$= n + \frac{n(n-1)a}{2}\rho^2 + \frac{n(n-1)(n-2)a^2}{4.3}\rho^4$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)a^3}{4.9.4}\rho^6 + \&c.$$

Donc $Q = -\chi\rho\frac{dP}{2d\rho} = -a\rho^2\left(n + \frac{n(n-1)}{2}a\rho^2\right.$
$\left. + \frac{n(n-1)(n-2)}{4\cdot3}a^2\rho^4 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4\cdot9\cdot4}a^3\rho^6 + \&c.\right)^2.$

Ces deux expressions de Q ne sont pas à la vérité indentiques ; mais elles deviennent égales lorsque $\rho = \rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. ; ce qui suffit pour notre objet.

Faisant donc ces substitutions dans la dernière formule de l'Art. XXX., on aura l'expression générale des quantités y, & le probléme sera résolu.

Au reste quoique il soit difficile, peut être impossible, de déterminer en général les racines de l'équation $P = 0$, on peut cependant s'assûrer, par la nature même du problême, que ces racines sont nécessairement toutes réelles inégales & négatives ; car sans cela les valeurs de y', y'', y''' &c. pourroient croitre à l'infini, ce qui seroit absurde.

XXXVII. Si on cherche quelles doivent être les distances & les vitesses initiales des corps pour que chacun d'eux ne fasse que des vibrations isochrones & analogues à celles d'un pendule simple, on trouvera (*Art. XXXV.*) en prenant l pour la longueur de ce pendule,

$$Y^s = \left(1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4\cdot9\,l^3} + \&c.\right)Y'$$

$$V^s = \left(1 - \frac{(s-1)a}{l} + \frac{(s-1)(s-2)a^2}{4l^2} - \frac{(s-1)(s-2)(s-3)a^3}{4\cdot9\,l^3} + \&c.\right)V'$$

& la valeur de l devra se déterminer par l'équation

$$1 - \frac{na}{l} + \frac{n(n-1)a^2}{4l^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{4\cdot9l^3} + \&c. = 0\,;$$

Des vibrations d'une corde tendue & chargée d'un nombre quelconque de poids.

XXXVIII. Quoique j'aie déja réſolu ce problême dans mes *Recherches ſur le Son* imprimées dans le premier Volume de ces Mémoires, je crois pouvoir le redonner ici, non ſeulement pour faire voir comment ma méthode générale s'y applique, mais encore parce qu'il me donnera lieu de faire de nouvelles reflexions ſur les vibrations des cordes ſonores, qui pourront être utiles à l'éclairciſſement de cette matière épineuſe & délicate.

Suppoſons une corde chargée de n poids égaux qui la diviſent en $n+1$ parties égales que nous ferons chacune $= a$, & tendue par un poid qui ſoit à la ſomme de ceux dont la corde eſt chargée comme $c^2 : 1$; nommant y', y'', y''' &c. y^n les diſtances des poids à l'axe de la corde, & faiſant pour abreger $\frac{nc^2}{a} = k^2$, on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} - k^2(-2y' + y'') = 0$$

$$\frac{d^2y''}{dt^2} - k^2(y' - 2y'' + y''') = 0$$

$$\frac{d^2y'''}{dt^2} - k^2(y'' - 2y''' + y^{\text{IV}}) = 0$$

&c.

$$\frac{d^2y^n}{dt^2} - k^2(y^{n-1} - 2y^n) = 0$$

Donc, en comparant ces équations avec les équations générales de l'Art. XXX. on aura les équations ſuivantes en λ', λ'', λ''' &c.

$$\rho^2\lambda' - k^2(-2\lambda' + \lambda'') = 0$$

$$\rho^2\lambda'' - k^2(\lambda' - 2\lambda'' + \lambda''') = 0$$

$$\rho^2\lambda''' - k^2(\lambda'' - 2\lambda''' + \lambda^{\text{V}}) = 0$$

&c.

$$\rho^2\lambda^n - k^2(\lambda^{n-1} - 2\lambda^n) = 0;$$

d' où l' on tire, en ſuppoſant $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{coſ.}\ \varphi$, $\lambda'' = \frac{\text{ſin.}\ 2\varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}\lambda'$, $\lambda''' = \frac{\text{ſin.}\ 3\varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}\lambda'$, &c., & en général

$$\lambda^m = \frac{\text{ſin.}\ m\varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}\lambda'.$$

Et pour la détermination de l' angle φ, c' eſt-à-dire de la quantité ρ, on aura l'équation $\lambda^{n+1} = \frac{\text{ſin.}(n+1)\varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}\lambda' = 0$; laquelle donne $\varphi = \frac{m\pi}{n+1}$, π exprimant l'angle de 180 dégrés, & m un nombre quelconque entier depuis o juſqu'à n incluſivement. De ſorte qu'on aura $\rho = k\sqrt{(2\,\text{coſ.}\ \varphi - 2)} = 2k\,\text{ſin.}\ \frac{1}{2}\varphi \cdot \sqrt{-1} = 2k\ \text{ſin.}\ \frac{m\pi}{2(n+1)} \cdot \sqrt{-1}$; ce qui donnera toutes les valeurs de ρ que nous avons déſignées par $\rho 1$, $\rho 2$, $\rho 3$ &c. (ρn), en faiſant ſucceſſivement $m = 1, 2, 3$, &c. n.

On trouvera des équations entiérement ſemblables en ν', ν'', ν''' &c. d'où l'on tirera pareillement $\nu^m = \frac{\text{ſin.}(n+1)\varphi}{\text{ſin.}\ \varphi}\nu'$. De plus on aura

$$Q = \frac{\nu'\lambda'}{\text{ſin.}\ \varphi^2}\left\{\text{ſin.}\ \varphi^2 + \text{ſin.}\ 2\varphi^2 + \text{ſin.}\ 3\varphi^2 + \text{\&c.} + \text{ſin.}\ n\varphi^2\right\}$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{ſin.}\ \varphi^2}\left\{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}(\text{coſ.}\ 2\varphi + \text{coſ.}\ 4\varphi + \text{coſ.}\ 6\varphi + \text{\&c.} + \text{coſ.}\ 2n)\right\}$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{ſin.}\ \varphi^2}\left\{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\left(\frac{\text{coſ.}\ 2n\varphi - \text{coſ.}\ 2(n+1)\varphi}{2(1 - \text{coſ.}\ 2\varphi)} - \frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{(n+1)}{2\ \text{ſin.}\ \varphi^2}\nu'\lambda', \text{ à cauſe de } \varphi = \frac{m\pi}{n+1}.$$

On

On trouveroit la même valeur de Q la méthode de l'Art. XXXI.; mais le calcul feroit alors tant foit peu plus long. Cependant comme ce calcul peut fervir à montrer la bonté de la méthode dont nous parlons, je n'ai pas cru devoir le fupprimer, mais je l'ai renfermé entre deux crochets, afin que mes Lecteurs puiffent le paffer s'ils le jugent à propos.

[On aura d'abord $P = \frac{\text{fin.}\,(n+1)\,\varphi}{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi}$ (j'écris $P = \frac{\text{fin.}\,(n+1)\,\varphi}{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi}$, & non pas fimplement $P = \frac{\text{fin.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{fin.}\,\varphi}$, afin que, lorfque $\rho = 0$ c'eft-à-dire $\varphi = 0$, on ait $P = 1$, comme nous l'avons fuppofé); d'où l'on tire par la différentiation $\frac{dP}{d\varphi} = \frac{\text{cof.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{fin.}\,\varphi} - \frac{\text{fin.}(n+1)\varphi \times \text{cof.}\,\varphi}{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi^2}$ $=$ [à caufe de fin. $(n+1)\,\varphi = 0$] $\frac{\text{cof.}\,(n+1)\,\varphi}{\text{fin.}\,\varphi}$; or l'équation $1 + \frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cof.}\,\varphi$ donne $\frac{\rho^2}{2k^2} = \text{cof.}\,\varphi - 1$, & prenant les différences logarithmiques $\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\text{fin.}\,\varphi}{1-\text{cof.}\,\varphi}\,d\varphi$; donc $\rho\,\frac{dP}{2\,d\rho} = \frac{\text{cof.}\,(n+1)\,\varphi \times (1-\text{cof.}\,\varphi)}{2\,\text{fin.}\,\varphi^2} = \frac{\text{cof.}\,(n+1)\,\varphi}{2\,(1+\text{cof.}\,\varphi)}$.

Maintenant on a, lorfque $\rho = 0$, $\varphi = 0$, & par conféquent $\lambda'' = 2\,\lambda'$, $\lambda''' = 3\,\lambda'$ &c.; donc

$$\chi = \lambda'\,(\nu' + 2\,\nu'' + 3\,\nu''' + \&c. + n\,\nu^n)$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{fin.}\,\varphi}\,(\text{fin.}\,\varphi + 2\,\text{fin.}\,2\varphi + 3\,\text{fin.}\,3\varphi + \&c. + n\,\text{fin.}\,n\varphi)$$

$$= \frac{\nu'\lambda'}{\text{fin.}\,\varphi} \times \frac{(n+1)\,\text{fin}\,n\varphi - n\,\text{fin.}\,(n+1)\,\varphi}{2\,(1-\text{cof.}\,\varphi)}$$

$=$ [à caufe de fin. $(n+1)\,\varphi = 0$] $\nu'\lambda'\,\frac{(n+1)\,\text{fin.}\,n\,\varphi}{2\,\text{fin.}\,\varphi\,(1-\text{cof.}\,\varphi)}$;

donc $Q = -\chi\rho\frac{dP}{2d\rho} = -\frac{(n+1)\,\text{fin.}\,\varphi\,.\,\text{cof.}\,(n+1)\varphi}{4\,\text{fin.}\,\varphi^3}\,y'\lambda'$

$= -\frac{(n+1)\,(\text{fin.}\,(2n+1)\varphi - \text{fin.}\,\varphi)}{4\,\text{fin.}\,\varphi^3}\,y'\lambda' = \frac{n+1}{2\,\text{fin.}\,\varphi^2}\,y'\lambda'$,

à caufe de fin. $(2n+1)\varphi = -$ fin. φ].

Donc faifant ces fubftitutions dans l'expreffion de y' (*Art. XXX.*), & fuppofant en général

$$(Ym) = Y'\,\text{fin.}\,\frac{m\pi}{n+1} + Y''\,\text{fin.}\,\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\,\text{fin.}\,\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n\,\text{fin.}\,\frac{nm\pi}{n+1}\ \&$$

$$(Vm) = V'\,\text{fin.}\,\frac{m\pi}{n+1} + V''\,\text{fin.}\,\frac{2m\pi}{n+1} + V'''\,\text{fin.}\,\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + V^n\,\text{fin.}\,\frac{nm\pi}{n+1},$$

on aura

$$y' = \frac{2\,\text{fin.}\,\frac{s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y1\,\text{cof.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{\pi}{2(n+1)}) + \frac{V1}{2k\,\text{fin.}\,\frac{\pi}{2(n+1)}}\,\text{fin.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$+ \frac{2\,\text{fin.}\,\frac{2s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y2\,\text{cof.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{2\pi}{2(n+1)}) + \frac{V2}{2k\,\text{fin.}\,\frac{2\pi}{2(n+1)}}\,\text{fin.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{2\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$+ \frac{2\,\text{fin.}\,\frac{3s\pi}{n+1}}{n+1}\left(Y3\,\text{cof.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{3\pi}{2(n+1)}) + \frac{V3}{2k\,\text{fin.}\,\frac{3\pi}{2(n+1)}}\,\text{fin.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{3\pi}{2(n+1)}\right)$$

&c.

$$+ \frac{2\,\text{fin.}\,\frac{ns\pi}{n+1}}{n+1}\left((Yn)\,\text{cof.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{n\pi}{2(n+1)}) + \frac{(Vn)}{2k\,\text{fin.}\,\frac{n\pi}{2(n+1)}}\,\text{fin.}\,(2tk\,\text{fin.}\,\frac{n\pi}{2(n+\right.$$

Application de la ſolution précédente aux cordes ſonores.

XXXIX. Je ſuppoſerai ici, pour plus de ſimplicité, que les viteſſes initiales V', V'', V'''&c. ſoient nulles, moyennant quoi la valeur de y' ne contiendra plus que des termes de cette forme

$$\frac{2 \text{ ſin. } \frac{m s \pi}{n+1}}{n+1} (Y m) \text{ coſ. } (2 t k \text{ ſin. } \frac{m \pi}{2(n+1)}).$$

m étant ſucceſſivement 1, 2, 3 &c. n.

Cela poſé on ſait que

$\varphi = \text{ſin. } \varphi + \alpha \text{ ſin. } \varphi^3 + \beta \text{ ſin. } \varphi^5 + \gamma \text{ ſin. } \varphi^7 + \text{\&c.}$

en faiſant $\alpha = \frac{1.1}{2.3}$, $\beta = \frac{3.3}{4.5}$, $\gamma = \frac{5.5}{6.7} \beta$ &c.; donc ſin. $\varphi = \varphi - \alpha \text{ ſin. } \varphi^3 - \beta \text{ ſin. } \varphi^5 - \gamma \text{ ſin. } \varphi^7 - \text{\&c.}$; donc, ſuppoſant $\varphi = \frac{m\pi}{2(n+1)}$ & faiſant pour abreger ſin. $\frac{m\pi}{2(n+1)} = x$, on aura ſin. $\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{m\pi}{2(n+1)} - a x^3 - \beta x^5 - \gamma x^7 - \text{\&c.}$, & par conſéquent

coſ. $(2 t k \text{ ſin. } \frac{m\pi}{2(n+1)}) = \text{coſ. } (\frac{m k t}{n+1} \pi - 2\alpha k t x^3 - 2\beta k t x^5 - 2\gamma k t x^7 - \text{\&c.})$

$= \text{coſ. } \frac{m k t}{n+1} \pi \times \text{coſ. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \text{\&c.})$

$+ \text{ſin. } \frac{m k t}{n+1} \pi \times \text{ſin. } (2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \text{\&c.})$

Or coſ. $(2\alpha k t x^3 + 2\beta k t x^5 + \text{\&c.}) = 1 - 2\alpha^2 k^2 t^2 x^6 - 2 \alpha \beta k^2 t^2 x^8 - 2 \beta^2 k^2 t^2 x^{10} - \text{\&c.}$

& ſin. $(2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + \text{\&c.}) = 2 \alpha k t x^3 + 2 \beta k t x^5 + 2 \gamma k t x^7 + (2 \delta k t - \frac{4\alpha^3 k^3 t^3}{3}) x^9 + \text{\&c.}$

De plus $\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^6$ &c., & par conséquent $(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \&c.)\sqrt{(1-x^2)} = 1$; donc on aura aussi

$$\text{fin.}\ (2\alpha k t x^3 + 2\beta k t x^5 + \&c.) = \Big\{ 2\alpha k t x^2 + (\alpha + 2\beta) k t x^4 + (\tfrac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma) k t x^6 + [(\tfrac{3.5\alpha}{4.6} + \tfrac{3\beta}{4} + \gamma + 2\delta) kt - \tfrac{4\alpha^3}{3} k^3 t^3] x^8 + \&c. \Big\} \times x\sqrt{(1-x^2)};$$

où l' on remarquera que $x\sqrt{(1-x^2)} = \text{fin.}\frac{m\pi}{2(n+1)} \times \text{cof.}\frac{m\pi}{2(n+1)} = \frac{1}{2}\ \text{fin.}\frac{m\pi}{n+1}$.

Maintenant $(Y m) = Y'\ \text{fin.}\frac{m\pi}{n+1} + Y''\ \text{fin.}\frac{2m\pi}{n+1} + Y'''\ \text{fin.}\frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Y^n\ \text{fin.}\frac{nm\pi}{n+1}$ (*Artic. préc.*) ; donc si on multiplie cette quantité par x^2, c'est-à-dire par $(\text{fin.}\frac{m\pi}{2(n+1)})^2 = \frac{1}{2}(1 - \text{cof.}\frac{m\pi}{n+1})$, & qu'on dévelop- pe les produits des *sinus* & des *cosinus*, on aura

$$(Y m)x^2 = \frac{1}{4}\Big\{ Y'(2\ \text{fin.}\frac{m\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{2m\pi}{n+1})$$
$$+ Y''(2\ \text{fin.}\frac{2m\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{3m\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{m\pi}{n+1})$$
$$+ Y'''(2\ \text{fin.}\frac{3m\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{4m\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{2m\pi}{n+1})$$
&c.
$$+ Y^n(2\ \text{fin.}\frac{nm\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{(n+1)m\pi}{n+1} - \text{fin.}\frac{(n-1)m\pi}{n+1})\Big\}$$
$$= -\frac{1}{4}\Big\{ (Y'' - 2Y')\ \text{fin.}\frac{m\pi}{n+1} + (Y''' - 2Y'' + Y')$$

$\text{fin.}\ \frac{2m\pi}{n+1} + (Y^{\text{iv}} - 2Y''' + Y'')\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c.$

$+ (-2Y^n + Y^{n-1})\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1} \Big\}$,

à caufe de $\text{fin.}\ \frac{(n+1)m\pi}{n+1} = \text{fin.}\ m\pi = 0$.

Qu'on dénote par $\Delta^2 Y$ les différences fecondes des quantités Y dans la fuite Y', Y'', Y''' &c. Y^n, de forte que l'on ait en général $\Delta^2 Y^s = Y^{s+1} - 2Y^s + Y^{s-1}$, & fuppofant $Y^0 = 0$ & $Y^{n+1} = 0$, (ce qui eft permis, à caufe que les quantités Y', Y'', Y''' &c. Y^n font les feules données) afin que $\Delta^2 Y' = Y'' - 2Y'$ & $\Delta^2 Y^m = -2Y^m + Y^{m-1}$, on aura

$$(Y^m)x^2 = -\frac{1}{4}\Big(\Delta^2 Y'\ \text{fin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^2 Y''\ \text{fin.}\ \frac{2m\pi}{n+1}$$

$$+ \Delta^2 Y'''\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^2 Y^n\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1}\Big).$$

Si on fait de même $\Delta^4 Y^s = \Delta^2 Y^{s+1} - 2\Delta^2 Y^s + \Delta^2 Y^{s-1} = Y^{s+2} - 4Y^{s+1} + 6Y^s - 4Y^{s-1} + Y^{s-2}$, & qu'on fuppofe enfuite $\Delta^2 Y^0 = 0$ & $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, on trouvera

$$(Y m)x^4 = \frac{1}{16}\Big(\Delta^4 Y'\ \text{fin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^4 Y''\ \text{fin.}\ \frac{2m\pi}{n+1} +$$

$$\Delta^4 Y'''\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^4 Y^n\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1}\Big).$$

En général ou aura

$$(Y m)x^{2r} = \pm\frac{1}{2^r}\Big(\Delta^{2r} Y'\ \text{fin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y''\ \text{fin.}$$

$$\frac{2m\pi}{n+1} + \Delta^{2r} Y'''\ \text{fin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + \Delta^{2r} Y^n\ \text{fin.}\ \frac{nm\pi}{n+1}\Big),$$

(le figne fupérieur étant pour le cas de r pair, & l'inférieur pour celui de r impair) pourvu qu'on fuppofe $Y^0 = 0$, $\Delta^2 Y^0 = 0$, $\Delta^4 Y^0 = 0$ &c. $Y^{n+1} = 0$, $\Delta^2 Y^{n+1} = 0$, $\Delta^4 Y^{n+1} = 0$ &c.; conditions auxquelles on peut ſatisfaire, en imaginant la ſuite des Y continuée de part & d'autre à l'infini, de maniére que les termes Y° & Y^{n+1} ſoient nuls, & que les termes également diſtans de ceux-ci ſoient égaux & de ſignes contraires.

Donc ſi on fait ces ſubſtitutions, & qu'on faſſe pour abreger

$$\frac{2\alpha^2 k^2 t^2}{2^6}\Delta^6 Y^s - \frac{2\alpha\beta k^2 t^2}{2^8}\Delta^8 Y^s + \&c. = P^s,$$

$$-\frac{\alpha k t}{2^2}\Delta^2 Y^s + \frac{1}{2}(\alpha + 2\beta)\frac{kt}{2^4}\Delta^4 Y^s - \frac{1}{2}\left(\frac{3\alpha}{4} + \beta + 2\gamma\right)\frac{kt}{2^6}\Delta^6 Y^s + \&c. = Q^s,$$

& de plus

$$P'\ \text{ſin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + P''\ \text{ſin.}\ \frac{2m\pi}{n+1} + P'''\ \text{ſin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + P^n\ \text{ſin.}\ \frac{nm\pi}{n+1} = (Pm),$$

$$Q'\ \text{ſin.}\ \frac{m\pi}{n+1} + Q''\ \text{ſin.}\ \frac{2m\pi}{n+1} + Q'''\ \text{ſin.}\ \frac{3m\pi}{n+1} + \&c. + Q^n\ \text{ſin.}\ \frac{nm\pi}{n+1} = (Qm),$$

on aura

$$\frac{2\ \text{ſin.}\ \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Ym)\ \text{coſ.}\left(2tk\ \text{ſin.}\ \frac{m\pi}{2(n+1)}\right)$$

$$= \frac{2\ \text{ſin.}\ \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}\left[(Ym) + (Pm)\right]\text{coſ.}\ \frac{mkt}{n+1}\pi$$

$$+ \frac{2\ \text{ſin.}\ \frac{ms\pi}{n+1}}{n+1}(Qm)\ \text{ſin.}\ \frac{m\pi}{n+1} \times \text{ſin.}\ \frac{mkt}{n+1}\pi$$

$$= \frac{(Ym)+(Pm)}{n+1}\left[\text{ſin.}\ \frac{m(s+kt)}{n+1}\pi + \text{ſin.}\ \frac{m(s-kt)}{n+1}\pi\right]$$

$$+ \frac{(Qm)}{2(n+1)} [\text{ſin.} \frac{m(s+1+kt)}{n+1}\pi - \text{ſin.} \frac{m(s-1+kt)}{n+1}\pi$$
$$- \text{ſin.} \frac{m(s+1-kt)}{n+1}\pi + \text{ſin.} \frac{m(s-1-kt)}{n+1}\pi].$$

Donc ſi on fait ſucceſſivement $m = 1, 2, 3$ &c. n, & qu'on ſuppoſe en général

$$\varphi x = 2 \frac{Y1 + P1}{n+1} \text{ſin.}\, x\pi + 2 \frac{Y2 + P2}{n+1} \text{ſin.}\, 2x\pi$$
$$+ 2 \frac{Y3 + P3}{n+1} \text{ſin.}\, 3x\pi + \text{\&c.} + 2 \frac{(Yn) + (Pn)}{n+1} \text{ſin.}\, nx\pi,$$
$$\psi x = 2 \frac{Q1}{n+1} \text{ſin.}\, x\pi + 2 \frac{Q2}{n+1} \text{ſin.}\, 2x\pi + 2 \frac{Q3}{n+1} \text{ſin.}\, 3x\pi$$
$$+ \text{\&c.} + 2 \frac{(Qn)}{n+1} \text{ſin.}\, nx\pi,$$

φ, & ψ dénotant des fonctions, on aura (*Art. préc.*)

$$y' = \frac{1}{2} (\varphi \frac{s+kt}{n+1} + \varphi \frac{s-kt}{n+1})$$
$$+ \frac{1}{4} (\psi \frac{s+1+kt}{n+1} - \psi \frac{s-1+kt}{n+1}$$
$$- \psi \frac{s+1-kt}{n+1} + \psi \frac{s-1-kt}{n+1}).$$

D'où l'on voit que pour avoir la valeur d'une y quelconque, comme y', après un tems quelconque t, il n'y aura qu'à tracer deux courbes, dont les ordonnées répondantes aux abſciſſes x ſoient φx & ψx, & prendre enſuite dans la première de ces courbes $\frac{1}{2}$ ord. abſ. $\frac{s+kt}{n+1}$ $+ \frac{1}{2}$ ord. abſ. $\frac{s-kt}{n+1}$, & dans la ſeconde $\frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s+1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s-1+kt}{n+1} - \frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s+1-kt}{n+1}$ $+ \frac{1}{4}$ ord. abſ. $\frac{s-1-kt}{n+1}$.

Subſtituons maintenant dans les expreſſions de φx & de ψx les valeurs de $Y 1$, $Y 2$, $Y 3$ &c. $(Y n)$, $P 1$, $P 2$, $P 3$ &c. $(P n)$, & $Q 1$, $Q 2$, $Q 3$ &c. $(Q n)$, & ſuppoſant en général

$$\chi\,(u,\, x) = \sin.\, u\pi \times \sin.\, x\pi + \sin.\, 2u\pi \times \sin.\, 2x\pi + \sin.\, 3u\pi \times \sin.\, 3x\pi + \&c. + \sin.\, nu\pi \times \sin.\, nx\pi,$$

nous aurons

$$\varphi x = 2\,\frac{Y' + P'}{n+1}\,\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\,\frac{Y'' + P''}{n+1}\,\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\,\frac{Y''' + P'''}{n+1}\,\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \&c.$$
$$+ 2\,\frac{Y^n + P^n}{n+1}\,\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right), \text{ \&}$$

$$\psi x = 2\,\frac{Q'}{n+1}\,\chi\left(\frac{1}{n+1}, x\right) + 2\,\frac{Q''}{n+1}\,\chi\left(\frac{2}{n+1}, x\right)$$
$$+ 2\,\frac{Q'''}{n+1}\,\chi\left(\frac{3}{n+1}, x\right) + \&c.$$
$$+ 2\,\frac{Q^n}{n+1}\,\chi\left(\frac{n}{n+1}, x\right).$$

Or $2 \cos.\, u\pi \times \chi\,(u,\, x) = 2 \cos.\, u\pi \times \sin.\, u\pi \times \sin.\, x\pi + 2 \cos.\, u\pi \times \sin.\, 2u\pi \times \sin.\, 2x\pi + 2 \cos.\, u\pi \times \sin.\, 3u\pi \times \sin.\, 3x\pi + \&c. + 2 \cos.\, u\pi \times \sin.\, nu\pi \times \sin.\, nx\pi$

$$= \sin.\, 2u\pi \times \sin.\, x\pi + (\sin.\, u\pi + \sin.\, 3u\pi) \sin.\, 2x\pi$$
$$+ (\sin.\, 2u\pi + \sin.\, 4u\pi) \sin.\, 3x\pi + \&c.$$
$$+ [\sin.\, (n-1)u\pi + \sin.\, (n+1)u\pi] \sin.\, nx\pi$$
$$= \sin.\, 2x\pi \times \sin.\, u\pi + (\sin.\, x\pi + \sin.\, 3x\pi) \sin.\, 2u\pi$$
$$+ (\sin.\, 2x\pi + \sin.\, 4x\pi) \sin.\, 3u\pi + \&c.$$
$$+ [\sin.\, (n-1)x\pi + \sin.\, (n+1)x\pi] \sin.\, nu\pi$$
$$+ \sin.\, (n+1)u\pi \times \sin.\, nx\pi - \sin.\, (n+1)x\pi \times \sin.\, nu\pi$$
$$= 2 \cos.\, x\pi \times \chi\,(u,\, x) + \sin.\, (n+1)u\pi \times \sin.\, nx\pi - \sin.\, (n+1)x\pi \times \sin.\, nu\pi.$$

Donc

$\chi\,(u,\, x)$

$$\chi(u, x) = \frac{\text{fin.}\,(n+1)\,u\pi\,.\,\text{fin.}\,n\,x\,\pi - \text{fin.}\,(n+1)\,x\pi\,.\,\text{fin.}\,n\,u\,\pi}{2\,(\text{cof.}\,u\,\pi - \text{cof.}\,x\,\pi)}.$$

Soit $u = \frac{m}{n+1}$, & $x = \frac{s}{n+1}$, m & s étant des nombres entiers, on aura fin. $(n+1)\,u\pi =$ fin. $m\,\pi = 0$; & fin. $(n+1)\,x\,\pi =$ fin. $s\,\pi = 0$; par conféquent $\chi\,(\frac{m}{n+1}, \frac{s}{n+1}) = 0$.

Il en faut excepter le cas où $s = m$; car alors le numérateur & le dénominateur de la formule deviennent égaux chacun à zéro. Pour trouver la valeur de $\chi\,(u, x)$ dans ce cas, on fera $x = u + \omega$, ω étant une quantité évanouiffante, & l' on aura en effaçant ce qui fe détruit,

$$\chi\,(u, x) = \frac{n\ \text{fin.}\,(n+1)\,u\pi \times \text{cof.}\,n\,u\,\pi}{2\ \text{fin.}\,u\,\pi}$$
$$- \frac{(n+1)\ \text{cof.}\,(n+1)\,u\pi \times \text{fin.}\,n\,u\,\pi}{2\ \text{fin.}\,u\,\pi}.$$

Donc, faifant $u = x = \frac{m}{n+1}$,

$$\chi\,(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}) = -\frac{(n+1)\ \text{cof.}\,m\,\pi \times \text{fin.}\,\frac{n\,m\,\pi}{n+1}}{2\ \text{fin.}\,\frac{m\,\pi}{n+1}}.$$

Or cof. $m\,\pi \times$ fin. $\frac{n\,m}{n+1}\,\pi = \frac{1}{2}$ fin. $\frac{2\,n+1}{n+1}\,m\,\pi - \frac{1}{2}$ fin. $\frac{m}{n+1}\,\pi$, & fin. $\frac{2\,n+1}{n+1}\,m\,\pi =$ fin. $(2\,m - \frac{m}{n+1})\,\pi$ = (a caufe que m eft un nombre entier) $-$ fin. $\frac{m}{n+1}\,\pi$; donc cof. $m\,\pi \times$ fin. $\frac{n\,m}{n+1}\,\pi = -$ fin. $\frac{m}{n+1}\,\pi$; & par conféquent

$$\chi\,(\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+1}) = \frac{n+1}{2}.$$

On aura donc

$$\varphi \frac{s}{n+1} = Y^s + P^s, \; \& \; \psi \frac{s}{n+1} = Q^s;$$

c'eſt-à-dire que les deux courbes qui repréſentent les fonctions φx & ψx, doivent être telles que les ordonnées répondantes aux abſciſſes $\frac{s}{n+1}$ ſoient $Y^s + P^s$ & Q^s.

Ayant donc diviſé l'axe de la corde, que je ſuppoſe $= 1$, en $n + 1$ parties égales, on appliquera à chaque abſciſſe $\frac{s}{n+1}$ deux ordonnées, l'une $= Y^s + P^s$, & l'autre $= Q^s$, & l'on fera paſſer par les extrémités de chacune de ces deux ſuites d'ordonnées deux courbes repréſentées par l'équation

$$y = \alpha \text{ ſin. } x\pi + \beta \text{ ſin. } 2x\pi + \gamma \text{ ſin. } 3n\pi + \text{\&c.} + \omega \text{ ſin. } nx\pi,$$

y étant l'ordonnée qui répond à l'abſciſſe x, & α, β, γ &c. ω des coéficiens arbitraires; on aura de cette manière les courbes qui ſerviront à déterminer, pour un tems quelconque t, la figure du poligone vibrant, comme nous l'avons enſeigné plus haut.

A l'égard de la continuation de ces courbes, il eſt clair qu'elles s'étendront de part & d'autre à l'infini, & ſeront compoſées de branches égales, ſemblables & alternativement ſituées au deſſus & au-deſſous de l'axe, de ſorte qu'il ne faudra que tracer les branches qui répondent à l'axe 1; & les tranſporter enſuite alternativement au deſſus & au deſſous de l'axe prolongé à l'infini de part & d'autre.

XL. Suppoſons préſentement que le nombre a des corps ſoit très-grand, & que par conſéquent la diſtance a d'un corps à l'autre ſoit très-petite, la longueur de toute la corde étant $= 1$; il eſt clair que les différences $\Delta^2 Y$, $\Delta^4 Y$ &c. deviendront très-petites du ſecond ordre, du quatrième &c.; donc puiſque $k = \sqrt{(\frac{n c^2}{a})}$ = (à cauſe de

$n = \frac{1}{a}) \frac{t}{a}$, les quantités $k \Delta^2 Y$, $k \Delta^4 Y$, $k^2 \Delta^6 Y$ &c. feront très-petites du premier ordre, du troifiéme, du quatriéme &c., & par conféquent les quantités P & Q pourront être regardées & traitées comme nulles fans erreur fenfible.

Ainfi dans cette hypothèfe, on aura à très peu près le mouvement de la corde, en faifant paffer par les fommets des ordonnées très-proches Y', Y'', Y''' &c., lefquelles repréfentent la figure initiale du poligone vibrant, une courbe dont l'équation foit $y = \alpha$ fin. $\pi x + \beta$ fin. $2 \pi x + \gamma$ fin. $3 \pi x +$ &c. $+ \omega$ fin. $n \pi x$, & que j'appellerai *génératrice*, & prenant enfuite pour l'ordonnée du poligone vibrant, qui répond à une abfciffe quelconque $\frac{s}{n+1} = x$, la demi fomme de deux ordonnées de cette courbe, defquelles l'une réponde à l'abfciffe $\frac{s+kt}{n+1} = x + ct$, & l'autre réponde à l'abfciffe $\frac{s-kt}{n+1} = x - ct$; & cette détermination fera toujours d'autant plus exacte que le nombre n fera plus grand. Or il eft évident que plus le nombre des poids eft grand, plus la poligone initial doit s'approcher de la courbe circonfcrite; d'où il s'enfuit qu'en fuppofant le nombre des poids infini, ce qui eft le cas de la corde vibrante, on pourra regarder la figure initiale même de la corde comme une branche de la courbe *génératrice*, & qu'ainfi pour avoir cette courbe il n'y aura que tranfporter la courbe initiale alternativement au deffus & au deffous de l'axe à l'infini (*Art. préc.*).

XLI. On pourroit douter s'il ne faut pas que la courbe initiale de la corde foit auffi comprife dans la même équation $y = \alpha$ fin. $\pi x + \beta$ fin. $2 \pi x +$ &c.

Il eſt certain que ſi on veut que la courbe génératrice ſoit la même *géométriquement* que la courbe initiale, il faut que celle-ci ſoit renfermée dans l' équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \beta$ ſin. $2 \pi x +$ &c. Je dis *la même géométriquement*, car il ſuffit que la différence de ces deux courbes ſoit moindre qu'aucune grandeur donnée, pour qu'elles puiſſent être priſes pour les mêmes. Or il eſt clair que, quelle que ſoit la courbe initiale, on peut toujours faire paſſer, par une infinité de points infiniment proches de cette courbe, une autre courbe de la forme $y = \alpha$ ſin. $\pi x + \beta$ ſin. $2 \pi x$ + &c., de manière que la différence entre les deux courbes ſoit auſſi petite qu'on voudra, quoique cette différence ne puiſſe devenir abſolument nulle que dans le cas où la courbe initiale ſera auſſi de la même forme; dans tous les autres cas cette courbe initiale ne ſera qu'une eſpéce d'aſſymptôte dont la courbe génératrice pourra s'approcher à l'infini, ſans qu'elles puiſſent jamais coincider entièrement.

Pour confirmer ce que je viens de dire, je vais faire voir comment on peut trouver une infinité de telles courbes, qui coincident avec une courbe donnée en un nombre quelconque de points auſſi près les uns des autres qu'on voudra. Pour cela je prends l' équation

$$y = \frac{2 Y 1}{n+1} \text{ſin. } x \pi + \frac{2 Y 2}{n+1} \text{ſin. } 2 x \pi + \frac{2 Y 3}{n+1} \text{ſin. } 3 x \pi + \text{\&c.} + \frac{2 (Y n)}{n+1} \text{ſin. } n x \pi,$$

dans laquelle

$$(Y m) = Y' \text{ſin.} \frac{m \pi}{n+1} + Y'' \text{ſin.} \frac{2 m \pi}{n+1} + Y''' \text{ſin.} \frac{3 m \pi}{n+1} + \text{\&c.} + Y^n \text{ſin.} \frac{n m \pi}{n+1},$$

& par ce que j' ai démontré dans l'Art. XXXIX. j'aurai, lorſque $x = \frac{s}{n+1}$, $y = Y^s$.

Soit maintenant $n + 1 = \frac{1}{dX}$ & $\frac{s}{n+1} = X$, on aura $(Ym) = \int Y$ ſin. $mX\pi = (n+1) \int Y$ ſin. $mX\pi dX$, cette intégrale étant priſe depuis $X = 0$ juſqu'à $X = 1$; par conſéquent

$$y = 2\int Y \text{ ſin. } X\pi dX \times \text{ ſin. } x\pi + 2\int Y \text{ ſin. } 2X\pi dX \times \text{ ſin. } 2x\pi + 2\int Y \text{ ſin. } 3X\pi dX \times \text{ ſin. } 3x\pi + \text{\&c.} + 2\int Y \text{ ſin. } nX\pi dX \times \text{ ſin. } nx\pi,$$

de ſorte que, lorſque $x = X$, on aura $y = Y$, Y étant l'ordonnée qui répond à l'abſciſſe X.

Or ſoit Z une fonction quelconque de X, & z une pareille fonction de x, il eſt clair qu'en mettant dans l'équation précédente YZ au lieu de Y & yz au lieu de y, on aura auſſi, lorſque $X = x$, $yz = YZ$, c'eſt à dire, à cauſe de $z = Z$ dans ce cas, $y = Y$. D'où il s'enſuit que ſi l'on a une courbe quelconque rapportée à un axe $= 1$, & dont les coordonnées ſoient X & Y, & qu'on décrive ſur le même axe une autre courbe dont l'équation, en prenant x & y pour les coordonnées, ſoit

$$y = \frac{2}{z}\int ZY \text{ ſin. } X\pi dX + \frac{2}{z}\int ZY \text{ ſin. } 2X\pi dX$$
$$+ \frac{2}{z}\int ZY \text{ ſin. } 3X\pi dX + \text{\&c.}$$
$$+ \frac{2}{z}\int ZY \text{ ſin. } nX\pi dX,$$

ces deux courbes coincideront dans tous les points qui répondent aux abſciſſes $x = X = \frac{s}{n+1}$, s & n étant des nombres entiers, quelle que ſoit d'ailleurs la fonction Z; or on peut rendre n & s ſi grands que les points de coincidance ſoient auſſi près les uns des autres qu'on voudra.

Au reſte il ne faut pas manquer d'obſerver que la conſtruction donnée ci-deſſus, pour repréſenter le mouvement de la corde vibrante, n'eſt exacte qu'autant qu'il eſt permis de négliger les quantités P & Q comme nous l' avons fait (*Art. XL.*). Or il eſt clair que ces quantités ſeront toujours nulles d' elles-mêmes, ſi $\frac{d^m y}{dx^m}$ ne fait de ſaut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives; ainſi pourvu que cette condition ſoit obſervée, on pourra toujours déterminer le mouvement de la corde quelle que ſoit d' ailleurs la nature de la courbe initiale.

Nouvelle manière d' intégrer par approximation l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMy^2 + i^2Ny^3 + \&c. = 0 \quad (A)$$

dans laquelle K, L, M, N *&c. ſont des conſtantes quelconques, &* i *marque un coéficient très-petit.*

XLII. On ſait que l' intégrale de l' équation

$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + a$ coſ. $\alpha t + b$ coſ. βt + &c. $= 0$, eſt

$$y = f \text{ coſ. } Kt + \frac{g}{K} \text{ ſin. } Kt + \frac{L}{K^2} (\text{coſ. } Kt - 1)$$

$$+ \frac{a}{K^2 - \alpha^2} (\text{coſ. } Kt - \text{coſ. } \alpha t) + \frac{b}{K^2 - \beta^2} (\text{coſ. } Kt - \text{coſ. } \beta t)$$

$+$ &c.

f & g étant deux conſtantes arbitraires, dont l'une exprime la valeur de y, & l' autre celle de $\frac{dy}{dt}$, lorſque $t = 0$.

Si $\alpha = K$ on trouvera (en faiſant $\alpha = K + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouiſſante) que les termes $\frac{a}{K^2 - \alpha^2}$ (coſ. Kt — coſ. αt) ſe réduiſent à celui-ci $- \frac{a}{2K} t$ ſin. Kt.

XLIII. Cela posé, pour intégrer l' équation (A), suivant la méthode ordinaire d' approximation, on négligera d'abord les termes affectés de i, & l'on aura pour premiére équation approchée $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L = 0$, & par conséquent

$$y = f \text{ cos. } Kt + \frac{g}{K} \text{ sin. } Kt + \frac{L}{K^2} (\text{cos. } Kt - 1).$$

On substituera ensuite cette premiére valeur de y dans le terme iMy^2, en négligeant le terme suivant i^2Ny^3, & faisant pour plus de simplicité $g = 0$ & $f + \frac{L}{k^2} = F$, on aura la nouvelle équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) - 2i\frac{MLF}{K} \text{ cos. } kt$$
$$+ i\frac{MF^2}{2} \text{ cos. } 2Kt = 0,$$

dont l' intégrale sera, en supposant $g = 0$ & $L + iM\left(\frac{F^2}{2} + \frac{L^2}{K^4}\right) = L'$,

$$y = f \text{ cos. } Kt + \frac{L'}{K^2}(\text{cos. } Kt - 1) + i\frac{MLF}{K^3} t \text{ sin. } Kt$$
$$- i\frac{MF^2}{2.3K^2}(\text{cos. } Kt - \text{cos. } 2Kt).$$

XLIII. Mais voici une difficulté. L' expression de y qu'on vient de trouver renferme un terme multiplié par t, & si on continuoit le calcul de la même maniére on trouveroit encore des termes multipliés par t^2, t^3 &c.; cependant il est certain que la valeur de y ne doit point contenir de pareils termes. Pour le démontrer je reprends l' équation (A), & j' en tire, en multipliant par $2dy$, & intégrant

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 \text{ \&c.} = 0 \quad (B)$$

H étant une conſtante qu'on déterminera par les valeurs données de y & de $\frac{dy}{dt}$ lorſque $t = 0$; de ſorte qu'on aura en général

$$H = -g^2 - K^2 f^2 - 2Lf - \frac{2iM}{2} f^3 - \frac{i^2 N}{2} f^4 \text{ \&c.}$$

Je fais $\frac{dy}{dt} = x$, j'ai

$$x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 + \frac{i^2 N}{2} y^4 \text{ \&c.} = 0\,;$$

équation qui peut être regardée comme appartenant à une courbe dont x & y ſoient les coordonnées. Or puiſque i eſt une quantité très-petite, il eſt clair qu'on aura à peu près $x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H = 0$, d'où l'on tire

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2 H - K^2 x^2)}}{K^2}.$$

Ces deux racines donnent comme l'on voit une ovale dans laquelle la valeur de y eſt contenue entre ces deux limites

$$y = \frac{-L + \sqrt{(L^2 - K^2 H)}}{K^2} \text{ \& } y = \frac{-L - \sqrt{(L^2 - K^2 H)}}{K^2}.$$

Pour trouver les autres racines on ſuppoſera $y = \frac{z}{i}$, & après avoir fait diſparoitre les puiſſances de i qui ſe trouveront au dénominateur, on cherchera les valeurs de z par les régles ordinaires d'approximation. De cette manière on aura en ne conſidérant d'abord que l'équation $x^2 + K^2 y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3} y^3 = 0$, & pouſſant la préciſion juſqu'aux i^2, $z = -\frac{3K^2}{2M} + \frac{2iL}{K} - \frac{8i^2 L^2 M}{3K^4} - \frac{2i^2 M(H + x^2)}{3K^4}$, & par conſéquent

$$y = -\frac{3K^2}{2iM} + \frac{2L}{K^2} - \frac{8iL^2M}{3K^6} - \frac{2iM(H+x^2)}{3K^4}$$

ce qui donne une branche parabolique infiniment éloignée de l'axe. On tirera de même de l'équation

$$x^2 + K^2y^2 + 2Ly + H + \frac{2iM}{3}y^3 + \frac{i^2N}{2}y^4 = 0,$$

$y = \frac{\alpha}{i} + \beta + i(\gamma + \delta x^2)$, où

$$\alpha = \frac{-\frac{2M}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)}}{N}$$

$$\beta = -\frac{4L\alpha}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\gamma = -\frac{(6N^2\alpha^2 + 4M\alpha + 2K^2)\beta^2 + 4L\beta + 2C}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

$$\delta = -\frac{2}{4N\alpha^3 + 4M\alpha^2 + 4K^2\alpha}$$

ce qui donnera, à cauſe de l'ambiguité du radical $\sqrt{\left(\frac{4M^2}{9} - 2K^2\right)}$, deux branches paraboliques éloignées à l'infini de l'axe; & ainſi de ſuite.

De là il eſt aiſé de conclure que la valeur de y ne peut jamais paſſer du fini à l'infini. Donc puiſque t peut devenir infinie, ce qui eſt évident par la nature même de l'équation (A), il s'enſuit que la valeur de y en t ne doit point contenir de termes qui croiſſent avec t; donc &c.

