双積・弱完全圏

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2023 年 12 月 28 日

※ この PDF では可換モノイドやアーベル群の演算を + で書く.

この PDF の目的は大きく分けて二つあり，(1) 双積を定義すること (2) 蛇の補題などを証明すること，である.

(1) いくつかの圏 (線形空間の圏や **Ab** など) では有限直積が有限直和にもなっている. このような状況を一般化したものが双積である. これは [2] 等では **Ab**-豊穣圏において定義されているが [1] により通常の圏における定義が知られておりそれを述べる.

(2) いわゆるホモロジー代数における有名な補題に「蛇の補題」「5 項補題」などがある. 通常これらは R-加群の圏等で「元を取る」ことによって証明することが多いと思われるがここでは圏論的な証明を与える. そのための枠組みが [3] による弱完全圏である.

目次

1 準備 2
2 零射 4
3 核 5
4 零対象 9
5 双積 12
6 アーベル圏 17
7 弱完全圏 31
8 弱完全圏の例 58

1　準備

$\mathbf{Set}_* := 1/\mathbf{Set}$ を基点付き集合の圏という．$\langle A, a\rangle, \langle B, b\rangle \in \mathbf{Set}_*$ に対して $A \times B$ の同値関係 $\sim$ を

$$\langle u, v\rangle \sim \langle w, x\rangle \iff \begin{cases} (u = w \text{ かつ } v = x) \\ \text{または } (u, v \text{ のどちらかが基点，かつ } w, x \text{ のどちらかが基点}) \end{cases}$$

で定義し，$\langle A, a\rangle \wedge \langle B, b\rangle := \langle A \times B/{\sim}, [a, b]\rangle$ を $\langle A, a\rangle$ と $\langle B, b\rangle$ のスマッシュ積という．(ここで $\langle a, b\rangle$ が属する同値類を $[a, b]$ と書いた．)

命題 1. $\mathbf{Set}_*$ はスマッシュ積により，完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏となる．　□

命題 2. 可換モノイドの圏 $\mathbf{CMon}$ はテンソル積により，完備かつ余完備な対称モノイダル閉圏となる．　□

定義. $f\colon a \to b$ が正則エピ射 (regular epimorphism)
$\iff$ ある射 $g, h\colon x \to a$ が存在して $x \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{f} b$ が coequalizer となる．

明らかに正則エピ射はエピ射である．

命題 3. モノ射かつ正則エピ射ならば同型射である．

証明. $f\colon a \to b$ をモノ射かつ正則エピ射とする．f が $g, h\colon x \to a$ の coequalizer だとすると $f \circ g = f \circ h$ である．

$$x \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} a \xrightarrow{f} b$$

今 f がモノ射だから $g = h$ となる．すると f が g, h の coequalizer だから f は同型射でなければならない．　□

定義. 正則圏 (regular category) とは次の条件を満たす圏 C をいう．

(1) C は有限完備である．
(2) 正則エピ射の pullback は正則エピ射である．
(3) 任意の射 $f\colon a \to b$ の kernel pair は coequalizer を持つ．

定義. C を圏とする．C の射 $f\colon a \to b$ の像 (image) とは，モノ射 $\mathrm{Im}(f)\colon x \to b$ であって次の条件を満たすものをいう．

(1) ある射 $g\colon a \to x$ が存在して $f = \mathrm{Im}(f) \circ g$ となる．
(2) モノ射 $k\colon x' \to b$ と射 $g'\colon a \to x'$ が $f = k \circ g'$ を満たすならば，射 $h\colon x \to x'$ が存在して $\mathrm{Im}(f) = k \circ h$ となる[*1]．

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] \arrow[dd, dashed, "h"] & \\
a \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & b \\
 & x' \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
$$

定義． C^{op} における像を余像 (coimage) という．即ち C の射 $f\colon a \to b$ の余像とはエピ射 $\mathrm{Coim}(f)\colon a \to x$ であって

(1) ある射 $g\colon x \to b$ が存在して $f = g \circ \mathrm{Coim}(f)$ となる．
(2) エピ射 $k\colon a \to x'$ と射 $g'\colon x' \to b$ が $f = g' \circ k$ を満たすならば，射 $h\colon x' \to x$ が存在して $\mathrm{Coim}(f) = h \circ k$ となる

$$
\begin{tikzcd}
 & x' \arrow[dr, "g'"] \arrow[dd, dashed, "h"] & \\
a \arrow[ur, "k"] \arrow[dr, "\mathrm{Coim}(f)"'] & & b \\
 & x \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

命題 4. $f\colon a \to b$ がモノ射のとき f 自身が f の像になる．

証明. モノ射 k を使って $f = k \circ g$ と書けたとき，$h := g$ とすればよいから像の条件が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, dashed, "h"] & \\
a \arrow[ur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[dr, "g"'] & & b \\
 & x \arrow[ur, "k"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

命題 5. C が equalizer を持つとする．射 $f\colon a \to b$ が $f = (a \xrightarrow{g} x \xrightarrow{\mathrm{Im}(f)} b)$ と分解したとき，g はモノ射である．

証明. $h, k\colon x \to c$ が $h \circ g = k \circ g$ を満たすとする．$e\colon d \to x$ を h, k の equalizer とする

[*1] k がモノ射だから，このような h は一意であり，また $h \circ g = g'$ となる．

と次の点線の射 g' を得る．

$$\begin{tikzcd} & & & b \\ & d \arrow[r, "e"] & x \arrow[ur, "\mathrm{Im}(f)"] \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & c \\ a \arrow[ur, dashed, "g'"] \arrow[urr, "g"'] & & & \end{tikzcd}$$

よってモノ射 $\mathrm{Im}(f)\circ e$ を使って $f=(a\xrightarrow{g'}d\xrightarrow{\mathrm{Im}(f)\circ e}b)$ と分解できる．従って次の点線の射 p が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dd, dashed, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & \\ a \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "g'"'] & & b \\ & d \arrow[ur, "\mathrm{Im}(f)\circ e"'] & \end{tikzcd}$$

p は明らかに同型であり $e=p^{-1}$ となる．e が h,k の equalizer だから $h=k$ が分かる． $\square$

2　零射

定義. $f\colon a\to b$ を圏 C の射とする．

(1) f が定数射 $\Longleftrightarrow$ 任意の対象 $c\in C$ と射 $g,h\colon c\to a$ に対して $f\circ g=f\circ h$ となる．
(2) f が余定数射 $\Longleftrightarrow$ C^{op} において f が定数射.
(3) f が零射 $\Longleftrightarrow$ f が定数射かつ余定数射.

$f\colon a\to b,\ g\colon b\to c$ を射とする．定義から明らかに，f か g のどちらか片方が定数射ならば $g\circ f$ も定数射である．従って，f か g のどちらか片方が零射ならば $g\circ f$ も零射である．

定義. 圏 C が零射を持つ $\Longleftrightarrow$ 任意の対象 $a,b\in C$ に対して零射 $a\to b$ が存在する．

命題 6. 零射 $a\to b$ と零射 $b\to a$ が存在するとき，零射 $a\to b$ は一意である．

証明. $f,g\colon a\to b,\ k\colon b\to a$ を零射として $f=g$ を示す．k が余定数射より $f\circ k=g\circ k$ である．また f,g が定数射だから $f\circ\mathrm{id}_a=f\circ(k\circ f)$ かつ $g\circ(k\circ f)=g\circ\mathrm{id}_a$ である．従って
$$f=f\circ\mathrm{id}_a=f\circ k\circ f=g\circ k\circ f=g\circ\mathrm{id}_a=g$$

である. $\square$

そこで圏 C が零射を持つとき，一意に存在する零射 $a \to b$ を 0_{ab} もしくは単に 0 で表す.

命題 7. 圏 C に対して次の条件は同値である.

(1) C が零射を持つ.
(2) ある $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が存在して $U(\mathcal{C}) \cong C$ となる.
(3) 射の族 $\{0_{ab} \colon a \to b\}_{a,b \in C}$ が与えられ次の条件を満たす.

$$\text{任意の } f \colon c \to a \text{ と } g \colon b \to d \text{ に対して } g \circ 0_{ab} \circ f = 0_{cd} \text{ である.}$$

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $a, b \in C$ に対して, 0_{ab} を $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ の基点としたものを $\mathcal{C}(a,b)$ とする. このとき合成 $\mathrm{Hom}_C(b,c) \times \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,c)$ が与える写像 $\mathcal{C}(b,c) \wedge \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,c)$ は $\mathbf{Set}_*$ の射である.

$\because$) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で f か g のどちらかが基点のとき $g \circ f$ も基点となることを示せばよいがそれは零射の性質から成り立つ.

$\mathbf{Set}_*$-豊穣圏の他の性質も成り立つことが分かる.

($2 \Longrightarrow 3$) $a, b \in C$ に対して $\mathcal{C}(a,b)$ の基点を 0_{ab} と定める. $\mathcal{C}$ の合成が基点を保つから，$f \colon c \to a$，$g \colon b \to d$ に対して $g \circ 0_{ab} \circ f = 0_{cd}$ となる.

($3 \Longrightarrow 1$) $0_{ab} \colon a \to b$ が零射であること，即ち定数射かつ余定数射であることを示す. 双対を考えればよいから余定数射であることを示せばよい. そのために $f, g \colon b \to c$ を射とすると

$$f \circ 0_{ab} = f \circ 0_{ab} \circ \mathrm{id}_a = 0_{ac}$$
$$g \circ 0_{ab} = g \circ 0_{ab} \circ \mathrm{id}_a = 0_{ac}$$

だから $f \circ 0_{ab} = g \circ 0_{ab}$ である. $\square$

例 8. 圏 $\mathbf{Set}_*$ は標準的に $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏とみなせるから零射を持つことが分かる. $\square$

3 核

零射が存在すれば核や余核を定義することができる. 以下この節では零射を持つ圏 C を考える.

定義. C を零射を持つ圏とする．$f\colon a \to b$ を C の射とするとき，f と 0_{ab} の equalizer を f の核 (kernel) という．即ち，核とは次の条件を満たす射 $\ker(f)\colon x \to a$ のことである．

(1) $f \circ \ker(f) = 0_{xb}$ である．
(2) $g\colon c \to a$ が $f \circ g = 0_{cb}$ を満たすとき，$h\colon c \to x$ が一意に存在して $\ker(f) \circ h = g$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[r, "f"] & b \\
c \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この PDF では f の核 $\ker(f)$ が存在するとき，g が f の核であることを $g \cong \ker(f)$ で表す．

双対的に，f と 0_{ab} の coequalizer を f の余核 (cokernel) といい，$\mathrm{coker}(f)$ で表す．余核についても $g \cong \mathrm{coker}(f)$ の記法を使う．

命題 9. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で f はエピ射とする．このとき

$$g \text{ の余核が存在する} \iff g \circ f \text{ の余核が存在する}$$

であり，これらは一致する (即ち $\mathrm{coker}(g) \cong \mathrm{coker}(g \circ f)$ である)．

証明. ($\Longrightarrow$) $\mathrm{coker}(g)\colon c \to x$ が存在するとして，これが $g \circ f$ の余核であることを示す．まず明らかに $\mathrm{coker}(g) \circ (g \circ f) = 0_{ax}$ である．普遍性を示すため，$k\colon c \to d$ が $k \circ (g \circ f) = 0_{ad}$ を満たすとする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "\mathrm{coker}(g)"] \arrow[dr, "k"'] & x \arrow[d, dashed, "h"] \\
 & & & d
\end{tikzcd}
$$

このとき $k \circ g \circ f = 0_{ad} = 0_{bd} \circ f$ で f がエピ射だから $k \circ g = 0_{bd}$ である．故に $\mathrm{coker}(g)$ の普遍性から $h\colon x \to d$ が存在して図式が可換となる．$\mathrm{coker}(g)$ はエピ射だから，このような h は明らかに一意である．故に $\mathrm{coker}(g)$ が $g \circ f$ の余核になることが分かった．

($\Longleftarrow$) $\mathrm{coker}(g \circ f)\colon c \to x$ が存在するとして，これが g の余核であることを示す．まず $\mathrm{coker}(g \circ f) \circ g = 0_{bx}$ である．

$\because$) $\mathrm{coker}(g \circ f) \circ g \circ f = 0_{ax} = 0_{bx} \circ f$ で f がエピ射だから $\mathrm{coker}(g \circ f) \circ g = 0_{bx}$ となる．

普遍性を示すため，$k\colon c \to d$ が $k \circ g = 0_{bd}$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "\mathrm{coker}(g\circ f)"] \arrow[dr, "k"'] & x \arrow[d, dashed, "h"] \\
& & & d
\end{tikzcd}$$

すると $k \circ g \circ f = 0_{ad}$ だから $\mathrm{coker}(g \circ f)$ の普遍性により $h\colon x \to d$ が存在して図式が可換となる．$\mathrm{coker}(g \circ f)$ はエピ射だから，このような h は明らかに一意である．故に $\mathrm{coker}(g \circ f)$ が g の余核になることが分かった． □

命題 10. $f\colon a \to b$ の余核 $\mathrm{coker}(f)\colon b \to c$ が存在し，更にその核 $\ker(\mathrm{coker}(f))\colon d \to b$ も存在するとき，余核 $\mathrm{coker}(\ker(\mathrm{coker}(f)))$ も存在して $\mathrm{coker}(\ker(\mathrm{coker}(f))) \cong \mathrm{coker}(f)$ となる．

証明. まず $\mathrm{coker}(f) \circ f = 0$ だから，$\ker(\mathrm{coker}(f))$ の普遍性により次の点線の射 h を得る．

$$\begin{tikzcd}
& d \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & & \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] & c
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{coker}(f)$ が $\ker(\mathrm{coker}(f))$ の余核であることを示すため，$g\colon b \to x$ が $g \circ \ker(\mathrm{coker}(f)) = 0$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
& d \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & & \\
a \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] \arrow[dr, "g"'] & c \arrow[d, dashed, "k"] \\
& & & x
\end{tikzcd}$$

すると $g \circ f = g \circ \ker(\mathrm{coker}(f)) \circ h = 0$ だから余核 $\mathrm{coker}(f)$ の普遍性により $k\colon c \to x$ が存在して可換となる．$\mathrm{coker}(f)$ の普遍性からこのような k は明らかに一意である． □

定義. 零射を持つ圏 C の射 f が正規モノ射 (normal monomorphism)
$\Longleftrightarrow$ ある射 g により $f \cong \ker(g)$ と書ける．

正規モノ射は正則モノ射であり，従ってモノ射である．

例 11. G を群，$H \subset G$ を部分群として $f\colon H \to G$ を包含写像とする．このとき

$$\text{群の圏 } \mathbf{Grp} \text{ において } f \text{ が正規モノ射} \Longleftrightarrow H \subset G \text{ が正規部分群}$$