XLV. Voyons donc comment on pourroit faire diſparoitre de l'expreſſion de y les termes qui contiendroient des puiſſances de t, & qui rendroient cette expreſſion très-fautive.

Qu'on ſuppoſe, dans l'équation (A), $y = y' + \lambda + i\mu + i^2\nu$ + &c., λ, μ, ν &c. étant des conſtantes indéterminées & y' une nouvelle variable, & négligeant les termes qui feroient affectés de i^3 &c. on aura une équation de cette forme

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i(B + My'^2) + i^2(C + 3N\lambda y'^2 + Ny'^3)$$
$$+ \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

dans laquelle $R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$, $A = L + K^2\lambda$, $B = K^2\mu + M\lambda^2$, & $C = K^2\nu + 2M\mu\lambda + N\lambda^3$; ce qui donnera pour première équation approchée $\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A = 0$; d'où, en fuppofant $y' = f'$ & $\frac{dy'}{dt} = 0$ lorfque $t = 0$, on aura

$$y' = f' \text{ cof. } Rt + \frac{A}{R^2}(\text{cof. } Rt - 1).$$

Subftituant enfuite cette première valeur de y' dans le terme iMy'^2 de l'équation (C), & négligeant les termes affectés de i^2 on aura

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + A + i\left[B + M\frac{A^2}{R^4} + \frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\right]$$
$$- 2iM\frac{A}{R^2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)\text{cof.}Rt + i\frac{M}{2}\left(f' + \frac{A}{R^2}\right)^2\text{cof.}2Rt = 0.$$

On fera $A = 0$, moyennant quoi le terme qui contient cof. Rt difparoitra, & l'équation fe réduira à celle-ci

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + R^2y' + i\left(B + \frac{Mf'^2}{2}\right) + i\frac{Mf'^2}{2}\text{cof.}2Rt = 0,$$

dont l'intégrale fera

$$y' = f' \text{ cof. } Rt + i\left(\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}\right)(\text{cof. } Rt - 1)$$
$$- i\frac{Mf'^2}{2.3R^2}(\text{cof. } Rt - \text{cof. } 2Rt).$$

Si on veut fe contenter de cette approximation on négligera dans la valeur de R les termes de l'ordre de i^2, & l'on aura $R^2 = K^2 + 2iM\lambda$; or la fuppofition de

$A = 0$ donne $\lambda = -\frac{L}{K^2}$, donc on aura $R^2 = K^2 - 2i\frac{LM}{K^2}$. A l'égard de la quantité μ qui entre dans la valeur de B, on pourra la ſuppoſer $= 0$, de ſorte qu'on aura $B = M\lambda^2 = \frac{L^2M}{K^4}$. Ainſi la valeur de y ſera, aux quantité de l'ordre de i^2 près, $-\frac{L}{K^2} + y'$.

Mais ſi on vouloit pouſſer le calcul plus loin il faudroit ſubſtituer l'expreſſion précédente de y' dans les termes iMy'^2, $3i^2N\lambda y'^2$ & $i^2Ny'^3$ de l'équation (C), en négligeant les quantités qui ſe trouveroient affectés de i^3, & faire diſparoitre enſuite le terme qui contiendroit coſ. Rt, en ſuppoſant égal à zéro ſon coéficient $i^2[-2Mf'(\frac{B}{R^2} + \frac{Mf'^2}{2R^2}) + \frac{M^2f'^3}{2.3R^2} + \frac{3Nf'^3}{4}]$, ce qui donneroit $B = -\frac{5Mf'^2}{12} + \frac{3NR^2f'^2}{8M}$. De cette manière on auroit une nouvelle valeur de y' qui ne contiendroit, comme la précédente, que des *coſinus* d'angles; & ainſi de ſuite.

La valeur de B qu'on vient de trouver donnera, à cauſe de $B = K^2\mu + M\lambda^2$, $\mu = (\frac{3NR^2}{8MK^2} - \frac{5M}{12K^2})f'^2 - \frac{ML^2}{K^6}$ = [en mettant au lieu de R^2 ſa valeur approchée K^2] $(\frac{3N}{8M} - \frac{5M}{12K^2})f'^2 - \frac{ML^2}{K^6}$; d'où l'on aura

$$R^2 = K^2 + 2iM\lambda + i^2(2M\mu + 3N\lambda^2)$$
$$= K^2 - 2i\frac{ML}{K^2} + i^2[(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2})f'^2 + \frac{3NL^2}{K^4} - \frac{2M^2L^2}{K^6}];$$

c'eſt la valeur de R^2 aux quantités de l'ordre de i^3 près.

XLVI. Je vais présentement donner une méthode particulière pour intégrer ces sortes d'équations différentielles aussi exactement qu'on voudra par approximation, méthode qui aura sur la précédente l'avantage de donner directement, & sans aucune supposition précaire la vraie forme de l'intégrale.

Je supposerai ici pour plus de simplicité qu'on ne veuille avoir égard qu'aux quantités de l'ordre de i & de i^2; mais on verra aisément que la méthode aura lieu quelque loin qu'on veuille pousser l'approximation.

Soit $y^2 = u$, & $y^3 = v$; l'équation proposée (A) deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \quad \ldots \quad (D)$$

Or $\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{2y\,d^2y}{dt^2} + \frac{2\,dy^2}{dt^2}$; donc si on multiplie l'équation (A) par $2y$, & l'équation (B) de l'Art. XLIV. par 2, & qu'ensuite on les ajoute ensemble on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2y^2 + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}y^3 + 6i^2Ny^4 = 0.$$

Mais comme la quantité u est déja multipliée par i dans l'équation (D), il est clair que pour ne pas introduire dans la valeur de y des termes de l'ordre de i^3, il faut rejetter dans la valeur de u & par conséquent aussi de dans celle de $\frac{d^2u}{dt^2}$, les termes de l'ordre de i^2; effaçant donc le terme $6i^2Ny^4$, & mettant dans les autres u à la place de y^2 & v à la place de y^3, on aura

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0.$$

On a de même $\frac{d^2v}{dt^2} = \frac{3y^2d^2y}{dt^2} + \frac{6y\,dy^2}{dt^2}$; donc multipliant l'équation (A) par $3y^2$, & l'équation (B) par $6y$, & les ajoutant ensemble on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2y^3 + 15Ly^2 + 6Hy + 7iMy^4 + \&c. = 0.$$

Or v étant multipliée par i^2 dans l' équation (D), on rejettera dans la valeur de $\frac{d^2v}{dt^2}$ tous les termes affectés de i, de forte qu'on aura, en mettant u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3,

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0.$$

Nous avons donc entre les trois variables y, u, v, ces trois équations du second ordre

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + L + iMu + i^2Nv = 0 \\ &\frac{d^2u}{dt^2} + 4K^2u + 6Ly + 2H + \frac{10iM}{3}v = 0 \\ &\frac{d^2v}{dt^2} + 9K^2v + 15Lu + 6Hy = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (E)$$

lesquelles sont intégrables par la méthode de l' Art. XXVI.

Suivant cette méthode je multiplie la première par $\lambda e^{\rho t}dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t}dt$, la troisième par $\nu e^{\rho t}dt$ (*Art. XXIX*)., λ, μ, ν & ρ étant des constantes indéterminées, ensuite je les ajoute ensemble, & j' en prends l' intégrale en faisant disparoitre, par des intégrations par parties, les différences des variables y, u, v de dessous le signe $\int$; j' aurai donc

$$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v)\rho + \frac{\lambda L + 2\mu H}{\rho}\right\}e^{\rho t} +$$

$$\int\left\{\begin{aligned} &(\lambda\rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H)y \\ &+ (i\lambda M + \mu\rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L)u \\ &+ (i^2\lambda N + \frac{10i}{3}\mu M + \nu\rho^2 + 9\nu K^2)v \end{aligned}\right\}e^{\rho t}dt$$

$= \text{conſt.}$

J'égale à zéro les coéficiens des variables y, u, v, qui sont sous les signes $\int$, ce qui me donne ces trois équations

$$\left.\begin{array}{l} \lambda\rho^2 + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H = 0 \\ i\lambda M + \mu\rho^2 + 4\mu K^2 + 15\nu L = 0 \\ i^2\lambda N + \frac{10i}{3}\mu M + \nu\rho^2 + 9\nu K^2 = 0 \end{array}\right\} \ldots (F)$$

par le moyen desquelles je détermine les quantités λ ; μ, ν, & ρ.

De cette manière j'ai

$$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} - (\lambda y + \mu u + \nu v)\rho + \frac{\lambda L + 2\mu H}{\rho}\right\} e^{\rho t} = \text{const.} \ldots (G)$$

Or pour peu qu'on examine les équations (F), il est aisé de reconnoître que la quantité μ doit être de l'ordre de i, & celle de ν de l'ordre de i^2.

Soit donc $\mu = i\lambda\alpha$ & $\nu = i^2\lambda\beta$, on aura, en divisant la première équation par λ, la seconde par $i\lambda$, & la troisième par $i^2\lambda$, les trois suivantes

$$\rho^2 + K^2 + 6i\alpha L + 6i^2\beta H = 0$$
$$M + \alpha(\rho^2 + 4K^2) + 15i\beta L = 0$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(\rho^2 + 9K^2) = 0.$$

La première donne $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, & mettant cette valeur de ρ^2 dans les deux autres on aura

$$M + \alpha(3K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) + 15i\beta L = 0$$
$$N + \frac{10}{3}\alpha M + \beta(8K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H) = 0.$$

Négligeons d'abord les termes affectés de i, & nous aurons $M + 3\alpha K^2 = 0$, & $N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 = 0$, d'où l'on tire $\alpha = -\frac{M}{3K^2}$ & $\beta = -\frac{N}{8K^2} - \frac{10\alpha M}{3\cdot 8K^2} = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9\cdot 8K^4}$.

Subſtituant enſuite ces valeurs dans les termes de l' ordre de i, & négligeant ceux de l' ordre de i^2, on aura

$$M + 3\alpha K^2 - 6iL\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + 15iL\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

$$N + \frac{10}{3}\alpha M + 8\beta K^2 - 6iL\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) = 0$$

d' où l' on tirera de nouvelles valeurs plus exactes de α & de β, leſquelles ſeront $\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{6iL}{3K^2}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 - \frac{15iL}{3K^2}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$, $\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{8.9K^4} - \frac{10.6iLM}{9.8K^4}\left(\frac{M}{3K^2}\right)^2 + \frac{15iLM}{9.8K^4}\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right) + \frac{6iL}{8K^2}\left(-\frac{M}{3K^2}\right)\times\left(-\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}\right)$; & ainſi de ſuite; mais comme $\mu = i\lambda\alpha$ & $\nu = i^2\lambda\beta$, il eſt clair que pour notre objet il ſuffira d' avoir la valeur de α aux quantités de l'ordre de i^2 près, & celle de β aux quantités de l'ordre de i près; de ſorte qu'on pourra ſe contenter de prendre

$$\alpha = -\frac{M}{3K^2} + \frac{iL}{K^4}\left(\frac{5N}{8} - \frac{17M^2}{36K^2}\right) \;\&$$

$$\beta = -\frac{N}{8K^2} + \frac{10M^2}{9.8K^4}.$$

Ayant trouvé les valeurs de α & de β, on les ſubſtituera dans l' équation $\rho^2 = -K^2 - 6i\alpha L - 6i^2\beta H$, & l' on aura, en ordonnant les termes par rapport à i,

$$\rho^2 = -K^2 + \frac{2iLM}{K^2} - \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) + \frac{i^2H}{K^2}\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^2}\right).$$

Soit $\rho = R\sqrt{-1}$, enſorte que $\rho^2 = -R^2$, & l'on aura

$$R^2 = K^2 - \frac{2iLM}{K^2} + \frac{i^2L^2}{K^4}\left(\frac{15N}{4} - \frac{17M^2}{6K^2}\right) - \frac{i^2H}{K^2}$$
$$\left(\frac{3N}{4} - \frac{5M^2}{6K^3}\right); \text{ d'où}$$
$$R = K - i\frac{LM}{K^3} + i^2\frac{L^2}{K^5}\left(\frac{15N}{8} - \frac{10M^2}{3K^2}\right) - i^2\frac{H}{K^3}$$
$$\left(\frac{3N}{8} - \frac{15M^2}{12K^2}\right).$$

Reprenons maintenant l'équation (G), & substituons-y $R\sqrt{-1}$ au lieu de ρ, $i\lambda\alpha$ au lieu de μ, $i^2\lambda\beta$ au lieu de ν, y^2 au lieu de u, & y^3 au lieu de v, nous aurons, en prenant C pour la constante,

$$\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}\left\{(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2})R\sqrt{-1}\right\} = C.$$

Or soit, lorsque $t = 0$, $y = f$ & $\frac{dy}{dt} = g$, on aura $C = \lambda(1 + 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2)g - \lambda(f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2})R\sqrt{-1}$. Donc si on fait

$$F = f + i\alpha f^2 + i^2\beta f^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2}, \&$$
$$G = (1 - 2i\alpha f + 3i^2\beta f^2)g,$$

& qu'on divise toute l'équation par $\lambda e^{Rt\sqrt{-1}}$, on aura

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} - (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3 + \frac{L - 2i\alpha H}{R^2})R\sqrt{-1} = (G - FR\sqrt{-1})e^{-Rt\sqrt{-1}}$$
$$= G\,\text{cos}.\,Rt - FR\,\text{sin}.\,Rt - (FR\,\text{cos}.\,Rt + G\,\text{sin}.\,Rt)\sqrt{-1};$$

& prenant le radical $\sqrt{-1}$ en $-$,

$$(1 + 2i\alpha y + 3i^2\beta y^2)\frac{dy}{dt} + (y + i\alpha y^2 + i^2\beta y^3$$

+

$+ \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}) R \sqrt{-1} = G \text{ cos. } Rt - FR \text{ sin. } Rt$
$+ (FR \text{ cos. } Rt + G \text{ sin. } Rt) \sqrt{-1}$;
donc retranchant la première de ces équations de la seconde, & divisant ensuite par $2 R \sqrt{-1}$, on aura

$$y + i \alpha y^2 + i^2 \beta y^3 + \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}$$
$$= F \text{ cos. } Rt + \frac{G}{R} \text{ sin. } Rt \quad \ldots \ldots \quad (\mathrm{H})$$

C' est l' intégrale de l'équation (A), en n' ayant égard qu'aux quantités de l' ordre de i & de i^2.

Si l' on veut avoir la valeur de y, on n'aura qu'à résoudre l' équation (H) par approximation, en observant de négliger dans cette opération les quantités qui se trouveroient multipliées par des puissances de i plus hautes que la seconde.

Pour y parvenir plus aisément on fera $y = T + i T' + i^2 T''$, & substituant cette valeur dans l' équation (H) on égalera à zéro les termes homogénes, c' est-à-dire ceux qui sont affectés de la même puissance de i; ce qui donnera $T = F \text{ cos. } Rt + \frac{G}{R} \text{ sin. } Rt - \frac{L - 2 i \alpha H}{R^2}$, $T' = - \alpha T^2$, $T'' = - 2 \alpha T T' - \beta T^3$; d' où il est clair que la valeur de y ne contiendra que des *sinus* & des *cosinus* d' angles multiples de t.

En supposant $g = 0$ on verra que la valeur de R^2 trouvée ci-dessus s'accorde entiérement avec celle de l'Art. XLV.; il n' y aura, pour s' en convaincre, qu'à mettre, au lieu de H & de f', leurs valeurs approchées $-(K^2 f + 2 L f)$ & $f + \frac{L}{K^2}$ (*Artt. XLIV. & XLV.*).

Du mouvement d'un corps qui décrit une orbite à peu près circulaire, en vertu d'une force centrale proportionelle à une fonction quelconque de la distance.

XLVII. Soit r le rayon vecteur de l'orbite, t le tems écoulé depuis le commencement du mouvement, φ l'angle parcouru par le rayon r durant le tems t, Δr la fonction de la distance r qui exprime la force centrale, a la distance initiale, c la vitesse de projection, & b l'angle de la ligne de projection avec le rayon vecteur; on aura en prenant dt constant ces deux équations

$$d \cdot \frac{r^2 d\varphi}{dt} = 0 \;\&\; \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\, d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0.$$

(Voyés l'Art. IV. du Mém. qui a pour titre *Application de la méthode précédente &c.* imprimé dans le Vol. préc.).

La première étant intégrée donne $\frac{r^2 d\varphi}{dt} =$ à une constante, mais lorsque $t = 0$ on a $r = a$ & $\frac{r\, d\varphi}{dt} = c \sin. b$; donc $\frac{r^2 d\varphi}{dt} = a.c \sin. b$ & $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{ac \sin. b}{r^2}$; substituant donc cette valeur dans l'autre équation, on aura pour les équations générales du mouvemens du corps

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{a^2 c^2 \sin. b^2}{r^3} + \Delta r = 0, \quad \frac{d\varphi}{dt} - \frac{ac \sin. b}{r^2} = 0.$$

Maintenant, puisque on suppose que l'orbite différe peu d'un cercle, il est clair que r doit être presque égal à a, & que par conséquent on peut faire $r = a + iy$, i étant un coéficient très-petit & y une nouvelle variable; ce qui donnera $\frac{d^2 r}{dt^2} = i \frac{d^2 y}{dt^2}$, $\frac{1}{r^3} = \frac{1}{(a + iy)^3} = \frac{1}{a^3} -$

$3\,i\,\frac{y}{a^4} + 6\,i^2\,\frac{y^2}{a^5} - 10\,i^3\,\frac{y^3}{a^6} +$ &c., $\Delta r = \Delta\,(a + i y) =$ (en supposant $\frac{d.\,\Delta r}{dr} = \Delta' r$, $\frac{d.\,\Delta' r}{dr} = \Delta'' r$ &c.) $\Delta a + i\,\Delta' a y + i^2\,\frac{\Delta'' a}{2}\,y^2 + i^3\,\frac{\Delta''' a}{2.3}\,y^3 +$ &c.; donc la première équation deviendra $i\,\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a}\,(1 - 3\,i\,\frac{y}{a} + 6\,i^2\,\frac{y^2}{a^2} - 10\,i^3\,\frac{y^3}{a^3} +$ &c.$) + \Delta a + i\,\Delta' a y + i^2\,\frac{\Delta'' a}{2}\,y^2 + i^3\,\frac{\Delta''' a}{2.3}\,y^3 +$ &c. $= 0$; d'où l'on voit que $\Delta a - \frac{c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a}$ doit être néceſſairement une quantité très-petite de l'ordre de i; de ſorte qu'on peut ſuppoſer $\Delta a - \frac{c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a} = i L$, moyennant quoi l'équation ſera diviſible par i, & deviendra après la diviſion

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\Delta' a + \frac{3\,c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a^2})\,y + L + i\,(\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6\,c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a^3})\,y^2 + i^2\,(\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10\,c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a^4})\,y^3 + \text{\&c.} = 0\,;$$

équation qui ſe réduit à la formule (A) de l'Art. XLII., en ſuppoſant $\Delta' a + \frac{3\,c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a^2} = K^2$, $\frac{\Delta'' a}{2} - \frac{6\,c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a^3} = M$, $\frac{\Delta''' a}{2.3} + \frac{10\,c^2\,\text{fin.}\,b^2}{a^4} = N$ &c.;

Ainſi l'on aura la valeur de y, & par conſéquent celle de r en t; il faudra ſeulement obſerver que, quand $t = 0$, $r = a$ & $\frac{dr}{dt} = -c$ coſ. b, c'eſt-à-dire $y = 0$ & $i\,\frac{dy}{dt} = -c$ coſ. b, par conſéquent $f = 0$ & $i g = -c$ coſ. b; d'où l'on voit que coſ. b doit être très-petit, & par conſéquent l'angle de projection b preſque droit;

ce qui eſt d'ailleurs évident, à cauſe que l'orbite eſt ſuppoſée peu différente d'un cercle.

L'autre équation donnera, après la ſubſtitution de $a + iy$ au lieu de r,

$$\frac{d\varphi}{dt} - \frac{c \sin. b}{a} + 2i \frac{c \sin. b}{a^2} y - 3i^2 \frac{c \sin. b}{a^3} y^2 + 4i^3 \frac{c \sin. b}{a^4} y^3$$

$$- \&c. = 0.$$

Je ſubſtitue dans cette équation u au lieu de y^2 & v au lieu de y^3, enſuite j'y ajoute les trois équations (E) de l'Art. XLVI. multipliées la première par λ, la ſeconde par μ, la troiſiéme par ν (λ, μ, ν étant des coéficiens indéterminés), ce qui me donne, en ordonnant les termes,

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \nu \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{c \sin. b}{a} + \lambda L + 2\mu H$$

$$+ \left(\frac{2ic \sin. b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H\right) y + \left(- \frac{3i^2 c \sin. b}{a^3}\right.$$

$$\left. + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L\right) u + \left(\frac{4i^3 c \sin. b}{a^4} + i^2 \lambda N + \right.$$

$$\left. \frac{10 i\mu M}{3} + 9\nu K^2\right) v = 0.$$

Je ſuppoſe à préſent

$$\left.\begin{aligned} &\frac{2ic \sin. b}{a^2} + \lambda K^2 + 6\mu L + 6\nu H = 0 \\ &- \frac{3i^2 c \sin. b}{a^3} + i\lambda M + 4\mu K^2 + 15\nu L = 0 \\ &\frac{4i^3 c \sin. b}{a^4} + i^2 \lambda N + \frac{10 i\mu M}{3} + 9\nu K^2 = 0 \end{aligned}\right\} \ldots (1)$$

ce qui réduit l'équation précédente à

$$\frac{d\varphi}{dt} + \lambda \frac{d^2 y}{dt^2} + \mu \frac{d^2 u}{dt^2} + \nu \frac{d^2 v}{dt^2} - \frac{c \sin. b}{a} + \lambda L + 2\mu H = 0,$$

dont l'intégrale eſt

$$\varphi + \lambda \frac{dy}{dt} + \mu \frac{du}{dt} + \nu \frac{dv}{dt} - \left(\frac{c \sin. b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right) t$$

$$= \text{conſt.}$$

c'est-à-dire, en remettant y^2 au lieu de u, y^3 au lieu de v, & faisant attention que lorsque $t = 0$, on a $\varphi = 0$, $y = 0$ & $\frac{dy}{dt} = g$,

$$\varphi + (\lambda + 2\mu y + 3\nu y^2)\frac{dy}{dt} - \left(\frac{c\,\text{sin.}\,b}{a} - \lambda L - 2\mu H\right)t = \lambda g.$$

Et il ne s'agira plus que de tirer les valeurs de λ, μ, ν des équations (I); or si on fait $\lambda = i\gamma$, $\mu = i^2\delta$, $\nu = i^3\varepsilon$, & qu'on divise la première équation par i, la seconde par i^2, la troisiéme par i^3, on aura

$$\frac{2c\,\text{sin.}\,b}{a^2} + \gamma K^2 + 6\,i\,\delta L + 6\,i^2\varepsilon H = 0$$

$$-\frac{3c\,\text{sin.}\,b}{a^3} + \gamma M + 4\,\delta K^2 + 15\,i\,\varepsilon L = 0$$

$$\frac{4c\,\text{sin.}\,b}{a^4} + \gamma N + \frac{10}{3}\delta M + 9\,\varepsilon K^2 = 0,$$

d'où l'on tire, en négligeant ce qu'on doit négliger,

$$\gamma = -\frac{2c\,\text{sin.}\,b}{a^2K^2} + \frac{6\,iL}{K^2}\delta - \frac{6\,i^2H}{K^2}\varepsilon,$$

$$\delta = \frac{c\,\text{sin.}\,b}{a^2K^2}\left(\frac{3}{4a} + \frac{M}{2\,K^2} + \frac{9\,iLM}{8\,a\,K^4} + \frac{3\,iLM^2}{4\,K^6}\right) - \frac{15\,iL}{4\,K^2}\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{c\,\text{sin.}\,b}{a^2K^2}\left(-\frac{4}{9\,a^2} + \frac{2\,N}{9K^2} - \frac{5\,M}{18\,a\,K^2} - \frac{5\,M^2}{27\,K^4}\right).$$

Donc si on fait pour abreger

$$S = \frac{c\,\text{sin.}\,b}{a} - i\gamma L - 2\,i^2\delta H$$

on aura

$$\varphi = St + i\gamma g - i(\gamma + 2\,i\delta y + 3\,i^2\varepsilon y^2)\frac{dy}{dt} \quad \text{(K)}$$

Or y est déja connu en t, donc on connoitra aussi φ en t.

Il est à remarquer que $St + i\gamma g$ représente l'angle du mouvement moyen; de sorte que si on nomme cet angle θ, & qu'on substitue dans les équations (H) & (K)

$\frac{\theta - i\gamma g}{S}$ au lieu de t, on aura les formules qui feront trouver le lieu vrai du corps, son lieu moyen étant donné.

Il est visible que les apsides de l' orbite se trouveront aux points, où $dy = 0$; or si on différentie l' équation (H) & qu'on fasse ensuite $dy = 0$ on aura $-RF$ sin. $Rt + G$ cos. $Rt = 0$, c' est-à-dire tang. $Rt = \frac{G}{RF}$. Soit h le plus petit angle qui répond à la tangente $\frac{G}{RF}$, & l' on aura $Rt = h + \mu\pi$, π dénotant l' angle de 180° dégrés, & μ un nombre quelconque entier; maintenant l' équation (K) donnera, lorsque $dy = 0$, $\varphi = St + i\gamma g$; donc mettant au lieu de t sa valeur $\frac{h + \mu\pi}{R}$ on aura pour les lieux des apsides

$$\varphi = i\gamma g + \frac{S}{R}(h + \mu\pi);$$

d' où l' on voit que la distance d' une apside à l' autre sera égale à l'angle $\frac{S}{R}\pi$, & que par conséquent le mouvement des apsides sera de $(\frac{S}{R} - 1)\,360°$ à chaque révolution.

XLVIII. Si on veut connoitre la figure de l'orbite décrite par les corps, il faudra éliminer t des équations (H) & (K) pour avoir une équation entre y & φ, mais il sera beaucoup plus simple de substituer d'abord dans l'équation $\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\,d\varphi^2}{dt^2} + \Delta r = 0$ au lieu de dt sa valeur $\frac{r^2\,d\varphi}{ac\,\text{sin.}\,b}$, ce qui donnera, en faisant $\frac{1}{r} = s$ & prenant $d\varphi$ constant, $\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{\Delta\frac{1}{s}}{s^2 a^2 c^2\,\text{sin.}\,b^2} = 0$, & d'intégrer ensuite cette dernière équation par la méthode de l'Art. XLVI.

En effet puisque r est à peu près égale à a (hyp.) s sera à peu près égale à $\frac{1}{a}$, & par conséquent on pourra supposer $s = \frac{1}{a} + iy$, ce qui donnera, en faisant

$$\frac{\Delta \frac{1}{s}}{s^2 a^2 c^2 \text{ fin. } b^2} = \Gamma s, \ \& \ \frac{1}{a} - \Gamma \frac{1}{a} = L; \ 1 - \Gamma' \frac{1}{a} = K^2, \ -\frac{1}{2} \Gamma'' \frac{1}{a} = M, \ -\frac{1}{2.3} \Gamma''' \frac{1}{a} = N \ \&c.,$$

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + K^2 y + H + iMy^2 + i^2 Ny^3 + \&c. = 0,$$

dont l'intégrale sera (*Art. cité*)

$$y + i\alpha y^2 + i^2 \beta y^3 = -\frac{L - 2 i\alpha H}{R^2} + F \text{ cof. } R\varphi, + \frac{G}{R} \text{ fin. } R\varphi.$$

Ainsi l'on aura y en φ; il faudra seulement observer que la quantité g n'exprimera plus ici la valeur de $\frac{dy}{dt}$ lorsque $t = 0$, mais celle de $\frac{dy}{d\varphi}$ c'est-à-dire $\frac{dr}{id\varphi}$, de sorte qu'on aura $ig = -$ cot. b.

Le coéficient R donnera la distance d'une apside à l'autre de $\frac{180°}{R}$, & l'on verra, après en avoir fait le calcul, que cette valeur s'accorde avec celle que nous avons trouvée ci-dessus.

Soit $\Delta r = Ar^{m-2}$, on aura $\Gamma s = \frac{A}{a^2 c^2 \text{ fin. } b^2} s^{-m}$, donc $\Gamma \frac{1}{a} = \frac{A a^{m-2}}{c^2 \text{ fin. } b^2}$, $\Gamma' \frac{1}{a} = -m \frac{A a^{m-1}}{c^2 \text{ fin. } b^2}$, $\Gamma'' \frac{1}{a}$

$= m\,(m+1)\,\frac{A\,a^m}{c^2\,\text{sin.}\,b^2}$, $\Gamma'''\,\frac{1}{a} = -\,m\,(m+1)\,(m+2)$ $\frac{A\,a^{m+1}}{c^2\,\text{sin.}\,b^2}$ &c.; on aura donc $\frac{1}{a} - \frac{A\,a^{m-2}}{c^2\,\text{sin.}\,b^2} = i\,L$, $1 + m\,\frac{A\,a^{m-1}}{c^2\,\text{sin.}\,b^2} = K^2$, $-\,\frac{m\,(m+1)}{2} \times \frac{A\,a^m}{c^2\,\text{sin.}\,b^2} = M$, $\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{2.3} \times \frac{A\,a^{m+1}}{c^2\,\text{sin.}\,b^2} = N$ &c.; donc, puisque $\frac{A\,a^{m-2}}{c^2\,\text{sin.}\,b^2} = \frac{1}{a} - i\,L$, on aura

$$K^2 = 1 + m\,(1 - i\,a\,L)\,,\ M = -\,\frac{m(m+1)a}{2}\,(1 - i\,a\,L),$$

$$N = \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,a^2}{2.3}\,(1 - i\,a\,L)\ \text{\&c.};$$

faisant donc ces substitutions dans la valeur de R^2 de l'Art. XLVI., & rejettant tous les termes qui contiendroient des puissances de i plus hautes que la seconde, on aura

$$R^2 = 1 + m\,(1 - i\,a\,L) + i\,m\,(m+1)\,a\,L\,\frac{1 - i\,a\,L}{1 + m\,(1 - i\,a\,L)}$$
$$+ \frac{i^2\,a^2\,L^2}{(1+m)^2}\left(\frac{5\,m\,(m+1)\,(m+2)}{8} - \frac{17\,m^2\,(m+1)}{24}\right)$$
$$-\,\frac{i^2\,a^2\,H}{1+m}\left(\frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{8} - \frac{5\,m^2\,(m+1)}{24}\right)$$
$$= 1 + m + \frac{i^2\,m\,(3-m)\,a^2}{12\,(1+m)}\,[\,L^2 - (1+m)\,H\,],$$

d'où l'on tire

$$R = \surd\,(1+m) + \frac{i^2 m\,(3-m)\,a^2}{24\,(1+m)^{\frac{3}{2}}}\,[\,L^2 - (1+m)\,H\,]$$

ce qui donnera pour la distance d'une apside à l'autre

$$\left\{\frac{1}{\surd\,(1+m)} - \frac{i^2\,m\,(3-m)\,a^2}{24\,(1+m)^{\frac{5}{2}}}\,[\,L^2 - (1+m)\,H\,]\right\}180^\circ.$$

XLIX.

XLIX. Suppoſons maintenant que l'on ait à intégrer l'équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + L + i\left(My^2 + M'\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i^2\left(Ny^3 + N'y\frac{dy^2}{dt^2}\right) + \&c. = 0$$

on pourra faire diſparoitre la quantité $\frac{dy^2}{dt^2}$ de la maniére ſuivante.

Qu'on multiplie l'équation par $2\,dy$, & qu'on en prenne l'intégrale, en négligeant les termes affectés de i^2, on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + K^2y^2 + 2Ly + H + i\left(\frac{2M}{3}y^3 + 2M'\int\frac{dy^2}{dt^2}dy\right) = 0.$$

Or $\int\frac{dy^2}{dt^2}dy = y\frac{dy^2}{dt^2} - 2\int y\,dy\frac{d^2y}{dt^2} =$ (en mettant au lieu de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-K^2y^2 - 2Ly - H$, & $-K^2y - L$) $-\frac{K^2}{3}y^3 - Ly^2 - Hy$; donc on aura

$$\frac{dy^2}{dt^2} + (K^2 - 2iLM')y^2 + (2L - 2iHM')y + H + i\left(\frac{2M}{3} - \frac{2K^2M'}{3}\right)y^3 = 0.$$

Subſtituant donc cette valeur de $\frac{dy^2}{dt^2}$ dans l'équation propoſée, elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [K^2 - 2iLM' + i^2H(2M'^2 - N')]y + L - iHM' + i(M - K^2M' + 2iLM'^2)y^2 + i^2\left(N - K^2N' - \frac{2MM'}{3} + \frac{2K^2M'^2}{3}\right)y^3 = 0,$$

laquelle eſt, comme l'on voit, dans le cas de l'équation (A).

Par cette méthode on pourra faire diſparoitre toutes les puiſſances paires de $\frac{dy}{dt}$ qui ſe trouveront dans l' équation propoſée. A l'égard des puiſſances impaires de $\frac{dy}{dt}$, il eſt facile de voir qu'elles donneront dans la valeur de y des arcs de cercle; d' où il s'enſuit que la ſolution ne pourra avoir lieu que tant que t ne ſera pas fort grande, & qu'ainſi il ſera permis de ſe ſervir de telle méthode d' approximation qu'on voudra. Cependant comme il peut être quelquefois important de connoitre la vraie forme de la valeur de y, qu'on chercheroit vainement par les méthodes ordinaires, je vais donner le moyen d'y parvenir.

L. Soit en général l' équation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'\frac{dy}{dt} + L + i\left(My^2 + M'y\frac{dy}{dt} + M''\frac{dy^2}{dt^2}\right) + i^2\left(Ny^3 + N'y^2\frac{dy}{dt} + N''y\frac{dy^2}{dt^2} + N'''\frac{dy^3}{dt^3}\right) + \&c. = 0.$$

On fera $\frac{dy}{dt} = z$, & l'on aura

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Ky + K'z + L + i(My^2 + M'yz + M''z^2) + i^2(Ny^3 + N'y^2z + N''yz^2 + N'''z^3) + \&c. = 0.$$

On différentiera cette équation, & l'on y ſubſtituera enſuite, au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, au lieu $\frac{dy}{dt}$, z, & à lieu de $\frac{dz}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ou plutôt ſa valeur en y & z; de cette manière on aura une nouvelle équation en z de la forme ſuivante

$$\frac{d^2z}{dt^2} + kz + k'y + l + i(my^2 + m'yz + m''z^2) + i^2(ny^3 + n'y^2z + n''yz^2 + n'''z^3) + \&c. = 0,$$

Toute la difficulté se réduira donc à intégrer ces deux équations; sur quoi voyés ci-après l'Art. LII.

LI. Si l'équation proposée étoit du quatriéme ordre, on la réduiroit à deux du second, en faisant $\frac{d^2y}{dt^2} - z = 0$, & substituant ensuite z au lieu de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{dz}{dt}$ au lieu de $\frac{d^3y}{dt^3}$, & $\frac{d^2z}{dt^2}$ au lieu de $\frac{d^4y}{dt^4}$.

Mais si la proposée étoit du troisiéme ordre, alors il faudroit la réduire d'abord au quatriéme par la différentiation, & ensuite à deux du second par la supposition de $\frac{d^2y}{dt^2} - z = 0$; & ainsi du reste.

De l'intégration des équations.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + Hz + i(Ky^2 + Lyz + Mz^2) + i^2(Ny^3 + Py^2z + Qyz^2 + Rz^3) + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad (L)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + hz + i(ky^2 + lyz + mz^2) + i^2(ny^3 + py^2z + qyz^2 + rz^3) + \&c. = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (M)$$

LII. Nous commencerons par chercher la valeur des quantités $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$, & $\frac{dydz}{dt^2}$ qui entrent dans les différentielles secondes de y^2, z^2, yz &c.; or, comme nous nous proposons seulement de pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, il suffira d'avoir égard, dans les valeurs dont il s'agit, aux termes de l'ordre de i, parceque les quantités y^2, z^2, yz &c. sont déja elles mémes multipliées par i dans les équations proposées.

Je multiplie d'abord l'équation (L) par $2\,dy$, & j'en prends l'intégrale; j'ai en négligeant les termes affectés de i^2,

$$\frac{dy^2}{dt^2} + A + 2Fy + Gy^2 + 2H\int z\,dy + i\left(\frac{2K}{3}y^3 + 2L\int yz\,dy + 2M\int z^2\,dy\right) = 0 \quad \ldots\ldots (N)$$

Je multiplie de même l'équation (M) par $2\,dz$ & j'ai, aprés l'intégration,

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2g\int y\,dz + hz^2 + i\left(2k\int y^2 dz + 2l\int yz\,dz + \frac{2m}{3}z^3\right) = 0,$$

ou bien, en mettant $yz - \int z\,dy$ au lieu de $\int y\,dz$, $y^2 z - 2\int yz\,dy$ au lieu de $\int y^2 dz$, & $\frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2\,dy$ au lieu de $\int yz\,dz$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + B + 2fz + 2gyz + hz^2 - 2g\int z\,dy + i\left(2ky^2 z + lyz^2 + \frac{2m}{3}z^3 - 4k\int yz\,dy - l\int z^2 dy\right) = 0 \quad \ldots\ldots (O)$$

Enfin multipliant l'équation (L) par dz & l'équation (M) par dy, les ajoutant ensemble, & intégrant on aura

$$\frac{dy\,dz}{dt^2} + C + fy + Fz + \frac{g}{2}y^2 + Gyz + \frac{H}{2}z^2 + (h - G)\int z\,dy + i\left(\frac{k}{3}y^3 + Ky^2 z + \frac{L}{2}yz^2 + \frac{M}{3}z^3 + (l - 2K)\int yz\,dy + \left(m - \frac{L}{2}\right)\int z^2 dy\right) = 0 \quad \ldots\ldots (P)$$

Pour déterminer les constantes A, B, C, on supposera que, quand $t = 0$, on ait $y = \gamma$, $z = \delta$, $\frac{dy}{dt} = \varepsilon$, $\frac{dz}{dt} = \eta$, $\int z\,dy = \Gamma$, $\int yz\,dy = \Delta$, & $\int z^2\,dy = \Lambda$, & l'on aura

$$A = -\varepsilon^2 - 2F\gamma - G\gamma^2 - 2H\Gamma - i\left(\frac{2K}{3}\gamma^3 + 2L\Delta + 2M\Lambda\right),$$

$B = -\eta^2 - 2f\delta - 2g\gamma\delta - h\delta^2 + 2g\Gamma - i(2k\gamma^2\delta$
$+ l\gamma\delta^2 + \frac{2m}{3}\delta^3 - 4k\Delta - l\Lambda)$, &

$C = -\varepsilon\eta - f\gamma - F\delta - \frac{g}{2}\gamma^2 - G\gamma\delta - \frac{H}{2}\delta^2 -$
$(h - G)\Gamma - i[\frac{k}{3}\gamma^3 + K\gamma^2\delta + \frac{L}{2}\gamma\delta^2 + \frac{M}{3}\delta^3 +$
$(l - 2K)\Delta + (m - \frac{L}{2})\Delta]$.

Cela poſé, je fais

$y^2 = u$, $yz = u1$, $z^2 = u2$, $\int z\,dy = u3$,
$y^3 = v$, $y^2 z = v1$, $y z^2 = v2$, $z^3 = v3$,
$\int yz\,dy = v4$, $\int z^2 dy = v5$, $y\int z dy = v6$, $z\int z dy = v7$;

j' aurai, au lieu des équations (L) & (M), ces deux-ci

$\frac{d^2y}{dt^2} + F + Gy + Hz + i(Ku + Lu1 + Mu2) +$
$i^2(Nv + Pv1 + Qv2 + Rv3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (1)$

$\frac{d^2z}{dt^2} + f + gy + hz + i(ku + lu1 + mu2) +$
$i^2(nv + pv1 + qv2 + rv3) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (2)$

Maintenant on a 1.° $\frac{d^2u}{dt^2} = 2y\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy^2}{dt^2}$; donc $2y$ (L) $+ 2$ (N) donnera, en négligeant les termes de l' ordre de i,

$\frac{d^2u}{dt^2} + 2A + 6Fy + 4Gy^2 + 2Hyz + 4H\int z\,dy$
$+ i(\frac{10K}{3}y^3 + 2Ly^2z + 2Myz^2 + 4L\int yz\,dy +$
$4M\int z^2 dy) = 0$,

& en faiſant les ſubſtitutions précédentes,

$\frac{d^2u}{dt^2} + 2A + 6Fy + 4Gu + 2Hu1 + 4Hu3$
$+ i(\frac{10K}{3}v + 2Lv1 + 2Mv2 + 4Lv4 + 4Mv5)$
$= 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$

2.° $\frac{d^2u1}{dt^2} = z\,\frac{d^2y}{dt^2} + y\,\frac{d^2z}{dt^2} + 2\,\frac{dydz}{dt^2}$; donc z (L) + y (M) + 2 (P) donnera

$$\frac{d^2u1}{dt^2} + 2C + 3fy + 3Fz + 2gu + (3G + h)u1 + 2Hu2 + 2(h - G)u3 + i\left\{\frac{5k}{3}v + (3K + l)v1 + (2L + m)v2 + \frac{5M}{3}v3 + (2l - 4K)v4 + (2m - L)v5\right\} = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

3.° $\frac{d^2u2}{dt^2} = 2z\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz^2}{dt^2}$; donc $2z$ (M) + 2 (O) donnera

$$\frac{d^2u2}{dt^2} + 2B + 6fz + 6gu1 + 4hu2 - 4gu3 + i\left(6kv1 + 4lv2 + \frac{10m}{3}v3 - 8kv4 - 2lv5.\right) = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

4.° $\frac{d^2u3}{dt^2} = z\,\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dydz}{dt^2}$, donc z (L) + (P) donnera

$$\frac{d^2u3}{dt^2} + C + fy + 2Fz + \frac{g}{2}u + 2Gu1 + \frac{3H}{2}u2 + (h - G)u3 + i\left\{\frac{k}{3}v + 2Kv1 + \frac{3L}{2}v2 + \frac{4M}{3}v3 + (l - 2K)v4 + \left(m - \frac{L}{2}\right)v5\right\} = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

5.° $\frac{d^2v}{dt^2} = 3y^2\,\frac{d^2y}{dt^2} + 6y\,\frac{dy^2}{dt^2}$, donc $3y^2$ (L) + $6y$ (N) donnera, en rejettant les termes affectés de i, à cause que la variable v est déja elle même multipliée par i^2 dans les équations (1) & (2),

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 6Ay + 15Fu + gGv + 3Hv1 + 12Hv6 = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

6.° $\frac{d^2 v1}{dt^2} = 2yz \frac{d^2y}{dt^2} + y^2 \frac{d^2z}{dt^2} + 2z \frac{dy^2}{dt^2} + 4y \frac{dydz}{dt^2}$; donc $2yz$ (L) + y^2 (M) + $2z$ (N) + $4y$ (P) donnera, en négligeant par la même raison que ci-devant les termes de l'ordre de i,

$$\frac{d^2v1}{dt^2} + 4Cy + 2Az + 5fu + 10Fu1 + 3gv + (8G + h)v1 + 4Hv2 + 4(h - G)v6 + 4Hv7 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

7.° $\frac{d^2v2}{dt^2} = z^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2yz \frac{d^2z}{dt^2} + 2y \frac{dz^2}{dt^2} + 4z \frac{dydz}{dt^2}$, donc z^2 (L) + $2yz$ (M) + $2y$ (O) + $4z$ (P) donnera

$$\frac{d^2v2}{dt^2} + 2By + 4Cz + 10fu1 + 5Fu2 + 8gv1 + (5G + 4h)v2 + 3Hv3 - 4gv6 + 4(h - G)v7 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

8.° $\frac{d^2v3}{dt^2} = 3z^2 \frac{d^2z}{dt^2} + 6z \frac{dz^2}{dt^2}$, donc $3z^2$ (M) + $6z$ (O) donnera

$$\frac{d^2v3}{dt^2} + 6Bz + 15fu2 + 15gv2 + ghv3 - 12gv7 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

9.° $\frac{d^2v4}{dt^2} = yz \frac{d^2y}{dt^2} + z \frac{dy^2}{dt^2} + y \frac{dydz}{dt^2}$, donc yz (L) + z (N) + y (P) donnera

$$\frac{d^2v4}{dt^2} + Cy + Az + fu + 4Fu1 + \frac{g}{2}v + 3Gv1 + \frac{3H}{2}v2 + (h - G)v6 + 2Hv7 = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

10.° $\frac{d^2v5}{dt^2} = z^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 2z \frac{dydz}{dt^2}$; donc z^2 (L) + $2z$ (P) donnera

$$\frac{d^2v5}{dt^2} + 2Cz + 2fu1 + 3Fu2 + gv1 + 3Gv2 + 2Hv3 + 2(h - G)v7 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

11.° $\frac{d^2v6}{dt^2} = (yz + \int z\,dy)\frac{d^2y}{dt^2} + 2z\frac{dy^2}{dt^2} + y\frac{dy\,dz}{dt^2}$;
donc $(yz + \int z\,dy) \times (L) + 2z\,(N) + y\,(P)$ donnera

$$\frac{d^2v6}{dt^2} + Cy + 2Az + fu + 6Fu1 + Fu3 + \frac{g}{2}v + 4Gv1 + \frac{3H}{2}v2 + hv6 + 5Hv7 = 0 \; . \; (13)$$

12.° $\frac{d^2v7}{dt^2} = z^2\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{dt^2}\int z\,dy + 3z\frac{dy\,dz}{dt^2}$; donc
$z^2\,(L) + (M)\int z\,dy + 3z\,(P)$ donnera

$$\frac{d^2v7}{dt^2} + 3Cz + 3fu1 + 4Fu2 + fu3 + \frac{3g}{2}v1 + 4Gv2 + \frac{5H}{2}v3 + gv6 + (4h - 3G) = 0 \; . \; (14)$$

Ayant ainſi autant d' équations que de variables, l' intégration qui doit donner la valeur de y & de z eſt facile par la méthode de l' Art. XXVI.; de ſorte que ſi on multiplie l' équation (1) par $e^{\rho t}$, l' équation (2.) par $\lambda e^{\rho t}$, l' équation (3) par $i\mu e^{\rho t}$, l' équation (4) par $i\mu 1\, e^{\rho t}$, l' équation (5) par $i\mu 2\, e^{\rho t}$, l' équation (6) par $i\mu 3\, e^{\rho t}$, l'équation (7) par $i^2 \nu\, e^{\rho t}$, l'équation (8) par $i^2\nu 1\, e^{\rho t}$, l'équation (9) par $i^2\nu 2\, e^{\rho t}$, l'équation (10) par $i^2\nu 3\, e^{\rho t}$, l'équation (11) par $i^2\nu 4\, e^{\rho t}$, l'équation (12) par $i^2\nu 5\, e^{\rho t}$, l'équation (13) par $i^2\nu 6\, e^{\rho t}$, & l'équation (14) par $i^2\nu 7\, e^{\rho t}$, & qu'on achéve le reſte comme dans l'Art. XLVI. on aura, en faiſant pour abreger

$$\theta = y + \lambda z + i(\mu u + \mu 1\, u1 + \mu 2 u2 + \mu 3 u3) + i^2(\nu v + \nu 1\, v1 + \nu 2\, v2 + \nu 3\, v3 + \nu 4 v4 + \nu 5\, v5 + \nu 6\, v6 + \nu 7\, v7) \; \&$$

$$x = F + \lambda f + i(2\mu A + 2\mu 1\, C + 2\mu 2\, B + \mu 3 C)$$

on aura dis-je

$$\left(\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{x}{\rho}\right)e^{\rho t} = \text{conſt.} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (Q)$$

& enſuite

$\rho^2 +$

$\rho^2 + G + g\lambda + i(6F\mu + 3f\mu 1 + f\mu 3) + i^2(6A\nu + 4C\nu 1 + 2B\nu 2 + C\nu 4 + C\nu 6) = 0$

$H + (\rho^2 + h)\lambda + i(3F\mu 1 + 6f\mu 2 + 2F\mu 3) + i^2(2A\nu 1 + 4C\nu 2 + 6B\nu 3 + A\nu 4 + 2C\nu 5 + 2A\nu 6 + 3C\nu 7) = 0$

$K + k\lambda + (\rho^2 + 4G)\mu + 2g\mu 1 + \frac{g}{2}\mu 3 + i(15F\nu + 5f\nu 1 + f\nu 4 + f\nu 6) = 0$

$L + l\lambda + 2H\mu + (\rho^2 + 3G + h)\mu 1 + 6g\mu 2 + 2G\mu 3 + i(10F\nu 1 + 10f\nu 2 + 4F\nu 4 + 2f\nu 5 + 6F\nu 6 + 3f\nu 7) = 0$

$M + m\lambda + 2H\mu 1 + (\rho^2 + 4h)\mu 2 + \frac{3H}{2}\mu 3 + i(5F\nu 2 + 15f\nu 3 + 3F\nu 5 + 4F\nu 7) = 0$

$4H\mu + 2(h - G)\mu 1 - 4g\mu 2 + (\rho^2 + h - G)\mu 3 + i(F\nu 6 + f\nu 7) = 0$

$N + n\lambda + \frac{10K}{3}\mu + \frac{5k}{3}\mu 1 + \frac{k}{3}\mu 3 + (\rho^2 + 9G)\nu + 3g\nu 1 + \frac{g}{2}\nu 4 + \frac{g}{2}\nu 6 = 0$

$P + p\lambda + 2L\mu + (3K + l)\mu 1 + 6k\mu 2 + 2K\mu 3 + 3H\nu + (\rho^2 + 8G + h)\nu 1 + 8g\nu 2 + 3G\nu 4 + g\nu 5 + 4G\nu 6 + \frac{3g}{2}\nu 7 = 0$

$Q + q\lambda + 2M\mu + (2L + m)\mu 1 + 4l\mu 2 + \frac{3L}{2}\mu 3 + 4H\nu 1 + (\rho^2 + 5G + 4h)\nu 2 + 15g\nu 3 + \frac{3H}{2}\nu 4 + 3G\nu 5 + \frac{3H}{2}\nu 6 + 4G\nu 7 = 0$

$R + r\lambda + \frac{5M}{3}\mu 1 + \frac{10m}{3}\mu 2 + \frac{4M}{3}\mu 3 + 3H\nu 2 + (\rho^2 + 9h)\nu 3 + 2H\nu 5 + \frac{5H}{2}\nu 7 = 0$

$4L\mu + (2l - 4K)\mu 1 - 8k\mu 2 + (l - 2K)\mu 3$
$+ \rho^2 \nu 4 = 0$

$4M\mu + (2m - L)\mu 1 - 2l\mu 2 + (m - \frac{L}{2})\mu 3$
$+ \rho^2 \nu 5 = 0$

$12H\nu + 4(h - G)\nu 1 - 4g\nu 2 + (h - G)\nu 4$
$+ (\rho^2 + h)\nu 6 + g\nu 7 = 0$

$4H\nu 1 + 4(h - G)\nu 2 - 12g\nu 3 + 2H\nu 4 + 2(h - G)\nu 5$
$+ h\nu 6 + (\rho^2 + 4h - 3G)\nu 7 = 0$,

équations par lesquelles on déterminera les 14 inconnues ρ, λ, μ, $\mu 1$, $\mu 2$, $\mu 3$, ν, $\nu 1$, $\nu 2$, $\nu 3$, $\nu 4$, $\nu 5$, $\nu 6$, $\nu 7$, en ayant attention de pousser les valeurs des deux premières jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, celles des quatre suivantes jusqu'aux quantités de l'ordre de i seulement, & enfin de rejetter dans les valeurs des sept dernières toutes les quantités affectés de i.

Or je remarque 1.° que la quantité ρ ne paroissant que sous la forme quadrative, elle aura nécessairement deux valeurs, l'une positive & l'autre négative; de sorte que si on suppose que ρ désigne la racine positive, on pourra écrire partout indifféremment $+\rho$, & $-\rho$. 2.° que si on représente les deux premières équations par

$\rho^2 + G + g\lambda + i\alpha = 0$ & $H + (\rho^2 + h)\lambda + i\beta = 0$,

on aura, en éliminant λ,

$$\rho^4 + (G + h + i\alpha)\rho^2 + Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g) = 0 \quad (R)$$

d'où l'on tirera deux valeurs de ρ^2.

Soit maintenant, lorsque $t = 0$, $\theta = D$, & $\frac{d\theta}{dt} = E$; c'est-à-dire

$D = \gamma + \lambda\delta + i(\mu\gamma^2 + \mu 1\gamma\delta + \mu 2\delta^2 + \mu 3\Gamma)$
$+ i^2(\nu\gamma^3 + \nu 1\gamma^2\delta + \nu 2\gamma\delta^2 + \nu 3\delta^3 + \nu 4\Delta +$
$\nu 5\Lambda + \nu 6\gamma\Gamma + \nu 7\delta\Gamma)$ &

$E = \varepsilon + \lambda\eta + i[2\mu\gamma\varepsilon + \mu 1(\delta\varepsilon + \gamma\eta) + 2\mu 2\delta\eta$

$+ \mu 3 \delta \varepsilon] + i^2 [3 \nu \gamma^2 \delta + \nu 1 (2 \gamma \delta \varepsilon + \gamma^2 \eta) + \nu 2 (\delta^2 \varepsilon + 2 \gamma \delta \eta) + 3 \nu 3 \delta^2 \eta + \nu 4 \gamma \delta \varepsilon + \nu 5 \delta^2 \varepsilon + \nu 6 (\Gamma \varepsilon + \gamma^2 \delta \varepsilon) + \nu 7 (\Gamma \eta + \gamma \delta^2 \varepsilon) ;$
l'équation (Q) donnera, en divisant par $e^{\rho t}$,

$$\frac{d\theta}{dt} - \rho\theta + \frac{\varkappa}{\rho} = \left(E - \rho D + \frac{\varkappa}{\rho} \right) e^{-\rho t},$$

& prenant la quantité ρ en $-$,

$$\frac{d\theta}{dt} + \rho\theta - \frac{\varkappa}{\rho} = \left(E + \rho D - \frac{\varkappa}{\rho} \right) e^{\rho t},$$

d'où l'on tire

$$\theta = \frac{\varkappa}{\rho^2} + \left(D - \frac{\varkappa}{\rho^2} \right) \frac{e^{\rho t} + e^{-\rho t}}{2} + E \, \frac{e^{\rho t} - e^{-\rho t}}{2\rho}$$

ou bien

$$\theta = \frac{\varkappa}{\rho^2} + \left(D - \frac{\varkappa}{\rho^2} \right) \text{cof.}\, t \sqrt{-\rho^2} + \frac{E}{\sqrt{-\rho^2}} \text{fin.}\, t \sqrt{-\rho^2}.$$

Soient maintenant ρ'^2 & ρ''^2 les deux racines de l'équation (R), & θ', θ'', λ', λ'', μ', μ'' &c. les valeurs correspondantes de θ, λ, μ &c.; on aura, en remettant au lieu de u, $u 1$, $u 2$ &c. leurs valeurs y^2, $y z$, z^2 &c., ces deux équations

$$y + \lambda' z + i (\mu' y^2 + \mu' 1 y z + \mu' 2 z^2 + \mu' 3 \textstyle\int z dy) + i^2 (\nu' y^3 + \nu' 1 y^2 z + \nu' 2 y z^2 + \nu' 3 z^3 + \nu' 4 \int y z dy + \nu' 5 \int z^2 dy + \nu' 6 y \int z dy + \nu' 7 z \int z dy) = \theta',$$

$$y + \lambda'' z + i (\mu'' y^2 + \mu'' 1 y z + \mu'' 2 z^2 + \mu'' 3 \textstyle\int z dy) + i^2 (\nu'' y^3 + \nu'' 1 y^2 z + \nu'' 2 y z^2 + \nu'' 3 z^3 + \nu'' 4 \int y z dy + \nu'' 5 \int z^2 dy + \nu'' 6 y \int z dy + \nu'' 7 z \int z dy) = \theta'',$$

d'où l'on tirera par approximation les valeurs de y & de z.

Il est évident que pour que les valeurs de y & de z ne contiennent que des *finus* & des *cofinus*, il faut que les racines de l'équation (R) foient toutes deux réelles & négatives; par conféquent il faut 1°. que $(G + h + i\alpha)^2 > 4 [G h - H g + i (\alpha h - \beta g)]$; 2°. que $G + h + i\alpha > 0$, & $G h - H g + i (\alpha h - \beta g) > 0$. Si ces trois conditions n'ont point lieu à la fois, alors les valeurs de y & de z contiendront des exponentielles réelles, & par conséquent la solution ne sera bonne que tant que t ne sera pas fort grande.

On pourroit ajouter que les expressions de y & de z renfermeroient l'angle t, si les deux valeurs de ρ^2 étoient égales; car alors, supposant $\rho'' = \rho' + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouissante, on trouveroit que la seconde des deux équations ci-dessus se réduiroit à celle-ci

$$\frac{d\lambda'}{d\rho'} z + i \left\{ \frac{d\mu'}{d\rho'} y^2 + \frac{d\mu' 1}{d\rho'} y z + \frac{d\mu' 2}{d\rho'} z^2 + \frac{d\mu' 3}{d\rho'} \int z dy \right\}$$

$$+ i^2 \left\{ \frac{d\nu'}{d\rho'} y^3 + \frac{d\nu' 1}{d\rho'} y^2 z + \frac{d\nu' 2}{d\rho'} y z^2 + \frac{d\nu' 3}{d\rho'} z^3 + \right.$$

$$\left. \frac{d\nu' 4}{d\rho'} \int y z dy + \frac{d\nu' 5}{d\rho'} \int z^2 dy + \frac{d\nu' 6}{d\rho'} y \int z dy + \frac{d\nu' 7}{d\rho'} z \int dy \right\}$$

$$= \frac{d\theta'}{d\rho'};$$

dans laquelle la quantité $\frac{d\theta'}{d\rho'}$ contient nécessairement des termes multipliées par l'angle t. Mais comme l'équation (R) n'est qu'approchée, quand il arriveroit que $(G + h + i\alpha)^2 = 4 [Gh - Hg + i(\alpha h - \beta g)]$, ce qui est la condition des racines égales, on n'en pourroit conclure autre chose, si non que les deux valeurs de ρ^2 seroient égales aux quantités de l'ordre de i^3 près, & que par conséquent il faudroit pousser l'approximation jusqu'aux quantités de ce même ordre. Ce ne seroit qu'après avoir poussé l'approximation fort loin & avoir reconnu que les valeurs de ρ sont toujours égales, qu'on pourroit à la rigueur faire usage de l'équation que nous venons de donner.

LIII. On voit aisément que la méthode précédente est générale pour tel nombre d'équations qu'on voudra, pourvû que ces équations soient analogues aux équations (L) & (M) c'est-à-dire que les produits de deux dimenſions ſoient affectés de i, ceux de trois ſoient affectés de i^2, & ainſi de ſuite.

Cette méthode ſeroit ſurtout utile pour déterminer auſſi près qu'on voudroit le mouvement d'un ſiſtème quelconque de corps qui agiroient les uns ſur les autres, & qui ne feroient que des très-petites oſcillations autour de leurs points d'équilibre. Car nommant iy, iz &c. les eſpaces parcourus par ces corps dans leurs oſcillations, on trouveroit des équations de la forme de celles dont je viens de parler; au reſte nous avons déja donné (*Art. XXX.*) la ſolution générale de ce problême pour le cas des oſcillations infiniment petites.

LIV. Si les équations propoſées contenoient des termes de la forme $i\int z\,dy$, $i^2\int yz\,dy$, $i^2\int z^2\,dy$, $i^2 y\int z\,dy$, $i^2 z\int z\,dy$, l'intégration n'auroit aucune difficulté de plus; il faudroit ſeulement avoir attention de changer les expreſſions $\int dy\int z\,dy$ & $\int dz\int z\,dy$ qui ſe trouveroient dans les équations (N), (O), (P) en leurs équivalentes $y\int z\,dy - \int yz\,dy$, & $z\int z\,dy - \int z^2 dy$.

LV. Si elles contenoient des termes de la forme $i\frac{dy^2}{dt^2}$, $i\frac{dy\,dz}{dt^2}$, $i\frac{dz^2}{dt^2}$, $i^2 y\frac{dy^2}{dt^2}$, $i^2 y\frac{dy\,dz}{dt^2}$ &c. on les feroit diſparoitre par des procédés ſemblables à ceux que nous avons ſuivis dans l'Art. XLIX. Il en ſeroit de même de tous les termes qui contiendroient des produits de $\frac{dy}{dt}$ & $\frac{dz}{dt}$ de dimenſions paires; mais s'il ſe trouvoit des produits de dimenſions impaires de ces mêmes quantités, alors on feroit chacune d'elles égale à une nouvelle variable, & on acheveroit le reſte comme dans l'Art. L.

LVI. Enfin ſi l'on avoit des équations du troiſiéme ordre & au delà, on les réduiroit toujours au ſecond par la méthode de l'Art. LI.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\,(M\,y\ \mathit{cof.}\ Ht + N\,\frac{dy}{dt}\,\mathit{fin.}\ Ht) = T\ (S)$$

dans laquelle T *eſt une fonction quelconque de* t.

LVII. Je remarque d' abord, que ſi T étoit $= 0$, l'équation ſeroit dans le cas de l' Art. LV., car il n' y auroit qu'à faire coſ. $Ht = z$, ce qui donneroit ſin. $Ht = \frac{dz}{Hdt}$ & $\frac{d^2z}{dt^2} + H^2z = 0$. Or puiſque l'indéterminée y ne n' y paſſe pas le premier dégré, il eſt clair qu'on pourra faire diſparoitre le terme tout connu T par la méthode de l' Art. I. En effet ſi on multiplie l'équation propoſée par $z\,dt$, & qu'on pratique les autres opérations que préſcrit cette méthode, on aura les deux équations ſuivantes,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + K^2z + i\,[\,(M\ \text{coſ.}\ Ht - \frac{d.N\ \text{ſin.}\ Ht}{dt})\,z - N\ \text{ſin.}\ Ht\,\frac{dz}{dt}\,] = 0, \ \& \ \frac{dy}{dt}\,z - y\,\frac{dz}{dt} = \int Tz\,dt,$$

dont la première eſt réductible au cas de l'Art. LV., & dont l'autre étant intégrée donnera $y = \int \frac{dt}{z^2} \int Tz\,dt$.

Au reſte ces ſortes d' équations peuvent encore s' intégrer par une méthode particulière & fort ſimple que je vais expoſer.

Je fais y coſ. $Ht = u$; y coſ. $2Ht = v$ &c. &
y ſin. $Ht = U$, y ſin. $2Ht = V$ &c.;
ce qui me donne

$$\frac{dy}{dt}\ \text{coſ.}\ Ht = \frac{du}{dt} + HU,\ \frac{dy}{dt}\ \text{coſ.}\ 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV\ \&c.$$

$$\frac{dy}{dt}\ \text{ſin.}\ Ht = \frac{dU}{dt} - Hu,\ \frac{dy}{dt}\ \text{ſin.}\ 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv\ \&c.$$

& ensuite

$$\frac{d^2y}{dt^2}\text{ cos. }Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} - H^2u$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\text{ cos. }2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} - 4H^2v$$

&c.

$$\frac{d^2y}{dt^2}\text{ sin. }Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} - H^2U$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\text{ sin. }2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} - 4H^2V$$

&c.

Cela posé, j'aurai d'abord au lieu de l'équation (S) celle-ci

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\left[(M - HN)u + N\frac{dU}{dt}\right] = T \quad (1)$$

De plus la même équation (S) étant multipliée successivement par cos. Ht & par sin. Ht donnera

$$\frac{d^2y}{dt^2}\text{ cos. }Ht + K^2y\text{ cos. }Ht + i\Big[My\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\text{ cos. }Ht\right)$$

$$+ \frac{1}{2}N\frac{dy}{dt}\text{ sin. }2Ht\Big] = T\text{ cos. }Ht\text{, \&}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\text{ sin. }Ht + K^2y\text{ sin. }Ht + i\Big[\frac{1}{2}My\text{ sin. }2Ht +$$

$$N\frac{dy}{dt}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\text{ cos. }2Ht\right)\Big] = T\text{ sin. }Ht,$$

c'est-à-dire, en faisant les substitutions ci-dessus

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)u + i\Big[\frac{M}{2}y + \left(\frac{M}{2} - NH\right)v$$

$$+ \frac{N}{2} \times \frac{dV}{dt}\Big] = T\text{ cos. }Ht \quad (2)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} + (K^2 - H^2)U + i\Big[\left(\frac{M}{2} - NH\right)V -$$

$$\frac{N}{2} \times \frac{dv}{dt}\Big] = T\text{ sin. }Ht \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Si on vouloit n'avoir égard, dans la valeur de y, qu'aux quantité de l'ordre de i, on négligeroit dans les valeurs de u & de U, & par conséquent aussi dans les équations (2) & (3) tous les termes affectés de i, moyennant quoi ces équations ne contiendroient plus que les trois variables y, u & U, de sorte qu'avec l'équation (1) elles suffiroient pour résoudre le problême; mais si on veut pousser l'approximation jusqu'aux quantités de l'ordre de i^2, comme nous l'avons fait dans les problêmes précédens, alors on conservera tous les termes des équations (2) & (3), & on multipliera de nouveau l'équation (S) par cos. $2Ht$, & par sin. $2Ht$; ce qui donnera, après les substitutions, deux équations en v & en V, dans lesquelles on pourra négliger les termes affectés de i, parceque les quantités v & V sont déja elles-mêmes multipliées par i dans les équations (2) & (3); ainsi l'on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \text{ cos. } 2Ht \quad (4)$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \text{ sin. } 2Ht \quad (5)$$

& l'intégration de l'équation proposée sera réduite à celle de cinq équations (1), (2), (3), (4), & (5), lesquelles sont, comme l'on voit, dans le cas de l'Art. XXIX.

Ayant donc multiplié la première de ces équations par $\lambda e^{\rho t} dt$, la seconde par $\mu e^{\rho t} dt$, la troisiéme par $\mathrm{M} e^{\rho t} dt$, la quatriéme par $\nu e^{\rho t} dt$, & la cinquiéme par $\mathrm{N} e^{\rho t} dt$, on les ajoutera ensemble, & on en prendra l'intégrale, en faisant disparoitre de dessous le signe $\int$ les différences des variables y, u, U &c.; après-quoi on chassera les expressions intégrales $\int y e^{\rho t} dt$, $\int u e^{\rho t} dt$, $\int U e^{\rho t} dt$ &c. en égalant à zéro leurs coéficiens, ce qui donnera

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}\mathrm{M}\rho\right) = 0$$

$i(M$

$i(M - NH)\lambda + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mu + 2H\mathrm{M}\rho = 0$
$- iN\lambda\rho - 2H\mu\rho + (\rho^2 + K^2 - H^2)\mathrm{M} = 0$
$i(\frac{M}{2} - NH)\mu + \frac{iN}{2}\mathrm{M}\rho + (\rho^2 + K^2 - 4H^2)\nu +$
$4H\mathrm{N}\rho = 0$
$- \frac{iN}{2}\mu\rho + i(\frac{M}{2} - NH)\mathrm{M} - 4H\nu\rho + (\rho^2 + K^2 -$
$4H^2)\mathrm{N} = 0.$

De cette manière on aura l'équation intégrale

$\left\{\lambda\frac{dy}{dt} + \mu\frac{du}{dt} + \mathrm{M}\frac{dU}{dt} + \nu\frac{dv}{dt} + \mathrm{N}\frac{dV}{dt} + (-\lambda\rho +\right.$
$\frac{iN}{2}\mathrm{M})y + (-\mu\rho - 2H\mathrm{M})u + (iN\lambda + 2H\mu$
$-\mathrm{M}\rho)\,U + (-\frac{iN}{2}\mathrm{M} - \nu\rho - 4H\mathrm{N})v + (\frac{iN}{2}\mu +$
$\left.4H\nu - \mathrm{N}\rho)V\right\}e^{\rho t} = \int T\ (\lambda + \mu \text{ cos. } Ht + \mathrm{M}$
$\text{sin. } Ht + \nu \text{ cos. } 2Ht + \mathrm{N} \text{ sin. } 2Ht)e^{\rho t}dt.$

Soit $\rho^2 = -R^2$, de sorte que $\rho = R\sqrt{-1}$, & $\mu = i\alpha\lambda$, $\nu = i^2\beta\lambda$, $\mathrm{M} = i\mathrm{A}\rho\lambda$, $\mathrm{N} = i^2\mathrm{B}\rho\lambda$, & l'on aura premiérement

$- R^2 + K^2 + i^2(\frac{M}{2}\alpha + \frac{N}{2}R^2\alpha) = 0$
$M - NH + (-R^2 + K^2 - H^2)\alpha - 2HR^2\mathrm{A} = 0$
$- N - 2H\alpha + (-R^2 + K^2 - H^2)\mathrm{A} = 0$
$(\frac{M}{2} - NH)\alpha - \frac{N}{2}R^2\mathrm{A} + (-R^2 + K^2 - 4H^2)\beta$
$- 4HR^2\mathrm{B} = 0$
$- \frac{N}{2}\alpha + (\frac{M}{2} - NH)\mathrm{A} - 4H\beta + (-R^2 + K^2 -$
$4H^2)\mathrm{B} = 0,$

d'où l'on tire

$$R^2 = \frac{K^2 + \frac{1}{2} i^2 M \alpha}{1 - \frac{1}{2} i^2 N \mathrm{A}}$$

$$\alpha = \frac{(M - NH)(R^2 - K^2 + H^2) + 2NHR^2}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4H^2R^2}$$

$$\mathrm{A} = \frac{N(R^2 - K^2 + H^2) + 2(M - NH)H}{(R^2 - K^2 + H^2)^2 - 4H^2R^2}$$

$$\beta = \frac{(\frac{1}{2} M - NH)(R^2 - K^2 + 4H^2) + 2NHR^2}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\alpha$$

$$- \frac{\frac{1}{2} N(R^2 - K^2 + 4H^2)R^2 + 4(\frac{1}{2} M - NH)HR}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\mathrm{A}$$

$$\mathrm{B} = \frac{(\frac{1}{2} M - NH)(R^2 - K^2 + 4H^2) + 2NHR^2}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\mathrm{A}$$

$$- \frac{\frac{1}{2} N(R^2 - K^2 + 4H^2) + 4(\frac{1}{2} M - NH)H}{(R^2 - K^2 + 4H^2)^2 - 16H^2R^2}\,\alpha$$

Et ensuite

$$\Big\{ \frac{dy}{dt} + i\alpha \frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2\mathrm{A})U$$

$$+ i^2\beta \frac{dv}{dt} + i^2(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2\mathrm{B})V$$

$$- [(1 - \frac{iN}{2}\mathrm{A})y + i(\alpha + 2H\mathrm{A})u - i\mathrm{A}\frac{dU}{dt}$$

$$+ i^2(\frac{N}{2}\mathrm{A} + \beta + 4H\mathrm{B})v - i^2\mathrm{B}\frac{dV}{dt}]R\sqrt{-1}\Big\} e^{Rt\sqrt{-1}}$$

$$= \int T\,[1 + i\alpha \operatorname{cos}. Ht + i^2\beta \operatorname{cos}. 2Ht + (i\mathrm{A} \operatorname{sin}. Ht + i^2\mathrm{B} \operatorname{sin}. 2Ht)R\sqrt{-1}]\,e^{Rt\sqrt{-1}}\,dt;$$

ou divisant par $e^{Rt\sqrt{-1}}$, & changeant les exponentielles imaginaires en *sinus* & *cosinus*,

$$\frac{dy}{dt} + i\alpha\frac{du}{dt} + i(N + 2H\alpha + R^2 A)U$$
$$+ i^2\beta\frac{dv}{dt} + i^2(\frac{N}{2}\alpha + 4H\beta + R^2 B)V$$
$$-[(1 - \frac{iN}{2}A)y + i(\alpha + 2HA)u - iA\frac{dU}{dt}$$
$$+ i^2(\frac{N}{2}A + \beta + 4HB)v - i^2 B\frac{dV}{dt}]R\surd - 1$$
$$= \text{cos}.\, Rt\int T[(1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, 2Ht)\,\text{cos}.\, Rt$$
$$- i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)R\,\text{sin}.\, Rt]dt$$
$$+ \text{sin}.\, Rt\int T[(1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, 2Ht)\,\text{sin}.\, Rt$$
$$+ i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)R\,\text{cos}.\, Rt]dt$$
$$- \text{sin}.\, Rt\int T[(1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, 2Ht)\,\text{cos}.\, Rt$$
$$- i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)R\,\text{sin}.\, Rt]dt\cdot\surd - 1$$
$$+ \text{cos}.\, Rt\int T[(1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, 2Ht)\,\text{sin}.\, Rt$$
$$+ i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)R\,\text{cos}.\, Rt]dt\cdot\surd - 1.$$

Donc si on remet pour u, U, v, & V leurs valeurs, & qu'on compare les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on aura

$$(1 - \frac{iN}{2}A + i(\alpha + HA)\,\text{cos}.\, Ht + i^2(\frac{N}{2}A + \beta +$$
$$2HB)\,\text{cos}.\, 2Ht]y - i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)\frac{dy}{dt}$$
$$= \text{sin}.\, Rt\int T[(1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, 2Ht)\frac{\text{cos}.\, Rt}{R}$$
$$- i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)\,\text{sin}.\, Rt]dt$$
$$- \text{cos}.\, Rt\int T[(1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, Ht)\frac{\text{sin}.\, Rt}{R}$$
$$+ i(A\,\text{sin}.\, Ht + iB\,\text{sin}.\, 2Ht)\,\text{cos}.\, Rt]dt,$$

$$\& \; (1 + i\alpha\,\text{cos}.\, Ht + i^2\beta\,\text{cos}.\, 2Ht)\frac{dy}{dt} + i[(N +$$
$$H\alpha + R^2A)\,\text{sin}.\, Ht + (\frac{N}{2}\alpha + 2H\beta + R^2B)\,\text{sin}.\, 2Ht]y$$

$$= \text{cos.}\, Rt \int T \left[(1 + i\alpha\, \text{cos.}\, Ht + i^2\beta\, \text{cos.}\, 2Ht)\, \text{cos.}\, Rt \right.$$
$$\left. - i(A\, \text{sin.}\, Ht + iB\, \text{sin.}\, 2Ht)\, R\, \text{sin.}\, Rt \right] dt$$
$$+ \text{sin.}\, Rt \int T \left[(1 + i\alpha\, \text{cos.}\, Ht + i^2\beta\, \text{cos.}\, 2Ht)\, \text{sin.}\, Rt \right.$$
$$\left. + i(A\, \text{sin.}\, Ht + iB\, \text{sin.}\, 2Ht)\, R\, \text{cos.}\, Rt \right] dt.$$

Deux équations, à l'aide desquelles on éliminera $\frac{dy}{dt}$.

De l'intégration des équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\left(My'\, \text{cos.}\, Ht + N\frac{dy'}{dt}\, \text{sin.}\, Ht\right) = T \quad . \quad (T)$$
$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2y' + i\left(M'y\, \text{cos.}\, Ht - N'\frac{dy}{dt}\, \text{sin.}\, Ht\right) = T' \quad . \quad (U)$$

LVIII. Soit fait, comme dans l'Art. préc.,

$y\, \text{cos.}\, Ht = u$, $y\, \text{sin.}\, Ht = U$, $y\, \text{cos.}\, 2Ht = v$;
$y\, \text{sin.}\, 2Ht = V$ &c.

& de même

$y'\, \text{cos.}\, Ht = u'$, $y'\, \text{sin.}\, Ht = U'$, $y'\, \text{cos.}\, 2Ht = v'$,
$y'\, \text{sin.}\, 2Ht = V'$ &c.

on aura

$$\frac{dy}{dt}\, \text{cos.}\, Ht = \frac{du}{dt} + HU, \quad \frac{dy}{dt}\, \text{cos.}\, 2Ht = \frac{dv}{dt} + 2HV,$$
$$\frac{dy}{dt}\, \text{sin.}\, Ht = \frac{dU}{dt} - Hu, \quad \frac{dy}{dt}\, \text{sin.}\, 2Ht = \frac{dV}{dt} - 2Hv;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{cos.}\, Ht = \frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} - H^2u$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{cos.}\, 2Ht = \frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} - 4H^2v$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{sin.}\, Ht = \frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} - H^2U$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}\, \text{sin.}\, 2Ht = \frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} - 4H^2V$$

& pareillement

$\frac{dy'}{dt}$ cof. $Ht = \frac{du'}{dt} + HU'$, $\frac{dy'}{dt}$ cof. $2\,Ht = \frac{dv'}{dt} + 2\,HV'$,

$\frac{dy'}{dt}$ fin. $Ht = \frac{dU'}{dt} - Hu'$, $\frac{dy'}{dt}$ fin. $2\,Ht = \frac{dV'}{dt} - 2\,Hv'$,

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ cof. } Ht = \frac{d^2u'}{dt^2} + 2\,H\frac{dU'}{dt} - H^2 u'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ cof. } 2\,Ht = \frac{d^2v'}{dt^2} + 4\,H\frac{dV'}{dt} - 4\,H^2 v'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ fin. } Ht = \frac{d^2U'}{dt^2} - 2\,H\frac{du'}{dt} - H^2 U'$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} \text{ fin. } 2\,Ht = \frac{d^2V'}{dt^2} - 4\,H\frac{dv'}{dt} - 4\,H^2 V'.$$

Cela pofé, on aura d' abord, au lieu des équations (T) & (U), ces deux-ci.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + i\,[\,(M - HN)\,u' + N\frac{dU'}{dt}\,] = T \;.\; (1)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2y' + i\,[(M' - HN')\,u - N'\frac{dU}{dt}\,] = T' \;.\; (2)$$

Enfuite les mêmes équations (T) & (U) étant multipliées fucceffivement par cof. Ht & par fin. Ht donneront (après les fubftitutions) ces quatre autres équations

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2H\frac{dU}{dt} + (K^2 - H^2)\,u + i\,[\frac{M}{2}\,y' + (\frac{M}{2} - NH)\,v' + \frac{N}{2}\cdot\frac{dV'}{dt}\,] = T \text{ cof. } Ht \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

$$\frac{d^2U}{dt^2} - 2H\frac{du}{dt} + (K^2 - H^2)\,U + i\,[(\frac{M}{2} - NH)V' + \frac{N}{2}\cdot\frac{dy'}{dt} - \frac{N}{2}\cdot\frac{dv'}{dt}\,] = T \text{ fin. } Ht \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (4)$$

$$\frac{d^2u'}{dt^2} + 2H\frac{dU'}{dt} + (K'^2 - H^2)\,u' + i\,[(\frac{M'}{2}\,y + (\frac{M'}{2} + N'H)\,v - \frac{N'}{2}\cdot\frac{dV}{dt}\,] = T' \text{ cof. } Ht \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (5)$$

$$\frac{d^2U'}{dt^2} - 2H\frac{du'}{dt} + (K'^2 - H^2)U' + i[(\frac{M'}{2} + N'H)V - \frac{N'}{2}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$+ \frac{N'}{2}\cdot\frac{dv}{dt}] = T' \text{ fin. } Ht \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Enfin multipliant encore l'une & l'autre des équations (T) & (U) par coſ. $2Ht$ & par ſin. $2Ht$, & négligeant les termes affectés de i, on aura

$$\frac{d^2v}{dt^2} + 4H\frac{dV}{dt} + (K^2 - 4H^2)v = T \text{ coſ. } 2Ht \quad . \quad . \quad (7)$$
$$\frac{d^2V}{dt^2} - 4H\frac{dv}{dt} + (K^2 - 4H^2)V = T \text{ ſin. } 2Ht \quad . \quad . \quad (8)$$
$$\frac{d^2v'}{dt^2} + 4H\frac{dV'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)v' = T' \text{ coſ. } 2Ht \quad . \quad . \quad (9)$$
$$\frac{d^2V'}{dt^2} - 4H\frac{dv'}{dt} + (K'^2 - 4H^2)V' = T' \text{ ſin. } 2Ht \quad . \quad (10)$$

On aura donc en tout dix inconnues & dix équations, & le problême ne dépendra plus que de l' intégration de ces équations.

En ſuivant notre méthode on multipliera l' équation (1) par λ, l'équation (2) par λ', l'équation (3) par μ, l'équation (4) par M, l' équation (5) par μ', l'équation (6) par M', l' équation (7) par ν, l' équation (8) par N, l'équation (9) par ν', l'équation (10) par N'; & après les avoir ajoutées enſemble on multipliera la ſomme par $e^{\rho t}dt$, & on en prendra l'intégrale; ce qui donnera (en faiſant diſparoitre de deſſous le ſigne $\int$ les différences des variables y, u, V, u' &c. & égalant enſuite à zéro les coéficiens des termes où ces mêmes variables ſe trouveront ſous le ſigne)

$$\left.\begin{aligned} &(\rho^2 + K^2)\lambda + i(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho) = 0 \\ &(\rho^2 + K'^2)\lambda' + i(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho) = 0 \end{aligned}\right\} . \text{ (V)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
i(M'+N'H)\lambda'+(\rho^2+K^2-H^2)\mu+2HM\rho=0\\
iN'\lambda'\rho-2H\mu\rho+(\rho^2+K^2-H^2)\,\mathrm{M}=0\\
i(M-NH)\lambda+(\rho^2+K'^2-H^2)\mu'+2H\mathrm{M}'\rho=0\\
-iN\lambda\rho-2H\mu'\rho+(\rho^2+K'^2-H^2)\,\mathrm{M}'=0\\
i\left(\frac{M'}{2}+N'H\right)\mu'-\frac{iN'}{2}\mathrm{M}'\rho+(\rho^2+K^2-4H^2)\nu\\
+4H\mathrm{N}\rho=0\\
\frac{iN'}{2}\mu'\rho+i\left(\frac{M'}{2}+N'H\right)\mathrm{M}'-4H\nu\rho+(\rho^2+K^2\\
-4H^2)\,\mathrm{N}=0\\
i\left(\frac{M}{2}-NH\right)\mu+\frac{iN}{2}\mathrm{M}\rho+(\rho^2+K'^2-4H^2)\nu'\\
+4H\mathrm{N}'\rho=0\\
-\frac{iN}{2}\mu\rho+i\left(\frac{M}{2}-NH\right)\mathrm{M}-4H\nu'\rho+(\rho^2+K'^2\\
-4H^2)\,\mathrm{N}'=0.
\end{array}\right\}\quad(\mathrm{V})$$

Et
$$\left\{\begin{array}{l}
\lambda\frac{dy}{dt}+\lambda'\frac{dy'}{dt}+\mu\frac{du}{dt}+\mathrm{M}\frac{dU}{dt}+\mu'\frac{du'}{dt}\\
+\mathrm{M}'\frac{dU'}{dt}+\nu\frac{dv}{dt}+\mathrm{N}\frac{dV}{dt}+\nu'\frac{dv'}{dt}+\mathrm{N}'\frac{dV'}{dt}\\
+\left(-\lambda\rho-\frac{iN'}{2}\mathrm{M}'\right)y+\left(-\lambda'\rho+\frac{iN}{2}\mathrm{M}\right)y'\\
+(-\mu\rho-2H\mathrm{M})u+(-iN'\lambda'+2H\mu-\mathrm{M}\rho)U\\
+(-\mu'\rho-2H\mathrm{M}')u'+(iN\lambda+2H\mu'-\mathrm{M}'\rho)U'\\
+\left(\frac{iN'}{2}\mathrm{M}'-\nu\rho-4H\mathrm{N}\right)v+\left(-\frac{iN'}{2}\mu'+4H\nu-\mathrm{N}\rho\right)V\\
+\left(-\frac{iN}{2}\mathrm{M}-\nu'\rho-4H\mathrm{N}'\right)v'+\left(\frac{iN}{2}\mu+4H\nu'-\mathrm{N}'\rho\right)V'
\end{array}\right\}e^{\rho t}$$

$$=\int[T(\lambda+\mu\,\mathrm{cos.}\,Ht+\mathrm{M}\,\mathrm{sin.}\,Ht+\nu\,\mathrm{cos.}\,2Ht+\mathrm{N}\,\mathrm{sin.}\,2Ht)+T'(\lambda'+\mu'\,\mathrm{cos.}\,Ht+\mathrm{M}'\,\mathrm{sin.}\,Ht+\nu'\,\mathrm{cos.}\,2Ht+\mathrm{N}'\,\mathrm{sin.}\,2Ht)]\,e^{\rho t}dt \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (\mathrm{X})$$

LIX. Qu'on multiplie la quatriéme, la ſixiéme, la huitiéme, & la dixiéme des équations (V) par $\pm\sqrt{-1}$,

& qu'on les ajoute ensuite chacune à sa précédente, on aura, au lieu des dix équations (V), les six suivantes

$$(\rho^2 + K^2)\lambda + i\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) = 0,$$

$$(\rho^2 + K'^2)\lambda' + i\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right) = 0.$$

$$i[M' + N'(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda'$$
$$+ (K^2 - [H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu \pm M\sqrt{-1}) = 0$$

$$i[M - N(H + \rho\sqrt{-1})]\lambda$$
$$+ (K'^2 - [H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu' + M'\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M' + N'[2H \pm \rho\sqrt{-1}])(\mu' + M'\sqrt{-1})$$
$$+ 2(K^2 - [2H + \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu \pm N\sqrt{-1}) = 0$$

$$i(M - N[2H + \rho\sqrt{-1}])(\mu \pm M\sqrt{-1})$$
$$+ 2(K'^2 - [2H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\nu' \pm N'\sqrt{-1}) = 0:$$

Les deux premières donnent, ou bien

$$-\rho^2 = K^2 + \frac{i}{\lambda}\left(\frac{M'}{2}\mu' + \frac{N'}{2}M'\rho\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (Y)$$

& $\lambda' = -i\,\dfrac{M\mu - NM\rho}{2(\rho^2 + K^2)}$, ou bien

$$-\rho^2 = K'^2 + \frac{i}{\lambda'}\left(\frac{M}{2}\mu - \frac{N}{2}M\rho\right)$$

& $\lambda = -i\,\dfrac{M'\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K^2)}$.

Dans le premier cas, la troisiéme équation deviendra, en substituant la valeur de λ',

$$(K^2 - [H \pm \rho\sqrt{-1}]^2)(\mu + M\sqrt{-1})$$
$$- i^2[M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})]\frac{M\mu' + NM'\rho}{2(\rho^2 + K^2)} = 0,$$

laquelle donnera séparément, à cause de l'ambiguité du signe, $\mu = 0$, & $M = 0$; de sorte qu'on aura aussi $\lambda' = 0$, $\nu' = 0$, & $N' = 0$; & l'on aura ensuite pour la détermination des quantités μ', M', ν, & N,

$\mu' \pm$

$$\left.\begin{aligned}\mu' \pm M'\sqrt{-1} &= -i\,\frac{M - N(H \pm \rho\sqrt{-1})}{K'^2 - (H \pm \rho\sqrt{-1})^2}\,\lambda \\ \nu \pm N\sqrt{-1} &= -i\,\frac{M' + N'(2H \pm \rho\sqrt{-1})}{2(K'^2 - (2H \pm \rho\sqrt{-1})^2)}\,(\mu' \pm M'\sqrt{-1})\end{aligned}\right\}\ (Z)$$

d' où l' on voit que les quantités μ' & M' feront de l' ordre de i, & les quantités ν & N de celui de i^2.

Dans le fecond cas on trouvera d' abord $\mu' = 0$, $M' = 0$, & par conféquent $\lambda = 0$, $\nu = 0$, & $N = 0$; enfuite on aura

$$\mu \pm M\sqrt{-1} = -i\,\frac{M' + N'(H \pm \rho\sqrt{-1})}{K^2 - (H \pm \rho\sqrt{-1})^2}\,\lambda' \quad \&$$

$$\nu' \pm N'\sqrt{-1} = -i\,\frac{M - N(2H \pm \rho\sqrt{-1})}{2(K'^2 - (2H \pm \rho\sqrt{-1})^2)}\,(\mu \pm M\sqrt{-1}),$$

d' où l' on tirera, μ, M, ν', & N'.

Ayant ainfi les valeurs de tous les coéficiens on achevera le calcul comme on a fait dans l'Art. préc., & l'on aura, à l' aide des deux valeurs de ρ^2, deux équations finales qui ferviront à trouver y & y'.

Il y a cependant un cas qui demande une difcuffion particuliére; c' eft celui où le coéficient H feroit prefque égal à $K - K'$, la différence n'étant que de l'ordre de i; nons alons l' éxaminer dans les Articles fuivans.

Analife du cas où H *eft prefque égal à* K — K'.

LX. Soit $K = h + ik$, $K' = h' + ik'$, & $H = h - h'$; enforte que $H = K - K' + i(k - k')$.

Je fais $\rho\sqrt{-1} = h + im$, c' eft-à-dire $\rho = -(h + im)\sqrt{-1}$; ce qui me donne $\rho^2 + K^2 = -2ih(m - k) - 2i^2(m^2 - k^2)$; & les équations (Y) & (Z) de l'Art. préc. fe changeront en celles-ci

$$2h(m-k)+i(m^2-k^2)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{M'}{2}\mu'-\frac{N'(b+im)}{2}M'\sqrt{-1}\right)\quad.\quad(a)$$

$$\mu'\pm M'\sqrt{-1}=-i\,\frac{M-N(b-b'\pm(b+im))}{(b'+ik)^2-(b-b'\pm(b+im))^2}\lambda\ (b)$$

$$\nu\pm N\sqrt{-1}=-\frac{i}{2}\cdot\frac{M'+N'(2b-2b'\pm(b+im))}{(b+ik)^2-(2b-2b'\pm(b+im))^2}$$

$$\times(\mu'\pm M'\sqrt{-1})\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(c)$$

d' où l' on tirera les valeurs de m, μ', M', ν, & N.