であることは群論においてよく知られている．従って **Grp** には正規モノ射でないモノ射が存在する． □

命題 12. f を正規モノ射として $\mathrm{coker}(f)$ が存在するとする．このとき $\ker(\mathrm{coker}(f))$ も存在して $\ker(\mathrm{coker}(f)) \cong f$ となる．

証明. $f \cong \ker(g)$ と書けるから命題 10 により

$$\ker(\mathrm{coker}(f)) \cong \ker(\mathrm{coker}(\ker(g))) \cong \ker(g) \cong f$$

となる． □

定義. 零射を持つ圏 C が正規圏 (normal category)
$\Longleftrightarrow$ C の任意のモノ射が正規モノ射である．

双対的に C^{op} が正規圏であるとき C を余正規圏という．

命題 13. C を余核を持つ正規圏とする．射 $f\colon a \to b$ に対して $\ker(\mathrm{coker}(f))$ が存在するならば，$\ker(\mathrm{coker}(f))$ は f の像である．

証明. まず $\mathrm{coker}(f) \circ f = 0$ だから，$\ker(\mathrm{coker}(f))$ の普遍性により次の h を得る．

$$\begin{tikzcd}
& d \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & & \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] & c
\end{tikzcd}$$

$\ker(\mathrm{coker}(f))$ が f の像であることを示すため，モノ射 $k\colon x \to b$ と射 $g\colon a \to x$ を使って $f = (a \xrightarrow{g} x \xrightarrow{k} b)$ と書けたとする．k の余核を取る．命題 12 より $\ker(\mathrm{coker}(k)) \cong k$ である．

$$\begin{tikzcd}
& d \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & & \\
a \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(k)"'] & c \arrow[d, dashed, "p"] \\
& x \arrow[ur, "k"'] & & u
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{coker}(k) \circ f = \mathrm{coker}(k) \circ k \circ g = 0$ だから，$\mathrm{coker}(f)$ の普遍性により $p\colon c \to u$ を得る．このとき $\mathrm{coker}(k) \circ \ker(\mathrm{coker}(f)) = 0$ で，$k \cong \ker(\mathrm{coker}(k))$ の普遍性により $d \to x$ が得られる． □

命題 14. $\mathcal{C}$ を $\mathbf{Ab}$-豊穣圏，$C := U(\mathcal{C})$ とする．このとき C の正則モノ射は正規モノ射である．

証明. $f\colon a \to b$ を正則モノ射とする．即ちある射 $h, k\colon b \to x$ が存在して $a \xrightarrow{f} b \overset{h}{\underset{k}{\rightrightarrows}} x$ が equalizer となる．今 $\mathcal{C}$ が $\mathbf{Ab}$-豊穣圏だから，$g := h - k$ と定義すれば $\ker(g) \cong f$ である． □

4 零対象

零射を構成する方法としてよく知られているのが，零対象を使う方法である．

定義. 対象 $x \in C$ が零対象 (zero object) $\Longleftrightarrow$ x が始対象かつ終対象

零対象は記号では 0 で表すことが多いので，ここでは以下そのようにする．

$a, b \in C$ を対象，$0 \in C$ を零対象とする．0 は始対象であるから，射 $i\colon 0 \to b$ が一意に存在する．また 0 は終対象でもあるから，射 $p\colon a \to 0$ が一意に存在する．これらを使って $0_{ab} := (a \xrightarrow{p} 0 \xrightarrow{i} b)$ と定義する．定義から明らかにこの 0_{ab} は零射である．従って零射の一意性 (命題 6) により，この 0_{ab} は零対象の取り方によらず well-defined になっていることが分かる．以上により次の命題が成り立つ．

命題 15. 零対象を持つ圏は零射を持つ． □

従って命題 7 により零対象を持つ圏は $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏とみなせる．逆に $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏においては，零対象の定義は次のように言い換えられる．

命題 16. $\mathcal{C}$ を $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏として $C := U(\mathcal{C})$ とする．このとき C の対象 x に対して次の条件は同値である．

(1) x は零対象である．
(2) x は始対象である．
(3) x は終対象である．
(4) $\mathcal{C}(x, x) = 1$.
(5) id_x は零射である．

証明. $(2 \Longrightarrow 4)$ x が始対象だから $\mathcal{C}(x, x) = 1$ である．

$(4 \Longrightarrow 5)$ 明らか．

($5 \Longrightarrow 2$) a を対象として $f, g\colon x \to a$ を射とすると，id_x が零射だから $f = f \circ \mathrm{id}_x = g \circ \mathrm{id}_x = g$ となる．故に x は始対象である．

同様にして $3 \Longleftrightarrow 4$ も分かり，従って $1 \Longleftrightarrow 2$ も分かる． □

命題 17. 零対象を持つ圏 C において $\mathrm{coker}(\mathrm{id}_a)$ は存在し，それは一意な射 $!\colon a \to 0$ である．

証明. 0 が終対象だから $! \circ \mathrm{id}_a = 0_{a0}$ である．

$f\colon a \to b$ が $f \circ \mathrm{id}_a = 0_{ab}$ を満たすとする．即ち $f = 0_{ab}$ である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[r, "!"] \arrow[dr, "f"'] & 0 \arrow[d, dashed, "h"] \\
& & b
\end{tikzcd}$$

0 が始対象だから，一意な射 $h\colon 0 \to b$ が存在する．このとき $h \circ ! = 0_{ab} = f$ である．明らかにこのような h は一意だから，$\mathrm{coker}(\mathrm{id}_a) \cong !$ が分かった． □

命題 18. 零対象を持つ圏 C において，一意な射 $!\colon 0 \to a$ の余核は存在し，それは id_a である．

証明. 0 が始対象だから $\mathrm{id}_a \circ ! = 0_{0a}$ である．

$f\colon a \to b$ が $f \circ ! = 0_{0b}$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "!"] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[dr, "f"'] & a \arrow[d, dashed, "h"] \\
& & b
\end{tikzcd}$$

このとき明らかに $h := f$ がこの図式を可換にする一意な射であるから，$\mathrm{coker}(!) \cong \mathrm{id}_a$ である． □

双対を考えれば $\ker(\mathrm{id}) \cong !$，$\ker(!) \cong \mathrm{id}$ も分かる．

また，より一般に f を同型射とするとき $\mathrm{coker}(f) \cong !$，$\mathrm{coker}(!) \cong f$ となることも同様にして分かる．

命題 19. C を零対象を持つ圏とする．$f\colon a \to b$ がエピ射のとき $\mathrm{coker}(f) \cong !\colon b \to 0$ である．

証明. 命題 9 で $g := \mathrm{id}_b$ とすればよい． □

例 20. 命題 19 の逆は成り立たない．即ち零対象を持つ圏 C において $\mathrm{coker}(f) = !$ でも f がエピ射とは限らない．実際 $\mathbf{Set}_*$ において 2 つの集合 $X := \{*, a, b\}$，$Y := \{*, c\}$ の基点を $*$ としたとき，写像 $f\colon X \to Y$ を

$$f(*) := *, \quad f(a) := c, \quad f(b) := c$$

で定義すれば f は $\mathbf{Set}_*$ の射 $\langle X, * \rangle \to \langle Y, * \rangle$ であり，明らかに $\ker(f) \cong !$ となる．ところが f は明らかにモノ射ではない． □