L' équation (b) étant priſe en — donnera

$$\mu'-M'\sqrt{-1}=-i\,\frac{M+N(b'+im)}{(b'+ik')^2-(b'+im)^2}\lambda.$$

Or $(h'+ik')^2-(h'+im)^2=2ih'(k'-m)+i^2(k'^2-m^2)=-i(m-k')(2h+i[m+k'])$; donc faiſant cette ſubſtitution, & diviſant enſuite le haut & le bas de la fraction par i, on aura

$$\mu'-M'\sqrt{-1}=\frac{M+N(b'+im)}{(m-k')(2b'+i(m+k'))}\lambda.$$

Equation, dans laquelle je remarque que la quantité i ne ſe trouve plus qu'au premier dégré; de ſorte que cette équation ne doit être regardée comme exacte qu'aux quantités de l' ordre de i^2 près. C' eſt pourquoi il faudra négliger dans la ſuite toutes les quantités de ce même ordre.

Prenons maintenant l' équation (b) en +, & nous aurons, en rejettant les termes de l' ordre de i^2,

$$\mu'+M'\sqrt{-1}=-i\,\frac{M-N(2b-b')}{b'^2-(2b-b')^2}\lambda.$$

Donc

$$\mu'=\frac{1}{2}\left(\frac{M+N(b'+im)}{(m-k')(2b'+i(m+k'))}+i\,\frac{M-N(2b-b')}{4b(b-b')}\right)\lambda$$

$$M'=\frac{1}{2}\left(\frac{M+N(b'+im)}{(m-k')(2b'+i(m+k')}-i\,\frac{M-N(2b-b')}{4b(b-b')}\right)\lambda$$

c'est-à-dire, en faisant

$$\alpha = \frac{Nm}{4b'(m-k')} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} + \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')} \;\&$$

$$A = \frac{Nm}{4b'(m-k)} - \frac{(M+Nb')(m+k')}{8b'^2(m-k')} - \frac{M-N(2b-b')}{8b(b-b')},$$

$$\mu' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + i\alpha\right)\lambda$$

$$\& \; M' = \left(\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')} + iA\right)\lambda\sqrt{-1}.$$

Ces valeurs étant subſtituées dans l'équation (a) il viendra

$$2h(m-k) + i(m^2-k^2) = \frac{M'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + i\alpha\frac{M'}{2}$$

$$+ \frac{N'(M+Nb)(b+im)}{8b'(m-k')} + iA\frac{N'b}{2},$$

ou multipliant par $\frac{m-k'}{2b}$ & réduiſant,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+Nb)}{16bb'}$$

$$+ i\left[(m^2-k^2)(m-k') - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'}\right.$$

$$\left. - \frac{(\alpha M'+AN'b)(m-k')}{4b}\right] = 0$$

De ſorte que, ſi l'on fait

$$\Delta = (m^2-k^2)(m-k') - \frac{(M+Nb)N'm}{16bb'}$$

$$- \frac{(\alpha M'+AN'b)(m-k')}{4b},$$

on aura,

$$(m-k)(m-k') - \frac{(M+Nb')(M'+N'b)}{16bb'} + i\Delta = 0 \;. \quad (d)$$

équation d'où l'on tirera deux valeurs de m que j'appellerai $m\,1$ & $m\,2$.

Si on néglige le terme $i\Delta$ on aura les premières valeurs approchées de $m\,1$ & de $m\,2$; & ſubſtituant enſuite ces valeurs dans l'expression de Δ on aura les valeurs de $m\,1$ & de $m\,2$ aux quantités de l'ordre de i^2 près.

Enfin l'équation (c) donnera, en substituant les valeurs de μ' & de M', & négligeant les termes de l'ordre de i^2,

$$\nu \pm N\sqrt{-1} = -i\,\frac{M + N(2h - 2h' \pm h)}{h^2 - (2h - 2h' \pm h)^2}$$
$$\times\ \frac{M + Nh'}{8h'(m - k')}\,(1 \mp 1)\,\lambda$$

d'où, en faisant

$$\beta = -\frac{M + N(h - 2h')}{4h'(h - h')} \times \frac{M + Nh'}{8h'(m - k')},$$

on aura

$$\nu = i\beta\lambda,\ N = i\beta\lambda\sqrt{-1}.$$

A l'égard des autres coéficiens, savoir λ', μ, M, ν' & N' ils seront tous $= 0$, comme nous l'avons vû dans l'Art. préc.

LXI. On fera maintenant ces différentes substitutions dans l'équation intégrale (X) de l'Art. LVIII., & l'on aura, en rejettant les termes de l'ordre de i^2

$$\Big\{\frac{dy}{dt} + \frac{M + Nh'}{4h'(m-k')}\Big(\frac{du'}{dt} + \frac{dU'}{dt}\sqrt{-1}\Big)$$
$$+ hy\sqrt{-1} + (h - 2H)\,\frac{M + Nh'}{4h(m - k')}\,(u'\sqrt{-1} - U')$$
$$+ i\Big(\alpha\frac{du'}{dt} + A\frac{dU'}{dt}\sqrt{-1} + \beta\Big(\frac{dv}{dt} + \frac{dV}{dt}\sqrt{-1}\Big)$$
$$+ \Big(m - \frac{N'(M + Nh')}{8h'(m - k')}\Big)y\sqrt{-1}$$
$$+ \Big(\frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} + h\alpha - 2HA\Big)u'\sqrt{-1}$$
$$+ \Big(N + 2H\alpha - \frac{(M + Nh')m}{4h'(m - k')} - hA\Big)U'$$
$$+ \Big(\frac{N'(M+Nh')}{8h'(m - k')} + [h - 4H]\beta\Big)(v\sqrt{-1} - V)\Big)\Big\}\, e^{-(h + im)t\sqrt{-1}}$$

$$=\int\left\{T+\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}T'(\text{cof. } Ht+\text{fin. } Ht\sqrt{-1})\right.$$

$$+i\left(\beta T(\text{cof. } 2Ht+\text{fin. } 2Ht\sqrt{-1})\right.$$

$$\left.\left.+T'(\alpha\,\text{cof. } Ht+\text{A fin. } Ht\sqrt{-1})\right)\right\}e^{-(h+in)t\sqrt{-1}}dt \quad (e)$$

Suppofons que cette intégrale foit prife de telle manière qu'elle foit nulle lorfque $t=0$, & qu'alors on ait $y=f$, $\frac{dy}{dt}=g$, $y'=f'$, $\frac{dy'}{dt}=g'$, & par conféquent $u'=f'$, $\frac{du'}{dt}=g'$, $U'=0$, $\frac{dU'}{dt}=Hf'$, $v=f$, $\frac{dv}{dt}=g$, $V=0$, & $\frac{dV}{dt}=2Hf$ (*Art. LVIII.*); il eft clair qu'il faudra ajouter au fecond membre de l'équation précédente, la quantité

$$g+\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}(g'+Hf'\sqrt{-1})+hf\sqrt{-1}$$
$$+(h-2H)\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}f'\sqrt{-1}$$
$$+i\left\{\alpha g'+\text{A}Hf'\sqrt{-1}+\beta(g+2Hf\sqrt{-1})\right.$$
$$+\left(m-\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')}\right)f\sqrt{-1}$$
$$+\left(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')}+h\alpha-2H\text{A}\right)f'\sqrt{-1}$$
$$\left.+\left(\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')}+[h-4H]\beta\right)f\sqrt{-1}\right\}$$

c'eft-à-dire, à caufe de $H=h-h'$,

$$g+hf\sqrt{-1}+\frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}(g'+h'f'\sqrt{-1})$$
$$+i\left\{\alpha g'+\beta g+\left(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')}+h\alpha-H\text{A}\right)f'\sqrt{-1}\right.$$
$$\left.+(m-[h-2h']\beta)f\sqrt{-1}\right\}.$$

LXII. Pour rendre le calcul plus ſimple nous négligerons d' abord les termes de l' ordre de i; moyennant quoi l' équation (e) deviendra (en mettant $h - h'$ au lieu de H, & $e^{(h-h')t\sqrt{-1}}$ au lieu de coſ. Ht + ſin. $Ht\sqrt{-1}$)

$$\left\{ \frac{dy}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left(\frac{du'}{dt} + [h - 2h']U'\right) + \left(hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left[\frac{dU'}{dt} - (h-2h')u'\right]\right)\sqrt{-1} \right\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$

$$= g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}g' + \left(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')}f'\right)\sqrt{-1}$$

$$+ \int\left\{Te^{-(h+im)t\sqrt{-1}} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}T'e^{-(h'+im)t\sqrt{-1}}\right\}dt \quad \text{(f)}$$

Si on multiplie cette équation par $e^{(h+im)t\sqrt{-1}}$, qu'enſuite, après avoir réduit les exponentielles imaginaires en *ſinus* & *coſinus*, on compare la partie imaginaire du premier membre à la partie imaginaire du ſecond, & qu'on faſſe pour abreger

$$\theta = \text{ſin.}\,(h + im)t\int T\,\text{coſ.}\,(h + im)t\,dt - \text{coſ.}\,(h + im)t\int T\,\text{ſin.}\,(h + im)t\,dt,$$

$$\vartheta = \text{ſin.}\,(h + im)t\int T'\,\text{coſ.}\,(h' + im)t\,dt - \text{coſ.}\,(h + im)t\int T'\,\text{ſin.}\,(h' + im)t\,dt,$$

on aura l' équation ſuivante

$$hy + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left[\frac{dU'}{dt} - (h - 2h')u'\right]$$

$$= \left(hf + \frac{M+Nb'}{4(m-k')}f'\right)\text{coſ.}\,(h + im)t$$

$$+ \left(g + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}g'\right)\text{ſin.}\,(h + im)t$$

$$+ \theta + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\vartheta,$$

laquelle, (en mettant ſucceſſivement m_1 & m_2 à la place de m, & dénotant par θ_1 & θ_2, ϑ_1 & ϑ_2 les valeurs correſpondantes de θ & de ϑ) en fournira deux autres, dont la seconde étant multipliée par $\frac{m2-k'}{h(m1-m2)}$, & ensuite retranchée de la première aussi multipliée par $\frac{m1-k'}{h(m1-m2)}$, on aura

$$\begin{aligned} y = & \left(\frac{m1-k'}{m1-m2}f + \frac{M+Nh'}{4h(m1-m2)}f'\right)\text{cos.}\,(h+im1)\,t \\ & + \left(\frac{m1-k'}{h(m1-m2)}g + \frac{M+Nh'}{4hh'(m1-m2)}g'\right)\text{sin.}\,(h+im1)\,t \\ & - \left(\frac{m2-k'}{m1-m2}f + \frac{M+Nh'}{4h(m1-m2)}f'\right)\text{cos.}\,(h+im2)\,t \\ & - \left(\frac{m2-k'}{h(m1-m2)}g + \frac{M+Nh'}{4hh'(m1-m2)}g'\right)\text{sin.}\,(h+im2)\,t \\ & + \frac{m1-k'}{h(m1-m2)}\theta 1 - \frac{m2-k'}{h(m1-m2)}\theta 2 + \frac{M+Nh'}{4hh'(m1-m2)}(\vartheta 1-\vartheta 2) \quad \text{(g)} \end{aligned}$$

LXIII. Il faudroit maintenant faire un calcul semblable pour trouver la valeur de y', en employant les autres formules de l' Art. LIX.; mais sans entrer dans un nouveau détail à cet égard, il suffira de considérer que les équations proposées (T) & (U), dans lesquelles $H=h-h'$, sont telles que l' une se change en l' autre, en marquant seulement d' un trait les lettres y, K, M, N, h, T, & effaçant celui des lettres y', K', M', N', h', & T'; d' où il s' ensuit que pour avoir l' expression de y' il ne faudra que mettre dans celle de y, f', g', h', k', M', N', T', au lieu de f, g, h, k, M, N, T, & *viceversa*.

A l' égard des valeurs de m, on remarquera qu'en négligeant le terme $i\,\Delta$, elles seront les mêmes pour les deux cas, puisque les quantités M, N, h, k, & M', N', h', k' entrent de la même manière dans l' équation (d) de l' Art. LX.

LXIV. Ayant trouvé les premières valeurs de y & de y', si on veut avoir une plus grande précision & tenir compte aussi des quantités de l' ordre de i, on nommera ces valeurs y & y', & on désignera de même par u', U', v, & V les valeurs correspondantes des quantités u', U', v, & V; ensuite on supposera $y = \mathrm{y} + i y^{\cdot}$, $u' = \mathrm{u}' + i u'^{\cdot}$, $U' = \mathrm{U}' + i U'^{\cdot}$, & l'on fera ces substitutions dans l'équation (e) de l'Art. LXI., en négligeant les termes de l'ordre de i^2; après quoi on effacera tous les termes qui ne seront point affectés de i, parceque ces termes se détruiront d'eux-mêmes, en vertu de l'équation (f), & l'on divisera les autres par i. De cette manière on aura

$$\Big\{ \frac{dy^{\cdot}}{dt} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left(\frac{du'^{\cdot}}{dt} + [h-2h']U'^{\cdot}\right)$$

$$+ \left(h y^{\cdot} + \frac{M+Nb'}{4b'(m-k')}\left(\frac{dU'^{\cdot}}{dt} - [h-2h']u'^{\cdot}\right)\right)\sqrt{-1}$$

$$+ \alpha\frac{d\mathrm{u}'}{dt} + \beta\frac{d\mathrm{v}}{dt} + \left(N + 2H\alpha - \frac{(M+Nb')m}{4b(m-k')} - h\mathrm{A}\right)\mathrm{U}'$$

$$- \left(\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + [h-4H]\beta\right)\mathrm{V}$$

$$+ \left(\mathrm{A}\frac{d\mathrm{U}'}{dt} + \beta\frac{d\mathrm{V}}{dt} + \left(m - \frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')}\right)\mathrm{y}\right.$$

$$+ \left(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - 2H\mathrm{A}\right)\mathrm{u}'$$

$$\left. + \left(\frac{N'(M+Nb')}{8b'(m-k')} + [h-4H]\beta\right)\mathrm{v}\right)\sqrt{-1}\Big\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}$$

$$= \alpha g' + \beta g + \left(\left(\frac{(M+Nb')m}{4b'(m-k')} + h\alpha - H\mathrm{A}\right)f'\right.$$

$$\left. + (m - [h-2h']\beta)f\right)\sqrt{-1}$$

$$+ \int\Big\{\beta T\,(\text{cos. } 2Ht + \text{sin. } 2Ht\sqrt{-1})$$

$$+ T'(\alpha\,\text{cos. } Ht + \mathrm{A}\,\text{sin. } Ht\sqrt{-1})\Big\} e^{-(h+im)t\sqrt{-1}}\,dt.$$

On traitera cette équation comme on a fait ci-devant l'équation (f), & supposant pour abreger

$\varphi =$

$$\varphi = \sin.(h + i m) t \int T \cos.(2h' - h + im) t\, dt$$
$$- \cos.(h + i m) t \int T \sin.(2h' - h + im) t\, dt,$$
$$\chi = \sin.(h + i m) t \int T' \cos.(h' + im) t\, dt$$
$$- \cos.(h + i m) t \int T' \sin.(h' + im) t\, dt,$$
$$\psi = \sin.(h + i m) t \int T' \cos.(2h - h' + im) t\, dt$$
$$- \cos.(h + i m) t \int T' \sin.(2h - h' + im) t\, dt,$$

& de plus

$$\gamma = m - \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m - k')}$$
$$\delta = \frac{(M + Nb')m}{4b'(m - k')} + h\alpha - 2HA$$
$$\varepsilon = \frac{N'(M + Nb')}{8b'(m - k')} + (h - 4H)\beta$$
$$\zeta = \alpha g' + \beta g$$
$$\eta = \left[\frac{(M + Nb')m}{4b'(m - k')} + h\alpha - HA\right] f' + [m - (h - 2h')\beta] f,$$

on trouvera

$$y = \frac{m1 - k'}{b(m1 - m2)} \Big\{ \eta 1 \cos.(h + im1)t + \zeta 1 \sin.(h + im1)t$$
$$+ A1 \frac{dU'}{dt} + \beta 1 \frac{dV'}{dt} + \gamma 1 y + \delta 1 u' + \varepsilon 1 v$$
$$+ \beta 1 \varphi 1 + \frac{\alpha 1 + A1}{2} \chi 1 + \frac{\alpha 1 - A1}{2} \psi 1 \Big\}$$
$$- \frac{m2 - k'}{b(m1 - m2)} \Big\{ \eta 2 \cos.(h + im2)t + \zeta 2 \sin.(h + im2)t$$
$$+ A2 \frac{dU'}{dt} + \beta 2 \frac{dV'}{dt} + \gamma 2 y + \delta 2 u' + \varepsilon 2 v$$
$$+ \beta 2 \varphi 2 + \frac{\alpha 2 + A1}{2} \chi 2 + \frac{\alpha 2 - A1}{2} \psi 2 \Big\};$$

$\eta 1$, $\eta 2$, $\zeta 1$, $\zeta 2$ &c. étant les valeurs de η, ζ &c. qui répondent à $m1$ & $m2$.

Si on vouloit encore pousser la précision plus loin il faudroit alors reprendre les calculs de l'Art. LVIII., & y avoir égard aux quantités de l'ordre de i^3 que nous y avons négligées.

LXV. Soit $T = AP$, A étant une quantité constante, & P une fonction de P telle que $\frac{d^2P}{dt} + a^2 P = 0$; on aura donc $\int T \cos. (h + im)\, t\, dt = A \int P \cos. (h + im)\, t\, dt$, & $\int P \cos. (h + im)\, t\, dt = - \frac{1}{a^2} \int \frac{d^2P}{dt^2} \cos. (h + im)\, t\, dt$ $=$ (en intégrant par parties) $- \frac{dP}{a^2 dt} \cos. (h + im)\, t$ $- \frac{h + im}{a^2} P \sin. (h + im)\, t + \frac{(h + im)^2}{a^2} \int P \cos. (h + im)\, t\, dt$; donc supposant que l'intégrale $\int P \cos. (h + im)\, t\, dt$ soit prise de manière qu'elle soit nulle lorsque $t = 0$, & qu'alors on ait $\frac{dP}{dt} = \alpha$, on aura

$$\int P \cos. (h + im)\, t\, dt = \left[(h + im) P \sin. (h + im)\, t + \frac{dP}{dt} \cos. (h + im)\, t - \alpha \right] \frac{1}{(h + im)^2 - a^2}.$$

On trouvera de même, en prenant β pour ce que devient P lorsque $t = 0$

$$\int P \sin. (h + im)\, t\, dt = \left[- (h + im) P \cos. (h + im)\, t + \frac{dP}{dt} \sin. (h + im)\, t + (h + im)\, \beta \right] \frac{1}{(h + im)^2 - a^2}.$$

De sorte qu'on aura (*Art. LXII.*)

$$\theta = \frac{A}{(h + im)^2 - a^2} \left[(h + im) P - \alpha \sin. (h + im)\, t - \beta (h + im) \cos. (h + im)\, t \right].$$

Pareillement si on a $T' = A' P'$, & $\frac{d^2P'}{dt^2} + a'^2 P' = 0$; & que α', β' soient les valeurs de $\frac{dP'}{dt}$ & de P' quand $t = 0$, on trouvera

$$\vartheta = \frac{A'}{(h' + im) - a'^2}\left[(h' + im) P \operatorname{cof.}(h - h')t + \frac{dP}{dt}\right.$$
$$\left.\operatorname{fin.}(h - h')t - \alpha' \operatorname{fin.}(h' + im)t - \beta'(h' + im) \operatorname{cof.}(h' + im)t\right].$$

Donc ſi on a

$T = AP + BQ + CR +$ &c. &

$$\frac{d^2P}{dt^2} + a^2 P = 0, \quad \frac{d^2Q}{dt^2} + b^2 Q = 0, \quad \frac{d^2R}{dt^2} + c^2 R = 0 \text{ \&c.}$$

& de même

$T' = A'P' + B'Q' + C'R' +$ &c., &

$$\frac{d^2P'}{dt^2} + a'^2 P' = 0, \quad \frac{d^2Q'}{dt^2} + b'^2 Q' = 0, \quad \frac{d^2R'}{dt^2} + c'^2 R' = 0;$$

& qu'on faſſe

$$\Theta = \frac{A}{h^2 - a^2} P + \frac{B}{h^2 - b^2} Q + \frac{C}{h^2 - c^2} R + \text{\&c.}$$

$$\Theta' = \frac{A'}{h'^2 - a'^2} P' + \frac{B'}{h'^2 - b'^2} Q' + \frac{C'}{h'^2 - c'^2} R' + \text{\&c.}$$

& de plus

$$F = f - \Lambda, \quad G = g - \Gamma, \quad F' = f' - \Lambda', \quad G' = g' - \Gamma',$$

(Λ, Γ, Λ', & Γ' étant les valeurs de Θ, $\frac{d\Theta}{dt}$, Θ' & $\frac{d\Theta'}{dt}$, lorſque $t = 0$) la formule (g) de l' Art. LXII. donnera, en négligeant les termes de l' ordre de i,

$$\begin{aligned}
y = & \left\{\frac{m1 - k'}{m1 - m2} F + \frac{M + Nh'}{4h'(m1 - m2)} F'\right\} \operatorname{cof.}(h + im1)t \\
& + \left\{\frac{m1 - k'}{h(m1 - m2)} G + \frac{M + Nh'}{4hh'(m1 - m2)} G'\right\} \operatorname{fin.}(h + im1)t \\
& - \left\{\frac{m2 - k'}{m1 - m2} F + \frac{M + Nh'}{4h'(m1 - m2)} F'\right\} \operatorname{cof.}(h + im2)t \\
& - \left\{\frac{m2 - k'}{h(m1 - m2)} G + \frac{M + Nh'}{4hh'(m1 - m2)} G'\right\} \operatorname{fin.}(h + im2)t \\
& + \Theta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (h)
\end{aligned}$$

Par là on aura la valeur de y lorſque les fonctions T, & T' ſeront exprimées par des ſuites quelconques de différens *ſinus* & *coſinus* d' angles multiples de t.

Il faut obſerver que ſi a étoit égal ou preſque égal à h, il ne ſeroit pas permis de négliger les termes affectés de i dans l' expreſſion de θ ; & l' on trouveroit alors dans la valeur de y des termes dont les coéficiens ſeroient très-grands ; il en faudra dire autant du cas où a' ne ſeroit que très-peu différent de h' ; nous en laiſſons le détail au Lecteur.

Mais ſi a étoit exactement égal à $h + im$, le dénominateur $a^2 - (h + im)^2$ de l'expreſſion de θ deviendroit $= 0$, & comme cette quantité n'eſt point infinie, le numérateur correſpondant ſeroit auſſi égal à zéro dans ce cas là ; faiſant donc $h + im = a + \omega$, & regardant ω comme une quantité évanouiſſante on trouveroit

$$\theta = - \frac{A}{2a} \left[\alpha t \operatorname{coſ.} at + \beta (\operatorname{coſ.} at - at \operatorname{ſin.} at) - P - a \frac{dP}{da} \right];$$

de ſorte que la formule (h) contiendroit des termes multipliés par l' angle t. Il en ſeroit de même ſi $a' = h' + im$. Au reſte ces deux cas ſont ſuſceptibles de remarques analogues à celle que nous avons faite à la fin de l' Art. LII.

LXVI. Comme les quantités $m1$ & $m2$ ſont les racines d'une équation du ſecond dégré (*Art. LX.*) il peut arriver qu'elles ſoient égales ou imaginaires ; ainſi il ne ſera pas inutile de nous arrêter ici à diſcuter ces deux cas.

1.° Si $m2 = m1$, je fais $m2 = m1 + \omega$ (ω étant une quantité évanouiſſante) ce qui me donne $\frac{m1 - k'}{m1 - m2} = - \frac{m1 - k'}{\omega}$, $\frac{m2 - k'}{m1 - m2} = - \frac{m1 - k'}{\omega} - 1$, $\frac{M + Nb'}{m1 - m2} =$

$= \frac{M+Nb'}{\omega}$, cos. $(h + i m 2) t =$ cos. $(h + i m 1) t - i t \omega$ sin. $(h + i m 1) t$, & sin. $(h + i m 2) t =$ sin. $(h + i m 1) t + i t \omega$ cos. $(h + i m 1) t$; donc faisant ces substitutions dans la formule (h) on aura, après avoir effacé ce qui se détruit,

$$y = F \text{ cos. } (h + i m 1) t + \frac{G}{b} \text{ sin. } (h + i m 1) t$$

$$+ i \left[(m 1 - k') F + \frac{M+Nb'}{4b} F' \right] t \text{ sin. } (h + i m 1) t$$

$$- i \left[\frac{m 1 - k'}{b} G + \frac{M+Nb'}{4bb'} G' \right] t \text{ cos. } (h + i m 1) t$$

$$+ \Theta.$$

Mais il faut bien remarquer que pour que cette équation ait lieu il faut que les valeurs de m soient égales rigoureusement, & sans rien négliger (*Voyés l'Artic. cité ci-dessus*).

2.° Si $m 1$ & $m 2$ sont imaginaires, ensorte que $m 1 = \mu + \nu \sqrt{-1}$, & $m 2 = \mu - \nu \sqrt{-1}$; on aura $\frac{m 1 - k'}{m 1 - m 2} = \frac{\mu - k'}{2\nu\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}$, $\frac{m 2 - k'}{m 1 - m 2} = \frac{\mu - k'}{2\nu\sqrt{-1}} - \frac{1}{2}$, $\frac{M+Nb'}{m 1 - m 2} = \frac{M+Nb'}{2\nu\sqrt{-1}}$; ensuite on trouvera

$$\text{cos. } (h + i m 1) t = \text{cos. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$+ \text{ sin. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{sin. } (h + i \mu 1) t = \text{sin. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$- \text{ cos. } (h + i \mu) t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$ & de même

$$\text{cof.}\,(h + im\,2)\,t = \text{cof.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$- \text{fin.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{fin.}\,(h + im\,2)\,t = \text{fin.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$+ \text{cof.}\,(h + i\mu)\,t \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ces ſubſtitutions faites, on verra que les imaginaires ſe détruiront dans la formule (h), & qu'elle deviendra

$$y = \left\{ F\,\text{cof.}\,(h + i\mu)\,t + \frac{G}{h}\,\text{fin.}\,(h + i\mu)\,t \right\} \times \frac{e^{i\nu t} + e^{-i\nu t}}{2}$$

$$- \left\{ \left(\frac{\mu - k'}{\nu}\,F + \frac{M + Nh'}{4h\nu}\,F'\right) \text{fin.}\,(h + i\mu)\,t - \left(\frac{\mu - k'}{h\nu}\,G\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{M + Nh'}{4hh'\nu}\,G'\right) \text{cof.}\,(h + i\mu)\,t \right\} \times \frac{e^{i\nu t} - e^{-i\nu t}}{2} + \Theta.$$

Ainſi dans le cas où l'équation (d) a ſes deux racines imaginaires, la valeur de y contient néceſſairement des exponentielles toutes réelles, & qui croiſſent à l'infini à meſure que t croit.

Application de la ſolution précédente à la Théorie de Jupiter & de Saturne.

LXVII. Soit I la maſſe du Soleil, J celle de Jupiter, r le rayon vecteur de l'orbite de cette planète projettée ſur le plan de l'écliptique (plan que nous regarderons comme abſolument fixe & immobile), φ l'angle décrit par le rayon r, pendant le tems t, & q la tangente de la latitude héliocentrique de Jupiter.

Soit de même J' la maſſe de Saturne, r' le rayon vecteur de ſon orbite réduit au plan de l'écliptique, φ' l'angle décrit par ce rayon durant le même tems t, & q' la tangente de la latitude héliocentrique de Saturne.

Enfin ſoit la perpendiculaire menée du centre de Jupiter ſur le plan de l'écliptique p, la perpendiculaire menée du centre de Saturne ſur le même plan p', la diſtance de Jupiter au Soleil, c'eſt-à-dire le rayon mené du Soleil à Jupiter u, la diſtance de Saturne au Soleil u', & la diſtance de Jupiter à Saturne v, enſorte que $p = rq$, $p' = r'q'$, $u = \sqrt{(r^2 + p^2)} = r\sqrt{(1 + q^2)}$, $u' = r'\sqrt{(1 + q'^2)}$, & $v = \sqrt{\left([r \text{ ſin.} (\varphi - \varphi')]^2 + [r' - r \text{ coſ.} (\varphi - \varphi')]^2 + (p - p')^2\right)} = \sqrt{\left(r^2(1 + q^2) - 2rr'[\text{coſ.} (\varphi - \varphi') + qq'] + r'^2(1 + q'^2)\right)}$, & ſuppoſant

$$R = J' \left(\frac{r - r' \text{ coſ.} (\varphi - \varphi')}{v^3} + \frac{r' \text{ coſ.} (\varphi - \varphi')}{u'^3}\right),$$

$$Q = J' \left(\frac{r'}{v^3} - \frac{r'}{u'^3}\right) r \text{ ſin.} (\varphi - \varphi'),$$

$$P = J' \left(\frac{p - p'}{v^3} + \frac{p'}{u'^3}\right),$$

$$R' = J \left(\frac{r' - r \text{ coſ.} (\varphi' - \varphi)}{v^3} + \frac{r \text{ coſ.} (\varphi' - \varphi)}{u^3}\right),$$

$$Q' = J \left(\frac{r}{v^3} - \frac{r}{u^3}\right) r' \text{ ſin.} (\varphi' - \varphi),$$

$$P' = J \left(\frac{p' - p}{v^3} + \frac{p}{u^3}\right),$$

on aura les ſix équations ſuivantes (Voy. *Artt. XIV.* & *XVI.* du Mém. intit. *Application de la méthode précedente &c.*, imprimé dans le Vol. préc.)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{r\, d\varphi^2}{dt^2} + (I + J)\frac{r}{u^3} + R = 0$$

$$\frac{d \cdot (r^2 d\phi)}{dt^2} + Q = 0$$

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J)\frac{p}{u^3} + P = 0$$

$$\frac{d^2 r'}{dt^2} - \frac{r' d\phi'^2}{dt^2} + (I + J')\frac{r'}{u'^3} + R' = 0$$

$$\frac{d \cdot (r'^2 d\phi')}{dt^2} + Q' = 0$$

$$\frac{d^2 p'}{dt^2} + (I + J')\frac{p'}{u'^3} + P' = 0,$$

dont les trois premières repréſentent le mouvement de Jupiter dérangé par Saturne, & les trois autres celui de Saturne dérangé par Jupiter.

D' où l'on voit, que quand on aura calculé les dérangemens de Jupiter, les mêmes formules ſerviront à calculer ceux de Saturne, puiſqu'il n' y aura qu'à changer r', ϕ', p', u', & J' en r, ϕ, p, u, & J, & *viceverſa*.

LXVIII. Puiſque $p = rq$, l'équation $\frac{d^2 p}{dt^2} + (I + J)\frac{p}{u^3} + P = 0$, deviendra (en diviſant par r) $\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{2dqdr}{rdt^2} + q\frac{d^2 r}{rdt^2} + (I + J)\frac{q}{u^3} + \frac{P}{r} = 0$, & mettant au lieu de $\frac{d^2 r}{dt^2}$ ſa valeur tirée de la première équation, on aura après avoir effacé ce qui ſe détruit,

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + q\frac{d\phi^2}{dt^2} + \frac{2dqdr}{rdt^2} + \frac{P - Rq}{r} = 0.$$

Enſuite l'équation $\frac{d \cdot (r^2 d\phi)}{dt^2} + Q = 0$ donnera $\frac{r^2 d\phi}{dt} = c - \int Q dt$, c étant une conſtante arbitraire; d' où l' on tire $\frac{d\phi}{dt} = \frac{c - \int Q dt}{r^2}$.

Donc

Donc les équations du mouvement de Jupiter ſeront à cauſe de $u = r\surd(1+q^2)$,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{r^3}+\frac{I+J}{r^2(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}+R=0\\&\frac{d^2q}{dt^2}+q\,\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{r^4}+\frac{2dq\,dr}{r\,dt^2}+\frac{P-Rq}{r}=0\\&\frac{d\varphi}{dt}-\frac{c-\int Q\,dt}{r^2}=0.\end{aligned}\right\}\ (i)$$

LXIX. Les équations (i) donneront r, q, & φ en t; d'où l'on connoitra le lieu de la planete à chaque inſtant. Si on vouloit de plus avoir l'orbite qu'elle décrit, on n'auroit qu'à éliminer le tems t au moyen de l'équation $\frac{d.(r^2d\varphi)}{dt^2}+Q=0$; laquelle étant multipliée par $2r^2d\varphi$, & enſuite intégrée donne $(\frac{r^2d\varphi}{dt})^2+2\int Q\,r^2d\varphi = C$, ($C$ étant une conſtante arbitraire); d'où l'on tire

$$dt=\frac{r^2d\varphi}{\surd(C-2\int Q\,r^2d\varphi)}.$$

Et cette valeur étant ſubſtituée dans les deux premières des équations (i), on aura, en prenant $d\varphi$ conſtant au lieu de dt, & faiſant $\frac{1}{r}=s$, $Rr^2+Q\frac{dr}{d\varphi}=U$, & $r^3(P-Rq+Q\frac{dq}{r\,d\varphi})=V$, les équations ſuivantes

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2}+s-\frac{(I+J)(1+q^2)^{-\frac{3}{2}}+U}{C-2\int Q\,r^2d\varphi}=0$$

$$\frac{d^2q}{d\varphi^2}+q+\frac{V}{C-2\int Q\,r^2d\varphi}=0.$$

LXX. Suppoſons que les forces perturbatrices R, Q, P ſoient nulles, enſorte que l'orbite ſoit décrite en vertu de la ſeule force $\frac{I+J}{u^2}$ tendante au centre du Soleil, & les équations que nous venons de trouver deviendront

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{I+J}{C(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0, \text{ \& } \frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q = 0,$$

leſquelles étant intégrées donneront

$q = \varepsilon$ ſin. $(\varphi - \alpha)$, & $s = \frac{I+J}{D} \sqrt{(1+q^2)} + \eta$ coſ. $(\varphi - \omega)$ ε, α, η, & ω étant des conſtantes arbitraires, & $D = C(1+\varepsilon^2)$.

La première de ces deux formules nous montre que l' orbite eſt toute dans un plan fixe paſſant par le centre des rayons r, & coupant ce plan de manière que ε ſoit la tangente de l'inclinaiſon, & α le lieu du nœud aſcendant.

La ſeconde fait voir que l' orbite eſt une ellipſe dont le foyer eſt dans le centre même des rayons vecteurs r; & pour en déterminer l'eſpace & la poſition on conſidérera, que ſi on nomme Φ, & A les angles dont φ, & α ſont les projections, on aura (Φ — A étant l' argument de latitude, & $\varphi - \alpha$ ſa projection) $\frac{\text{coſ. } (\varphi - \alpha)}{\text{coſ. } (\Phi - A)} = \sqrt{(1+q^2)}$, & $\frac{\text{ſin. } (\varphi - \alpha)}{\text{ſin. } (\Phi - A)} = \frac{\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$; & par conſéquent coſ. $(\varphi - \alpha) = \sqrt{(1+q^2)} \times$ coſ. $(\Phi - A)$ & ſin. $(\varphi - \alpha) = \frac{\sqrt{(1+q^2)}}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} \times$ ſin. $(\Phi - A)$; donc coſ. $(\varphi - \omega) =$ coſ. $(\varphi - \alpha + \alpha - \omega) =$ coſ. $(\varphi - \alpha) \times$ coſ. $(\alpha - \omega)$ — ſin. $(\varphi - \alpha) \times$ ſin. $(\alpha - \omega) =$ [coſ. $(\alpha - \omega) \times$ coſ. $(\Phi - A) - \frac{\text{ſin. } (\alpha - \omega)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}}$ ſin. $(\Phi - A)$] $\sqrt{(1+q^2)}$; & faiſant, pour plus de ſimplicité, coſ. $(\alpha - \omega) =$ E coſ. (A — B) & $\frac{\text{ſin. } (\alpha - \omega)}{\sqrt{(1+\varepsilon^2)}} =$ E ſin.

$(A - B)$, ce qui donne $E = \surd\left(\frac{1 + \varepsilon^2 \operatorname{cos}(\alpha - \omega)^2]}{1 + \varepsilon^2}\right)$, & tang. $(A - B) = \frac{\text{tang.}\ (\alpha - \omega)}{\surd(1 + \varepsilon^2)}$, on aura cos. $(\varphi - \omega) = E$ cos. $(\Phi - B) \times \surd(1 + q^2)$; donc $\frac{s}{\surd(1 + q^2)} = \frac{I + J}{D} + \eta E$ cos. $(\Phi - B)$.

Or $s = \frac{1}{r}$, & $r \surd(1 + q^2) = u$ rayon vecteur de l'orbite réelle; donc l'équation de cette orbite sera

$$u = \frac{1}{\frac{I + J}{D} + \eta E \operatorname{cos.} (\Phi - B)},$$

laquelle est visiblement celle d'une ellipse dont $\frac{I + J}{D}$ est le paramètre & ηE l'excentricité. A l'égard de la position du grand axe de cette ellipse, il est clair que $\Phi = B$ donnera le lieu du périhélie, & pour avoir l'angle correspondant φ, que nous nommerons β, on observera que tang. $(\varphi - \alpha) = \frac{\text{tang.}\ (\Phi - A)}{\surd(1 + \varepsilon)}$; de sorte qu'on aura tang. $(\beta - \alpha) = \frac{\text{tang.}\ (B - A)}{\surd(1 + \varepsilon^2)} = \frac{\text{tang.}\ (\omega - \alpha)}{1 + \varepsilon^2}$.

LXXI. Imaginons maintenant que l'effet des forces perturbatrices consiste à faire varier les quantités ε, α, η, & ω; ensorte que l'orbite soit représentée par une ellipse qui change continuellement d'espace & de position; nous aurons donc

1.° $q = \varepsilon$ sin. $(\varphi - \alpha)$, & $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ cos. $(\varphi - \alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$ sin. $(\varphi - \alpha) - \frac{d\alpha}{d\varphi} \varepsilon$ cos. $(\varphi - \alpha)$; or puisque on a deux indéterminées ε & α, dont l'une peut être tout ce qu'on voudra, nous ſuppoſerons ſin. $(\varphi-\alpha)\, d\varepsilon = \varepsilon$ coſ. $(\varphi-\alpha)\, d\alpha$; ce qui donnera $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ coſ. $(\varphi-\alpha)$, de ſorte que la variation inſtantanée de la latitude ſera la même que ſi le plan de l' orbite ne changoit point de poſition. Donc $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = -\varepsilon$ ſin. $(\varphi-\alpha) + \frac{d\varepsilon}{d\varphi}$ coſ. $(\varphi-\alpha) + \frac{d\alpha}{d\varphi}\varepsilon$ ſin. $(\varphi-\alpha) =$ (en mettant, pour $d\varepsilon$, $\frac{\varepsilon \text{ coſ. } (\varphi-\alpha)\, d\alpha}{\text{ſin. } (\varphi-\alpha)}$) $-\varepsilon$ ſin. $(\varphi-\alpha) + \frac{\varepsilon\, d\alpha}{\text{ſin. } (\varphi-\alpha)\, d\varphi}$. Donc on aura au lieu de l' équation

$$\frac{d^2 q}{d\varphi^2} + q + \frac{V}{C - 2\int Q r^3 d\varphi} = 0,$$

ces deux-ci

$$\frac{\varepsilon\, d\alpha}{\text{ſin. } (\varphi-\alpha)\, d\varphi} + \frac{V}{\frac{D}{1+\varepsilon^2} - 2\int Q r^2\, d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\varepsilon}{\varepsilon} - \frac{d\alpha}{\text{tang. } (\varphi-\alpha)} = 0,$$

par leſquelles on connoitra le mouvement de la ligne des nœuds, & la variation de l' inclinaiſon de l' orbite.

2.° On aura $s = \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} + \eta$ coſ. $(\varphi-\omega)$; d' où l' on tire $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi \sqrt{(1+q^2)}} - \eta$ ſin. $(\varphi-\omega)$ $+ \frac{d\eta}{d\varphi}$ coſ. $(\varphi-\omega) + \frac{d\omega}{d\varphi}\eta$ ſin. $(\varphi-\omega)$. Suppoſons ici à l' imitation de ce que nous venons de faire plus haut, coſ. $(\varphi-\omega)\, d\eta = -\eta$ ſin. $(\varphi-\omega)\, d\omega$, de manière que l' on ait ſimplement $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi\sqrt{(1+q^2)}}$ $-\eta$ ſin. $(\varphi-\omega)$, c' eſt-à-dire que la variation inſtantanée du rayon $r = \frac{1}{s}$, soit la même que si l'ellipse demeuroit constante, & différentiant cette valeur de $\frac{ds}{d\varphi}$, on trouvera $\frac{d^2 s}{d\varphi^2} = \frac{I+J}{D} \left(\frac{dq^2 + q\,d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2\, dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$

$- \eta \operatorname{cof.} (\varphi - \omega) - \frac{d\eta}{d\varphi} \operatorname{fin.} (\varphi - \omega) + \frac{d\omega}{d\varphi} \eta \operatorname{cof.} (\varphi - \omega)$;

or $\frac{dq^2}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q^2\, dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{dq^2}{d\varphi^2 (1+q^2)^{\frac{3}{2}}} =$

(à cause de $\frac{dq^2}{d\varphi^2} + q^2 = \varepsilon^2$) $\frac{\varepsilon^2 - q^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} -$

$\frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}}$; de plus $\frac{d^2 q}{d\varphi^2} = - q - \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi}$, donc

$$\frac{q\, d^2 q}{d\varphi^2 \sqrt{(1+q^2)}} = - \frac{q^2}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi}$$

$$= - \sqrt{(1+q^2)} + \frac{1}{\sqrt{(1+q^2)}} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi};$$

donc on aura (à cause de $d\eta = - \frac{\eta \operatorname{fin.} (\varphi - \omega)}{\operatorname{cof.} (\varphi - \omega)} d\omega$) $\frac{d^2 s}{d\varphi^2}$

$$= \frac{I+J}{D} \left(\frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} - \sqrt{(1+q^2)} - \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}} \times \frac{V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} \right)$$

$- \eta \operatorname{cof.} (\varphi - \omega) + \frac{\eta\, d\omega}{d\varphi \operatorname{cof.} (\varphi - \omega)}$. De sorte que l'équation

$$\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s - \frac{(I+J)(1+q^2)^{\frac{3}{2}} + V}{C - 2\int Q r^2 d\varphi} = 0$$

se changera en ces deux-ci

$$\frac{\eta\, d\omega}{\text{cof.}(\varphi-\omega)d\varphi} - \frac{U+\frac{I+J}{D}\left(2\frac{1+\varepsilon^2}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}}\int Q r^3 d\varphi + \frac{q}{\sqrt{(1+q^2)}}V\right)}{\frac{D}{1+\varepsilon^2} - 2\int Q r^3 d\varphi} = 0$$

$$\frac{d\eta}{\eta} + \text{tang.}\ (\varphi - \omega)\, d\varphi = 0\,;$$

lefquelles ferviront à trouver η, & ω.

Au refte dès qu'on aura trouvé r, & q en φ, ou bien r, q, & φ en t, on pourra, fi l'on veut, trouver tout de fuite les valeurs de α, ε, ω, & η; car les équations $q = \varepsilon$ fin. $(\varphi - \alpha)$ & $\frac{dq}{d\varphi} = \varepsilon$ cof. $(\varphi - \alpha)$ donneront $\varepsilon = \sqrt{[q^2 + (\frac{dq}{d\varphi})^2]}$, & tang. $(\varphi - \alpha) = \frac{q\, d\varphi}{dq}$. Et de même les équations $s = \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} + \eta$ cof. $(\varphi - \omega)$, & $\frac{ds}{d\varphi} = \frac{I+J}{D} \times \frac{q\, dq}{d\varphi\sqrt{(1+q^2)}} - \eta$ fin. $(\varphi - \omega)$, donneront, en faifant pour abreger $S - \frac{I+J}{D}\sqrt{(1+q^2)} = u$,

$$\eta = \sqrt{[u^2 + (\tfrac{du}{d\varphi})^2]},\ \&\ \text{tang.}\ (\varphi - \omega) = -\frac{du}{u\, d\varphi}.$$

LXXII. Les obfervations nous apprenent que le mouvement de Jupiter autour du Soleil eft à peu près circulaire & uniforme, & que le plan de fon orbite ne fait qu'un très-petit angle avec celui de l'écliptique; d'où il s'enfuit que fi on nomme a la diftance moyenne de Jupiter au Soleil, & h fa viteffe angulaire moyenne, on pourra fuppofer

$$r = a(1 + iy),\ \varphi = ht + ix,\ q = iz,$$

y, x, z étant des quantités variables, & i un coéficient très-petit ; où il faut remarquer que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne doivent renfermer aucun terme tout conftant ; autrement a & h ne feroient plus les valeurs moyennes de r & de $\frac{d\phi}{dt}$ contre l'hypothèfe.