圏 C が零対象と核と余核を持つとする．C の射 $f\colon a \to b$ に対して $\ker(\mathrm{coker}(f))$ と $\mathrm{coker}(\ker(f))$ を考えると次の点線の射 p, i を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & & \\
d \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[ur, dashed, "p"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(\ker(f))"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] & c \\
 & & x' \arrow[ur, dashed, "i"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき $\ker(\mathrm{coker}(f)) \circ p \circ \ker(f) = f \circ \ker(f) = 0$ であり $\ker(\mathrm{coker}(f))$ がモノ射だから $p \circ \ker(f) = 0$ となる．故に $\mathrm{coker}(\ker(f))$ の普遍性により，次の点線の射 $\bar{f}$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & & x \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & & \\
d \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(\ker(f))"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] & c \\
 & & x' \arrow[uu, dashed, "\bar{f}"] \arrow[ur, "i"'] & &
\end{tikzcd} \tag{21}$$

従って任意の射は $f = (a \xrightarrow{\mathrm{coker}(\ker(f))} x' \xrightarrow{\bar{f}} x \xrightarrow{\ker(\mathrm{coker}(f))} b)$ と分解できる．

命題 22. C を零対象と核と余核を持つ圏とする．C の射 $f\colon a \to b$ に対して (21) のように $\bar{f}$ を取る．このとき

$$\bar{f}\text{ が同型} \iff f = (a \xrightarrow{\text{正規エピ射}} z \xrightarrow{\text{正規モノ射}} b)\text{ と書ける．}$$

証明. $(\Longrightarrow)$ 明らか．

$(\Longleftarrow)$ 正規エピ射 e と正規モノ射 m を使って $f = (a \xrightarrow{e} z \xrightarrow{m} b)$ と書けたとする．命

題 12 より $\mathrm{coker}(\ker(e)) \cong e$，$\ker(\mathrm{coker}(m)) \cong m$ である．

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\ker(e)"] & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(h)"] & c \\
& & z \arrow[ur, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

e がエピ射だから命題 9 より $\mathrm{coker}(f) \cong \mathrm{coker}(m)$ である．よって $m \cong \ker(\mathrm{coker}(f))$ が分かる．同様にして $e \cong \mathrm{coker}(\ker(f))$ である．故に $\bar{f}$ は同型である． □

5 双積

零対象は「始対象かつ終対象」であったが「直積かつ余直積」にあたるものが双積である．

定義． C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a と b の双積とは，5 つ組 $\langle a \oplus b, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．[*2]

(1) $a \oplus b$ は C の対象で，i_0, i_1, p_0, p_1 は次の図式のような射である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "i_0"] & a \oplus b \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & b \arrow[l, shift right, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

(2) $\langle a \oplus b, i_0, i_1 \rangle$ は a と b の余直積であり，$\langle a \oplus b, p_0, p_1 \rangle$ は a と b の直積である．

(3) $p_0 \circ i_0 = \mathrm{id}_a$ である．

(4) $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_b$ である．

(5) $i_0 \circ p_0 \circ i_1 \circ p_1 = i_1 \circ p_1 \circ i_0 \circ p_0$ である．

定義． 圏 C が双積を持つ $\iff$ 任意の対象 $a, b \in C$ に対して双積が存在する．

命題 23. $\langle a \oplus b, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ を a と b の双積とするとき，$p_1 \circ i_0 \colon a \to b$ は零射である．

証明．双対を考えればよいから，$p_1 \circ i_0$ が余定数射であることを示せばよい．

任意の対象 $c \in C$ と射 $g, h \colon b \to c$ を取る．$g \circ (p_1 \circ i_0) = h \circ (p_1 \circ i_0)$ を示す．まず余

[*2] この定義は [1] による．これは [2] 等に載っている定義と少し異なる．[2] の定義は C が **Ab**-豊穣圏であることを仮定しており，通常の圏に対しては適用できない．後で証明する命題 31 により，**Ab**-豊穣圏の場合はこれらの定義が一致することが分かる．

直積 $\langle a \oplus b, i_0, i_1 \rangle$ の普遍性により，次の射 $k\colon a \oplus b \to c$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_1"'] & & c \\
a \oplus b \arrow[urr, dashed, "k"'] & & b \arrow[u, "h"'] \\
a \arrow[u, "i_0"] \arrow[r, "i_0"] & a \oplus b \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ddr, "i_0"'] \arrow[dddrr, rounded corners, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[from=1-1, to=3-3, phantom, "(3)"] & & a \arrow[r, "i_0"] \arrow[from=1-3, to=3-5, phantom, "(5)"] & a \oplus b \arrow[r, "p_1"] & b \arrow[rr, "g"] \arrow[d, "i_1"'] \arrow[from=1-5, to=2-6, phantom, "(k)"] & & c \\
& & & & a \oplus b \arrow[urr, "k"'] \arrow[from=2-5, to=3-7, phantom, "(k)"] & & b \arrow[u, "h"'] \\
\arrow[from=3-1, to=4-2, phantom, "(3)"] & a \oplus b \arrow[uur, "p_0"'] \arrow[r, "p_1"] \arrow[dr, "p_0"'] & b \arrow[r, "i_1"] \arrow[from=3-3, to=4-5, phantom, "(5)"] & a \oplus b \arrow[r, "p_0"] & a \arrow[u, "i_0"] \arrow[r, "i_0"] & a \oplus b \arrow[ur, "p_1"'] \arrow[from=3-6, to=4-7, phantom, "(4)"] & \\
& & a \arrow[r, "i_0"'] & a \oplus b \arrow[r, "p_1"'] & b \arrow[ur, "i_1"'] \arrow[uurr, rounded corners, "\mathrm{id}_b"'] & &
\end{tikzcd}$$

(3), (4), (5) は双積の定義より可換である．また (k) は k の定義により可換である．故にこの図式は可換である． □

系 24. 双積を持つ圏は零射を持つ． □

従って命題 7 より，双積を持つ圏は $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏とみなせる．またこの場合，双積の条件は次のように言い換えられる．

命題 25. $\mathcal{C}$ を $\mathbf{Set}_*$-豊穣圏として $C := U(\mathcal{C})$ とする．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "i_0"] & s \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & b \arrow[l, shift right, "i_1"']
\end{tikzcd}$$

を C の図式とする．このとき $\langle s, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の双積となる $\iff$ 次の条件を満たす．

(1) $\langle s, i_0, i_1 \rangle$ は a と b の余直積であり，$\langle s, p_0, p_1 \rangle$ は a と b の直積である．
(2) $p_0 \circ i_0 = \mathrm{id}_a$ である．

(3) $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_b$ である．

(4) $p_1 \circ i_0 = 0_{ab}$ である．

(5) $p_0 \circ i_1 = 0_{ba}$ である．

証明．($\Longrightarrow$) (1) と (2) と (3) は双積の条件である．$p_1 \circ i_0$ と $p_0 \circ i_1$ は零射だから，(4) と (5) も成り立つ．

($\Longleftarrow$) 双積の条件 (5) を示せばよいが，それは

$$i_0 \circ p_0 \circ i_1 \circ p_1 = 0_{ss} = i_1 \circ p_1 \circ i_0 \circ p_0$$

より成り立つ． □

双積だけでなく零対象もある場合，更に **CMon**-豊穣圏にすることもできる．

命題 26. C を零対象と双積を持つ圏とする．C の射 $f, g\colon a \to b$ に対して余直積 $a \oplus a$ の普遍性から得られる射を $f \oplus g$ とする．（ここで $\langle a \oplus a, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ を a と a の双積，$\langle b \oplus b, j_0, j_1, q_0, q_1 \rangle$ を b と b の双積とする．）