Cela pofé, fi on fait ces fubftitutions dans les équations (i) de l'Art. LXVIII., & qu'on divife la première par a, on aura, en pouffant la précifion jufqu'aux quantités de l'ordre de i^3,

$$i\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4}(1 - 3iy + 6i^2y^2 - 10i^3y^3)$$
$$+ \frac{I+J}{a^3}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - \frac{3}{2}i^2z^2 - 4i^3y^3 + 3i^3yz^2)$$
$$+ \frac{R}{a} = 0,$$
$$i\frac{d^2z}{dt^2} + i\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4}z(1 - 4iy + 10i^2y^2) +$$
$$2i^2\left(\frac{dz\,dy}{dt^2} - iy\frac{dz\,dy}{dt^2}\right) + \frac{P-Rq}{r} = 0,$$
$$h + i\frac{dx}{dt} - \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}(1 - 2iy + 3i^2y^2 - 4i^3y^3)$$
$$= 0.$$

On voit d'abord par ces équations que les quantités $-\frac{(c-\int Q\,dt)^2}{a^4} + \frac{I+J}{a^3} + \frac{R}{a}$, $\frac{P-Rq}{r}$, & $h - \frac{c-\int Q\,dt}{a^2}$ doivent être chacune très-petites de l'ordre de i, pour que les hypothéfes que nous avons faites puiffent fubfiter.

Suppofons donc

$$\left.\begin{aligned} \frac{c-\int Q\,dt}{a^2} &= h + iX \\ \frac{I+J}{a^3} + \frac{R}{a} &= h^2 + iY \\ \frac{P-Rq}{r} &= iZ, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \text{(k)}$$

& les équations précédentes étant divisées par i deviendront, en faisant $b = \frac{I+J}{a^3}$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + (3h^2 - 2b)y + Y - 2hX$$

$$- i(6h^2 - 3b)y^2 - \frac{3}{2}ibz^2 + 6ihyX - iX^2$$

$$+ i^2(10h^2 - 4b)y^3 + 3i^2byz^2 - 12i^2hy^2X + 3i^2yX^2 = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + h^2z + Z$$

$$- 4ih^2zy + 2i\frac{dzdy}{dt^2} + 2ihzX$$

$$+ 10i^2h^2zy^2 - 2i^2\frac{dzdy}{dt^2}y - 8i^2hzyX + i^2zX^2 = 0,$$

$$\frac{dx}{dt} + 2hy - X$$

$$- 3ihy^2 + 2iyX$$

$$+ 4i^2hy^3 - 3i^2y^2X = 0.$$

Si l'on nomme de même a' la distance moyenne de Saturne au Soleil, h' sa vitesse angulaire moyenne, & qu'on suppose

$$r' = a'(1 + iy'),\ \varphi' = h't + ix',\ q' = iz',$$

on aura les mêmes équations que ci-devant, en marquant seulement les lettres d'un trait.

LXXIII. Il faut maintenant faire les mêmes substitutions dans les valeurs de P, Q, R, & premiérement dans celle de $\frac{1}{v^3}$ qui entre dans la valeur de ces quantités, mais pour rendre le calcul plus simple nous n'aurons égard dans cette opération qu'aux termes de l'ordre de i; une plus grande précision étant d'ailleurs inutile dans la présente Recherche.

Mettons d'abord $a(1 + iy)$ à la place de r, & $a'(1 + iy')$ à la place de r', & nous aurons, en négli-

négligeant les termes q^2, qq', & q'^2 qui feroient du second ordre, & faifant pour plus de fimplicité $\varphi - \varphi' = \theta$, $v = \sqrt{[a^2(1 + 2iy) - 2aa'(1 + iy + iy')\cos\theta + a'^2(1 + 2iy')]}$, favoir

$v = \sqrt{[a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2 + 2i(a^2y + a'^2y') - 2iaa'(y + y')\cos\theta]}$,

d' où l' on tire par les féries

$$\frac{1}{v^3} = [a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}} - 3i[a^2y + a'^2y' - aa'(y + y')\cos\theta] \times [a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}.$$

Or les quantités $[a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2]^{-\frac{3}{2}}$ & $[a^2 - 2aa'\cos\theta + a'^2]^{-\frac{5}{2}}$ étant irrationnelles, il eft néceffaire de les réduire à une forme rationelle, fans quoi l'intégration des équations propofées ne réuffiroit point.

Pour cela je remarque qu'en faifant $a' = \alpha a$, la queftion fe réduit à changer en une fonction rationelle une quantité de cette forme $(1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2)^{-s}$, dans laquelle α eft une fraction moindre que l' unité. Or puifque $1 - 2\alpha\cos\theta + \alpha^2 = [1 - \alpha(\cos\theta + \sin\theta\sqrt{-1})] \times [1 - \alpha(\cos\theta - \sin\theta\sqrt{-1})]$, on élevera la quantité $1 - \alpha(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})$ à la puiffance $-s$; ce qui donnera, à caufe de $(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})^m = \cos m\theta \pm \sin m\theta\sqrt{-1}$,

$$[1 - \alpha(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1})]^{-s} = 1 + s\alpha(\cos\theta \pm \sin\theta\sqrt{-1}) + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2(\cos 2\theta \pm \sin 2\theta\sqrt{-1}) + \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3(\cos 3\theta \pm \sin 3\theta\sqrt{-1}) + \&c.$$

De forte que fi l' on fait

$$P = 1 + s\alpha \text{ cof. } \theta + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 \text{ cof. } 2\theta$$
$$+ \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3 \text{ cof. } 3\theta + \&c.$$
$$Q = s\alpha \text{ fin. } \theta + \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 \text{ fin. } 2\theta$$
$$+ \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^3 \text{ fin. } 3\theta + \&c.$$

on aura

$[1 - \alpha(\text{cof. } \theta + \text{fin. } \theta \sqrt{-1})]^{-s} = P + Q\sqrt{-1}$, &

$[1 - \alpha(\text{cof. } \theta - \text{fin. } \theta \sqrt{-1})]^{-s} = P - Q\sqrt{-1}$.

Donc $(1 - 2\alpha \text{ cof. } \theta + \alpha^2)^{-s} = P^2 + Q^2$.

Or fi on fait les quarrés des deux féries P & Q, & qu'on ajoute enfemble les termes qui auront le même coéficient, en faifant attention que cof. $m\theta \times$ cof. $n\theta$ + fin. $m\theta \times$ fin. $n\theta$ = cof. $(m - n)\theta$, on trouvera

$(1 - 2\alpha \text{ cof. } \theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \text{ cof. } \theta + C \text{ cof. } 2\theta + D \text{ cof. } 3\theta + \&c.$

les coéficiens A, B, C &c. étant exprimés de la manière fuivante

$$A = 1 + s^2\alpha^2 + \left(\frac{s(s+1)}{2}\right)^2\alpha^4 + \left(\frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\right)^2\alpha^6 + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = s\alpha + s \times \frac{s(s+1)}{2}\alpha^3 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^5 + \&c.$$

$$\frac{C}{2} = \frac{s(s+1)}{2}\alpha^2 + s \times \frac{s(s+1)(s+2)}{2.3}\alpha^4 + \frac{s(s+1)}{2} \times \frac{s(s+1)(s+2)(s+3)}{2.3.4}\alpha^6 + \&c.,$$

& ainfi de fuite.

Au refte quand on aura déterminé par ces féries les deux premiers coéficiens A & B, on trouvera tous les fuivans d' une manière très-fimple & très-facile ; car fi on prend les différentielles logarithmiques de l' équation

$(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s} = A + B \cos\theta + C \cos 2\theta +$ &c.
& qu'après avoir multiplié les deux membres en croix, on compare terme à terme, on aura, comme M. Euler l'a trouvé le premier dans ſes *Recherches ſur le mouvement de Saturne*,

$$C = \frac{(1+\alpha^2)B - 2s\alpha A}{(2-s)\alpha}$$

$$D = \frac{2(1+\alpha^2)C - (1+s)\alpha B}{(3-s)\alpha}$$

$$E = \frac{3(1+\alpha^2)D - (2+s)\alpha C}{(4-s)\alpha}$$

&c.

Connoiſſant ainſi tous les coéficiens de la ſérie qui repréſente $(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s}$, on trouvera tout de ſuite ceux de la ſérie qui exprime $(1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2)^{-s-1}$; car dénotant ces derniers par P, Q, R &c. il faudra que la ſérie $P + Q \cos\theta + R \cos 2\theta +$ &c. étant multipliée par $1 - 2\alpha \cos\theta + \alpha^2$ devienne égale à la ſérie $A + B \cos\theta + C \cos 2\theta +$ &c. La multiplication faite, on trouvera, en comparant les deux premiers termes, $A = (1+\alpha^2)P - \alpha Q$, & $B = (1+\alpha^2)Q - 2\alpha P - \alpha R$. Or R eſt donné en P & Q de la même manière que C eſt donné en A & B, de ſorte qu'on aura, en mettant $s + 1$ à la place de s,

$$R = \frac{(1+\alpha^2)Q - 2(s+1)\alpha P}{(1-s)\alpha}.$$

Donc ſubſtituant cette valeur de R on aura deux équations en A, B, P, & Q, d'où l'on tirera

$$P = \frac{(1+\alpha^2)A + \frac{s-1}{s}\alpha B}{(1-\alpha^2)^2}$$

$$Q = \frac{\frac{s-1}{s}(1+\alpha^2)B + 4\alpha A}{(1-\alpha^2)^2}.$$

Enſuite on aura

$$S = \frac{2(1+\alpha^2)R - (2+s)\alpha Q}{(2-s)\alpha}$$

$$T = \frac{3(1+\alpha^2)S - (3+s)\alpha R}{(3-s)\alpha}$$

&c.

Tout ſe réduit donc à trouver les valeurs de A & de B, lorſque $s = \frac{3}{2}$; or les ſéries ci-deſſus donnent pour ce cas

$$A = 1 + \frac{9}{4}\alpha^2 + \frac{9.25}{4.16}\alpha^4 + \frac{9.25.49}{4.16.36}\alpha^6 + \&c.$$

$$\frac{B}{2} = \frac{3}{2}\alpha + \frac{9.5}{4.4}\alpha^3 + \frac{9.25.7}{4.16.6}\alpha^5 + \&c.$$

leſquelles, à cauſe de $\alpha = \frac{5}{9}$ environ, dans la théorie de Jupiter & de Saturne, feront aſsès convergentes pour qu'on puiſſe ſe contenter d'un petit nombre de termes.

Pour faciliter le calcul de ces deux ſéries, leſquelles peuvent auſſi être d'uſage dans pluſieurs autres occaſions, je vais donner ici les logarithmes des différentes puiſſances de α qui entrent dans les valeurs de A & de $\frac{B}{2}$.

	log. des coéficiens		*log. des coéficiens*		*log. des coéficiens*
α	0.1760913	α^2	0.3521825	α^3	0.4490925
α^4	0.5460025	α^5	0.6129493	α^6	0.6798961
α^7	0.7310486	α^8	0.7822012	α^9	0.8235939
α^{10}	0.8649865	α^{11}	0.8997486	α^{12}	0.9345108
α^{13}	0.9644740	α^{14}	0.9944372	α^{15}	1.0207661

	log. des coéficiens		*log. des coéficiens*		*log. des coéficiens*
α^{16}	1.0470951	α^{17}	1.0705762	α^{18}	1.0940573
α^{19}	1.1152466	α^{20}	1.1364359	α^{21}	1.1557410
α^{22}	1.1750462	α^{23}	1.1927749	α^{24}	1.2105037
α^{25}	1.2268941	α^{26}	1.2432845	α^{27}	1.2585245
α^{28}	1.2737645	α^{29}	1.2880049	α^{30}	1.3022454
α^{31}	1.3156093	α^{32}	1.3289733	α^{33}	1.3415624
α^{34}	1.3541515	α^{35}	1.3660508	α^{36}	1.3779500
α^{37}	1.3892310	α^{38}	1.4005120	α^{39}	1.4112359
α^{40}	1.4219598	&c.	&c.	&c.	&c.

En examinant cette table il eſt aiſé de voir que les différences des logarithmes forment une progreſſion décroiſſante ; d'où il s'enſuit que, ſi après avoir pris la ſomme d' un nombre quelconque de termes de l' une ou de l'autre ſérie, on en regarde le reſte comme une progreſſion géométrique, l'erreur ſera toujours moindre que la ſomme de cette progreſſion; ainſi il ſera aiſé de juger de la quantité de l' approximation.

LXXIV. Suppoſons donc

$$(a^2 - 2aa' \operatorname{coſ.} \theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = A_1 + B_1 \operatorname{coſ.} \theta + C_1 \operatorname{coſ.} 2\theta + D_1 \operatorname{coſ.} 3\theta + \&c. \quad \&$$

$$(a^2 - 2aa' \operatorname{coſ.} \theta + a'^2)^{-\frac{5}{2}} = P_1 + Q_1 \operatorname{coſ.} \theta + R_1 \operatorname{coſ.} 2\theta + S_1 \operatorname{coſ.} 3\theta + \&c.$$

& nous aurons

$$\frac{1}{v^3} = A\,1 + B\,1 \cos.\theta + C\,1 \cos.2\theta + D\,1 \cos.3\theta + \&c.$$

$$-3\,iy \left\{ a^2 P\,1 - a a' \frac{Q\,1}{2} + \left(a^2 Q\,1 - a a' P\,1 - a a' \frac{R\,1}{2} \right) \cos.\theta + \left(a^2 R\,1 - a a' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} \right) \cos.2\theta + \&c. \right\}$$

$$-3\,iy' \left\{ a'^2 P\,1 - a a' \frac{Q\,1}{2} + \left(a'^2 Q\,1 - a a' P\,1 - a a' \frac{R\,1}{2} \right) \cos.\theta + \left(a'^2 R\,1 - a a' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} \right) \cos.2\theta + \&c. \right\}$$

ou bien, en faisant pour abreger,

$$P\,2 = 3 \left(a a' \frac{Q\,1}{2} - a^2 P\,1 \right)$$

$$Q\,2 = 3 \left(a a' \frac{2 P\,1 + R\,1}{2} - a^2 Q\,1 \right)$$

$$R\,2 = 3 \left(a a' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} - a^2 R\,1 \right)$$

$$S\,2 = 3 \left(a a' \frac{R\,1 + T\,1}{2} - a^2 S\,1 \right)$$

&c.

$$P\,3 = 3 \left(a a' \frac{Q\,1}{2} - a'^2 P\,1 \right)$$

$$Q\,3 = 3 \left(a a' \frac{2 P\,1 + R\,1}{2} - a'^2 Q\,1 \right)$$

$$R\,3 = 3 \left(a a' \frac{Q\,1 + S\,1}{2} - a'^2 R\,1 \right)$$

$$S\,3 = 3 \left(a a' \frac{R\,1 + T\,1}{2} - a'^2 S\,1 \right)$$

&c.

$$\frac{1}{v^3} = A\,1 + B\,1 \cos.\theta + C\,1 \cos.2\theta + D\,1 \cos.3\theta + \&c.$$
$$+ iy \left(P\,2 + Q\,2 \cos.\theta + R\,2 \cos.2\theta + S\,2 \cos.3\theta + \&c. \right)$$
$$+ iy' \left(P\,3 + Q\,3 \cos.\theta + R\,3 \cos.2\theta + S\,3 \cos.3\theta + \&c. \right)$$

LXXV. Cela posé, on aura d'abord

$$\frac{r}{v^3} = a\,(A1 + B1\ \text{cos.}\,\theta + C1\ \text{cos.}\ 2\theta + D1\ \text{cos.}\ 3\theta + \&c.)$$
$$+ iya\,[A1 + P2 + (B1 + Q2)\ \text{cos.}\,\theta + (C1 + R2)\ \text{cos.}\,2\theta$$
$$+ (D1 + S2)\ \text{cos.}\ 3\theta + \&c.]$$
$$+ iy'a\,(P3 + Q3\ \text{cos.}\ \theta + R3\ \text{cos.}\ 2\theta + S3\ \text{cos.}\ 3\theta + \&c.)$$

Et de même

$$\frac{r'}{v^3} = a'\,(A1 + B1\ \text{cos.}\,\theta + C1\ \text{cos.}\ 2\theta + D1\ \text{cos.}\,3\theta + \&c.)$$
$$+ iya'\,(P2 + Q2\ \text{cos.}\ \theta + R2\ \text{cos.}\ 2\theta + S2\ \text{cos.}\ 3\theta + \&c.)$$
$$+ iy'a'\,[A1 + P3 + (B1 + Q3)\ \text{cos.}\,\theta + (C1 + R3)\ \text{cos.}\ 2\theta$$
$$+ (D1 + S3)\ \text{cos.}\ 3\,\theta + \&c.]$$

Donc multipliant cette dernière quantité par cos. θ, on aura

$$\frac{r'}{v^3}\ \text{cos.}\ \theta = a'\,[\frac{B1}{2} + (A1 + \frac{C1}{2})\ \text{cos.}\ \theta + \frac{B1 + D1}{2}\ \text{cos.}\,2\theta$$
$$+ \&c.]$$
$$+ iya'\,[\frac{Q2}{2} + (P2 + \frac{R2}{2})\ \text{cos.}\ \theta + \frac{Q2 + S2}{2}\ \text{cos.}\,2\theta$$
$$+ \&c.]$$
$$+ iy'a'\,[\frac{B1 + Q3}{2} + (A1 + P3 + \frac{C1 + R3}{2})\ \text{cos.}\,\theta$$
$$+ \frac{B1 + Q3 + D1 + S3}{2}\ \text{cos.}\ 2\,\theta + \&c.].$$

Or $\frac{r'}{u'^3} = \frac{1}{r'^2(1 + q'^2)^{\frac{3}{2}}} =$ (en négligeant les termes de l'ordre de i^2) $\frac{1 - 2iy'}{a'^2}$, & par conséquent

$$\frac{r'}{u'^3}\ \text{cos.}\ \theta = \frac{1}{a'^2}\ \text{cos.}\ \theta - 2\,iy'\,\frac{1}{a'^2}\ \text{cos.}\ \theta.$$

Donc si on fait

$$A2 = a^3 A1 - a^2 a' \frac{B1}{2}$$

$$B\,2 = a^3 B\,1 - a^2 a' \frac{2\,A\,1 + C\,1}{2} + \frac{a^2}{a'^2}$$

$$C\,2 = a^3 C\,1 - a^2 a' \frac{B\,1 + D\,1}{2}$$

$$D\,2 = a^3 D\,1 - a^2 a' \frac{C\,1 + E\,1}{2}$$

&c.

$$P\,4 = a^3 (A\,1 + P\,2) - a^2 a' \frac{Q\,2}{2}$$

$$Q\,4 = a^3 (B\,1 + Q\,2) - a^2 a' \frac{2\,P\,2 + R\,2}{2}$$

$$R\,4 = a^3 (C\,1 + R\,2) - a^2 a' \frac{Q\,2 + S\,2}{2}$$

$$S\,4 = a^3 (D\,1 + S\,2) - a^2 a' \frac{R\,2 + T\,2}{2}$$

&c.

$$P\,5 = a^3 P\,3 - a^2 a' \left(\frac{B\,1}{2} + \frac{Q\,3}{2}\right)$$

$$Q\,5 = a^3 Q\,3 - a^2 a' \left(\frac{2\,A\,1 + C\,1}{2} + \frac{2\,P\,3 + R\,3}{2}\right) - \frac{2\,a}{a'^2}$$

$$R\,5 = a^3 R\,3 - a^2 a' \left(\frac{B\,1 + D\,1}{2} + \frac{Q\,3 + S\,3}{2}\right)$$

$$S\,5 = a^3 S\,3 - a^2 a' \left(\frac{C\,1 + E\,1}{2} + \frac{R\,3 + T\,3}{2}\right)$$

&c.

on aura (*Art. LXVII.*)

$$R = \frac{J'}{a^2} (A_2 + B_2 \operatorname{cof.} \theta + C_2 \operatorname{cof.} 2\theta + D_2 \operatorname{cof.} 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a^2} y (P_4 + Q_4 \operatorname{cof.} \theta + R_4 \operatorname{cof.} 2\theta + S_4 \operatorname{cof.} 3\theta + \&c.)$$

$$+ i \frac{J'}{a^2} y' (P_5 + Q_5 \operatorname{cof.} \theta + R_5 \operatorname{cof.} 2\theta + S_5 \operatorname{cof.} 3\theta + \&c.).$$

Maintenant on aura

$\frac{r'}{v^2}$ fin.

$$\frac{r'}{v^3}\,\text{sin.}\,\theta = a'\left[\left(A1 - \frac{C1}{2}\right)\text{sin.}\,\theta + \frac{B1 - D1}{2}\,\text{sin.}\,2\,\theta + \&c.\right]$$

$$+ i y a'\left[\left(P2 - \frac{R2}{2}\,\text{sin.}\,\theta + \frac{Q2 - S2}{2}\,\text{sin.}\,2\,\theta + \&c.\right]\right.$$

$$+ i y' a'\left[\left(A1 + P3 - \frac{C1 + R3}{2}\,\text{sin.}\,\theta + \left(\frac{B1 + Q3}{2} - \frac{D1 + S3}{2}\right)\text{sin.}\,2\,\theta + \&c.\right]\right. \;\&$$

$$\frac{r'}{u'^3}\,\text{sin.}\,\theta = \frac{1}{a'^2}\,\text{sin.}\,\theta - 2\,i y' \frac{1}{a'^2}\,\text{sin.}\,\theta\,.$$

Donc si on multiplie ces deux quantités par $r = a\,(i + iy)$, & qu'on fasse

$$A3 = a^2 a' \frac{2A1 - C1}{2} - \frac{a^2}{a'^2}$$

$$B3 = a^2 a' \frac{B1 - D1}{2}$$

$$C3 = a^2 a' \frac{C1 - E1}{2}$$

&c.

$$P6 = a^2 a' \left(\frac{2A1 - C1}{2} + \frac{2P2 - R2}{2}\right) - \frac{a^2}{a'^2}$$

$$Q6 = a^2 a' \left(\frac{B1 - D1}{2} + \frac{Q2 - S2}{2}\right)$$

$$R6 = a^2 a' \left(\frac{C1 - E1}{2} + \frac{R2 - T2}{2}\right)$$

&c.

$$P7 = a^2 a' \left(\frac{2A1 - C1}{2} + \frac{2P3 - R3}{2}\right) + \frac{2a^2}{a'^2}$$

$$Q7 = a^2 a' \left(\frac{B1 - D1}{2} + \frac{Q3 - S3}{2}\right)$$

$$R7 = a^2 a' \left(\frac{C1 - E1}{2} + \frac{R3 - T3}{2}\right)$$

&c.

on aura (*Art. cité*)

$$Q = \frac{J'}{a}(A\,3\,\text{fin.}\,\theta + B\,3\,\text{fin.}\,2\,\theta + C\,3\,\text{fin.}\,3\,\theta + \&c.)$$

$$+ i\frac{J'}{a}y\,(P\,6\,\text{fin.}\,\theta + Q\,6\,\text{fin.}\,2\,\theta + R\,6\,\text{fin.}\,3\,\theta + \&c.)$$

$$+ i\frac{J'}{a}y'\,(P\,7\,\text{fin.}\,\theta + Q\,7\,\text{fin.}\,2\,\theta + R\,7\,\text{fin.}\,3\,\theta + \&c.)$$

Enfin on a $\frac{p-p'}{v^2} = i\,(z\frac{r}{v^2} - z'\frac{r'}{v^2})$ & $\frac{p'}{u'^2} = i\,z'\frac{1}{r'^2(1+q'^2)}$; d'où, en négligeant les termes de l'ordre de i^2, on aura $P = iJ'\,[\,(z\,a - z'a')\times(A\,1 + B\,1\,\text{cof.}\,\theta + C\,1\,\text{cof.}\,2\,\theta + \&c.) + \frac{z'}{a'^2}\,]$.

De forte que fi on fait

$$\begin{aligned} A\,4 &= a^3 A\,1 - A\,2 \\ B\,4 &= a^3 B\,1 - B\,2 \\ C\,4 &= a^3 C\,1 - C\,2 \\ &\&c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A\,5 &= \frac{a^3}{a'^3} - a^2 a' A\,1 \\ B\,5 &= - a^2 a' B\,1 \\ C\,5 &= - a^2 a' C\,1 \\ &\&c. \end{aligned}$$

on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près,

$$\frac{P-Rq}{r}$$

$$= i\frac{J'}{a^3}\,z\,(A4 + B4\,\text{cof.}\,\theta + C4\,\text{cof.}\,2\theta + D4\,\text{cof.}\,3\theta + \&c.)$$

$$+ i\frac{J'}{a^3}\,z'\,(A5 + B5\,\text{cof.}\,\theta + C5\,\text{cof.}\,2\theta + D5\,\text{cof.}\,3\theta + \&c.)$$

Et il ne reftera plus, pour achever les fubftitutions, qu'à mettre au lieu de θ, c'eft-à-dire au lieu de $\varphi - \varphi'$ fa valeur $(h - h')t + i(x - x')$, ou bien, (en faifant $h - h' = H$) $Ht + i(x - x')$, ce qui eft très-facile; car il n'y aura qu'à mettre partout dans les expressions précédentes Ht à la place de θ, & ajouter ensuite à la valeur de R la quantité

$$-i\frac{J'}{a^3}(x-x')\times(B2\ \text{sin.}\ Ht + 2C2\ \text{sin.}\ 2Ht + 3D2\ \text{sin.}\ 3Ht + \&c.)$$

& à celle de Q la quantité

$$i\frac{J'}{a}(x-x')\times(A3\ \text{cos.}\ Ht + 2B3\ \text{cos.}\ 2Ht + 3C3\ \text{cos.}\ 3Ht + \&c.).$$

LXXVI. On sait que les masses de Jupiter & de Saturne sont très-petites par rapport à celle du Soleil, ensorte qu'on ne peut supposer $\frac{J}{I} = i\mathrm{m}$ & $\frac{J'}{I} = i\mathrm{m}'$; donc puisque $b = \frac{I+J}{a^3}$ (*Art. LXXII.*) on aura $J' = i\frac{\mathrm{m}'}{1+i\mathrm{m}}a^3b$ où, faisant $\frac{\mathrm{m}'}{1+i\mathrm{m}}b = \mathrm{n}$, $J' = ia^3\mathrm{n}$; d'où il s'ensuit que les quantités P, Q, R sont très-petites de l'ordre de i, & qu'ainsi pour satisfaire aux équations (k) de l'Art. cité, il est nécessaire de supposer $\frac{c}{a^3}$ presque égal à h, & $\frac{I+J}{a^3}$, ou bien b presque égal à h^2.

Soit donc $\frac{c}{a^3} - h = if$ & $b - h^2 = ig$, & les équations (k) donneront, après avoir substitué les valeurs de R, Q, & $\frac{P-Rq}{r}$ trouvées ci-dessus, & divisé le tout par i,

$$X = \mathrm{f} + \frac{\mathrm{n}}{H}(A3\ \text{cos.}\ Ht + \frac{1}{2}B3\ \text{cos.}\ 2Ht + \&c.)$$
$$-i\mathrm{n}\int y(P6\ \text{sin.}\ Ht + Q6\ \text{sin.}\ 2Ht + \&c.)\,dt$$
$$-i\mathrm{n}\int y'(P7\ \text{sin.}\ Ht + Q7\ \text{sin.}\ 2Ht + \&c.)\,dt$$
$$-i\mathrm{n}\int(x-x')\times(A3\ \text{cos.}\ Ht + B3\ \text{cos.}\ 2Ht + \&c.)\,dt,$$

$$Y = g + n(A2 + B2 \text{ cos. } Ht + C2 \text{ cos. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iny(P4 + Q4 \text{ cos. } Ht + R4 \text{ cos. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iny'(P5 + Q5 \text{ cos. } Ht + R5 \text{ cos. } 2Ht + \&c.)$$
$$- in(x - x') \times (B2 \text{ sin. } Ht + C2 \text{ sin. } 2Ht + \&c.),$$
$$Z = inz(A4 + B4 \text{ cos. } Ht + C4 \text{ cos. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ inz'(A5 + B5 \text{ cos. } Ht + C5 \text{ cos. } H2t + \&c.).$$

LXXVII. Ayant ainsi les valeurs de X, Y, & Z, il ne s'agira plus que de les substituer dans les équations de l'Art. LXXII. Or si on met $h^2 + ig$ au lieu de b, qu'on néglige les quantités affectées de $i^2 n$ & de $i n^2$ (parceque n est aussi une quantité fort petite comme on le verra plus bas), & qu'après avoir ajouté ensemble les coéficiens des termes analogues on fasse

$$A6 = B2 - \frac{2(h + if)}{H} A3$$

$$B6 = C2 - \frac{2(h + if)}{2H} B3$$

&c.

$$A7 = B4 + \frac{2h}{H} A3$$

$$B7 = C4 + \frac{2h}{2H} B3$$

&c.

$$P8 = Q4 + \frac{6h}{H} A3$$

$$Q8 = R4 + \frac{6h}{2H} B3$$

&c.

& ensuite

$$\Phi = A6 \text{ cos. } Ht + B6 \text{ cos. } 2Ht + \&c.$$
$$+ iy(P8 \text{ cos. } Ht + Q8 \text{ cos. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ iy'(P5 + Q5 \text{ cos. } Ht + R5 \text{ cos. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ 2ih\int y(P6 \text{ sin. } Ht + Q6 \text{ sin. } 2Ht + \&c.)\,dt$$

$$+ 2ih\int y'(\text{P}\,7 \text{ fin. } Ht + \text{Q}\,7 \text{ fin. } 2Ht + \&c.)\,dt$$
$$- i(x - x)\times(\text{B}\,2 \text{ fin. } Ht + \text{C}\,2 \text{ fin. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ 2ih\int(x - x')\times(\text{A}3 \text{ cof. } Ht + \text{B}3 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)\,dt,$$
$$\Psi = z(\text{A}\,7 \text{ cof. } Ht + \text{B}\,7 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$+ z'(\text{A}\,5 + \text{B}\,5 \text{ cof. } Ht + \text{C}\,5 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)$$
$$\Xi = -\frac{1}{H}\left(\text{A}\,3 \text{ cof. } Ht + \frac{\text{B}3}{2} \text{ cof. } 2Ht + \&c.\right)$$
$$+ \frac{2i}{H}y\left(\text{A}3 \text{ cof. } Ht + \frac{\text{B}3}{2} \text{ cof. } 2Ht + \&c.\right)$$
$$+ i\int y(\text{P}\,6 \text{ fin. } Ht + \text{Q}\,6 \text{ fin. } 2Ht + \&c.)\,dt$$
$$+ i\int y'(\text{P}\,7 \text{ fin. } Ht + \text{Q}\,7 \text{ fin. } 2Ht + \&c.)\,dt$$
$$+ i\int(x - x)\times(\text{A}3 \text{ cof. } Ht + \text{B}3 \text{ cof. } 2Ht + \&c.)\,dt,$$

on aura les équations fuivantes

$$\frac{d^2y}{dt^2} + [h^2 + i(6h\text{f} - 2\text{g} + 3i\text{f}^2 + \text{n}\,\text{P}\,4)]y + \text{g} - 2h\text{f} - i\text{f}^2 + \text{n}\,\text{A}\,2 - 3i[h^2 + i(4h\text{f} - \text{g})]y^2 - \frac{3}{2}i(h^2 + i\text{g})z^2 + 6i^2h^2y^3 + 3i^2h^2yz^2 + \text{n}\Phi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{l})$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + [h^2 + i(2h\text{f} + i\text{f}^2 + \text{n}\,\text{A}\,4)]z - 4i(h^2 + 2ih\text{f})zy + 2i\frac{dz\,dy}{dt^2} + 10i^2h^2zy^2 - 2i^2y\frac{dz\,dy}{dt^2} + i\text{n}\Psi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{m})$$

$$\frac{dx}{dt} + 2(h + i\text{f})y - \text{f} - 3i(h + i\text{f})y^2 + 4i^2hy^3 + \text{n}\Xi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{n})$$

Telles font les équations du mouvement de Jupiter, en-tant qu'il eft altéré par l' action de Saturne.

On trouvera des équations femblables pour le mouvement de Saturne dérangé par Jupiter ; il ne faudra pour cela que mettre y', z', x' à la place de x, y, z *& viceverfa*, & marquer toutes les autres lettres d'un trait, à l'exception de H, laquelle étant $= h - h'$, deviendra $h' - h$, c' est-à-dire simplement négative.

LXXVIII. Je remarque maintenant que les équations (l) & (m) peuvent se réduire à cette forme plus simple $\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2} + K^2 \mathrm{y} + \mathrm{n}\,\mathrm{Y} = 0$, & $\frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2} + L^2 \mathrm{z} + i\,\mathrm{n}\,\mathrm{Z} = 0$, en supposant

$$\mathrm{y} = y + \alpha + i(\beta y^2 + \gamma \zeta^2) + i^2 (\delta y^3 + \varepsilon y \zeta^2 + \eta \zeta \frac{dy\,dz}{dt^2}), \ \&$$

$$\mathrm{z} = \zeta + i(\mu \zeta y + \nu \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i^2 (\pi \zeta^3 + \rho \zeta y^2 + \sigma y \frac{dz\,dy}{dt^2}).$$

Pour le prouver, & déterminer en même tems les valeurs de α, β, γ &c. μ, ν, π &c., je prends d' abord les différentielles secondes de y & de z, j' ai

$$\frac{d^2 \mathrm{y}}{dt^2} = \frac{d^2 y}{dt^2} + i\beta(2y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy^2}{dt^2}) + i\gamma(2\zeta \frac{d^2 z}{dt^2} + 2 \frac{dz^2}{dt^2}) + i^2 \delta (3y^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 6y \frac{dy^2}{dt^2}) + i^2 \varepsilon (\zeta^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta y \frac{d^2 z}{dt^2} + 2y \frac{dz^2}{dt^2} + 4\zeta \frac{dy\,dz}{dt^2}) + i^2 \eta (2 \frac{dz^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + 3 \frac{dy\,dz}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + \zeta \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + \zeta \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + 2\zeta \frac{d^2 y}{dt^2} : \frac{d^2 z}{dt^2}),$$

$$\frac{d^2 \mathrm{z}}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} + i\mu(y \frac{d^2 z}{dt^2} + \zeta \frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i\nu(\frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 2 \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}) + i^2 \pi (3\zeta^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 6\zeta \frac{dz^2}{dt^2}) + i^2 \rho (y^2 \frac{d^2 z}{dt^2} + 2\zeta y \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta \frac{dy^2}{dt^2} + 4y \frac{dz\,dy}{dt^2}) + i^2 \sigma (2 \frac{dy^2}{dt^2} \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} + 3 \frac{dz\,dy}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + y \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^3 z}{dt^3} + y \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^3 y}{dt^3} + 2y \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}).$$

Ensuite je substitue à la place de $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dt^3}$, $\frac{d^3z}{dt}$, $\frac{dy^2}{dt^2}$, $\frac{dz^2}{dt^2}$ leurs valeurs tirées des équations (l) & (m), en négligeant les quantités qui seroient affectés de i^3, ou de i^2 n; & pour avoir les valeurs de $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ (car les autres se déduisent aisément des équations citées) je multiplie l'équation (l) par $2\,dy$, & l'équation (m) par $2\,dz$, & ensuite je les intégre; ce qui me donne (en négligeant les quantités de l'ordre de i^2 & de in, parceque $\frac{dy^2}{dt^2}$ & $\frac{dz^2}{dt^2}$ ne se trouvent que dans des termes déja affectés de i)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2(g - 2hf - if^2 + nA2) + A - 2ih^2y^3 - 3ih^2\int z^2 dy + 2n\int\Phi\, dy = 0,$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + (h^2 + 2ihf)z^2 + B - 8ih^2\int yz\,dz + 4i\int\frac{dz^2}{dt^2}dy + 2in\int\Psi\, dz = 0,$$

A, & B étant des constantes.

(Je conserve exprés le terme $2in\int\Psi\, dz$ parceque la quantité Ψ contient un terme de cette forme B 5 z' cos. Ht, lequel étant multiplié par dz, & ensuite intégré, aprés avoir substitué les valeurs de z & de z' en t, se trouvera divisé par des quantités de l'ordre de i).

Or l'équation (m) donne, en rejettant tous les termes affectés de i, $\frac{d^2z}{dt^2} + h^2 z = 0$; & par conséquent $\int z\frac{d^2z}{dt^2}dy + h^2\int z^2 dy = 0$; mais $\int z\frac{d^2z}{dt^2}dy = z\frac{dy\,dz}{dt^2}$

$-\int\left(\frac{dz^2}{dt^2}dy + z\frac{d^2y}{dt^2}dz\right) =$ (en mettant au lieu de $\frac{dz^2}{dt^2}$ & de $\frac{d^2y}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2z^2 - B$ & $-h^2y - g + 2hf$, car on peut négliger ici tous les termes affectés de i & de n) $z\frac{dydz}{dt^2} + h^2\int z^2dy + By + h^2\int yzdz + \frac{g-2hf}{2}z^2 =$ (à cause de $\int yzdz = \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{2}\int z^2dy$) $z\frac{dydz}{dt^2} + \frac{h^2}{2}\int z^2dy + By + \frac{h^2}{2}yz^2 + \frac{g-2hf}{2}z^2$. Donc on aura $\frac{3}{2}h^2\int z^2dy + \frac{h^2}{2}yz^2 + z\frac{dydz}{dt^2} + By + \frac{g-2hf}{2}z^2 = 0$; d'où l'on tire $\int z^2dy = -\frac{1}{3}yz^2 - \frac{2}{3h^2}z\frac{dydz}{dt^2} - \frac{2B}{3h^2}y - \frac{g-2hf}{3h^2}z^2$.

Donc si on met cette valeur dans la premiére des deux équations ci-dessus, & qu'on substitue dans la seconde à la place de $\int\frac{dz^2}{dt^2}dy$, $-h^2\int z^2dy - By$, & à la place de $\int\Psi dz$, B 5 $\int$ cos. $Htz'dz$, on aura après les réductions

$$\frac{dy^2}{dt^2} + [h^2 + i(6hf - 2g)]y^2 + 2[g - 2hf - i(f^2 - B) + nA2]y + A + i(g - 2hf)z^2 - 2ih^2y^3 + ih^2yz^2 + 2iz\frac{dydz}{dt^2} + 2n\int\Phi dy = 0 \quad (o)$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + [h^2 + 2ihf]z^2 + B - 4iBy - 4ih^2yz^2 + 2inB5\int\text{cof. } Htz'dz = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (p)$$

Ces substitutions faites, on trouvera, en ordonnant les termes

$$\frac{d^2y}{dt^2} = [-h^2 - i(6hf - 2g + 3if^2 + nP4)$$
$$- 6i\beta(g - 2hf - if^2 + \frac{2}{3}iB + nA2) + 8i^2\gamma B$$
$$- 6i^2\delta A - 2i^2\varepsilon B + 2i^2\eta h^2 B]y$$
$$- (g - 2hf - if^2 + nA2) - 2i\beta A - 2i\gamma B$$
$$+ 2i^2\eta(g - 2hf)B$$
$$+ [3ih^2 + 3i^2(4hf - g) - 4i\beta(h^2 + i(6hf$$
$$- g)) - 15i^2\delta(g - 2hf)]y^2$$
$$+ [\frac{3}{2}i(h^2 + ig) - 2i^2\beta(g - 2hf) - 4i\gamma(h^2 + 2ihf)$$
$$- i^2\varepsilon(g - 2hf) + 4i^2\eta h^2(g - 2hf)]z^2$$
$$+ [-6i^2h^2 + 10i^2\beta h^2 - 9i^2\delta h^2]y^3$$
$$+ [-3i^2h^2 + i^2\beta h^2 + 16i^2\gamma h^2 - 5i^2\varepsilon h^2 + 4i^2\eta h^4]yz^2$$
$$+ [-4i^2\beta - 4i^2\gamma + 4i^2\varepsilon - 5i^2\eta h^2]z\frac{dy\,dz}{dt^2}$$
$$+ n[-\Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int\Phi dy - 4i^2\gamma B5\int \text{cos.}\, Htz'dz],$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = [-h^2 - i(2hf + if^2 + nA4) - i\mu(g - 2hf$$
$$- if^2 + nA2) + 2i\nu(g - 2hf - if^2 + nA2)\times$$
$$(h^2 + 2ihf) - 3i^2\nu h^2(2A + B) - 6i^2\pi B - 2i^2\rho A$$
$$+ 2i^2\sigma h^2 A]z$$
$$+ [4i(h^2 + 2ihf) - 2i\mu(h^2 + i(4hf - g)) +$$
$$2i\nu(h^2 + i(6hf - 2g))\times(h^2 + 2ihf) - 20i^2\nu h^2(g - 2hf)$$
$$- 6i^2\rho(g - 2hf) + 6i^2\sigma h^2(g - 2hf)]zy$$
$$+ [-2i + 2i\mu - i\nu(2h^2 + i(20hf - 8g))$$
$$- 3i^2\sigma(g - 2hf)]\frac{dy\,dz}{dt^2}$$
$$+ [\frac{3}{2}i^2\mu h^2 - 6i^2\nu h^4 - 9i^2\pi h^2]z^3$$
$$+ [-10i^2h^2 + 7i^2\mu h^2 - 20i^2\nu h^4 - 5i^2\rho h^2 +$$
$$4i^2\sigma h^4]y^2z$$

$$+ [2i^2 - 2i^2\mu + 16 i^2 \nu h^2 + 4 i^2 \rho - 5 i^2 \sigma h^2] y \frac{dydz}{dt^2}$$

$$+ n [-i\Psi - i\mu z\Phi - i\nu \frac{d\Phi dz}{dt^2} + 2 i \nu h^2 z \Phi].$$

Je mets donc ces valeurs de y, z, $\frac{d^2 y}{dt^2}$ & $\frac{d^2 z}{dt^2}$ dans les équations $\frac{d^2 y}{dt^2} + K^2 y + n Y = o$, & $\frac{d^2 z}{dt^2} + L^2 z + i n Z = o$, & ensuite j'égale à zéro les termes homogénes ; ce qui me donne les équations suivantes

$$- h^2 - i(6hf - 2g + 3if^2 + nP4) - 6i\beta(g - 2hf - if^2 + \frac{2}{3} iB + nA2) + 8i^2\gamma B - 6i^2\delta A - 2i^2\varepsilon B + 2i^2\eta h^2 B + K^2 = o,$$

$$-(g - 2hf - if^2 + nA2) - 2i\beta A - 2i\gamma B + 2i^2\eta(g - 2hf)B + \alpha K^2 = o,$$

$$3h^2 + 3i(4hf - g) - 4\beta(h^2 + i(6hf - 2g)) - 15 i\delta(g - 2hf) + \beta K^2 = o,$$

$$\frac{3}{2}(h^2 + ig) - 2i\beta(g - 2hf) - 4\gamma(h^2 + 2ihf) - i\varepsilon(g - 2hf) + 4i\eta h^2(g - 2hf) + \gamma K^2 = o,$$

$$- 6h^2 + 10\beta h^2 - 9\delta h^2 + \delta K^2 = o,$$

$$- 3h^2 + \beta h^2 + 16\gamma h^2 - 5\varepsilon h^2 + 4\eta h^4 + \varepsilon K^2 = o,$$

$$- 4\beta - 4\gamma + 4\varepsilon - 5\eta h^2 + \eta K^2 = o,$$

$$- \Phi - 2i\beta\Phi y - 4i\beta\int\Phi dy - 4i^2\gamma B 5 \int \text{cof.}\, Ht z dz + Y = o,$$

$$- h^2 - i(2hf + if^2 + nA4) - i\mu(g - 2hf - if^2 + nA2) + 2i\nu(g - 2hf - if^2 + nA2)\times(h^2 + 2ihf) - 3i^2\nu h^2(2A + B) - 6i^2\pi B - 2i^2\rho A + 2i^2\sigma h^2 A + L^2 = o,$$

$$4(h^2 + 2ihf) - 2\mu[h^2 + i(4hf - g)] + 2\nu[h^2 + i(6hf - 2g)]\times[h^2 + 2ihf] - 20 i\nu h^2(g - 2hf) - 6i\rho(g - 2hf) + 6i\sigma h^2(g - 2hf) + \mu L^2 = o,$$

$-2+2\mu-\nu[2h^2+i(20hf-8g)]-3i\sigma(g-2hf)+\nu L^2=0,$

$\frac{3}{2}\mu h^2-6\nu h^4-9\pi h^2+\pi L^2=0,$

$-10h^2+7\mu h^2-20\nu h^4-5\rho h^2+4\sigma h^4+\rho L^2=0,$

$2-2\mu+16\nu h^2+4\rho-5\sigma h^2+\sigma L^2=0,$

$$-\Psi-(\mu-2\nu h^2)\zeta\Phi-\nu\frac{d\Phi\, dz}{dt^2}+Z=0;$$

par où l'on déterminera les valeurs des coéficiens K^2, α, β, γ, δ, ε, η, L^2, μ, ν, π, ρ, σ, ainſi que celles de Y & de Z; en ayant ſoin de pouſſer les valeurs de K^2, L^2, & α juſqu'aux quantités de l'ordre de i^2 & de in, celles de β, γ, μ, ν juſqu'aux quantités de l'ordre de i & de n ſeulement, & enfin de négliger dans les autres toutes les quantités affectées de i & de n.