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & a \oplus a \arrow[d, dashed, "f \oplus g"'] & a \arrow[l, "i_1"'] \arrow[d, "g"] \\
b \arrow[r, "j_0"'] & b \oplus b & b \arrow[l, "j_1"]
\end{tikzcd}$$

これを使って $f + g := (a \xrightarrow{\Delta} a \oplus a \xrightarrow{f \oplus g} b \oplus b \xrightarrow{\nabla} b)$ と定義する．この $+$ と零射により $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ は可換モノイドとなる．

証明．略． □

定理 27. C を零対象と双積を持つ圏とする．このときある **CMon**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が存在して $U(\mathcal{C}) \cong C$ となる．

証明．命題 26 により **CMon**-豊穣圏になっていることを示せばよい． □

CMon-豊穣圏においては，双積の定義は次のように言い換えられる．

命題 28. $\mathcal{C}$ を **CMon**-豊穣圏として $C := U(\mathcal{C})$ とする．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, shift left, "i_0"] & s \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift left, "p_1"] & b \arrow[l, shift left, "i_1"]
\end{tikzcd}$$

を C の図式とする．このとき $\langle s, i_0, i_1, p_0, p_1\rangle$ が a と b の双積となる $\iff$ 次の条件を満たす:

(1) $p_0 \circ i_0 = \mathrm{id}_a$ である．

(2) $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_b$ である．

(3) $p_1 \circ i_0 = 0_{ab}$ である．

(4) $p_0 \circ i_1 = 0_{ba}$ である．

(5) $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \mathrm{id}_s$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) (1) と (2) は双積の条件である．(3) と (4) は命題 25 より成り立つ．よって (5) を示せばよい．まず次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, bend right, "i_0"'] & s \arrow[d, dashed, "(i_0\circ p_0)+(i_1\circ p_1)"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, bend left, "i_1"] \\
& s &
\end{tikzcd}$$

∵) $\big((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)\big) \circ i_0 = (i_0 \circ p_0 \circ i_0) + (i_1 \circ p_1 \circ i_0) = i_0 + 0_{as} = i_0$ より左側の三角は可換である．右側も同様.

故に余直積 s の普遍性から $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \mathrm{id}_s$ が分かる．

($\Longleftarrow$) まず $\langle s, i_0, i_1\rangle$ が余直積であることを示す．そのために $f\colon a \to x$，$g\colon b \to x$ を任意の射とする．$h := (f \circ p_0) + (g \circ p_1)$ と定める．このとき次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "f"'] & s \arrow[d, "h"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "g"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

∵) $h \circ i_0 = \big((f \circ p_0) + (g \circ p_1)\big) \circ i_0 = (f \circ p_0 \circ i_0) + (g \circ p_1 \circ i_0) = f + 0_{ax} = f$ である．$h \circ i_1 = g$ も同様.

$h'\colon s \to x$ が次の図式を可換にするとする．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "f"'] & s \arrow[d, "h'"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "g"] \\
& x &
\end{tikzcd}$$

このとき $h = h'$ である．

> $\because$) $h' = h' \circ \bigl((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)\bigr) = (h' \circ i_0 \circ p_0) + (h' \circ i_1 \circ p_1) = (f \circ p_0) + (g \circ p_1) = h$ である．

故に $\langle s, i_0, i_1 \rangle$ は余直積である．

双対を考えれば $\langle s, p_0, p_1 \rangle$ が直積であることも分かる．

後は双積の条件 (5) を示せばよいが，それは $i_0 \circ p_0 \circ i_1 \circ p_1 = 0_{ss} = i_1 \circ p_1 \circ i_0 \circ p_0$ より分かる． $\square$

命題 29. $\mathcal{C}$ を **CMon**-豊穣圏として $C := U(\mathcal{C})$ とする．このとき C が余直積を持てばそれは双積となる．

証明. $a \xrightarrow{i_0} s \xleftarrow{i_1} b$ を a, b の余直積とする．余直積の普遍性により，次の p_0, p_1 が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_a"'] & s \arrow[d, dashed, "p_0"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "0"] \\
& a &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, "0"'] & s \arrow[d, dashed, "p_1"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_b"] \\
& b &
\end{tikzcd}
$$

定義より命題 28 の条 (件 1) から (4) が成り立つ．よって条件 (5) を示せばよい．そのために次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, bend right, "i_0"'] & s \arrow[d, dashed, "(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, bend left, "i_1"] \\
& s &
\end{tikzcd}
$$

$\bigl((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)\bigr) \circ i_0 = (i_0 \circ p_0 \circ i_0) + (i_1 \circ p_1 \circ i_0) = i_0 + 0_{as} = i_0$ より左側の三角は可換である．右側も同様．故に余極限の普遍性から $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \mathrm{id}_s$ である． $\square$

例 30. 群の圏 **Grp** は **CMon**-豊穣圏の underlying category にはならない．(従って下記で定義するアーベル圏にはならないことが分かる．)

証明. ある **CMon**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が $U(\mathcal{C}) \cong \mathbf{Grp}$ を満たすとする．**Grp** は余直積を持つから命題 29 よりそれは双積，従って直積になる．ところが **Grp** においては直積と余直積は一致しないから矛盾する． $\square$

更に **Ab**-豊穣圏の場合は次のようになる．

命題 31. $\mathcal{C}$ を **Ab**-豊穣圏として $C := U(\mathcal{C})$ とする．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "i_0"] & s \arrow[l, shift left, "p_0"] \arrow[r, shift right, "p_1"'] & b \arrow[l, shift right, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

を C の図式とする．このとき $\langle s, i_0, i_1, p_0, p_1 \rangle$ が a と b の双積となる $\Longleftrightarrow$ 次の条件を満たす:

(1) $p_0 \circ i_0 = \mathrm{id}_a$ である．

(2) $p_1 \circ i_1 = \mathrm{id}_b$ である．

(3) $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \mathrm{id}_s$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) 命題 28 より明らか．

($\Longleftarrow$) 命題 28 の条件 (3) と (4) を示せばよい．どちらも同じなので (3) を示す．

$$\begin{aligned} p_1 \circ i_0 &= p_1 \circ \mathrm{id}_s \circ i_0 \\ &= p_1 \circ \big((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)\big) \circ i_0 \\ &= (p_1 \circ i_0 \circ p_0 \circ i_0) + (p_1 \circ i_1 \circ p_1 \circ i_0) \\ &= (p_1 \circ i_0) + (p_1 \circ i_0) \end{aligned}$$

であり，今 **Ab**-豊穣圏だから両辺から $p_1 \circ i_0$ を引いて $p_1 \circ i_0 = 0$ が分かる． □

6 アーベル圏

定義. 次の条件を満たす圏 C をアーベル圏 (abelian category) という．

(1) C は零対象を持つ．

(2) C は直積と余直積を持つ．

(3) C は核と余核を持つ．

(4) C は正規かつ余正規である．

以下，この節ではアーベル圏 C を考える．

命題 32. f がモノ射かつエピ射ならば同型射である．

証明. C が余正規だから，エピ射は正規エピ射，従って正則エピ射である．故に命題 3 から従う． □

補題 33. $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ がエピ射ならば f と g の pushout が存在する．

証明. f, g の核を $\ker(f)\colon s \to a$, $\ker(g)\colon t \to a$ とする．余直積 $\langle s \amalg t, i_0, i_1 \rangle$ の普遍性により次の点線の射 h が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "\ker(f)"] & & & c \\
& s \amalg t \arrow[r, dashed, "h"] & a \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \\
t \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "\ker(g)"'] & & & b
\end{tikzcd}$$