LXXIX. Si on regarde la quantité α comme connuë, & qu'on s'en ſerve pour déterminer g, on aura

$g=\alpha K^2+2hf-nA2+i(f^2-2\beta A-2\gamma B)+2i^2\eta\alpha K^2 B;$

enſuite, ſuppoſant $K=h+ik$ & $L=h+il$, on trouvera

$$k=f+2h\alpha+\frac{i}{2b}(4hf\alpha+15h^2\alpha^2-5A-B)+\frac{n}{2b}(P4+2A2),$$

$$l=f+2h\alpha+\frac{i}{2b}(4hf\alpha+15h^2\alpha^2-5A-B)+\frac{n}{2b}A4,$$

$$\beta=1+\frac{i}{2}\alpha,\ \gamma=\frac{1}{2}+i\alpha\eta h^2,\ \delta=\frac{1}{2},\ \varepsilon=\frac{3}{2}+\eta h^2,$$

$\mu = i(15 + 2\sigma h^2)\alpha$, $\nu = -\frac{2}{h^2} + i\left(\frac{4\,\text{f}}{h^3} + \frac{6+\sigma h^2}{h^2}\alpha\right)$,

$\pi = \frac{3}{2}$, $\rho = \frac{15}{2} + \sigma h^2$ &

$$Y = \Phi + 2i\beta\Phi y + 4i\beta\int\Phi dy + 4i^2\gamma B 5\int \text{cof.}\, Ht\,\zeta' d\zeta,$$

$$Z = \Psi + (\mu - 2\nu h^2)\Phi\zeta + \nu\frac{d\Phi\, dz}{dt^2}.$$

Et l'on remarquera qu'il restera encore deux indéterminées η & σ, lesquelles pourront être supposées égales à tout ce qu'on voudra, selon ce qu'on jugera plus commode.

A l'égard des quantités α & f, il faudra les prendre de telle manière que les deux conditions exprimées dans l'Art. LXXII. ayent lieu, c'est-à-dire que les valeurs de y & de $\frac{dx}{dt}$ ne renferment aucun terme tout constant; ainsi ce ne sera qu'après avoir trouvé les expressions générales de y & de $\frac{dx}{dt}$ en t, qu'on pourra déterminer les constantes α & f.

Au reste comme il n'est pas absolument nécessaire que la quantité a représente exactement la distance moyenne de la planète, on pourra, si l'on veut, se contenter de remplir la seconde des deux conditions dont nous venons de parler, & pour lors on aura encore une nouvelle indéterminée α à volonté.

Enfin pour déterminer A & B on substituera d'abord dans les équations (o) & (p) les valeurs de y & ζ en t, & on fera ensuite des équations séparées des termes dans lesquels t n'entre pas, les autres étant censés se détruire d'eux-mêmes. Or, en mettant au lieu de y & ζ leurs valeurs approchées y — α & z, & négligeant tous les termes affectés de i, ainsi que ceux qui contiennent des *sinus* & des *cosinus*, on a (à cause de g — $2h$f $= \alpha h^2$ à très-peu près)

$$\frac{dy^2}{dt^2} + h^2 y^2 - \alpha h^2 + A = 0, \quad \&$$

$$\frac{dz^2}{dt^2} + h^2 z^2 + B = 0.$$

De ſorte qu'en ne prenant, dans les valeurs de y^2, $\frac{dy^2}{dt^2}$, z^2 & $\frac{dz^2}{dt^2}$, que les termes conſtans & omettant les autres, on aura

$$A = \alpha^2 h^2 - h^2 y^2 - \frac{dy^2}{dt^2} \quad \&$$

$$B = - h^2 z^2 - \frac{dz^2}{dt^2}.$$

LXXX. Pour mettre nos formules ſous une forme plus commode & plus ſimple, nous ferons $\alpha = 0$, $\eta = 0$, & $\sigma = - \frac{11}{2 b^2}$; moyennant quoi nous aurons

$$y + i \left(y^2 + \frac{1}{2} z^2\right) + i^2 \left(\frac{1}{2} y^3 + \frac{3}{2} y z^2\right) = y \quad \&$$

$$z - 2 i \left(1 - \frac{2 i f}{b}\right) \frac{dz\, dy}{b^2 dt^2} + i^2 \left(\frac{3}{2} z^3 + 2 z y^2 - \frac{11}{2} y \frac{dy\, dz}{b^2 dt^2}\right) = z;$$

d' où l' on tire, en ne pouſſant la préciſion que juſques aux quantités de l' ordre de i^2,

$$y = y - i \left(y^2 + \frac{1}{2} z^2\right) + i^2 \left(\frac{3}{2} y^3 - \frac{1}{2} y z^2 - 2 z \frac{dy\, dz}{b^2 dt^2}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (q)$$

$$z = z + 2 i \left(1 - \frac{2 i f}{b}\right) \frac{dz\, dy}{b^2 dt^2} - i^2 \left(\frac{3}{2} z^3 + 2 z y^2 - \frac{11}{2} y \frac{dz\, dy}{b^2 dt^2} + 2 z \frac{dz^2}{b^2 dt^2} - 4 \frac{dy\, d \cdot (dz\, dy)}{b^2 dt^4}\right),$$

ou bien (en mettant pour $\frac{d^2y}{dt^2}$ & $\frac{d^2z}{dt^2}$ leurs valeurs approchées $-h^2y$ & $-h^2z$),

$$\zeta = z + 2i\left(1 - \frac{2if}{h}\right)\frac{dz\,dy}{h^2dt^2} - i^2\left(\frac{3}{2}z^3 + 2zy^2 + \frac{5}{2}y\frac{dz\,dy}{h^2dt^2} + 2z\frac{dz^2}{h^2dt^2} + 4z\frac{dy^2}{h^2dt^2}\right) \quad \ldots\ldots \quad (r)$$

Et si on substitue cette valeur de y dans l'équation (n) de l' Art. LXXVII., on aura

$$\frac{dx}{dt} = -2(h + if)y + f + i(h + if)\times(5y^2 + z^2) - i^2h\left(13y^3 + 2yz^2 - 4z\frac{dy\,dz}{h^2dt^2}\right) - n\,\Xi \quad \ldots \quad (s)$$

équation facile à intégrer dès qu'on aura les valeurs de y & z en t. On se souviendra seulement qu'il faudra, avant l' intégration, faire $= 0$ tous les termes constants.

De plus, si on veut avoir l' expression du rayon vecteur u de l'orbite réelle, on fera $u = a(1 + iv)$, & comme $u = r\sqrt{(1 + q^2)}$, on trouvera $v = y + \frac{i}{2}\zeta^2 + \frac{i^2}{2}y\zeta^2$; & mettant au lieu de y & ζ leurs valeurs en y & z,

$$v = y - iy^2 + \frac{3}{2}i^2y^3.$$

Ainsi le problème ne dépendra plus que de l'intégration des équations

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + nY = 0 \quad \ldots\ldots \quad (t)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + L^2z + inZ = 0 \quad \ldots\ldots \quad (u)$$

LXXXI. Si on fait $n = 0$, on aura le cas ordinaire où l' orbite est une ellipse immobile.

On trouvera donc pour ce cas

y $= \Delta$ cof. ($K t$ — A), & z $= \Lambda$ fin. ($L t$ — E),
Δ, Λ, A & E étant des conftantes.

Donc 1.° $A = - h^2 \Delta^2$, & $B = - h^2 \Lambda^2$ (*Art. LXXIX.*); 2.° fi on fubftitue ces valeurs de y & de z dans le fecond membre de l'équation (s), & qu'après avoir développé les puiffances des *finus* & des *cofinus* on égale à zéro tous les termes conftans, on aura, aux quantités de l'ordre de i^2 près, $f + ih \left(\frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 \right) = 0$; d'où

$$f = - ih \left(\frac{5}{2} \Delta^2 + \frac{1}{2} \Lambda^2 \right).$$

De forte qu'on trouvera, (à caufe de $\alpha = 0$ & de $n = 0$) $k = 0$, & $l = 0$, & par conféquent $K = h$ & $L = h$ (*Art. LXXIX.*).

Si on n'eut pas fuppofé $\alpha = 0$, on eut eu $A = h^2 (\alpha^2 - \Delta^2)$, $B = - h^2 \Lambda^2$, & $2(h + if)\alpha + f + 5ih\left(\frac{1}{2} \Delta^2 + \alpha\right) + \frac{ih}{2} \Lambda^2 = 0$; d'où $f = - 2h\alpha - ih\alpha^2 - \frac{ih}{2} (5 \Delta^2 + \Lambda^2)$, & l'on trouveroit, après les fubftitutions, que tous les termes des valeurs de k & de l fe détruiroient d'eux mêmes, de manière que ces quantités feroient auffi nulles, comme elles le doivent être dans ce cas; ce qui pourroit fervir, s'il en étoit befoin, à confirmer la bonté de nos formules.

Il ne s'agira donc plus que de mettre, dans les équations de l'Art. préc., Δ cof. ($h t$ — A) à la place de y & Λ fin. ($h t$ — E) à la place de z; ce qui n'aura aucune difficulté; d'ailleurs ce cas eft fi connu des Géomètres qu'il feroit fuperflu de nous y arrêter. Je me contenterai d'obferver;

1.° Que les Apfides de l'orbite fe trouveront aux points où dy $= 0$, & par conféquent où fin. ($h t$ — A) $= 0$;

ce qui donnera pour l'aphelie cof. $(ht - A) = 1$ & $v = \Delta - i\Delta^2 + \frac{3}{2} i^2\Delta^3$, & pour le périhélie cof. $(ht - A) = -1$ & $v = -\Delta - i\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2\Delta^3$; d'où il s'ensuit que le demi-axe de l'ellipse sera $= a(1 - i^2\Delta^2)$ & l'excentricité $= i\Delta \frac{1 + \frac{3}{2} i^2\Delta^2}{1 - i^2\Delta^2} = i\Delta(1 + \frac{5}{2} i^2\Delta^2)$ $= i\Delta$ à très-peu près;

2.° Que par conséquent l'angle $ht - A$ représentera l'anomalie moyenne, & A le lieu de l'aphelie;

3.° Que les limites, c'est-à-dire les plus grandes latitudes seront aux points où $dz = \frac{2izdy}{1-2iy}$, & par conséquent (en négligeant les quantités de l'ordre de i^2) aux points où $\frac{\text{cof.}(ht - E)}{\text{fin.}(ht - E)} = 2i\frac{dy}{hdt}$, c'est-à-dire où cof. $(ht - E) = 2i\frac{dy}{hdt}$; d'où la plus grande valeur de z sera $\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2h^2\Lambda^2)$; de sorte qu'on aura pour la tangente de l'inclinaison de l'orbite $i\Lambda(1 - 2i^2h^2\Delta^2 - \frac{3}{2} i^2h^2\Lambda^2) = i\Lambda$ à très-peu près;

4.° Que, comme $\frac{d^2y}{dt^2} + h^2y = 0$, on aura $\frac{dy}{dt} = - h^2\int y\,dt =$ (à cause de $\frac{dx}{dt} = -2hy$, en négligeant les termes affectés de i) $\frac{h}{2}x$; donc on aura dans les limites $\frac{\text{cof.}(ht - E)}{\text{fin.}(ht - E)} = ix$; & par conséquent cof. $(ht - E)$ $- ix$ fin. $(ht - E) = 0$, ou bien cof. $(ht + ix - E) = 0$, c'est-c' eſt-à-dire coſ. $(\varphi - E) = 0$; ce qui montre que E eſt le lieu du nœud aſcendant, & qu'ainſi l' angle $ht - E$ dénote la diſtance moyenne de la planète au nœud.

LXXXII. Il eſt bon de remarquer que ſi on vouloit réſoudre le problème de l' Art. LXXVIII. d'une manière plus générale, en donnant à tous les termes des équations (l) & (m) des coéficiens indéterminés, on trouveroit, après en avoir fait le calcul, deux équations de condition entre ces mêmes coéficiens; de ſorte que la ſolution ne pourroit avoir lieu que quand ces équations ſeroient identiques d' elles mêmes; or c' eſt préciſément ce qui arrive dans notre cas, & c' eſt-là la raiſon pourquoi il reſte deux coéficiens indéterminés η & σ. Au reſte il eſt facile de voir que cet inconvénient ne vient que de ce que nous avons conſervé la quantité $\frac{dydz}{dt^2}$ au lieu d' y ſubſtituer ſa valeur tirée des équations (l) & (m) comme nous l' avons pratiqué dans l'Art. LII. Ainſi il ſera très-aiſé d'y remédier, & de donner par-là à notre méthode toute la généralité dont elle eſt ſuſceptible.

LXXXIII. Revenons maintenant à notre ſujet, & voyons comment il faut s' y prendre pour intégrer les équations (t) & (u). Pour cela on commencera par mettre dans les expreſſions de Y & Z, à la place de y, z, & x leurs valeurs approchées y, z, & $-2h\int y\,dt$ tirées des équations (q), (r), (s), & de même à la place de y', z', x', les valeurs correſpondantes y', z', & $-2h'\int y'\,dt$; puis on cherchera, par l' intégration, les valeurs de y, z, & de y', z', en y négligeant d' abord tous les termes affectés de i & n; & ces premiéres valeurs étant enſuite ſubſtituées dans Y & Z ſerviront à déterminer plus exactement les mêmes quantités y, z, y', z'.

Or il ſemble d' abord qu'on pourroit ſe contenter de prendre pour premiéres valeurs approchées de y & z celles que nous avons trouvées plus haut (*Art. LXXXI.*), ſavoir

$y = \Delta$ coſ. $(K\,t - A)$, $z = \Lambda$ ſin. $(L\,t - E)$,

& par conſéquent auſſi

$y' = \Delta'$ coſ. $(K' t - A')$, $z' = \Lambda'$ ſin. $(L' t - E')$.

Mais ces valeurs étant ſubſtituées dans les quantités Y & Z; on verra, après le développement des produits des différens *ſinus* & *coſinus*, qu'on aura des termes de cette forme coſ. $[(h\,t + i\,k')\,t - A']$ & ſin. $[(h\,t + i\,l')\,t - E']$, leſquels étant de l'ordre de $i\,n$ dans les équations différentielles ſe trouveront diviſés, après l'intégration, par des quantités du même ordre; de ſorte qu'ils appartiendront auſſi aux premiéres valeurs de y & z.

Le terme $i\,Q\,5\,y'$ coſ. $H\,t$, par exemple, qui ſe trouve dans la quantité Φ donnera par la ſubſtitution de la valeur de y' le terme $\frac{i\,Q\,5}{2}\,\Delta'$ coſ. $[(h + ik')\,t - A']$, à cauſe de $K' = h' + ik'$ & de $H = h - h'$; de ſorte que la quantité Y contiendra le terme $\frac{i\,n\,Q\,5}{2}\,\Delta'$ coſ. $[(h + ik')\,t - A']$, lequel étant intégré (*Art. XLII.*) donnera dans la valeur de y le nouveau terme

$$\frac{i\,n\,Q\,5}{2\,((h + i\,k')^2 - K^2)}\,\Delta \text{ coſ. } [\,(h + i\,k')\,t - A'\,];$$

or $(h + i\,k')^2 - K^2 =$ (en mettant $h + i\,k$ au lieu de K, & négligeant les termes de l'ordre de i^2) $2\,i\,(k' - k)\,h$; de plus on a, à cauſe de $\alpha = 0$ & $f = \frac{i}{h}\,(\frac{5}{2}\,A + \frac{1}{2}\,B)$ (*Art. LXXXI.*), $k = \frac{n}{2\,h}\,(P4 + 2A2)$ (*Art. LXXIX.*); & de même $k' = \frac{n'}{2\,h'}\,(P'\,4 + 2\,A'\,2)$; donc le terme dont il s'agit deviendra

$$\frac{Q\,5}{2\,\frac{n'\,h}{n\,h'}\,(P'\,4 + 2\,A'\,2) - 2\,(P4 + 2\,A2)}\,\Delta \text{ coſ. } [(h + ik')\,t - A'],$$

lequel appartient, comme l'on voit, à la première valeur de y.

On trouvera de même dans la première valeur de y' un terme contenant cof. $[(h' + ik)t - A]$, & qui étant fubftitué dans le même terme $inQ5y'$ cof. Ht de la quantité Y donnera un terme de cette forme cof. $[(h + ik)t - A]$, favoir cof. $(Kt - A)$; de forte que la nouvelle valeur de y renfermera un arc de cercle (*Art. XLII.*).

Le même inconvénient aura lieu, comme il eft aifé de s'en affurer, par rapport à tous les termes de Y & de Z qui renferment y', ou z' multipliés par cof. Ht, ou par fin. Ht. Tels font dans la quantité Y les termes $i(Q5y'$ cof. $Ht + 2hP7\int y'$ fin. $Htdt - 2h'B2\int y'dt$

$\times$ fin. $Ht + 4hh'A3\int\int y'dt \times$ cof. $Htdt)$, & dans la quantité Z le terme $B5z'$ cof. Ht. Ainfi il fera néceffaire d'avoir égard à ces termes dans la première approximation des valeurs de y & z.

On aura donc en premier lieu l'équation fuivante en y

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + in\,(Q5y' \text{ cof. } Ht + 2hP7\int y' \text{ fin. } Ht\,dt$$

$$- 2h'B2\int y'dt \times \text{ fin. } Ht + 4hh'A3\int\int y\,dt \times \text{ cof. } Ht\,dt)$$

$$= 0,$$

ou bien, parceque $\int\int y'dt \times$ cof. $Htdt = \frac{1}{H}\int y'dt \times$ fin. Ht

$- \frac{1}{H}\int y'$ fin. $Htdt$,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2y + in\,[Q5y' \text{ cof. } Ht + (\frac{4hh'}{H}A3 - 2h'B2)$$

$$\int y'dt \times \text{ fin. } Ht - (\frac{4hh'}{H}A3 - 2hP7)\int y' \text{ fin. } Ht\,dt]$$

$$= 0.$$

Or on a, aux quantités de l'ordre de n près, $\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y = 0$; donc on aura aussi, dans la même hypothèse, $\frac{d^2y'}{dt^2} + K'^2 y' = 0$; donc 1.° $\frac{dy'}{dt} + K'^2 \int y' dt = 0$, d'où $\int y' dt = -\frac{dy'}{K'^2 dt}$; 2.° $\int \frac{d^2y'}{dt^2}$ sin. $Htdt + K'^2 \int y'$ sin. $Htdt = 0$; mais $\int \frac{d^2y'}{dt^2}$ sin. $Ht\,dt = \frac{dy'}{dt}$ sin. $Ht - Hy'$ cos. $Ht - H^2 \int y'$ sin. $Ht\,dt$; donc $\frac{dy'}{dt}$ sin. $Ht - Hy'$ cos. $Ht + (K'^2 - H^2) \int y'$ sin. $Htdt$; par conséquent $\int y'$ sin. $Htdt = [\frac{dy'}{dt}$ sin. $Ht - Hy'$ cos. $Ht] : [H^2 - K'^2]$. Donc substituant ces valeurs dans l'équation précédente, elle deviendra

$$\frac{d^2y}{dt^2} + K^2 y + in\left[\left(Q5 + \frac{4bb'}{H^2-K'^2}A3 - \frac{2bH}{H^2-K'^2}P7\right) y' \text{ cos. } Ht + \left(\frac{2b}{H^2-K'^2}P7 - \frac{4bb'H}{(H^2-K'^2)K'^2}A3 + \frac{2b'}{K'^2}B2\right) \frac{dy'}{dt} \text{ sin. } Ht\right] = 0.$$

Ensuite on aura cette équation en z

$$\frac{d^2z}{dt^2} + L^2 z + inB5\, z' \text{ cos. } Ht = 0.$$

On trouvera de même des équations semblables en y' & z', suivant la remarque de l'Art. LXXVII., & l'on aura ainsi quattre équations, lesquelles s'intégreront, comme l'on voit, par la méthode de l'Art. LVIII.

LXXXIV. Puisque $H = h - h'$ (*Art. LXXXV.*) & $K = h + ik$, $L = h + il$ (*Art. LXXIX.*), & de même $K = h' + ik'$, $L' = h' + il'$, on aura le cas de l'Art. LX.

Donc 1.° si on fait

$$M = n\,(Q\,5 + \frac{4\,b\,b'}{H^2 - K'^2}\,A\,3 - \frac{2\,b\,H}{H^2 - K'^2}\,P\,7)$$

$$N = n\,(\frac{2\,b}{H^2 - K'^2}\,P\,7 - \frac{4\,b\,b'\,H}{(H^2 - K'^2)\,K'^2}\,A\,3 + \frac{2\,b'}{K'^2}\,B\,2),$$

& de même

$$M' = n'\,(Q'\,5 + \frac{4\,b'\,b}{H^2 - K^2}\,A'\,3 + \frac{2\,b'\,H}{H^2 - K^2}\,P'\,7)$$

$$N' = n'\,(\frac{2\,b'}{H^2 - K^2}\,P'\,7 + \frac{4\,b'\,b\,H}{(H^2 - K^2)\,K^2}\,A'\,3 + \frac{2\,b}{K^2}\,B'\,2),$$

ensuite

$$P = \frac{M + N\,b'}{4\,b}, \quad P' = \frac{M' + N'\,b}{4\,b'},$$

& qu'on appelle $m\,1$, $m\,2$ les racines de l' équation $(m - k) \times (m - k') - P\,P' = 0$, ensorte que

$$m\,1 = \frac{k + k' + \sqrt{((k - k')^2 + 4\,P\,P')}}{2},$$

$$m\,2 = \frac{k + k' - \sqrt{((k - k')^2 + 4\,P\,P')}}{2},$$

on trouvera (*Art. LXII.* & *LXV.*) que la première valeur approchée de y sera de cette forme

$$\begin{aligned} y = {} & \frac{(m\,1 - k')\,F + P\,F'}{m\,1 - m\,2}\,\text{cos.}\,(h + i\,m\,1)\,t \\ & + \frac{(m\,1 - k')\,G + P\,G'}{m\,1 - m\,2}\,\text{sin.}\,(h + i\,m\,1)\,t \\ & - \frac{(m\,2 - k')\,F + P\,F'}{m\,1 - m\,2}\,\text{cos.}\,(h + i\,m\,2)\,t \\ & - \frac{(m\,2 - k')\,G + P\,G'}{m\,1 - m\,2}\,\text{sin.}\,(h + i\,m\,2)\,t. \quad . \quad (\text{v}) \end{aligned}$$

2.° Si on fait de même

$$Q = \frac{n\,B\,5}{4\,b}, \quad Q' = \frac{n'\,B'\,5}{4\,b'},$$

& qu'on nomme $n\,1$, $n\,2$ les racines de l' équation $(n - l) \times (n - l') - Q Q' = 0$, enforte que

$$n\,1 = \frac{l + l + \sqrt{((l - l')^2 + 4 Q Q')}}{2}$$

$$n\,2 = \frac{l + l' - \sqrt{((l - l')^2 + 4 Q Q')}}{2},$$

on aura

$$\begin{aligned} z = {} & \frac{(n\,1 - l')\,B + Q B'}{n\,1 - n\,2} \text{ cof. } (h + i\,n\,1)\,t \\ & + \frac{(n\,1 - l')\,C + Q C'}{n\,1 - n\,2} \text{ fin. } (h + i\,n\,1)\,t \\ & - \frac{(n\,2 - l')\,B + Q B'}{n\,1 - n\,2} \text{ cof. } (h + i\,n\,2)\,t \\ & - \frac{(n\,2 - l')\,C + Q C'}{n\,1 - n\,2} \text{ fin. } (h + i\,n\,2)\,t \quad . \quad (x) \end{aligned}$$

(F, F', G, G', B, B', C, C' étant des conftantes qu'il faudra déterminer par les obfervations).

Telles font les premières valeurs approchées de y & z ; & pour avoir celles de y' & z', il n' y aura qu'à marquer fimplement d' un trait toutes les lettres qui ne le font point, & *viceverfa.*

Si on vouloit maintenant pouffer l' approximation plus loin, & déterminer plus exactement les quantités y, z, y', z', on fubftitueroit d' abord les valeurs qu'on vient de trouver, dans les termes de Y & de Z que nous avons négligés ; après quoi il n' y auroit plus qu'à fuivre la méthode qui a été expofée dans l' Art. LXIV.

Le peu de tems qui me refte ne me permettant pas d' entrer dans ce détail, je me contenterai d' avoir établi les principes néceffaires pour réfoudre le problème dont il s' agit ; & je me bornerai à examiner ici, d' après les formules données ci-deffus, les inégalités des mouvemens de Jupiter & de Saturne qui font varier l' excentricité &

position de l'aphelie de ces deux Planètes, aussi bien que l'inclinaison & le lieu du nœud de leurs orbites, & qui produisent surtout une altération apparente dans leurs moyens mouvemens; inégalités que les observations ont fait connoitre depuis long-tems, mais que personne jusqu'ici n'a encor entrepris de déterminer avec toute l'exactitude qu'on peut exiger dans un sujet si important.

LXXXV. Soit $m1 + m2 = 2\mu h$ & $m1 - m2 = 2\nu h$, ensorte que

$$\mu = \frac{k + k'}{2h}, \ \& \ \nu = \frac{\surd((k-k')^2 + 4PP')}{2h};$$

supposons de plus

$$F1 = \frac{(k-k')F + 2PF'}{2h\nu}$$

$$G1 = \frac{(k-k')G + 2PG'}{2h\nu},$$

& nous aurons au lieu de l'équation (v) celle-ci

$$\begin{aligned} y = {} & F \text{ cos.} (1 + i\mu)ht \times \text{cos.}\, i\nu ht \\ & - F1 \text{ sin.} (1 + i\mu)ht \times \text{sin.}\, i\nu ht \\ & + G \text{ sin.} (1 + i\mu)ht \times \text{cos.}\, i\nu ht \\ & + G1 \text{ cos.} (1 + i\mu)ht \times \text{sin.}\, i\nu ht. \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$F = \delta \text{ cos.}\, \alpha, \ G = \delta \text{ sin.}\, \alpha,$$
$$F1 = \delta 1 \text{ cos.}\, \alpha 1, \ G1 = \delta 1 \text{ sin.}\, \alpha 1,$$

on aura

$$\begin{aligned} y = {} & \delta \text{ cos.} [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{cos.}\, i\nu ht \\ & - \delta 1 \text{ sin.} [(1 + i\mu)ht - \alpha 1] \times \text{sin.}\, i\nu ht. \end{aligned}$$

Soit encore

$$\alpha 1 = \alpha + \eta, \ \& \ \delta 1 = \beta\delta,$$

on aura $\text{sin.} [(1 + i\mu)ht - \alpha 1] = \text{sin.} [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{cos.}\, \eta - \text{cos.} [(1 + i\mu)ht - \alpha] \times \text{sin.}\, \eta$; donc

$$\begin{aligned} y = {} & \delta (\text{cos.}\, i\nu ht + \beta \text{ sin.}\, \eta \text{ sin.}\, i\nu ht) \text{ cos.} [(1 + i\mu)ht - \alpha] \\ & - \delta\beta \text{ cos.}\, \eta \text{ sin.}\, i\nu ht \text{ sin.} [(1 + i\mu)ht - \alpha]. \end{aligned}$$

Enfin soit $\frac{\text{cos. } i\nu h t + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } i\nu h t}{\beta \text{ cos. } \eta \text{ sin. } i\nu h t} = \frac{\text{cos. } \psi}{\text{sin. } \psi}$, c'est-à-dire

$$\text{cot. } \psi = \frac{\text{cot. } i\nu h t}{\beta \text{ cos. } \eta} + \text{tang. } \eta,$$

& nous aurons

$y = \delta \sqrt{[(\text{cos. } i\nu h t + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } i\nu h t)^2 + (\beta \text{ cos. } \eta \text{ sin. } i\nu h t)^2]}$
$\times \text{cos. } [(1 + i\mu) h t + \psi - \alpha]$

ou bien, en faisant

$\Delta = \delta \sqrt{[\frac{1+\beta^2}{2} + \frac{1-\beta^2}{2} \text{ cos. } 2 i\nu h t + \beta \text{ sin. } \eta \text{ sin. } 2 i\nu h t]}$

& $A = \alpha - \psi - i\mu h t$,

$$y = \Delta \text{ cos. } (h t - A).$$

De même, si on fait $n1 + n2 = 2 \rho h$, $n1 - n2 = 2 \sigma h$, ensorte que

$$\rho = \frac{l + l'}{2h}, \ \sigma = \frac{\sqrt{((l - l')^2 + 4 QQ')}}{2h},$$

ensuite

$$B1 = \frac{(l - l') B + 2 Q B'}{2 h \sigma}$$

$$C1 = \frac{(l - l') C + 2 Q C'}{2 h \sigma},$$

& de plus

$$B = -\lambda . \text{sin. } \varepsilon, \ C = \lambda \text{ cos. } \varepsilon,$$

$$B1 = -\lambda 1 \text{ sin. } \varepsilon 1, \ C1 = \lambda 1 \text{ cos. } \varepsilon 1,$$

$$\varepsilon 1 = \varepsilon + \omega, \ \lambda 1 = \gamma \lambda,$$

$$\text{cot. } \zeta = \frac{\text{cot. } i\sigma h t}{\gamma \text{ cos. } \omega} + \text{tang. } \omega,$$

enfin

$\Lambda = \lambda \sqrt{[\frac{1+\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2} \text{ cos. } 2 i\sigma h t + \gamma \text{ sin. } \omega \text{ sin. } 2 i\sigma h t]}$

& $E = \varepsilon - \zeta - i\rho h t$,

on aura par l'équation (x)

$$z = \Lambda \text{ sin. } (h t - E).$$

Voilà donc les valeurs de y & de z réduites à la même forme que celles de l' Art. LXXI. ; d' où il eſt aiſé de conclure que l' orbite de Jupiter eſt un ellipſe, dans laquelle l' excentricité eſt $i\Delta$, le lieu de l' aphelie A, la tangente de l' inclinaiſon à l' ecliptique $i\Lambda$, & le lieu du nœud aſcendant E. Il en ſera de même de l'orbite de Saturne, en marquant ſeulement les lettres d'un trait.

LXXXVI. Il faudroit préſentement ſubſtituer ces valeurs de y & de z dans les équations (q), (r), & (s) de l' Art. LXXX., pour en déduire les expreſſions des quantités y, z, & x, & par conſéquent celles de r, q, & φ (*Art. LXXII.*); mais ſans entrer dans ce détail, il ſuffira de remarquer

1.° Que les quantités μ, ν, ρ, & σ étant de l'ordre de n, comme on le verra ci-après, les variations des quantités Δ, Λ, A, & E ſeront de l' ordre de i n; d' où il s' enſuit que les expreſſions de y & de z ſeront à très-peu près les mêmes (c' eſt-à-dire aux quantités de l' ordre de i^2 n près), que ſi ces quantités étoient conſtantes. De ſorte que pour avoir le rayon vecteur de l' orbite, ainſi que la tangente de l' inclinaiſon, pour un inſtant quelconque, il n'y aura qu'à calculer l'un & l' autre par les méthodes ordinaires, d' après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A, & E regardés comme conſtans.

2.° Que, ſi on dénote par $(\frac{dx}{dt})$ la valeur de $\frac{dx}{dt}$, en ſuppoſant Δ, Λ, A, & E conſtantes, on aura (abſtraction faite du terme n Ξ qu'on doit négliger ici)

$$\frac{dx}{dt} = (\frac{dx}{dt}) + f + i(h + if) \times (\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Lambda^2) = 0,$$

parceque, dans l' hypothèſe de Δ & Λ conſtantes, les termes tous conſtans $f + i(h + if) \times (\frac{5}{2}\Delta^2 + \frac{1}{2}\Delta^2)$ doivent être ſuppoſés $= 0$, comme nous l' avons fait

(*Art.* LXXXI.); or dans le cas préſent où les quantités Δ & Λ ſont en partie conſtantes, & en partie variables, on ſera ſimplement $f + i[h + if] \times [\frac{5}{4}\delta^2(1+\beta^2) + \frac{1}{4}\lambda^2(1+\gamma^2)] = 0$, & on conſervera dans la valeur de $\frac{dx}{dt}$ les termes variables qui entrent dans Δ^2 & de Λ^2, ſavoir $\delta^2(\frac{1-\beta^2}{2}\cos. 2i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht)$, & $\lambda^2(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos. 2i\sigma ht + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht)$; de ſorte que l'on aura, en négligeant les quantités de l'ordre de i^3,

$$f = -\frac{ih}{4}[5\delta^2(1+\beta^2) + \lambda^2(1+\gamma^2)],$$

& enſuite

$$\frac{dx}{dt} = (\frac{dx}{dt}) + \frac{5ih}{2}\delta^2(\frac{1-\beta^2}{2}\cos. 2i\nu ht + \beta \sin. \eta \sin. 2i\nu ht) + \frac{ih}{2}\lambda^2(\frac{1-\gamma^2}{2}\cos. 2i\sigma ht + \gamma \sin. \omega \sin. 2i\sigma ht).$$

Pour intégrer cette équation, ſoit (x) la valeur de x, dans la ſuppoſition de Δ, Λ, A, & E conſtantes, & dénotons par $\mathrm{d}(x)$ la différentielle de (x) en faiſant ces quantités ſeules variables, il eſt clair que la valeur compléte de $\frac{d(x)}{dt}$ ſera $(\frac{dx}{dt}) + \frac{\mathrm{d}(x)}{dt}$; de manière qu'on aura, en intégrant, $(x) = \int(\frac{dx}{dt})dt + \int \mathrm{d}(x)$, & par conſéquent $\int(\frac{dx}{dt})dt = (x) - \int \mathrm{d}(x)$. Mais comme les différences des quantités Δ, Λ, A, & E, ſont de l'ordre de $i n$, la quantité $\int \mathrm{d}(x)$ ſera auſſi du même ordre, & par conſéquent elle pourra être négligée, du moins dans la recherche présente ; on aura donc simplement $\int (\frac{dx}{dt})\, dt$

$= (x)$; donc

$$x = (x) + \frac{5\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}\,\text{sin.}\, 2i\nu ht - \beta\,\text{sin.}\,\eta\,(\text{cos.}\; 2i\nu ht - 1)\right]$$

$$+ \frac{\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}\,\text{sin.}\; 2\,i\,\sigma\,h\,t - \gamma\,\text{sin.}\,\omega\,(\text{cos.}\; 2\,i\,\sigma\,h\,t - 1)\right],$$

& par conséquent

$$\phi = h\,t + i\,(x) + \frac{5\,i\,\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}\,\text{sin.}\; 2\,i\,\nu\,h\,t - \beta\,\text{sin.}\,\eta\right.$$

$$\left.(\text{cos.}\; 2\,i\,\nu\,h\,t - 1)\right] + \frac{i\,\lambda^2}{4\sigma}\left[\frac{1-\gamma^2}{2}\,\text{sin.}\; 2\,i\,\sigma\,ht - \gamma\,\text{sin.}\,\omega\right.$$

$$\left.(\text{cos.}\; 2\,i\,\sigma\,h\,t - 1)\right],$$

où l' on remarquera que $h\,t$ est l' angle du mouvement moyen, & $i\,(x)$ l' équation du centre calculée à l' ordinaire, & combinée avec la réduction à l' écliptique.

Or comme les coéficiens $i\,\nu$ & $i\,\sigma$ sont extrémement petits, il est visible que, tant que l'angle $h\,t$ ne sera pas fort grand, on aura à très-peu près sin. $2i\nu ht = 2i\nu ht$, cos. $2\,i\,\nu\,h\,t = 1$, & sin. $2\,i\,\sigma\,h\,t = 2\,i\,\sigma\,h\,t$, cos. $2i\sigma ht = 1$, & par conséquent

$$\phi = \left[1 + \frac{5}{4}\,i^2\delta^2\,(1-\beta^2) + \frac{1}{4}\,i^2\lambda^2(1-\gamma^2)\right] ht + i\,(x);$$

de sorte que le mouvement moyen sera augmenté en raison de $1 + \frac{5}{4}\,i^2\delta^2\,(1-\beta^2) + \frac{1}{4}\,i^2\lambda^2\,(1-\gamma^2)$ à 1.

Si donc on veut que le terme ht représente le moyen mouvement *apparent* de la Planète, c' est-à-dire celui qui résulte des observations de sa révolution, il faudra faire simplement $f = -\frac{i\,h}{2}\,(5\,\delta^2 + \lambda^2)$; & l' on aura pour lors

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right) + \frac{5ib}{2}\delta^2\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\text{cof. } 2ivht - 1) + \beta \text{ fin. } \eta \text{ fin. } 2ivht\right] + \frac{ib}{2}\lambda^2\left[\frac{1-\gamma^2}{2}(\text{cof. } 2i\sigma ht - 1) + \gamma \text{ fin. } \omega \text{ fin. } 2i\sigma ht\right];$$

d' où l' on trouvera

$$\varphi = ht + i(x) + \frac{5i\delta^2}{4\nu}\left[\frac{1-\beta^2}{2}(\text{fin. } 2i\nu ht - 2i\nu ht) - \beta \text{ fin. } \eta(\text{cof. } 2i\nu ht - 1)\right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma}\left[\left(\frac{1-\gamma^2}{2} \text{ fin. } 2i\sigma ht - 2i\sigma ht\right) - \gamma \text{ fin. } \omega(\text{cof. } 2i\sigma ht - 1)\right].$$

Ainsi, tant que les angles $2i\nu ht$ & $2i\sigma ht$ seront fort petits, ce qui aura lieu pendant un certain nombre de révolutions, on aura à très-peu près $\varphi = ht + i(x)$; c'est-à-dire que la longitude de la Planète sera aussi la même que celle qu'on trouveroit par les méthodes ordinaires d' après les élémens $i\Delta$, $i\Lambda$, A, & E supposés constans.

LXXXVII. Pour faire maintenant usage de nos formules, on remarquera

1.° Que $\text{n} = \frac{\text{m}'}{1+i\text{m}} b$ (*Art. LXXVI.*) $= \text{m}'h^2$ à très-peu près, ensorte que $i\text{n} = i\text{m}'h^2 = \frac{J'}{I}h^2$, & $i\text{n}' = \frac{J}{I}h'^2$.

2.° Que l'on aura par l'Art. LXXIX. $A = h^2(\alpha^2 - \Delta^2)$ & $B = -h^2\Lambda^2$, c' est-à-dire, en ne prenant, comme on le doit, que les termes constans des valeurs de Δ^2 & de Λ^2, $A = h^2\left[\alpha^2 - \frac{1}{2}\delta^2(1+\beta^2)\right]$ & $B = -\frac{1}{2}h^2\lambda^2(1+\gamma^2)$; ce qui donnera, à cause de $\alpha = 0$, & de $\text{f} = -\frac{ib}{4}$

$\times [5\delta^2$

$\times [5\delta^2(1+\beta^2)+\lambda^2(1+\gamma^2)]$, $k = \frac{n}{2b}(P4+2A2)$ & $l = \frac{n}{2b}A\,4$; de ſorte qu'on aura

$$ik = \frac{J'}{2I}h(P\,4+2\,A\,2),\ il = \frac{J'}{2I}h\,A\,4$$

& de même

$$ik' = \frac{J}{2I}h'(P'\,4+2\,A'\,2),\ il' = \frac{J}{2I}h'A'\,4.$$

Si on vouloit employer l' autre valeur de f, ſavoir $-\frac{ih}{2}(5\delta^2+\lambda^2)$, il faudroit alors mettre dans les valeurs de *A* & de *B*, δ^2 au lieu de Δ^2, & λ^2 au lieu de Λ^2, & l'on trouveroit les mêmes expreſſions de *k* & de *l* que ci-devant.

3.° Que $\frac{I+J}{a^3} = b = h^2 + ig$ (*Art. LXXVI.*) $= h^2$ à très-peu près, parceque *g* eſt déja une quantité très-petite (*Art. LXXIX.*). Donc on aura auſſi $\frac{I+J'}{a'^3} = h'^2$, & par conſéquent $\frac{I+J'}{I+J} \times \frac{a^3}{a'^3} = \frac{h'^2}{h^2}$, ou bien, à cauſe que les maſſes *J* & *J'* de Jupiter & de Saturne ſont trés-petites par rapport à celle du Soleil *I*, $\frac{a^3}{a'^3} = \frac{h'^2}{h^2}$, de ſorte qu'on aura $\frac{a}{a'} = (\frac{h'}{h})^{\frac{2}{3}}$.