この h の余核 $\mathrm{coker}(h)\colon a \to x$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[drr, bend left, "\ker(f)"] & & \\
& & a \arrow[r, "\mathrm{coker}(h)"] & x
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "i_0"'] & & \\
s \amalg t \arrow[r, "h"] & a \arrow[r, "\mathrm{coker}(h)"] & x
\end{tikzcd}
= 0$$

であり，f がエピ射だから $f \cong \mathrm{coker}(\ker(f))$ となるのでその普遍性により $u_0\colon b \to x$ が存在して $u_0 \circ f = \mathrm{coker}(h)$ となる．同様にして $u_1\colon c \to x$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "\ker(f)"] & & & c \arrow[dr, dashed, "u_1"] & \\
& s \amalg t \arrow[r, "h"] & a \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{coker}(h)"] & & x \\
t \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "\ker(g)"'] & & & b \arrow[ur, dashed, "u_0"'] &
\end{tikzcd}$$

$\langle x, u_0, u_1 \rangle$ が f, g の pushout であることを示せばよい．そのために v_0, v_1 を $v_0 \circ f = v_1 \circ g$ を満たすように取る．

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[dr, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "\ker(f)"] & & & c \arrow[dr, "u_1"] \arrow[drr, bend left, "v_1"] & & \\
& s \amalg t \arrow[r, "h"] & a \arrow[ur, "g"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{coker}(h)"] & & x & z \\
t \arrow[ur, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "\ker(g)"'] & & & b \arrow[ur, "u_0"'] \arrow[urr, bend right, "v_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

$v_0 \circ f \circ h = 0$ である．

∵)

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[dr, bend left, "\ker(f)"] & & & \\
& a \arrow[dr, "f"'] & & z \\
& & b \arrow[ur, bend right, "v_0"'] &
\end{tikzcd}
= 0
$$

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "f"] & & z \\
t \arrow[ur, bend right, "\ker(g)"'] & & b \arrow[ur, bend right, "v_0"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & c \arrow[dr, bend left, "v_1"] & \\
& a \arrow[ur, "g"] & & z \\
t \arrow[ur, bend right, "\ker(g)"'] & & &
\end{tikzcd}
= 0
$$

だから次の図式は可換である.

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "i_0"'] \arrow[drr, bend left, "v_0 \circ f \circ \ker(f)"] & & \\
s \amalg t \arrow[rr, "0"] & & z \\
t \arrow[u, "i_1"] \arrow[urr, bend right, "v_0 \circ f \circ \ker(g)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

故に $s \amalg t$ の普遍性から $v_0 \circ f \circ h = 0$ が分かる.

よって $\mathrm{coker}(h)$ の普遍性により $k \colon x \to z$ が存在して $k \circ \mathrm{coker}(h) = v_0 \circ f$ となる.

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[d, "i_0"'] \arrow[dr, bend left, "\ker(f)"] & & c \arrow[dr, "u_1"] \arrow[drr, bend left, "v_1"] & & \\
s \amalg t \arrow[r, "h"] & a \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\mathrm{coker}(h)"] \arrow[dr, "f"'] & & x \arrow[r, dashed, "k"] & z \\
t \arrow[u, "i_1"] \arrow[ur, bend right, "\ker(g)"'] & & b \arrow[ur, "u_0"'] \arrow[urr, bend right, "v_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

k の一意性は $\mathrm{coker}(h)$ がエピ射であることから明らかなので，右側の二つの三角形が可

換 (即ち $k \circ u_0 = v_0$ かつ $k \circ u_1 = v_1$) であることを示せばよい．まず k の取り方から

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & z \\
& b \arrow[ur, bend right, "v_0"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{coker}(h)"] & x \arrow[r, "k"] & z
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"'] & & x \arrow[r, "k"] & z \\
& b \arrow[ur, "u_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

となり f がエピ射だから $k \circ u_0 = v_0$ である．$k \circ u_1 = v_1$ についても同様である． □

定理 34. アーベル圏は有限完備かつ有限余完備である．

証明. 双対を考えればよいから有限余完備であることを示せばよいが，有限余直積は定義から存在するので coequalizer が存在することを示せばよい．$f, g \colon a \to b$ とする．余直積 $a \amalg b$ の普遍性により得られる次の点線の射を f', g' とする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "f'"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, bend left, "\mathrm{id}"] \\
& b &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_0"] \arrow[dr, bend right, "g"'] & a \amalg b \arrow[d, dashed, "g'"] & b \arrow[l, "i_1"'] \arrow[dl, bend left, "\mathrm{id}"] \\
& b &
\end{tikzcd}
$$

$f' \circ i_1 = \mathrm{id}$, $g' \circ i_1 = \mathrm{id}$ だから f', g' はエピ射である．よって f', g' の pushout $\langle x, u_0, u_1 \rangle$ が存在する．定義より

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}"'] & & \\
& a \amalg b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & b \arrow[d, "u_1"] \\
& b \arrow[r, "u_0"'] & x
\end{tikzcd}
$$

が可換であるから $u_0 = u_1$ である．よって

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\
& a \amalg b \arrow[r, "g'"'] \arrow[d, "f'"] & b \arrow[d, "u_0"] \\
& b \arrow[r, "u_0"'] & x
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．u_0 が f, g の coequalizer であることを示せばよい．そのために $k\colon b \to c$ が $k \circ f = k \circ g$ を満たすとする．このとき次の図式が可換だから $k \circ f' = k \circ g'$ である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "i_0"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] \arrow[dddr, bend right=50, "k\circ f"'] & & b \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[ddl, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dddl, bend left=50, "k"] \\
& a \amalg b \arrow[d, "f'"] & \\
& b \arrow[d, "k"] & \\
& c &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "i_0"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] \arrow[dddr, bend right=50, "k\circ f=k\circ g"'] & & b \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[ddl, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[dddl, bend left=50, "k"] \\
& a \amalg b \arrow[d, "g'"] & \\
& b \arrow[d, "k"] & \\
& c &
\end{tikzcd}
$$

よって pushout の普遍性から点線の射 h が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
a \amalg b \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"'] & b \arrow[d, "u_0"'] \arrow[ddr, bend left, "k"] & \\
b \arrow[r, "u_0"] \arrow[drr, bend right, "k"'] & x \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & c
\end{tikzcd}
$$

pushout の普遍性からこのような h の一意性も明らかだから，u_0 が f, g の coequalizer である． □

命題 35. C の射 $f\colon a \to b$ に対して次の条件は同値である．

(1) f はエピ射である．

(2) $g\colon b \to c$ が $g \circ f = 0$ を満たすならば $g = 0$ である．

(3) $\mathrm{coker}(f) = !\colon b \to 0$.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $g \circ f = 0$ とすると $g \circ f = 0 = 0 \circ f$ で f がエピ射だから $g = 0$ である．

($2 \Longrightarrow 3$) まず明らかに $! \circ f = 0$ である．次に $g \circ f = 0$ とする．条件 2 より $g = 0$ だから次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "!"] \arrow[dr, "g"'] & 0 \arrow[d, "!"] \\
& & c
\end{tikzcd}
$$

このような $0 \to c$ はもちろん一意なので $\mathrm{coker}(f) = !$ が分かった．

$(3 \Longrightarrow 1)$ 射 $u, v\colon b \to c$ が $u \circ f = v \circ f$ を満たすとする．u, v の equalizer を $g\colon x \to b$ とすると普遍性により $h\colon a \to x$ が存在して $g \circ h = f$ となる．

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r, "g"] & b \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & c \\ a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "f"'] & & & \end{tikzcd}$$

g は equalizer だからモノ射で，今 C が正規だから，ある $k\colon b \to d$ により $\ker(k) \cong g$ と書ける．

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr, "g"] & & & \\ a \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"] \arrow[drr, "k"'] & 0 \arrow[dr, dashed, "!"] & \\ & & & & d \end{tikzcd}$$

すると $k \circ f = k \circ g \circ h = 0$ だから，余核 $\mathrm{coker}(f)$ の普遍性により $! \circ \mathrm{coker}(f) = k$ となる．故に k は零射であり，g は同型となる．従って $u = v$ である．$\square$

$f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ に対して，直積 $\langle b \times c, p_0, p_1 \rangle$ の普遍性により定まる点線の射を以下では $\langle f, g \rangle$ と書く．

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, dashed, "\langle f,g \rangle"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\ & b \times c \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\ b & & c \end{tikzcd}$$

補題 36. $a \in C$ の対角射 $\Delta := \langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle\colon a \to a \times a$ の余核を $\mathrm{coker}(\Delta)\colon a \times a \to c$ とするとき $a \cong c$ である．

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[d, "\Delta"] \arrow[ddl, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\ & a \times a \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[dd, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & \\ a & & a \\ & c & \end{tikzcd}$$

証明．$\langle 0, \mathrm{id}\rangle$ を考える．$p_1 \circ \langle 0, \mathrm{id}\rangle = \mathrm{id}$ だから $\langle 0, \mathrm{id}\rangle$ はモノ射で p_1 はエピ射である．

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "\langle 0,\mathrm{id}\rangle", tail] \arrow[ddl, bend right, "0"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & \\
 & a \times a \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
a & & a
\end{tikzcd}$$

このとき $\ker(p_0) \cong \langle 0, \mathrm{id}\rangle$ である．

∵) $f \colon x \to a \times a$ が $p_0 \circ f = 0$ を満たすとする．このとき次の図式が可換であるから，普遍性により $\langle 0, \mathrm{id}\rangle \circ (p_1 \circ f) = f$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[d, "p_1 \circ f"] \arrow[ddd, bend right=40, "0"'] \arrow[dddrr, bend left, "p_1 \circ f"] & & \\
 & a \arrow[dd, "\langle 0,\mathrm{id}\rangle", tail] \arrow[ddl, bend right, "0"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
 & & & \\
a & a \times a \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & a &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[d, "f"] \arrow[dl, bend right, "0"'] \arrow[dr, bend left, "p_1 \circ f"] & \\
a & a \times a \arrow[l, "p_0"] \arrow[r, "p_1"'] & a
\end{tikzcd}$$

$\langle 0, \mathrm{id}\rangle$ がモノ射だから，$\langle 0, \mathrm{id}\rangle \circ h = f$ となるような h は一意である．従って $\ker(p_0) \cong \langle 0, \mathrm{id}\rangle$ である．

よって $\mathrm{coker}(\langle 0, \mathrm{id}\rangle) \cong \mathrm{coker}(\ker(p_0)) \cong p_0$ である．

同様にして $\ker(p_1) \cong \langle \mathrm{id}, 0\rangle$，$\mathrm{coker}(\langle \mathrm{id}, 0\rangle) \cong p_1$ が分かる．

$r := \mathrm{coker}(\Delta) \circ \langle \mathrm{id}, 0\rangle \colon a \to c$ が同型であることを示せばよい．そのためには r がモノ射かつエピ射であることを示せばよい．

まず r がモノ射であることを示すため，$r \circ f = 0$ とする．次の図式の実線部分は可換

である．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dd, "f"'] & a \arrow[ddd, "\Delta"] \arrow[ddddr, "\mathrm{id}"] & \\
& & \\
a \arrow[dr, "\langle \mathrm{id},0 \rangle"] \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] \arrow[dddr, "r"] & & \\
& a \times a \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"] \arrow[dd, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & \\
a & & a \\
& c &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{coker}(\Delta) \circ \langle \mathrm{id}, 0 \rangle \circ f = r \circ f = 0$ であるから，核 $\Delta \cong \ker(\mathrm{coker}(\Delta))$ の普遍性により点線の射 h が存在して可換になる．このとき

$$
h \;=\; \begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "h"] & & \\
& a \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
& & a
\end{tikzcd}
\;=\; \begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] & & \\
a \arrow[dr, "\langle \mathrm{id},0 \rangle"] & & \\
& a \times a \arrow[dr, "p_1"'] & \\
& & a
\end{tikzcd}
\;=0
$$

である．故に

$$
f \;=\; \begin{tikzcd}
x \arrow[d, "f"'] \\
a \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
a
\end{tikzcd}
\;=\; \begin{tikzcd}
x \arrow[dr, "h\,(=0)"] & \\
& a \arrow[d, "\Delta"] \\
& a \times a \arrow[dl, "p_0"] \\
a &
\end{tikzcd}
\;=\; 0
$$

である．

　後は r がエピ射であることを示すため $f \circ r = 0$ とする．次の図式の実線部分は可換で

ある．

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[d, "\Delta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
a \arrow[r, "\langle \mathrm{id},0\rangle"] \arrow[dr, "r"'] & a \times a \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \arrow[r, "p_1"'] & a \arrow[d, dashed, "h"] \\
& c \arrow[r, "f"'] & x
\end{tikzcd}
$$

$f \circ \mathrm{coker}(\Delta) \circ \langle \mathrm{id}, 0\rangle = f \circ r = 0$ であるから，余核 $p_1 \cong \mathrm{coker}(\langle \mathrm{id}, 0\rangle)$ の普遍性により点線の射 h が存在して可換となる．このとき

$$
h \;=\;
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
& a \arrow[d, "h"] \\
& x
\end{tikzcd}
\;=\;
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "\Delta"] & \\
a \times a \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & \\
c \arrow[r, "f"'] & x
\end{tikzcd}
\;=\; 0
$$

である．よって

$$
\begin{tikzcd}
a \times a \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & \\
c \arrow[r, "f"'] & x
\end{tikzcd}
\;=\;
\begin{tikzcd}
a \times a \arrow[r, "p_1"'] & a \arrow[d, "h\,(=0)"] \\
& x
\end{tikzcd}
\;=\; 0
$$

となるが，$\mathrm{coker}(\Delta)$ はエピ射だから $f = 0$ である． $\square$

よって Δ の余核として $r^{-1} \circ \mathrm{coker}(\Delta)$ を考えることで，初めから $\mathrm{coker}(\Delta) \colon a \times a \to a$ かつ $\mathrm{coker}(\Delta) \circ \langle \mathrm{id}, 0\rangle = \mathrm{id}$ としてよい．以下そのようにしておく．

補題 37. $f\colon a \to b$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
a \times a \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b \times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

証明. 余核の普遍性により次の点線の射 g が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
a \times a \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b \times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
a \arrow[r, dashed, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

$f = g$ を示せばよい．まず次の図式が可換だから，$b \times b$ の普遍性により $(f \times f) \circ \langle \mathrm{id}, 0 \rangle = \langle \mathrm{id}, 0 \rangle \circ f$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "\langle \mathrm{id},0 \rangle"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{ab}"] & \\
 & a \times a \arrow[d, "f \times f"] & \\
 & b \times b \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
b & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "f"'] \arrow[ddr, bend left, "0_{ab}"] & \\
 & b \arrow[d, "\langle \mathrm{id},0 \rangle"] & \\
 & b \times b \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
b & & b
\end{tikzcd}$$

よって次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\langle \mathrm{id},0 \rangle"'] & b \arrow[d, "\langle \mathrm{id},0 \rangle"] \\
a \times a \arrow[r, "f \times f"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b \times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
a \arrow[r, "g"'] & b
\end{tikzcd}$$

今 $\mathrm{coker}(\Delta) \circ \langle \mathrm{id}, 0 \rangle = \mathrm{id}$ だったから $f = g$ が分かる． □

$f, g\colon a \to b$ に対して $f - g := \mathrm{coker}(\Delta) \circ \langle f, g \rangle\colon a \to b$ と定める．

補題 38. $f, g, h, k \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ に対して次の等式が成り立つ.