Cela poſé, on commencera par déterminer, ſuivant la méthode de l' Art. LXXIII. les coéficiens A, B, C &c., & P, Q, R &c.; après quoi on cherchera les valeurs des quantités A 2, A 3, A 4, B 2, B 5, P 4, P 7, & Q 5, ainſi que celles de A' 2, A' 3, A' 4 &c. qui entrent dans les expreſſions de *k*, *l*, *P*, *Q*, & de *k'*, *l'*,

P', Q'. Or en faisant $s = \frac{3}{2}$, & $\frac{a}{a'} = \mathrm{a}$ (je mets ici a au lieu de α, parceque j' aurai occasion dans la suite de faire servir cette dernière lettre à un autre usage) on aura par l' Art. cité $(1 - 2\,\mathrm{a}\,\text{cos.}\,\theta + \mathrm{a}^2)^{-\frac{3}{2}} = \mathrm{A} + \mathrm{B}\,\text{cos.}\,\theta + \mathrm{C}\,\text{cos.}\,2\,\theta + \&c.$; donc, ayant supposé (*Art. LXXIV.*) $(a^2 - 2\,a\,a'\,\text{cos.}\,\theta + a'^2)^{-\frac{3}{2}} = \mathrm{A}\,1 + \mathrm{B}\,1\,\text{cos.}\,\theta + \mathrm{C}\,1\,\text{cos.}\,2\,\theta + \&c.$, on aura $\mathrm{A}\,1 = \frac{\mathrm{A}}{a'^3}$, $\mathrm{B}\,1 = \frac{\mathrm{B}}{a'^3}$, $\mathrm{C}\,1 = \frac{\mathrm{C}}{a'^3}$ &c. On trouvera de même $\mathrm{P}\,1 = \frac{\mathrm{P}}{a'^5}$, $\mathrm{Q}\,1 = \frac{\mathrm{Q}}{a'^5}$, $\mathrm{R}\,1 = \frac{\mathrm{R}}{a'^5}$ &c., & l' on remarquera que les quantités A 1, B 1, C 1 &c., P 1, Q 1, R 1 &c. restent nécessairement les mêmes, en changeant a en a' & a' en a, de sorte qu'on aura aussi $\mathrm{A}'\,1 = \frac{\mathrm{A}}{a'^3}$, $\mathrm{B}'\,1 = \frac{\mathrm{B}}{a'^3}$ &c., $\mathrm{P}'\,1 = \frac{\mathrm{P}}{a'^5}$, $\mathrm{Q}'\,1 = \frac{\mathrm{Q}}{a'^5}$ &c. Faisant donc ces substitutions dans les formules de l'Art. LXXV., & mettant par tout a au lieu de $\frac{a}{a'}$, on trouvera d' abord

$$\mathrm{A}\,2 = \mathrm{a}^3\,\mathrm{A} - \mathrm{a}^2\,\frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\mathrm{A}\,3 = \mathrm{a}^2\,\frac{2\mathrm{A} - \mathrm{C}}{2} - \mathrm{a}^2$$

$$\mathrm{A}\,4 = \mathrm{a}^3\,\mathrm{A} - \mathrm{A}\,2 = \mathrm{a}^2\,\frac{\mathrm{B}}{2}$$

$$\mathrm{B}\,2 = \mathrm{a}^3\,\mathrm{B} - \mathrm{a}^2\,\frac{2\mathrm{A} + \mathrm{C}}{2} + \mathrm{a}^2$$

$$\mathrm{B}\,5 = -\,\mathrm{a}^2\,\mathrm{B},$$

ensuite on aura (*Art. LXXIV.*)

$$\mathrm{P}\,2 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\,\frac{\mathrm{Q}}{2} - \mathrm{a}^2\,\mathrm{P}\right)$$

$$\mathrm{Q}\,2 = \frac{3}{a'^3}\left(\mathrm{a}\,\frac{2\mathrm{P} + \mathrm{R}}{2} - \mathrm{a}^2\,\mathrm{Q}\right)$$

$$R_2 = \frac{3}{a'^3}\left(a\,\frac{Q+S}{2} - a^2 R\right)$$

&c.

$$P_3 = \frac{3}{a'^3}\left(a\,\frac{Q}{2} - P\right)$$

$$Q_3 = \frac{3}{a'^3}\left(a\,\frac{2P+R}{2} - Q\right)$$

$$R_3 = \frac{3}{a'^3}\left(a\,\frac{Q+S}{2} - R\right)$$

&c.

ou bien, en faiſant pour plus de ſimplicité

$$p = 3\left(a\,\frac{Q}{2} - a^2 P\right)$$

$$q = 3\left(a\,\frac{2P+R}{2} - a^2 Q\right)$$

$$r = 3\left(a\,\frac{Q+S}{2} - a^2 R\right)$$

&c.

$$p1 = 3\left(a\,\frac{Q}{2} - P\right)$$

$$q1 = 3\left(a\,\frac{2P+R}{2} - Q\right)$$

$$r1 = 3\left(a\,\frac{Q+S}{2} - R\right)$$

&c.

on aura

$$P_2 = \frac{p}{a'^3},\ Q_2 = \frac{q}{a'^3},\ R_2 = \frac{r}{a'^3}\ \&c.$$

$$P_3 = \frac{p1}{a'^3},\ Q_3 = \frac{q1}{a'^3},\ R_3 = \frac{r1}{a'^3}\ \&c.$$

De là on trouvera, par les formules de l'Art. LXXV.,

$$P_4 = a^{\check{3}}(A + p) - a^2\,\frac{q}{2},$$

$$P\,7 = a^2\left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p\,1 - r\,1}{2}\right) + 2\,a^2, \ \&$$

$$Q\,5 = a^3 q\,1 - a^2\left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p\,1+r\,1}{2}\right) - 2\,a^2.$$

On trouvera de méme les autres quantités A′2, B′3 &c.; il n' y aura pour cela qu'à mettre dans les formules des Art. cités, a' au lieu de a & a au lieu de a', & marquer ensuite toutes les autres lettres d' un trait ; ce qui donnera, apres les substitutions,

$$A'2 = A - a\frac{B}{2}$$

$$A'3 = a\,\frac{2A-C}{2} - \frac{1}{a^2}$$

$$A'4 = A - A'2 = a\frac{B}{2}$$

$$B'2 = B - a\,\frac{2A+C}{2} + \frac{1}{a^2}$$

$$B'5 = - a\,B,$$

& ensuite

$$P'2 = \frac{p\,1}{a'^2},\ Q'2 = \frac{q\,1}{a'^2},\ R'2 = \frac{r\,1}{a'^2}\ \&c.$$

$$P'3 = \frac{p}{a'^2},\ Q'3 = \frac{q}{a'^2},\ R'3 = \frac{r}{a'^2}\ \&c.$$

d' où

$$P'4 = A + p\,1 - a\,\frac{q\,1}{2}$$

$$P'7 = a\left(\frac{2A-C}{2} + \frac{2p-r}{2}\right) + \frac{2}{a^2}$$

$$Q'5 = q - a\left(\frac{2A+C}{2} + \frac{2p+r}{2}\right) - \frac{2}{a^2}.$$

Enfin on trouvera par l' Art. LXXXIV., en mettant à la place de H, $h - h'$, à la place de K & de K' leurs valeurs approchées h & h', & la place de i n & de i n′, $\frac{J'}{I}h^2$ & $\frac{J}{I}h'^2$,

$$iP = \frac{J'}{4I} h (Q5 - 4A3 - 2P7 + 2B2)$$

$$iP' = \frac{J}{4I} h' (Q'5 - 4A'3 - 2P'7 + 2B'2)$$

$$iQ = \frac{J'}{4I} h B5 \quad \& \quad iQ' = \frac{J}{4I} h' B'5.$$

Par ces valeurs de iP, iP', iQ, iQ', & par les valeurs de ik, ik', il, il' trouvées ci-dessus, on trouvera les valeurs de $i\mu$, $i\nu$, $i\rho$, $i\sigma$ (*Art. LXXXV.*) & ces mêmes valeurs étant ensuite multipliées par $\frac{h}{h'}$, on aura celles de $i\mu'$, $i\nu'$, $i\rho'$, $i\sigma'$.

Maintenant on aura par le même Art.

$$\text{tang.}\ \alpha 1 = \frac{G1}{F1} = \frac{(k-k)G + 2PG'}{(k-k')F + 2PF'}$$

$$= \frac{(k-k')\delta\ \text{fin.}\ \alpha + 2P\delta'\ \text{fin.}\ \alpha'}{(k-k')\delta\ \text{cof.}\ \alpha + 2P\delta'\ \text{cof.}\ \alpha'} \quad \&$$

$\delta 1 = \sqrt{[(F1)^2 + (G1)^2]} = \sqrt{[(k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')}$ $P\delta\delta'(\text{fin.}\ \alpha \times \text{fin.}\ \alpha' + \text{cof.}\ \alpha \times \text{cof.}\ \alpha') + 4P^2\delta'^2] : 2h\nu$.

Soit $\alpha' - \alpha = A$, c'est-à-dire $\alpha' = \alpha + A$, & l'on aura

$$\text{tang.}\ \alpha 1 = \frac{((k-k')\delta + 2P\delta'\ \text{cof.}\ A)\ \text{fin.}\ \alpha + 2P\delta'\ \text{fin.}\ A \cdot \text{cof.}\ \alpha}{((k-k')\delta + 2P\delta'\ \text{cof.}\ A)\ \text{cof.}\ \alpha - 2P\delta'\ \text{fin.}\ A \cdot \text{fin.}\ \alpha}$$

$$\delta 1 = \frac{\sqrt{((k-k')^2\delta^2 + 4(k-k')P\delta\delta'\ \text{cof.}\ A + 4P^2\delta'^2)}}{2h\nu};$$

Donc si on fait

$$(k-k')\delta + 2P\delta'\ \text{cof.}\ A = \delta s\ \text{cof.}\ u$$

$$\& \quad 2P\delta'\ \text{fin.}\ A = \delta s\ \text{fin.}\ u$$

on aura

$$1.^\circ\ \text{tang.}\ \alpha 1 = \frac{\text{cof.}\ u \cdot \text{fin.}\ \alpha + \text{fin.}\ u \cdot \text{cof.}\ \alpha}{\text{cof.}\ u \cdot \text{cof.}\ \alpha - \text{fin.}\ u \cdot \text{fin.}\ \alpha} = \frac{\text{fin.}\ (u+\alpha)}{\text{cof.}\ (u+\alpha)}$$

$= \text{tang.}\ (u+\alpha)$; donc $\alpha 1 = u + \alpha$, & par conséquent $\eta = u$.

2.° $\delta s = \surd [((k - k')\delta + 2P\delta' \text{ cof. } A)^2 + (2P\delta' \text{ fin. } A)^2] = 2h\nu\delta\, 1 = 2h\nu\beta\delta$; donc $\beta = \frac{s}{2h\nu}$.

Donc, fi on fait pour plus de fimplicité $\frac{\delta'}{\delta} = \mathrm{b}$, on aura

$$\beta = \frac{\surd((k - k' + 2P\mathrm{b}\text{ cof. }A)^2 + (2P\mathrm{b}\text{ fin. }A)^2)}{2h\nu},$$

$$\text{fin. }\eta = \frac{P\mathrm{b}\text{ fin. }A}{h\nu\beta},\ \text{cof. }\eta = \frac{k - k' + 2P\mathrm{b}\text{ cof. }A}{2h\nu\beta}.$$

Et pour avoir les valeurs de β', fin. η', & cof. η', il n'y aura qu'à mettre k' au lieu de k, α' au lieu de α, δ' au lieu de δ, *& viceverfa*, & marquer enfuite toutes les autres lettres d'un trait; ce qui donnera, à caufe de $\mathrm{b} = \frac{\delta'}{\delta}$ & $A = \alpha' - \alpha$,

$$\beta' = \frac{\surd[(k' - k + \frac{2P'}{\mathrm{b}}\text{ cof. }A)^2 + (\frac{2P'}{\mathrm{b}}\text{ fin. }A)^2]}{2h'\nu'},$$

$$\text{fin. }\eta' = -\frac{P'\text{ fin. }A}{\mathrm{b}h'\nu'\beta'},\ \text{cof. }\eta' = \frac{k' - k + \frac{2P'}{\mathrm{b}}\text{ cof. }A}{2h'\nu'\beta'}.$$

Si on fait de même $\varepsilon' - \varepsilon = E$, & $\frac{\lambda'}{\lambda} = \mathrm{c}$, on trouvera par des procédés femblables

$$\gamma = \frac{\surd((l - l' + 2Q\mathrm{c}\text{ cof. }E)^2 + (2Q\mathrm{c}\text{ fin. }E)^2)}{2h\sigma},$$

$$\text{fin. }\omega = \frac{Q\mathrm{c}\text{ fin. }E}{h\sigma\gamma},\ \text{cof. }\omega = \frac{l - l' + 2Q\mathrm{c}\text{ cof. }E}{2h\sigma\gamma};$$

& enfuite

$$\gamma' = \frac{\surd[(l' - l + \frac{2Q'}{\mathrm{c}}\text{ cof. }E)^2 + (\frac{2Q'}{\mathrm{c}}\text{ fin. }E)^2]}{2h'\sigma'},$$

$$\sin.\,\omega' = -\frac{Q'\sin.\,E}{c\,h'\sigma'\gamma'},\ \cos.\,\omega' = \frac{l' - l + \frac{2Q'}{c}\cos.\,E}{2h'\sigma'\gamma'};$$

LXXXVIII. Pour déterminer maintenant les conſtantes δ, λ, α, ε, & δ', λ', α', ε', on remarquera qu'en ſuppoſant $t = 0$, on a $\Delta = \delta$, $\Lambda = \lambda$, $A = \alpha$, $E = \varepsilon$, & par conſéquent auſſi $\Delta' = \delta'$, $\Lambda' = \lambda'$, $A' = \alpha'$, & $E' = \varepsilon'$. On cherchera donc les élémens de la théorie de Jupiter & de Saturne pour une certaine époque, par exemple pour le commencement de l'année 1750., & l'on fera

$i\delta$ = à l'excentricité de Jupiter,
$i\lambda$ = à la tangente de l'inclinaiſon de ſon orbite par rapport à l'écliptique,
α = à la longitude de l'aphelie,
ε = à la longitude du nœud aſcendant,

& de même

$i\delta'$ = à l'excentricité de Saturne,
$i\lambda'$ = à la tangente de ſon inclinaiſon à l'écliptique,
α' = à la longitude de l'aphelie,
ε' = à la longitude du nœud.

A l'égard des conſtantes h & h', on les déterminera à l'aide des mouvemens moyens de Jupiter & de Saturne : car on aura

$$\frac{h}{h'} = \frac{\text{mouv. moy. Jup.}}{\text{mouv. moy. Sat.}}.$$

LXXXIX. Voila toutes les quantités qu'il eſt néceſſaire de connoitre pour déterminer les perturbations de Jupiter & de Saturne, en vertu de leur action réciproque. Nous allons remettre ici ſous les yeux du Lecteur les principales altérations du mouvement de ces deux Planètes.

Soient T & T' les moyens mouvemens de Jupiter & de Saturne comptés depuis l'époque, pour laquelle on a déterminé les élémens de ces deux Planètes, & on trouvera

1.° Qu'au bout du tems, qui répond au mouvement moyen T, l' excentricité de Jupiter se trouvera augmentée en raison de

$$\surd \left[\frac{1+\beta^2}{2} + \frac{1-\beta^2}{2} \text{cos. } 2\, i\, \sigma\, T + \beta \text{ sin. } \eta \times \text{sin. } 2\, i\, \nu T \right] \text{ à } 1 .$$

2.° Que la tangente de l' inclinaison de l' orbite sera pareillement augmentée en raison de

$$\surd \left[\frac{1+\gamma^2}{2} + \frac{1-\gamma^2}{2} \text{cos. } 2\, i\sigma T + \gamma \text{ sin. } \omega \times \text{sin. } 2\, i\sigma T \right] \text{ à } 1 .$$

3.° Que le lieu de l' aphelie se trouvera moins avancé d' un arc égal à

$$i\, \mu\, T + \text{arc. cot. } \left(\frac{\text{cot. } i\, \nu\, T}{\beta \text{ cos. } \eta} + \text{tang. } \eta \right).$$

4.° Que le lieu du nœud sera aussi moins avancé d'un arc égal à

$$i\, \rho\, T + \text{arc. cot. } \left(\frac{\text{cot. } i\, \sigma\, T}{\gamma \text{ cos. } \omega} + \text{tang. } \omega \right).$$

5.° Que le mouvement de Jupiter par rapport à l'écliptique sera altéré d' une quantité égale à

$$\frac{5\, i\, \delta^2}{4\, \nu} \left[\frac{1-\beta^2}{2} (\text{sin. } 2\, i\, \nu\, T - 2\, i\, \nu\, T) - \beta \text{ sin. } \eta\, (\text{cos. } 2\, i\, \nu\, T - 1) \right] + \frac{i\lambda^2}{4\sigma} \left[\frac{1-\gamma^2}{2} (\text{sin. } 2\, i\, \sigma\, T - 2\, i\, \sigma\, T) - \gamma \text{ cos. } \omega\, (\text{cos. } 2\, i\, \sigma\, T - 1) \right];$$

c' est-à-dire qu'il faudra ajouter à sa longitude un angle égal à cette quantité.

On en dira autant de Saturne, avec cette seule différence qu'il faudra marquer les lettres d' un trait.

XC. Nous verrons plus bas dans l'Art. suiv. que les coéficiens $i\nu$ & $i\sigma$ sont = environ $\frac{1}{10000}$; de sorte que durant plusieurs revolutions les angles $2\, i\, \nu\, T$ & $2\, i\, \sigma\, T$ seront asses petits pour qu'on puisse supposer, sans erreur sensible, sin. $2\, i\, \nu\, T = 2\, i\, \nu\, T$, sin. $2\, i\, \sigma\, T = 2\, i\, \sigma\, T$, & cos. $2\, i\nu T = 1$, cos. $2\, i\, \sigma\, T = 1$. Donc

1.° L'aug

1.° L' augmentation de l' excentricité de Jupiter ſera à très-peu près dans la raiſon de $1 + i\nu\beta$ ſin. $\eta \times T$ à 1 ; c' eſt-à-dire de $1 + \frac{iP}{b}$ b ſin. $A \times T$ à 1 ; de ſorte que la valeur de $i\delta$ croitra de la quantité $i\delta' \times \frac{iP}{b}$ ſin. $A \times T$. Or on ſait que dans les ellipſes qui ſont peu excentriques, la plus grande équation eſt à très-peu près égale au double de l' excentricité ; d'où il s'enſuit que la plus grande équation de Jupiter ira en augmentant, & que ſa variation ſera, au bout de n revolutions à compter depuis l'époque donnée de,

$$2\, i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ ſin. } A \times 360°\, n\,.$$

2.° La tangente de l'inclinaiſon de Jupiter à l'écliptique croitra de même d'une quantité égale à $i\lambda' \times \frac{iQ}{b}$ ſin. $E \times T$, & comme cette tangente eſt fort petite, ainſi qu'on le verra plus bas, on aura pour la variation de l' inclinaiſon de Jupiter à l' écliptique pendant n revolutions

$$i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ ſin. } E \times 360°\, n\,.$$

3.° Le mouvement de l'aphelie ſera repréſenté à très-peu près par $-\left(i\mu + \frac{i\nu\beta \text{ coſ. } \eta}{1 + i\nu\beta \text{ ſin. } \eta \cdot T}\right) T$, ou encore par $-(i\mu + i\nu\beta$ coſ. $\eta)\, T + i^2\nu^2\beta^2$ coſ. $\eta \times$ ſin. $\eta \times T^2$, c' eſt-à-dire par $-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b coſ. } A\right) T + \frac{iP}{b}$ b ſin. $A\left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b} \text{ b coſ. } A\right) T^2$; où l'on voit que le terme $-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{ b coſ. } A\right) T$ exprime le mouvement moyen & uniforme de l' aphelie, & que le terme $\frac{iP}{b}$ b ſin. $A\left(\frac{ik - ik'}{2b} +\right.$

$\frac{iP}{b}$ b cos. A) T^2 donne une inégalité du mouvement de l'aphelie, laquelle augmente comme les quarrés des tems.

Ainsi le mouvement moyen de l'aphelie de Jupiter sera pour n revolutions de cette Planète de

$$-\left(\frac{ik}{b} + \frac{iP}{b} \text{b cos. } A\right) 360^\circ n,$$

& l'inégalité croissante du mouvement de cet aphelie sera de

$$\frac{iP}{b} \text{b sin. } A \left(\frac{ik - ik'}{2b} + \frac{iP}{b} \text{b cos. } A\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

4.° Le mouvement des nœuds de Jupiter sera composé de même de deux parties, dont l'une croitra uniformément, & donnera le mouvement moyen du nœud de

$$-\left(\frac{il}{b} + \frac{iQ}{b} \text{c cos. } E\right) 360^\circ n,$$

& dont l'autre suivra la loi du quarré du tems, & donnera une inégalité croissante de

$$\frac{iQ}{b} \text{c sin. } E \left(\frac{il - il'}{2b} + \frac{iQ}{b} \text{c cos. } E\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

5.° Le mouvement de Jupiter en longitude sera sujet à une altération de $\left(\frac{5 i^3 \delta^2 \nu}{2} \beta \text{ sin. } \eta + \frac{i^3 \lambda^2 \nu}{2} \gamma \text{ sin. } \omega\right) T^2$ à très-peu près, c'est-à-dire de $\left(\frac{5}{2} i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ sin. } A + \frac{1}{2} i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ sin. } E\right) T^2$; ce qui donne, comme l'on voit, dans le mouvement de cette Planète une inégalité croissante comme les quarrés des tems, & qui sera au bout de n revolutions de

$$\left(\frac{5}{2} i\delta \times i\delta' \times \frac{iP}{b} \text{ sin. } A + \frac{1}{2} i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ}{b} \text{ sin. } E\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17' 44''} \times 360^\circ n^2.$$

On trouvera de la même manière

1.° Que, pendant n révolutions de Saturne à compter depuis la même époque, la plus grande équation de cette Planète variera de

$$- 2\, i\,\delta \times \frac{i\,P'}{b'} \text{ſin. } A \times 360^\circ n\,.$$

2.° Que l' inclinaiſon de ſon orbite à l' écliptique variera dans le même tems de

$$- i\lambda \times \frac{iQ'}{b'} \text{ſin. } E \times 360^\circ n\,.$$

3.° Que le mouvement moyen & uniforme de l'aphelie de Saturne ſera exprimé par

$$- \left(\frac{ik'}{b'} + \frac{i\,P'}{b'} \times \frac{1}{\text{b}} \text{coſ. } A\right) 360^\circ n\,,$$

& que de plus le mouvement de cet aphelie ſera ſujet à une inégalité croiſſante comme les quarrés des tems, laquelle ſera pour n révolutions de

$$- \frac{i\,P'}{b'} \times \frac{1}{\text{b}} \text{ſin. } A \left(\frac{ik'-ik}{2\,b'} + \frac{i\,P'}{b'} \times \frac{1}{\text{b}} \text{coſ.} A\right) \frac{360^\circ}{57^\circ\, 17'\, 44''} \times 360^\circ n^2.$$

4.° Que le mouvement moyen des nœuds de Saturne ſera de

$$- \left(\frac{i\,l'}{b'} + \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\text{c}} \text{coſ. } E\right) 360^\circ n\,,$$

& qu' il y aura auſſi, dans le mouvement des nœuds de cette Planète, une inégalité de la même eſpèce, laquelle ſera repréſentée par

$$- \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\text{c}} \text{ſin. } E \left(\frac{il'-il}{2b'} + \frac{iQ'}{b'} \times \frac{1}{\text{c}} \text{coſ.} E\right) \frac{360^\circ}{57^\circ 17\, 44''} \times 360^\circ n^2.$$

5.° Qu'enfin le mouvement de Saturne en longitude ſera ſujet à une inégalité croiſſante comme les quarrés des tems, & dont la valeur ſera, au bout de n révolutions, de

$$- \left(\frac{5}{2} i\delta \times i\delta' \times \frac{i\,P'}{b'} \text{ſin.} A + \frac{1}{2} i\lambda \times i\lambda' \times \frac{iQ'}{b'} \text{ſin.} E\right) \frac{360^\circ}{57^\circ\, 17'\, 44''} \times 360^\circ n^2.$$

Au reſte il faut ſe reſſouvenir que ces propoſitions ceſſent d' être exactes, lorſqu'après un grand nombre des révolutions, les angles $2\, i\, \nu\, T$, $2\, i\, \sigma\, T$, & $2\, i\, \nu' T'$, $2\, i\, \sigma' T'$ commencent à devenir conſidérables.

XCI. Suivant les tables de M. Halley, le mouvement moyen de Jupiter en 100. années Juliennes eſt 8. rev.

$5^s\ 6^\circ\ 28'\ 11''$, c'eſt-à-dire $10931291''$, d'où retranchant la preceſſion ſéculaire des équinoxes, laquelle eſt de $5034''$ on a pour le mouvement ſéculaire de Jupiter $10926257''$.

Les mêmes tables donnent le mouvement moyen de Saturne en 100. ans de 3 rev. $4^s\ 23^\circ\ 6'\ 0''$, c'eſt-à-dire de $4403160''$, d'où l'on trouve pour le mouvement ſéculaire de Saturne $4398126''$.

On aura donc $\frac{b'}{b} = \frac{4398126}{10926257} = 0,\ 402528$; d'où l'on tire $a = 0,\ 545169$.

De là on trovera

$A = 2,\ 178104$	$P = 6,\ 891711$
$B = 3,\ 183228$	$Q = 12,\ 403290$
$C = 2,\ 080116$	$R = 9,\ 890764$
$D = 1,\ 294032$	$S = 7,\ 315770$
&c.	&c.

& enſuite

$A2 = -\ 0,\ 120125$	$A'2 = 1,\ 310407$
$A3 = 0,\ 041029$	$A'3 = -\ 2,\ 744209$
$A4 = 0,\ 473042$	$A'4 = 0,\ 867697$
$B2 = -\ 0,\ 143482$	$B'2 = 4,\ 793425$
$B5 = -\ 0,\ 946083$	$B'5 = -\ 1,\ 735395$
$p = 3,\ 997995$	$p1 = -\ 10,\ 532304$
$q = 8,\ 300535$	$q1 = -\ 17,\ 850234$
$r = 7,\ 306455$	$r1 = -\ 13,\ 546971$
$P4 = -\ 0,\ 232789$	$P'4 = -\ 3,\ 488506$
$P7 = -\ 0,\ 184498$	$P'7 = 7,\ 537649$
$Q5 = 0,\ 700695$	$Q'5 = -\ 4,\ 354384$.

Donc, à cauſe de $\frac{J}{I} = \frac{1}{1067} = 0,\ 000937207$, & de $\frac{J'}{I} = \frac{1}{3021} = 0,\ 000331016$, on aura

$\frac{ik}{b} = -\ 0,\ 000078292 \qquad \frac{ik'}{b'} = -\ 0,\ 000406604$

$\frac{il}{b} = \ 0,\ 000078293 \qquad \frac{il'}{b'} = \ 0,\ 000406606$

$\frac{iP}{b} = \ 0,\ 000051192 \qquad \frac{iP'}{b'} = \ 0,\ 000265701$

$\frac{iQ}{b} = -\ 0,\ 000078293 \qquad \frac{iQ'}{b'} = -\ 0,\ 000406606$

& l'on trouvera

$i\mu = -\ 0,\ 000120981 \qquad i\mu' = -\ 0,\ 000300553$

$i\nu = \ 0,\ 000085425 \qquad i\nu' = \ 0,\ 000212221$

$i\rho = \ 0,\ 000120981 \qquad i\rho' = \ 0,\ 000300553$

$i\sigma = \ 0,\ 000120981 \qquad i\sigma' = \ 0,\ 000300553$

Or selon M. Halley on a pour l'année 1750

$$i\delta = \frac{25078}{520098} = 0,\ 048218$$

$$i\delta' = \frac{54381}{954007} = 0,\ 057003$$

$$i\lambda = \text{tang. } 1^\circ\ 19'\ 10'' = 0,\ 023032$$

$$i\lambda' = \text{tang. } 2^\circ\ 30'\ 10'' = 0,\ 043710$$

$$\alpha = 6^s\ 10^\circ\ 33'\ 46'', \qquad \varepsilon = 3^s\ 8^\circ\ 15'\ 49''$$

$$\alpha' = 8^s\ 29^\circ\ 39'\ 58'', \qquad \varepsilon' = 3^s\ 21^\circ\ 20'\ 5''$$

d' où l' on tire

$$\mathrm{b} = 1,\ 182190, \qquad A = 79^\circ\ 6'\ 12'',$$

$$\mathrm{c} = 1,\ 897725, \qquad E = 13^\circ\ 4'\ 16''.$$

Si donc on substitue ces valeurs numériques dans les formules de l' Art. préc. on formera la Table suivante, dans laquelle n est le nombre des révolutions que Jupiter ou Saturne a achevées depuis le commencement de l' année 1750. que nous avons prise pour époque; de sorte qu' il faudra faire n positif pour les tems qui suivent cette époque, & négatif pour ceux qui la précédent.

TABLE *de la variation des élémens de Jupiter & de Saturne, ſuivant la théorie.*

	De Jupiter	De Saturne
Variation de la plus grande équation du centre	$+\ 7'', 4254\,n$	$-\ 32'', 6086\,n$
Variation de l'inclinaiſon à l'écliptique	$-\ 1'', 0030\,n$	$+\ 2'', 7449\,n$
Mouvement moyen de l'aphelie par rapport aux étoiles fixes	$+\ 86'', 6311\,n$	$+\ 471'', 8632\,n$
Inégalité croiſſante dans le mouvement de l'aphelie	$+\ 0'', 0262\,n^2$	$+\ 0'', 1141\,n^2$
Mouvement moyen des nœuds par rapport aux étoiles fixes	$+\ 86'', 1075\,n$	$-\ 256'', 4655\,n$
Inégalité croiſſante dans le mouvement des nœuds	$+\ 0'', 0513\,n^2$	$-\ 0'', 0405\,n^2$
Inégalité croiſſante dans le mouvement en longitude	$+\ 2'', 7402\,n^2$	$-\ 14'', 2218\,n^2$

ADDITION

Pour les Articles LXXVIII. & LXXIX.

Nous avons dit dans le premier de ces deux Articles que la quantité $\int \Psi \, d\zeta$ contient un terme, qui par l'intégration se trouve divisé par des quantités de l'ordre de i; & nous avons, en conséquence, conservé les termes où cette quantité se trouvoit multipliée par $i^2 n$, en rejettant toutes fois ceux, où la même quautité auroit été multipliée par $i^3 n$. Mais il est facile de se convaincre par la substitution des valeurs de ζ, & de ζ' (*Art. LXXXIV.*), que le diviseur du terme dont il s'agit sera réellement de l'ordre de i n; de sorte que, si on veut avoir égard dans les valeurs de y & de z aux quantités de l'ordre de i^2, il n'est pas permis de négliger les termes de l'ordre de i^3n, où se trouve la quantité $\int \Psi \, d\zeta$; car l'intégration réduira à l'ordre de i^2 les coéficiens de ces termes. Il en sera de même de quelque termes de l'ordre de i qui se trouveront dans la quantité $n \int \Phi \, dy$.

Ainsi on trouve qu'il faut ajouter à la valeur de $\int \frac{dz^2}{dt^2} dy$ le terme $- 2 i \mathrm{n} \int dy \int \Psi \, d\zeta$, & par conséquent à la valeur de $\int \zeta^2 dy$ le terme $- \frac{4 i \mathrm{n}}{3 h^2} \int dy \int \Psi \, d\zeta$; d'où il s'ensuit que le premier membre de l'équation (o) doit être augmenté du terme $4 i^2 \mathrm{n} \int dy \int \Psi \, d\zeta$, & que le premier membre de l'équation (p) doit être augmenté du terme $- 8 i^2 \mathrm{n} \int dy \int \Psi \, d\zeta$.

De là on trouvera, après avoir achevé toutes les opérations, qu'il faudra ajouter (*Art. LXXIX.*) à la valeur de Y les termes

$$8 i^3 (\beta - 2\gamma) \int dy \int \Psi \, d\zeta + 12 i^2 \delta y \int \Phi \, dy$$
$$+ 4 i^3 (\varepsilon - \eta h^2) y \int \Psi \, d\zeta,$$

& à la valeur de Z les termes

$$12\, i^3 \pi\, z \int \Psi\, dz + 4\, i^2 (\rho - \sigma h^2)\, z \int \Phi\, dy.$$

Au reste cette omission n'influe point sur le reste de nos calculs.

EXTRAIT

EXTRAIT DE DIFFÉRENTES LETTRES DE M. D'ALEMBERT A M. DE LA GRANGE

écrites pendant les années 1764. & 1765.

I.

VOtre problème ſur l'intégration de l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} \dots + \frac{Md^my}{dx^m} = X$, lorſque l'on a $m-1$ valeurs de x dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \frac{Rd^2y}{dx^2} + \dots \frac{Md^my}{dx^m} = 0$, m'a paru ſi beau, que j'en ai cherché une ſolution que voici.

Soit $y = Vz$, V étant une indéterminée, & z une des valeurs de y qui ſatisfait à l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} + \dots$ &c. $= 0$, & ſoit ſubſtituée cette valeur dans l'équation $Py + \frac{Qdy}{dx} +$ &c. $\dots = X$; la transformée ſera composée 1.° d'une partie $V(Pz + \frac{Qdz}{dx} \dots + \frac{Md^mz}{dx^m})$, où X ne ſe trouvera point, laquelle ſera évidemment $= 0$, à cauſe de $Pz + \frac{Qdz}{dx} + \dots \dots \frac{Md^mz}{dx^m} = 0$ (*hyp.*) 2.° d'une partie où V ne ſe trouvera point, & qui ne contenant que dV avec ſes différences juſqu'à d^mV incluſivement, pourra par conſéquence être abaiſſée au $(m-1)^e$ dégré, en faiſant $dV = V'dx$; or puiſqu'on a $m-1$ valeurs de y, que $y = Vz$, & que z eſt déja une des valeurs de y, on aura donc $m-2$ valeurs de V, en n'y comprenant pas l'unité; donc ſuppoſant que z' ſoit une de ces valeurs, & faiſant $V' = z' \int V'' dx$, comme on a fait $y = z \int V' dx$, on abaissera de même l'équation en V', & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à une équation qui sera de cette forme $dV''''^{\&c.} + KV''''^{\&c.} dx = X$, K & X étant des fonctions de x. Or on sait que cette équation est intégrable.

Il est aisé de voir par cet exposé, 1.° qu'à chaque transformation il disparoit un des coéficiens, savoir celui de y par la première, celui de dy par la seconde &c., ensorte que dans la dernière transformée il ne restera que les deux coéficiens de $d^m y$ & $d^{m-1} y$; or si on a une quantité de cette forme $\frac{\omega d^{m-1} \lambda}{dx^{m-1}} + \frac{\beta d^m \lambda}{dx^m}$, & qu'on fasse $d\lambda = \zeta \eta dx$, on aura dans la transformée (en laissant à part les autres termes) 1.° $\beta \zeta$ à la place de β & $\frac{d^{m-1} \eta}{dx^{m-1}}$ à la place de $\frac{d^m \lambda}{dx^m}$. 2.° $[\omega\zeta + \frac{\beta d\zeta}{dx} \times (m-1)] \frac{d^{m-2} \eta}{dx^{m-2}}$ au lieu de $\frac{\omega d^{m-1} \lambda}{dx^{m-1}}$. Donc si on suppose que $\frac{N d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{M d^m y}{dx^m}$ soient les deux derniers termes du premier membre de la proposée, & qu'on fasse $y = z \int z' dx \int z'' dx \int z''' \ldots \int V''''^{\&c.} dx$, il sera aisé de trouver, par la remarque précédente, la forme de la dernière transformée, d'où l'on tirera aisèment la valeur de $V''''^{\&c.}$. Je ne fais, Monsieur, qu'indiquer l'opération, qui seroit très-simple & très-courte; vous supplerez aisément à ce que je ne dis pas.

II.

Vous me marquez que lorsque $y = f + hx$, f & h étant des constantes, vous trouvez moyen de satisfaire à l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, en prenant $\varphi x = \frac{M \log.(f + hx)}{\theta \pi} + A(f + hx)^{\frac{\mu}{\theta}} + B$, A & B étant des constantes arbitraires, μ un nombre quelconque entier, π le rapport de la circonférence au diamètre, & θ un nombre tel, que la tangente de $\theta\pi = h$. J'ai trouvé, par une méthode assez simple, le moyen d'arriver à cette élégante formule, & même à une plus générale. Voici d'abord comment j'arrive à votre formule.

Je considère en premier lieu que $(1 + h\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, A & B étant les *cosinus* & *sinus* de m fois l'angle dont la tangente est h; c'est ce que j'ai démontré le premier dans les Mém. de Berlin 1746. & ailleurs; donc si $(1 + h\sqrt{-1})^m - (1 - h\sqrt{-1})^m = 0$, on aura $B = 0$, donc B est le *sinus* de $\mu\pi$, π étant la demi-circonférence, & μ un nombre entier positif ou négatif; donc si $h =$ tang. $\theta\pi$, on aura $\mu\pi = m\theta\pi$, donc $m = \frac{\mu}{\theta}$.

Je considère en second lieu, que log. $(x + hx\sqrt{-1})$ $-$ log. $(x - hx\sqrt{-1}) =$ log. $\left(\frac{1 + h\sqrt{-1}}{1 - h\sqrt{-1}}\right) = 2\sqrt{-1}$ $\int \frac{dh}{1 + hh} = 2\sqrt{-1} \times \theta\pi$. De là il est aisé de voir que si on fait $\varphi(x) = \frac{M \log.(f + hx)}{\theta\pi} + A(f + hx)^{\frac{\mu}{\theta}} +$ B, on aura $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) =$ $2M\sqrt{-1}$; ce qui se verra facilement, en mettant x $\pm y\sqrt{-1}$ au lieu de x dans la valeur de φx, & ensuite $f + hx$ au lieu de y.

Or il est aisé de voir qu'au lieu de $A(f + gx)^{\frac{\mu}{\theta}}$ dans la valeur de φx, on peut écrire une suite de termes tels que $A[(f + gx)^{\frac{k}{\theta}} + \lambda]^p$, A & λ étant des constantes arbitraires, & p, k des nombres entiers positifs ou négatifs. On peut même écrire dans tous, ou dans plusieurs de ces termes. (que j' appelle ξ pour abreger) c^{ξ} au lieu de ξ.

On remarquera de plus que θ peut avoir une infinité de valeurs; car soit $\theta\pi$ le plus petit angle dont la tangente est h, cette tangente sera aussi celle de l' angle $(\theta \pm 2n)\pi$, n étant un nombre quelconque positif; donc au lieu de θ on peut mettre $\theta \pm 2n$. Par la même raison au lieu du terme $\frac{M \log.(f + hx)}{\theta\pi}$, on pourra substituer une suite de termes $A \log.(f + hx)^r + A' \log.(f + hx)^{r'} +$ &c., pourvu que l'on ait $M = Ar(\theta \pm 2n)\pi + A'r'(\theta \pm 2n')\pi$ &c.

En général on pourra trouver par une méthode semblable la valeur de φx dans l' équation
$a\varphi(\alpha x + \beta y\sqrt{-1}) + a'\varphi(\alpha' x + \beta' y\sqrt{-1}) +$ &c. $= 0$; dans l' hypothèse que $y = f + hx$. Pour cela il suffira de considérer, que si on éleve $\alpha + \beta h\sqrt{-1}$ à la puissance $m + k\sqrt{-1}$ on aura, suivant mes formules des Mém. de Berlin 1746., $(\alpha + \beta h\sqrt{-1})^{m + k\sqrt{-1}} =$ $A + B\sqrt{-1}$, A étant $[(\alpha^2 + \beta^2 h^2)^{\frac{m}{2}} c^{-k(\theta\pi \pm 2n\pi)}] \times [\text{cos}.(k \log.\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 h^2)} + m(\theta \pm 2n)\pi)]$, & $B = [(\alpha^2 + \beta^2 h^2)^{\frac{m}{2}} c^{-k(\theta\pi \pm 2n\pi)}]\ \text{sin}.[k \log.\sqrt{(\alpha^2 + \beta^2 h^2)} + m(\theta \pm 2n)\pi]$; on trouvera de même la valeur de A', & celle de B' en α' & en β' &c.; & il ne restera qu'à faire $aA + a'A' + a''A'' +$ &c. $= 0$; $bB + b'B' + b''B'' +$ &c. $= 0$, ce qui donnera toujours m & k, au moins par une construction géométrique; d'où il sera facile de tirer, par une méthode semblable à la précédente, la valeur de k. De même si on fait $b \log.(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + b' \log.(\alpha' + \beta'\sqrt{-1}) +$ &c. $=$ $2M + 2N\sqrt{-1}$ (M & N étant données) on dé-

terminera b & b' par une ſemblable méthode ; je n' en préſente ici , Monſieur , que l' eſprit & l' idée générale ; cette légère idée ſuffit à un auſſi grand Géométre que vous , pour voir tout ce qu'on en peut tirer.

Si au lieu de x on mettoit une fonction quelconque X de x, enſorte que $a\,\varphi\,(\alpha X + \beta y \sqrt{-1}) + a'\,\varphi\,(\alpha X + \beta' y \sqrt{-1})$ + &c. dût être $= 0$, on trouveroit de même la valeur de $\varphi\,\alpha X$, pourvu que y fut $= f + h X$. Si le ſecond membre de l' équation, au lieu d' être $= 0$ étoit $= K x^m$, alors il faudroit faire $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^m = A + B \sqrt{-1}$, $(\alpha' + \beta' \sqrt{-1})^m = A' + B' \sqrt{-1}$; &, prenant ω pour un coéficient indéterminé, ſuppoſer $\omega a\,(A + B \sqrt{-1}) + \omega a'\,(A' + B' \sqrt{-1})$ + &c. $= K$, ce qui donnera ω. Si le ſecond membre étoit $K x^m + K' x^{m'}$ + &c. on feroit de plus $(\alpha + \beta \sqrt{-1})^{m'} = (A) + (B) \sqrt{-1}$, & on prendroit $\omega' a\,[(A) + (B) \sqrt{-1}] + \omega' a'\,[(A') + (B') \sqrt{-1}]$ + &c. $= K'$, & ainſi du reſte. Si le ſecond membre étoit K log. $x + M$; alors il faudroit faire $a\,\omega$ log. $x\,(\alpha + \beta \sqrt{-1}) + a'\,\omega$ log. $x\,(\alpha' + \beta' \sqrt{-1})$ + &c. $= K$ log. $x + M$; d'où l'on tirera $a\,\omega + a'\,\omega$ + &c. $= K$, & ſuppoſant log. $\alpha + \beta \sqrt{-1} = A + B \sqrt{-1}$, &c., on auroit $a\,\omega\,(A + B \sqrt{-1}) + a'\omega\,(A' + B' \sqrt{-1})$ + &c. $= M$. Mais en voila aſſez ſur ce ſujet.

Au reſte, ces formules ne peuvent avoir, ce me ſemble, aucune application pour trouver le mouvement d' un fluide dans un vaſe dont les parois auroient pour équation $y = f + h x$; & on peut même remarquer, que toutes les fois que l' équation des parois donnera $y = 0$ pour une ſeule valeur de x à volonté, l'équation $\varphi\,(x + y \sqrt{-1}) - \varphi\,(x - y \sqrt{-1}) = 2 M \sqrt{-1}$ ſera illuſoire pour repréſenter le mouvement du fluide. Car d'abord on aura $M = 0$ dans la courbe des parois, puiſque $y = 0$ donne $M = 0$; or M ne ſauroit être $= 0$ dans les autres courbes, puisqu'elles ne sont distinguées de la courbe des parois que par la valeur de M; donc ces courbes ne sauroient couper, ni l'axe, puisque y seroit alors $= 0$, ce qui donneroit $M = 0$, ni la courbe des parois, puisque dans le point commun aux deux courbes M seroit nécessairement $= 0$ dans l'une, comme il l'est (*hyp.*) dans l'autre; ces courbes ne pourroient donc que rentrer en elles-mêmes, & par conséquent ne représenteroient pas le mouvement progressif; ce qui peut d'ailleurs se voir aisément à *priori.*

III.

Voici de quelle manière je m'y prends pour trouver, dans l'équation du problème des trois corps, la valeur du rayon par approximation, sans être obligé de substituer, à chaque opération, la valeur du rayon trouvée dans l'opération précédente.

Soit par exemple $ddt + N^2 t dz^2 + \beta t \cos. pz = 0$; je remarque que, par la nature de la solution que j'ai donnée de ces sortes d'équations, tout terme de cette forme $+ \omega \cos. \lambda z$ dans la valeur de t, produira dans $\beta t \cos. pz$, deux termes de cette forme $- \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \times \omega \cos. (\lambda z + pz) - \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \times \omega \cos. (\lambda z - pz)$, & deux autres de cette forme $+ \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda + p)^2)} \times \omega \cos. Nz + \frac{\beta}{2(N^2 - (\lambda - p)^2)} \times \omega \cos. Nz$. Donc prenant, par exemple, $k \cos. Nz$ pour la première valeur de t, il n'y a qu'à 1.° augmenter & diminuer successivement N de $+ p$ & de $- p$, multiplier k par $- \frac{\beta}{2}$ & diviser le produit par N^2 moins le quarré du coéficient de z. 2.° écrire chaque terme ainsi trouvé, l'un dans une colonne verticale à droite, l'autre dans une colonne verticale à gauche, de celui qu'on vient d'avoir par l'opération précédente, & ſous la colonne dont le terme le plus haut eſt k coſ. Nz, mettre de ſuite les coéficiens de coſ. Nz ſemblables à ceux qu'on vient d'indiquer, & qui peuvent ſe réduire à un ſeul, ſavoir $+ \frac{\beta\omega(N^2-\lambda^2-p^2)}{(N^2-\lambda^2-p^2)^2-4\lambda^2p^2}$ coſ. Nz. De là il eſt aiſé de voir que le terme k coſ. Nz produira les termes

$$- \frac{\beta k \text{ coſ.} (Nz \pm pz)}{2(N^2-(N\pm p)^2)} + \frac{\beta\beta k \text{ coſ.} (Nz \pm 2pz)}{2.2.(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

$$- \frac{\beta^3 k \text{ coſ.} (Nz \pm 3pz)}{2.2.2.(N^2-(N\pm 3p)^2)\times(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

$$+ \frac{\beta^4 k \text{ coſ.} (Nz \pm 4pz)}{2^4(N^2-(N\pm 4p)^2)\times(N^2-(N\pm 3p)^2)\times(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)}$$

– &c., le ſigne + étant pour les colonnes à droite de celle où eſt k coſ. Nz, & le ſigne — pour les colonnes à gauche. A l'égard du terme k coſ. Nz, il ſera de même ſucceſſivement augmenté des termes $+ \frac{\beta k \text{ coſ.} Nz}{2(N^2-(N\pm p)^2)}$

$$- \frac{\beta\beta k \text{ coſ.} Nz}{2.2.(N^2-(N\pm 2p)^2)\times(N^2-(N\pm p)^2)} + \frac{\beta^3 k \text{ coſ.} Nz}{2.2.2. \&c.} \ \&c.$$

leſquels en produiront eux mêmes de nouveaux, analogues à ceux que le terme k coſ. Nz a produit. Vous verrez aiſément, Monſieur, par cette vuë générale, comment on peut trouver facilement les différens termes ſucceſſifs de la ſérie qui exprime la valeur de t. Si on avoit $\lambda \pm p = N$, le dénominateur ſeroit $= 0$; en ce cas au lieu des quatre nouveaux termes que le terme ω coſ. $(\lambda z \pm pz)$ produit dans la valeur de t, il faudroit ſeulement changer le coéficient N de Nz en un autre N', tel que N'^2 fût $= N^2 + \frac{\beta R}{2k'}$, k' étant le coéficient de coſ. Nz dans la valeur de t trouvée par les opérations précédentes, & R le coéficient du terme R coſ. $(Nz \pm pz)$ qui multiplié par β coſ. pz

donnera dans la différentielle un nouveau terme de la forme $d\,z^2 \cos. N z$. Le fondement de cette méthode se trouve dans mes Recherches sur le sistème du monde pag. 37., 244., 245. &c. Il faut cependant apporter à ce que je viens de dire, une modification suffisamment expliquée à la page 242. de ce même Ouvrage & qui fait distinguer les cas où le dénominateur $N^2 - (\lambda + p)^2$ devenant $= 0$, change simplement le coéficient K, & ceux où il donne réellement des arcs de cercle dans la valeur du rayon.

I V.

J'ai lu, Monsieur, avec autant de plaisir que de fruit, votre belle Piéce sur la libration de la Lune bien digne du prix qu'elle a remporté ; elle m'a fait faire sur la solution de ce problème plusieurs reflexions qui me meneroient trop loin ; je me bornerai à une seule qui a rapport au problème de la précession des équinoxes, lequel est du même genre que celui de la libration de la Lune ; c'est que toutes les solutions qu'on a données jusqu'à présent de ce problème, ont une imperfection dont personne ne s'est apperçu. Pour la faire connoitre en peu de mots, supposons que les deux équations du problème soient

$$\Psi\, d z^2 = d(d\varepsilon \cos. \pi^2) + k' d z\, d(\sin. \pi) \;\ldots\ldots (A) \;\&$$

$$dd\pi = \Gamma\, d z^2 - d\varepsilon^2 \cos. \pi \sin. \pi + k' d\varepsilon\, d z \cos. \pi \;\ldots (B);$$

Ψ & Γ étant des fonctions qui dépendent des forces perturbatrices. En réduisant, comme on le suppose ordinairement, ces équations à

$$\Psi\, d z = k' d(\sin. \pi) \quad \& \quad \Gamma\, d z - k' d\varepsilon \cos. \pi = 0,$$

$d\varepsilon$ & $d\pi$ ne seroient point égaux à zéro, lorsque $z = 0$; il est pourtant aisé de voir qu'ils le doivent être.

Pour se tirer de cette difficulté, il faut intégrer ces équations plus rigoureusement ; d'abord on supposera $\pi = \pi' + \alpha$, π' étant la valeur de π lorsque $z = 0$, & α une quantité fort petite, & on aura, en négligeant les termes

très-

très petits, & ſuppoſant pour plus de généralité $\frac{d\varepsilon}{d\zeta} = \mu$ lorſque $\zeta = o$, $d\varepsilon = \frac{d\zeta \int \Psi d\zeta}{\text{coſ.}\, \pi^2} + \mu d\zeta - k' \alpha \frac{d\zeta}{\text{coſ.}\, \pi}$; & $dd\alpha + \alpha k'^2 d\zeta^2 - k' \frac{d\zeta^2 \int \Psi d\zeta}{\text{coſ.}\, \pi} - k' \mu \,\text{coſ.}\, \pi \, d\zeta^2 - \Gamma d\zeta^2 = o$. Donc faiſant encore $\frac{d\alpha}{d\zeta} = \nu$ lorſque $\zeta = o$, on aura la valeur de α par les méthodes d'intégration connues, & enſuite celle de $d\varepsilon$. Si on ſuppoſe μ & $\nu = o$, ces valeurs ſeront $= o$, lorſque $\zeta = o$, comme elles le doivent être; & en négligeant dans les valeurs de α & de ε les termes trés-petits, on retombera dans les mêmes valeurs que donneroient les équations $\Psi d\zeta = k' d\zeta$ ſin. π & $\Gamma d\zeta + d\varepsilon k'$ coſ. $\pi = o$.

V.

Je ſuis charmé que nous ſoyons enfin preſque abſolument d'accord ſur le problème des cordes vibrantes. Vous avez reconnu, ſuivant ce que vous me dites, que la ſolution ne peut avoir lieu, comme je le prétendois, ſi les branches alternatives ne ſont pas aſſujetties à la loi de continuité; vous y mettez ſeulement une reſtriction, la ſolution peut avoir lieu, ſelon vous, ſi la courbe initiale n'eſt aſſujettie à aucune équation, pourvu que dans cette courbe $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe de ſaut nulle part dans la courbe initiale, ni dans les branches alternatives. Mais comment concevez vous qu'il puiſſe ne point y avoir de pareils ſauts dans une courbe tracée au hazard, & qui ne ſera aſſujettie, comme vous l'exigez, à aucune équation? Il me paroit que cette propriété ne peut appartenir qu'à une courbe réguliérement tracée, & aſſujettie à une équation; en effet pour que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe de ſaut nulle part, il faut qu'en prenant une partie infiniment petite de la courbe partout où l'on voudra, & y faisant commencer les coordonnées, on puisse supposer que dans cette petite portion y soit égale à $A + B x^m + C x^n + D x^p +$ &c. Prenons maintenant une petite partie contigue à celle-là, on aura par la même raison $y = A' + B' x^{m'} + C x^{n'} + D' x^{p'}$ + &c. Or si les exposans m & m', n & n', p & p' &c. n'étoient pas les mêmes, & si les coefficiens A & A', B & B', C & C' &c. n'étoient pas tels qu'il doivent être pour appartenir à une courbe continue, il y auroit un *saut* dans quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ au point commun qui unit ces deux parties infiniment petites. Donc puisqu'on suppose qu'il n'y a point de saut dans $\frac{d^n y}{dx^n}$, il s'ensuit que ces deux parties, & par la même raison toutes les suivantes à droite & à gauche, sont assujetties à une même équation. D'ailleurs quand il seroit vrai que la solution seroit applicable à certaines courbes tracées au hazard, comment s'assurera-t-on que dans ces courbes $\frac{d^n y}{dx^n}$ n'y sera point de saut? condition nécessaire, selon vous, pour que la solution soit applicables à ces courbes. Vous trouverez, Monsieur, beaucoup d'autres reflexions sur cette matière dans un long Mémoire que je destine au quatriéme Volume de mes Opuscules. En attendant je désire beaucoup de savoir votre avis sur les observations que j'ai l'honneur de vous proposer, & je ne désire pas moins que cet avis nous rapproche entiérement quant au point sur lequel nous différons encore, & qui me semble purement métaphysique.

Je ne pense pas au reste que la solution ne puisse avoir lieu dans une courbe à équation, si elle n'est représentée par $y = \alpha$ sin. $\pi x + \beta$ sin. $2 \pi x + \gamma$ sin. $3 \pi x +$ &c. à la manière de M. Daniel Bernoulli. Il me paroit évident au contraire que la ſolution peut avoir lieu dans beaucoup d'autres courbes, par exemple dans celle qui auroit pour équation $y = \alpha$ ſin. $\pi x^{\frac{p}{q}}$, α étant fort petit, & p, q des nombres impairs, tels que p ſoit $> q$, afin que dy ne ſoit nulle part $= \infty$, ce qui eſt contre l' hypothèſe, ſur laquelle la ſolution eſt appuyée. Je ſais que dans ces courbes il y auroit quelqu'un des $\frac{d^n y}{dx^n}$ qui ſeroit infini; mais cela n' empêche pas, ce me ſemble, la ſolution d' être bonne, il ſuffit que $\frac{d^n y}{dx^n}$ ne faſſe point de *ſaut*, c'eſt-à-dire ne paſſe pas *bruſquement* du fini à l' infini, ou de l' infini au fini, ou d' une valeur finie à une autre valeur finie.

VI.

Votre formule pour exprimer par une ſuite ſans imaginaires la valeur de $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1})$, ou celle de $\frac{\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$ me paroit très-élégante. J' en ai imaginé une toute différente pour parvenir au même objet, & qui a cet avantage, que quand φx eſt $= A x^m + B x^n +$ &c. m & n étant des nombres entiers poſitifs, la ſuite n' a qu'un nombre fini de termes, comme il arrive dans la formule du Binome. Il ſeroit trop long de vous expoſer ici tout le procédé du calcul, qui peut même être encore plus ſimplifié que je n' ai fait juſqu'à préſent; je vous dirai ſeulement qu'il eſt fondé ſur les conſidérations ſuivantes.

1.° $\varphi(x + y) = \varphi x + y \frac{d\varphi x}{dx} + y^2 \frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + y^3 \frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} +$ &c., &

$\varphi(x + by\sqrt{-1}) = \varphi x + by\sqrt{-1}\,\frac{d\varphi x}{dx} - b^2y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2\,dx^2} - b^3y^3\sqrt{-1}\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} + b^4y^4\,\frac{d^4\varphi x}{2.3.4\,dx^4} +$ &c.

2.° $\varphi(x+y) - \varphi x = y\,\frac{d\varphi x}{dx} + y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2\,dx^2} + y^3\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3}$ + &c.

Donc $\varphi(x+2y) - \varphi(x+y) - [\varphi(x+y) - \varphi x]$, ou $\varphi(x+2y) - 2\varphi(x+y) + \varphi x$, ſe trouvera, en mettant dans chaque terme $Ay^n\,\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$ du ſecond membre, au lieu de $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$, $\frac{d^n\varphi(x+y)}{dx^n} - \frac{d^n\varphi x}{dx^n} = y\,\frac{d^n\varphi x}{dx^n} + y^2\,\frac{d^{n+1}\varphi x}{2\,dx^{n+1}} + y^3\,\frac{d^{n+2}\varphi x}{2.3\,dx^{n+2}}$ + &c. &c.; d'où il eſt aiſé de conclure qu'en général $\varphi[x+my] - m\varphi[x+(m-1)y] + \frac{m(m-1)}{2}\varphi[x+(m-2)y] - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\varphi[x+(m-3)y]$ + &c. eſt $= Ay^m\,\frac{d^m\varphi x}{dx^m} + By^{m+1}\,\frac{d^{m+1}\varphi x}{dx^{m+1}}$ + &c. A & B &c. étant des coefficiens qu'il eſt très-aiſé de déterminer; on peut même imaginer pour cela des méthodes trés-ſimples, dans le détail deſquelles il ſeroit trop long d'entrer, & qui donneront la loi de ces coefficiens.

Cela poſé, on fera

$\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x = y\sqrt{-1}\,\frac{d\varphi x}{dx} - y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2dx^2} - y^3\sqrt{-1}\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} + y^4\,\frac{d^4\varphi x}{2.3.4\,dx^4} +$ &c.

$\varphi(x+y) - \varphi x = y\,\frac{d\varphi x}{dx} + y^2\,\frac{d^2\varphi x}{2\,dx^2} + y^3\,\frac{d^3\varphi x}{2.3\,dx^3} +$ &c.

$$\varphi(x+2y)-2\varphi(x+y)+\varphi x = a y^2 \frac{d^2\varphi x}{dx^2} + b y^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + c y^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \&c.$$

$$\varphi(x+3y)-3\varphi(x+2y)+3\varphi(x+y)-\varphi x = a' y^3 \frac{d^3\varphi x}{dx^3} + b' y^4 \frac{d^4\varphi x}{dx^4} + \&c.$$

&c.

a, b, c &c. & a', b', c' &c. étant des coefficiens connus, & trouvés par ce qu'on vient de dire ; on multipliera ensuite la seconde équation par r, la troisiéme par r', la quatriéme par r'' &c. r, r', r'' étant des coefficiens indéterminés, & après les avoir ajoutées ensemble on fera chaque terme du second membre $= 0$, ce qui donnera $\sqrt{-1} + r = 0$, $-\frac{1}{2} + \frac{r}{2} + ar' = 0$, $\frac{\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{r}{2.3} + br + a'r'' = 0$ &c., & ainsi de suite ; d'où l'on tirera r, r', r'' &c. & le problème sera résolu.

Je ne fais ici, Monsieur, qu'indiquer les principaux points de la solution, qu'il est d'ailleurs aisé de simplifier, ainsi que je l'ai déja dit. Je crois au reste que toutes ces méthodes pour déterminer $\varphi(x+by\sqrt{-1})$ sont plus curieuses qu'utiles ; car 1.° si φx n'est point une fonction algébrique, mais une fonction discontinue, en ce cas il y aura un *saut* dans quelqu'un des $d^n\varphi x$, & par conséquent l'expression trouvée ci-dessus de $\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi x$, ou toute autre, je crois, qu'on y voudroit substituer, sera fautive, si je ne me trompe. 2.° si φx est algébrique, on peut imaginer différentes méthodes pour déterminer algébriquement, ou au moins géométriquement, les quantités $\varphi(x+by\sqrt{-1}) + \varphi(x-by\sqrt{-1})$ ou $\frac{\varphi(x+by\sqrt{-1})-\varphi(x-by\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$.

J'oublie de vous faire remarquer que ſi, par exemple, $\varphi x = x^m$, la ſérie que je propoſe ſe terminera après le terme $\varphi[x + my] - m\varphi[x + (m-1)y] + \frac{m \cdot m-1}{2}$ $\varphi[x + (m-2)y]$ + &c.; car ſi, par exemple, $m = 2$, on aura $\varphi(x + 3y) - 3\varphi(x + 2y) + 3\varphi(x + y) - \varphi x = 0$.

En général on aura

$$\begin{aligned}
\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi x &= + r\varphi x - r'\varphi x + r''\varphi x - \&c. \\
&- r\varphi(x + y) + 2r'\varphi(x + y) - 3r''\varphi(x + y) + \&c. \\
&- r'\varphi(x + 2y) + 3r''\varphi(x + 2y) - 3r''\varphi(x + 2y) + \&c. \\
&- r''\varphi(x + 3y) + 4r'''\varphi(x + 3y) - 10r^{\text{IV}}\varphi(x + 3y) + \&c.
\end{aligned}$$

& ainſi de ſuite.

Il eſt aiſé de voir auſſi que ſi on eut cherché de même la valeur de $\varphi(x - y\sqrt{-1}) - \varphi x$, & combiné les deux opérations enſemble, il en ſeroit réſulté beaucoup d'abbreviation dans le calcul; par exemple on a $\varphi(x + y\sqrt{-1}) + \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2\varphi x - 2y^2 \frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + 2y^4 \frac{d^4\varphi x}{2.3.4\,dx^4}$ + &c. & $\varphi(x + y) + \varphi(x - y) = 2\varphi x + 2y^2 \frac{d^2\varphi x}{2dx^2} + 2y^4 \frac{d^4\varphi x}{2.3.4\,dx^4}$ + &c.; d'où il eſt facile de conclure que les y^2, y^6, y^{10}, &c. diſparoitront; ce qui ſimplifiera beaucoup les formules.

VII.

Je dois vous faire obſerver, à l'occaſion de mes Recherches ſur les verres optiques, inſérées dans le troiſiéme Tome de mes Opuſcules, que la ſubſtitution preſcrite dans l'Art. 441. de $\frac{1-m}{r} + \frac{m}{\delta}$ à la place de $\frac{1}{\delta'}$ doit donner de plus dans le réſultat final le terme $+ \frac{P-1}{2\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\delta}\right)$ qui a été omis par inadvertance, ſans que cette omiſſion touche en rien au fond de ma méthode pour trouver l' aberration, lorſque le point lumineux eſt hors de l'axe; méthode que vous trouverez, je crois, plus naturelle & plus ſimple que celles qui ont été employées par d'autres Géomètres pour réſoudre le même Problème. Quoiqu'il en ſoit, la reſtitution de ce terme a ſimplifié beaucoup mes formules pour l' aberration latitudinale, & m' a donné les dimenſions de deux excellens objectifs, composés chacun de deux lentilles de verre commun ou *crownglaſs*, & d'une de cryſtal d' Angleterre ou *flintglaſs*, qui eſt entre les deux autres, & collée contre elles. Voici les dimenſions de ces objectifs; R étant la diſtance focale, & r, r', r'', r''', les rayons des quatre ſurfaces, on a pour l' un des objectifs

$$r = +0,5986R$$
$$r' = -0,3255R$$
$$r'' = +0,7288R$$
$$r''' = -1,8116R$$

& pour l' autre

$$r = +0,4630R$$
$$r' = +2,7574R$$
$$r'' = +0,2081R$$
$$r''' = -15,594R.$$

Ces deux objectifs ont chacun cela d' excellent, qu'ils reſteroient encore très-bons, quand on commettroit dans les valeurs de r, r' &c. des erreurs conſidérables. C' eſt ce que je me propoſe de détailler plus au long, ſoit dans les Mém. de l' Académie des Sciences de Paris, ſoit dans le quatriéme Volume de mes Opuſcules.

Au reſte les dimenſions que je viens de donner ſuppoſent que le rapport de dP à dP' ſoit $\frac{2}{3}$; il eſt inutile de dire qu' elles changeroient ſi $\frac{dP}{dP'}$ avoit une autre valeur, par exemple celle de 20 à 32, comme plusieurs expériences le donnent; dans ce cas l'aberration de refrangibilité ne seroit pas détruite, mais $= \frac{11}{45}$ de celle d'une lentille biconvexe isocele, ce qui est considérable; mais il est aisé de remédier à cet inconvénient par différens moyens qu'il seroit trop long de détailler ici.

FIN.

ERRATA PARTIS PHYSICAE

Sic corrigenda.

Pag. 41. *lin*. 6. quam vis affrictus -	quum vis affrictus.
P. 49. *l*. 10. conversa sunt vel angulum -	conversa sunt, & vel angulum.
P. 61. *l*. 23. ab infima ad supremum -	ab infima ad supremam.
P. 165. *l*. 7. quos in calida - - - -	quos in calidam.
l. 18. in ignem difflabilem - -	in igne difflabilem.
P. 166. *l*. 2. atque insuper deprehendimus -	atque adeo deprehendimus.

Ad *P*. 174. thermometrum reaumurianum de quo hic, & alibi in praecedentibus Tomis mentio fit erat mercuriale, cujus scala inter frigus liquescentis glaciei, & calorem aquae ebullientis in octuaginta gradus divisa erat: quae monenda esse censuimus, quum hujusmodi gradus a similibus gradibus thermometri spiritu vini confecti, qualia sunt reaumuriana, ob varias, ut notum est caussas, valde dissentiant.

P. 180. *l*. 11. Botanicas - - - -	Botanices.
P. 199. *l*. 4. nigruans, ventre ad -	nigricans, ventre ad
P. 204. *l*. 16. 24. agarium - - -	agaricum.
P. 210. *l*. 25. Ignotam - - - -	ignotum.
P. 215. *l*. 16. previa est - - - -	pervia est.
l. 25. duplicis densa - - -	duplici densa.
l. 27. parviis - - - - -	parvis.

Fautes à corriger dans les Mémoires de M.rs DE LA GRANGE & D'ALEMBERT.

Page 185. ligne dernière au lieu de *à la fin de l'Article précedent* lisez *par l'autre méthode.*

P. 189. l. 4. à compter d'en bas au lieu du terme $+ q$ lisez $+ q^2$.

P. 214. l. 7. à la fin effacez 1.

P. 216. l. 5. à compter d'en bas mettez le signe — avant le second membre de l'équation.

P. 249. l. prem. au lieu de *la méthode* lisez *par la méthode.*

P. 258. l. 6. à compter d'en bas au lieu de *le nombre* a lisez *le nombre* n.

P. 265. l. 6. & 11. au lieu de $\sqrt{\left(\frac{4M^4}{9} - 2K^2\right)}$ lisez $\sqrt{\left(\frac{4M^5}{9} - 2K^2N\right)}$.

P. 272. l. 4. au lieu de $\frac{15M^4}{12K^3}$ lisez $\frac{5M^4}{12K^3}$.

P. 315. l. 2. & 3., & au lieu de *sin.* $(h' + im)t$ lisez *sin.* $(h + im)t$, au lieu de *cos.* $(h' + im)t$ lisez *cos.* $(h + im)t$.

Même page l. 3. & 5. à compter d'en bas au lieu de $4h'(m1 - m2)$ au dénominateur lisez $4h(m1 - m2)$.

P. 323. l. 5. à compter d'en bas au lieu d'*espace* lisez *espèce*.

P. 326. l. 12. à compter d'en bas au lieu de S lisez s.

P. 381. l. 6. à compter d'en bas au lieu de *conséquence* lisez *conséquent*.

P. 388. l. 7. à compter d'en bas au lieu de $- k' d\varepsilon$ cos. π lisez $+ k' d\varepsilon$ cos. π.

P. 394. l. 10. au lieu de $- 3r''\varphi(x + 2y)$ lisez $- 6r'''\varphi(x + 2y)$.

Imprimatur. PISELLI Vic. Generalis S.Officii Taurini.

Se ne permette la ſtampa

GALLI per la Gran Cancellería.

Fig 1.

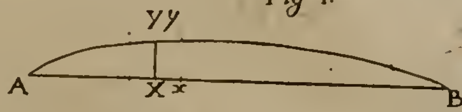


Fig. 2.

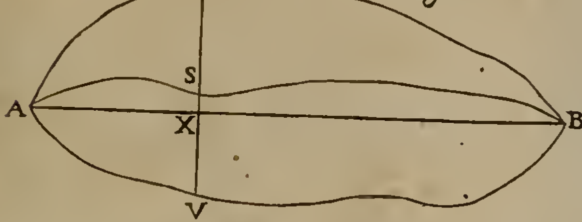
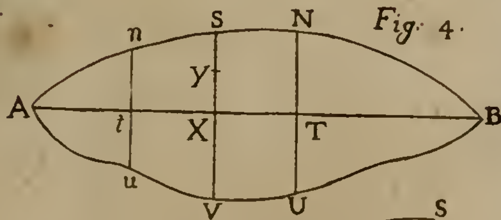


Fig. 3.

Fig. 4.



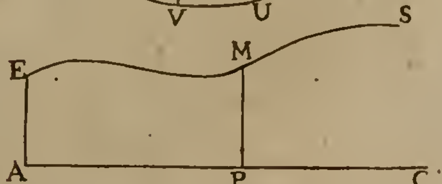
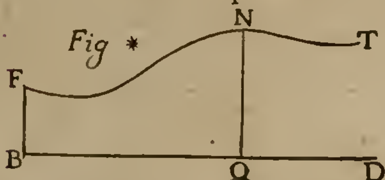
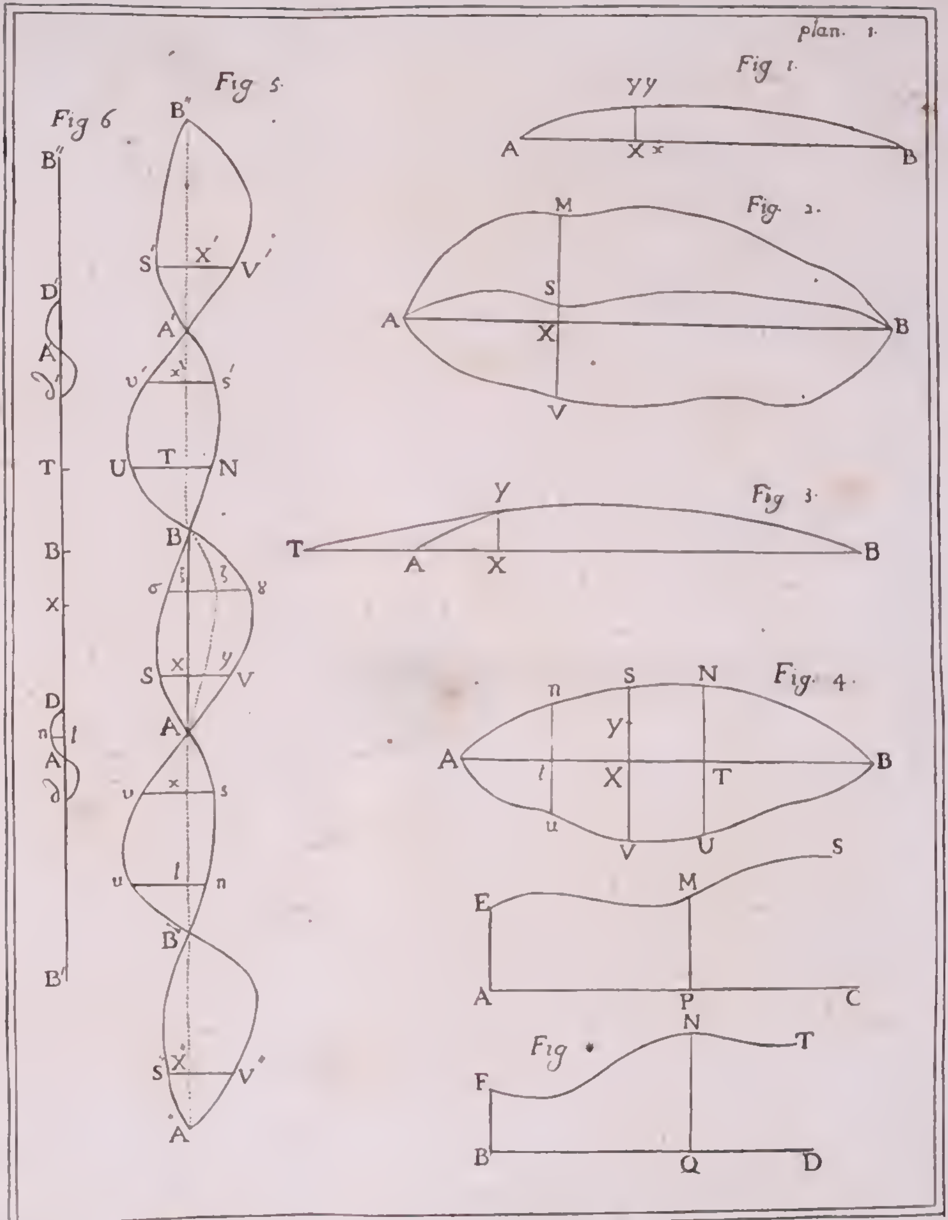


Fig *




plan. 1.
Fig 1.
Fig 2.
Fig 3.
Fig 4.
Fig 5.
Fig 6
Fig

plan. 2.

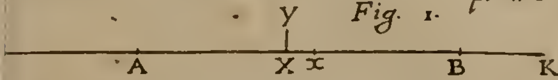


Fig. 1.

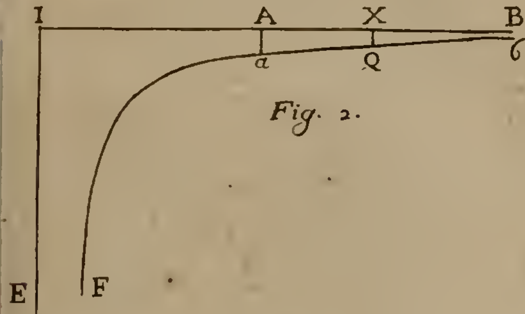
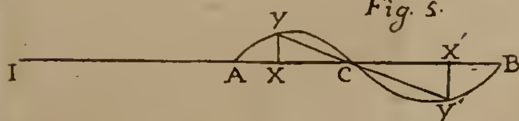
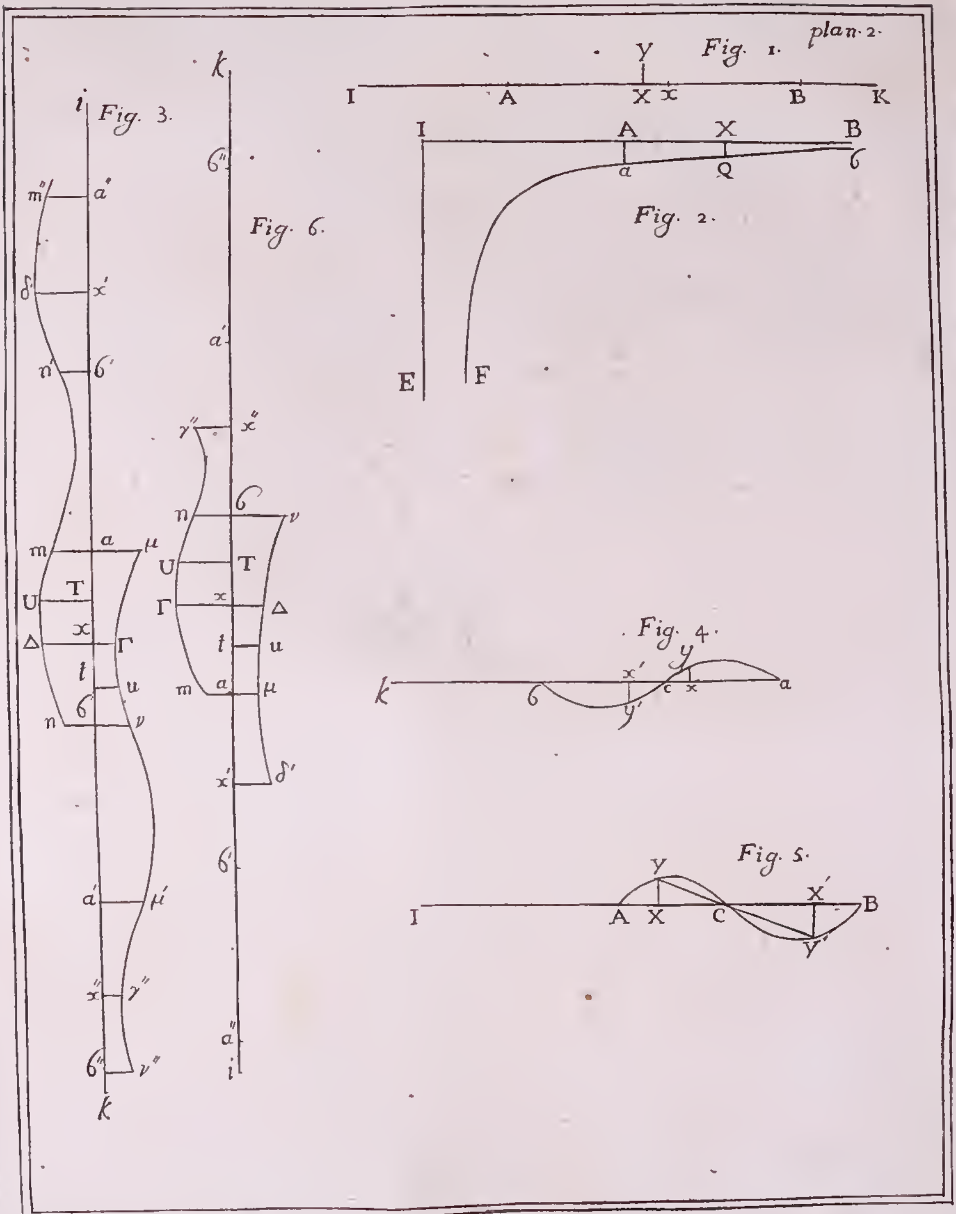


Fig. 2.

Fig. 4.

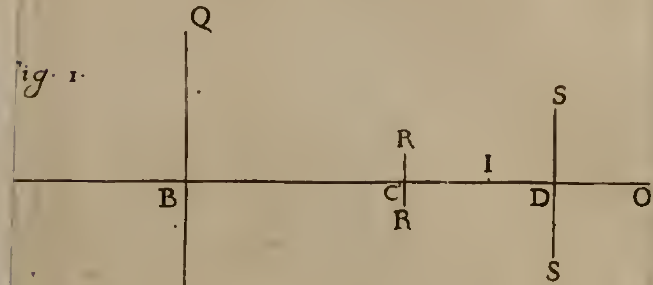
Fig. 5.




plan. 2.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

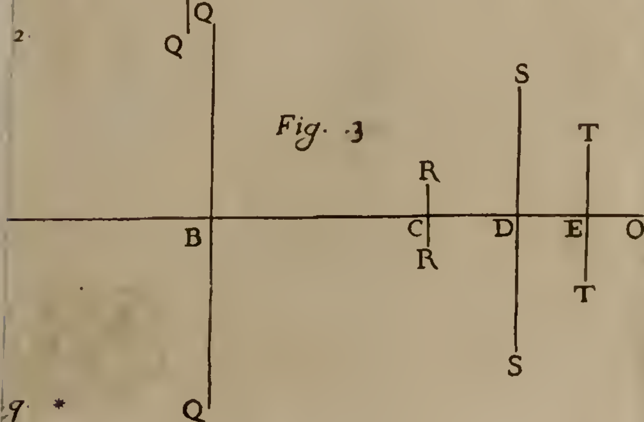
plan. 3.

Fig. 1.

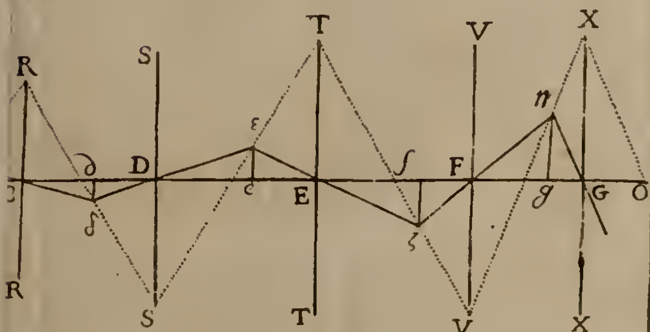


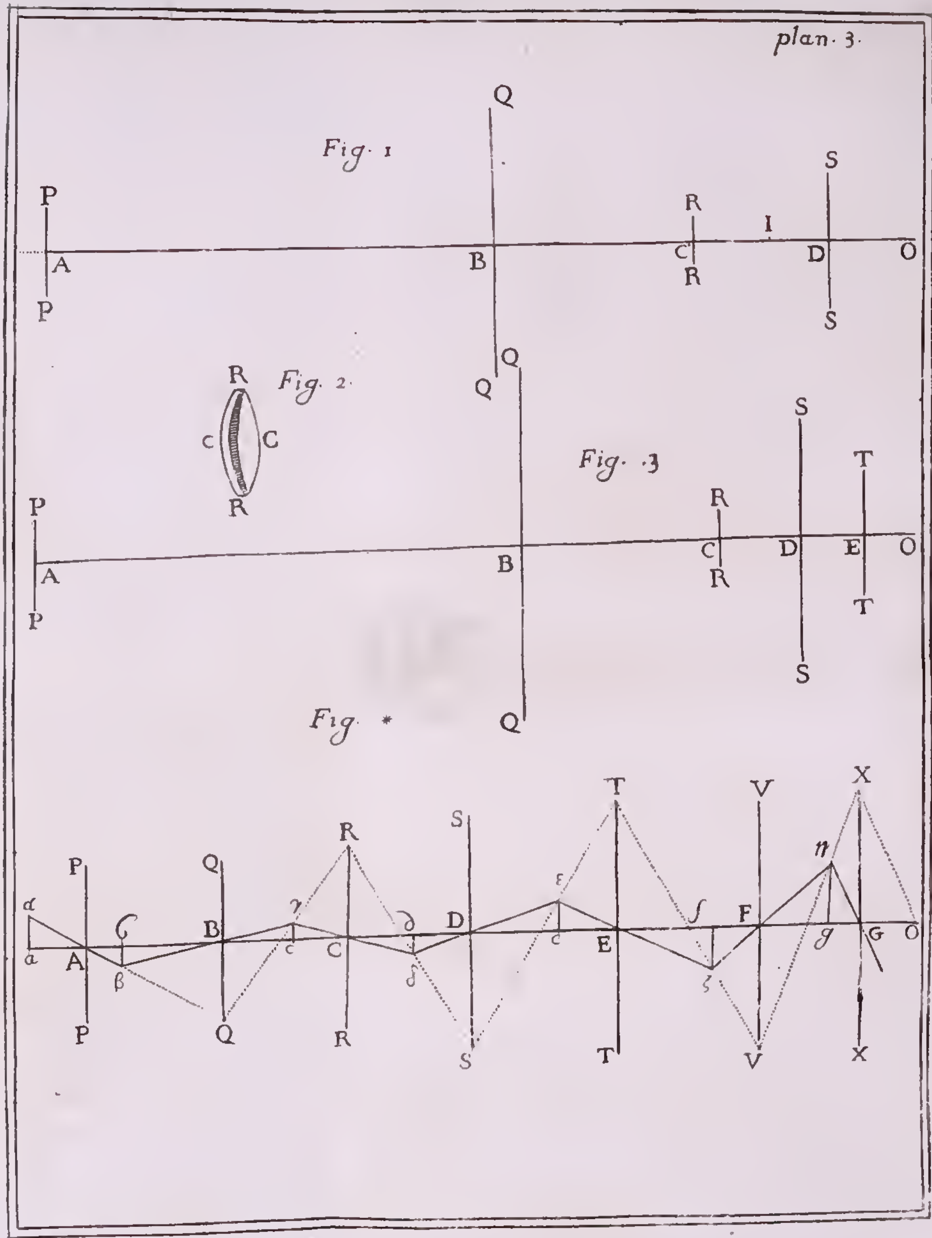
2.

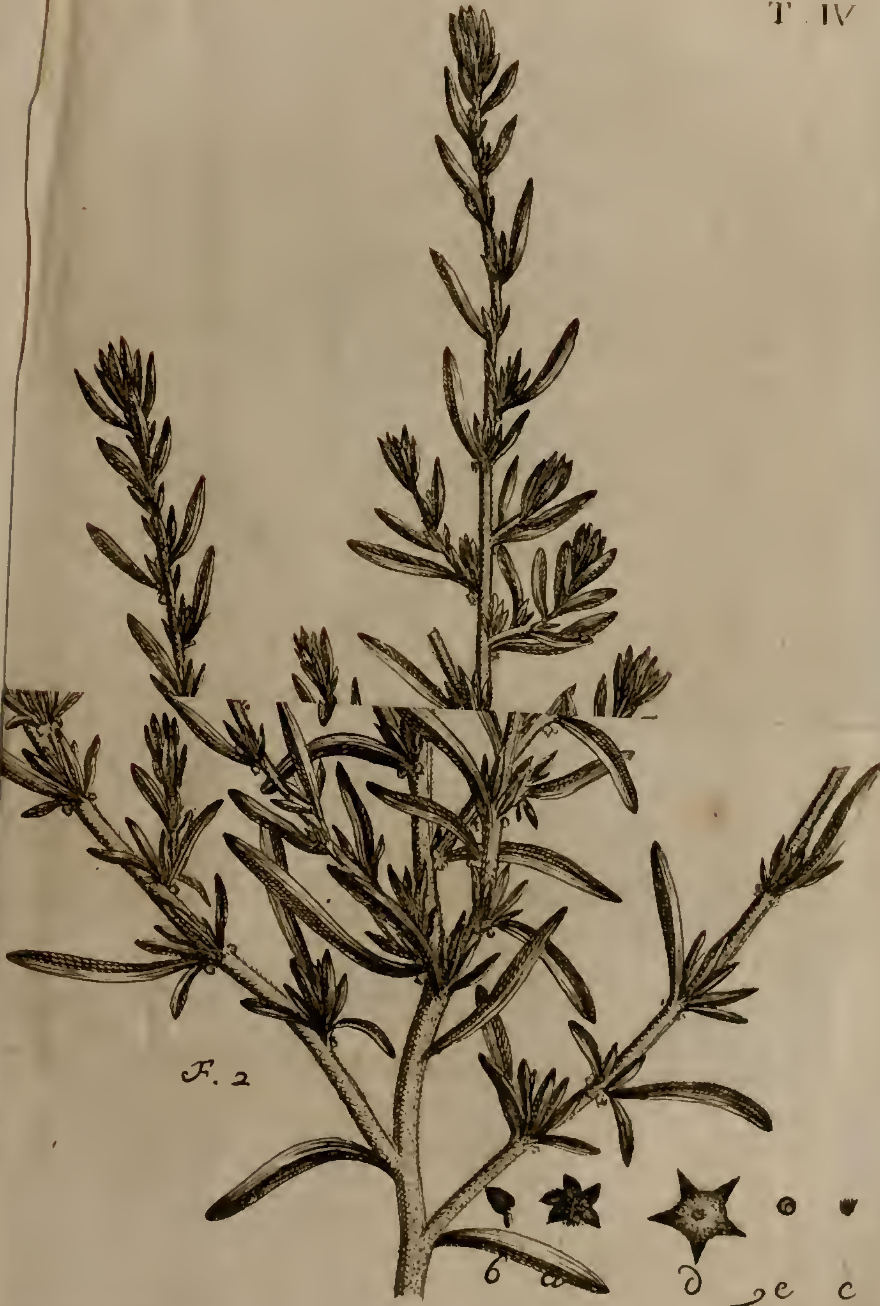
Fig. 3



g. *




plan. 3.
Fig. 1
Fig. 2.
Fig. 3
Fig. *



Tom. 3.

T IV

Tom. 3.

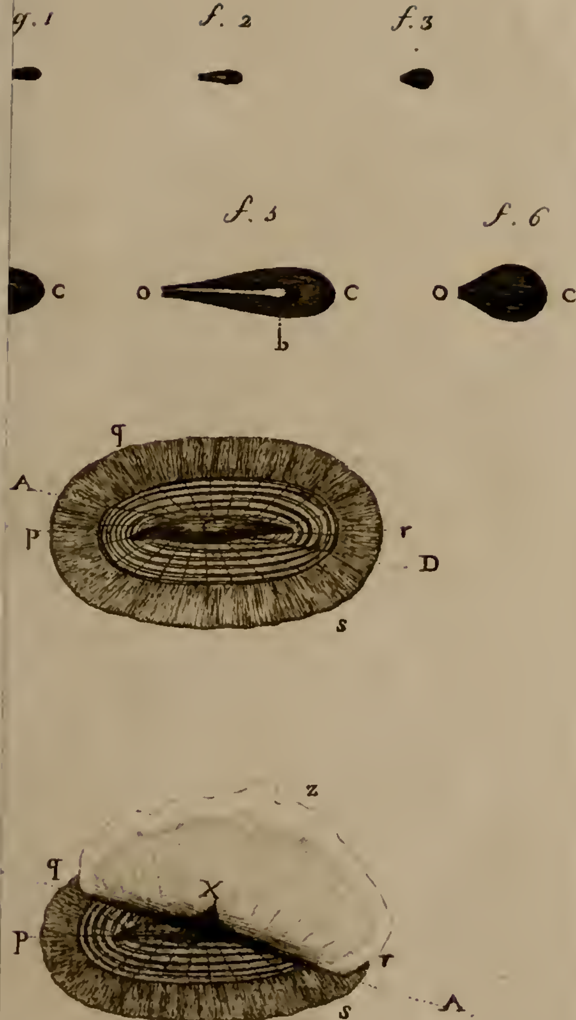
T. V

Tom. 3.

T. V

Tom. 3.

T. VI



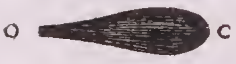
Tom. 3.

fig. 1

f. 2

f. 3

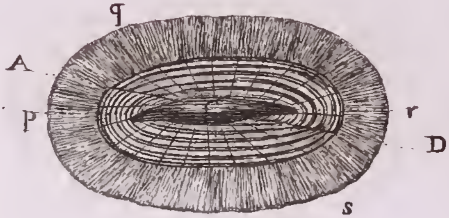
f. 4



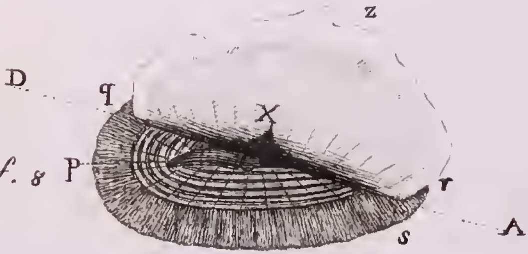
f. 5

f. 6

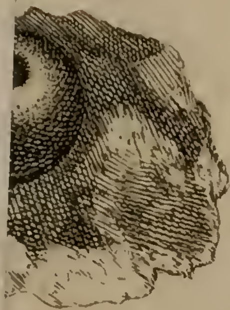
f. 7.



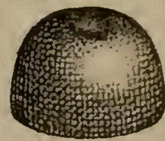
f. 8



T. VII



f. 2

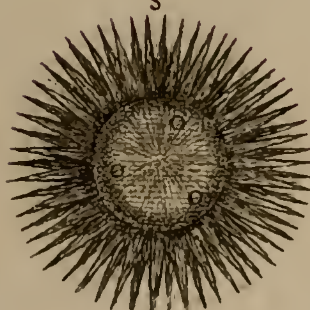


f. 4

f. 5

6

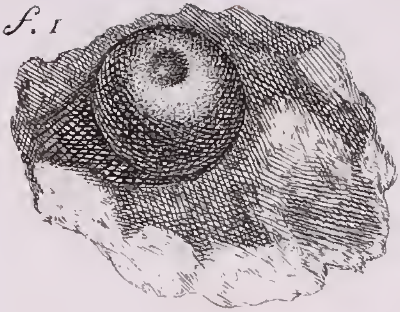
f. 7



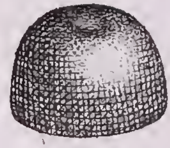
Tom. 3.

T. VII

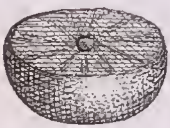
f. 1



f. 2

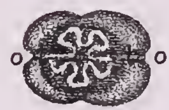


f. 3

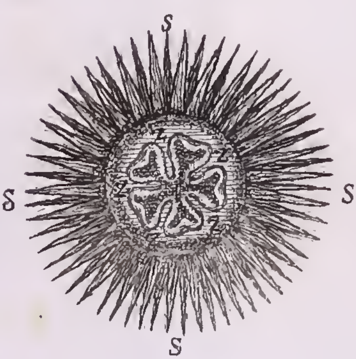


f. 4

f. 5



f. 6



f. 7