(1) $(f-g)-(h-k)=(f-h)-(g-k)$.

(2) $f-0=f$.

(3) $f-f=0$.

(4) $0-(0-f)=f$.

証明. (1) 射影 $p_i\colon b\times b\to b$ に補題 37 を適用して次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
(b\times b)\times(b\times b) \arrow[r, "p_i\times p_i"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b\times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
b\times b \arrow[r, "p_i"'] & b
\end{tikzcd}$$

これを使って次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle\langle f,g\rangle,\langle h,k\rangle\rangle"] \arrow[rrr, bend left, "\langle f,h\rangle"] \arrow[dr, "\langle f,g\rangle-\langle h,k\rangle"'] & (b\times b)\times(b\times b) \arrow[rr, "p_0\times p_0"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & & b\times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
& b\times b \arrow[rr, "p_0"'] & & b
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle\langle f,g\rangle,\langle h,k\rangle\rangle"] \arrow[rrr, bend left, "\langle g,k\rangle"] \arrow[dr, "\langle f,g\rangle-\langle h,k\rangle"'] & (b\times b)\times(b\times b) \arrow[rr, "p_1\times p_1"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & & b\times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
& b\times b \arrow[rr, "p_1"'] & & b
\end{tikzcd}$$

故に $\langle f,g\rangle-\langle h,k\rangle=\langle f-h, g-k\rangle$ が分かる.

次に $\mathrm{coker}(\Delta)$ に補題 37 を適用して可換図式

$$\begin{tikzcd}
(b\times b)\times(b\times b) \arrow[r, "\mathrm{coker}(\Delta)\times\mathrm{coker}(\Delta)"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b\times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
b\times b \arrow[r, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b
\end{tikzcd}$$

を得る．よって

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "{\langle\langle f,g\rangle,\langle h,k\rangle\rangle}"] \arrow[rr, bend left, "{\langle f-g,h-k\rangle}"] \arrow[dr, "{\langle f,g\rangle-\langle h,k\rangle}"'] & (b\times b)\times(b\times b) \arrow[r, "\mathrm{coker}(\Delta)\times\mathrm{coker}(\Delta)"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & b\times b \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
& b\times b \arrow[r, "\mathrm{coker}(\Delta)"'] & b
\end{tikzcd}
$$

が可換であるから $(f-g)-(h-k)=(f-h)-(g-k)$ が分かる．

(2) $\mathrm{coker}(\Delta)\circ\langle\mathrm{id},0\rangle=\mathrm{id}$ だから明らか．

(3) $\langle f,f\rangle=\Delta\circ f$ だから $f-f:=\mathrm{coker}(\Delta)\circ\langle f,f\rangle=\mathrm{coker}(\Delta)\circ\Delta\circ f=0$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
& a \arrow[d, "f"] \arrow[ddddl, bend right, "f"'] \arrow[ddddr, bend left, "f"] & \\
& b \arrow[d, "\Delta"] & \\
& b\times b \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[dd, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & \\
b & & b \\
& b &
\end{tikzcd}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
0-(0-f)&=(f-f)-(0-f) && (3\text{ より}) \\
&=(f-0)-(f-f) && (1\text{ より}) \\
&=f-0 && (2,3\text{ より}) \\
&=f && (2\text{ より})
\end{aligned}
$$

□

定理 39. C をアーベル圏とするとき，ある $\mathbf{Ab}$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が存在して $U(\mathcal{C})\cong C$ となる．

証明. $a,b\in C$ とする．$f,g\in\mathrm{Hom}_C(a,b)$ に対して $f+g:=f-(0-g)$ と定義すると $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ はアーベル群となる．

$\because$) $f, g, h \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ に対して

$$\begin{aligned}
(f+g)+h &= \bigl(f-(0-g)\bigr)-(0-h) && \text{(定義より)}\\
&= (f-0)-\bigl((0-g)-h\bigr) && \text{(補題 38 の 1 より)}\\
&= f-\bigl((0-g)-(0-(0-h))\bigr) && \text{(補題 38 の 2,4 より)}\\
&= f-\bigl((0-0)-(g-(0-h))\bigr) && \text{(補題 38 の 1 より)}\\
&= f-\bigl(0-(g+h)\bigr) && \text{(補題 38 の 2 と定義より)}\\
&= f+(g+h). && \text{(定義より)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f+g &= f-(0-g) && \text{(定義より)}\\
&= \bigl(0-(0-f)\bigr)-\bigl((0-g)-0\bigr) && \text{(補題 38 の 4,2 より)}\\
&= \bigl(0-(0-g)\bigr)-\bigl((0-f)-0\bigr) && \text{(補題 38 の 1 より)}\\
&= g-(0-f) && \text{(補題 38 の 4,2 より)}\\
&= g+f. && \text{(定義より)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f+0 &= f-(0-0) && \text{(定義より)}\\
&= f. && \text{(補題 38 の 2 より)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f+(0-f) &= f-\bigl(0-(0-f)\bigr) && \text{(定義より)}\\
&= f-f && \text{(補題 38 の 4 より)}\\
&= 0. && \text{(補題 38 の 3 より)}
\end{aligned}$$

だから $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ はアーベル群である．

このとき合成が与える写像 $\mathrm{Hom}_C(a, c) \times \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(a, c)$ が成分ごとに準同型であることを示せばよい． $f, g\colon a \to b$ と $h, k\colon b \to c$ を取る．まず $\langle h, k\rangle \circ f = \langle h \circ f, k \circ f\rangle$

だから $(h-k)\circ f=(h\circ f)-(k\circ f)$ が分かる.

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, "f"] \arrow[dddl, bend right, "k\circ f"'] \arrow[dddr, bend left, "h\circ f"] & \\
 & b \arrow[d, "\langle h,k\rangle"] & \\
 & c\times c \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] \arrow[dd, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & \\
c & & c \\
 & c &
\end{tikzcd}
$$

次に h に補題 37 を適用すれば

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\langle f,g\rangle"] \arrow[dr, "f-g"'] \arrow[rr, bend left, "\langle h\circ f,h\circ g\rangle"] & b\times b \arrow[r, "h\times h"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] & c\times c \arrow[d, "\mathrm{coker}(\Delta)"] \\
 & b \arrow[r, "h"'] & c
\end{tikzcd}
$$

が可換となるから $h\circ(f-g)=(h\circ f)-(h\circ g)$ が分かる. □

命題 40. 圏 C がアーベル圏である $\Longleftrightarrow$ 以下の条件を満たす.

(1) ある $\mathbf{Ab}$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が存在して $U(\mathcal{C})=C$ となる.
(2) C は始対象もしくは終対象もしくは零対象を持つ.
(3) C は直積もしくは余直積もしくは双積を持つ.
(4) C は核と余核を持つ.
(5) C は正規かつ余正規である.

証明. 命題 16 と命題 29 より分かる. □

※ いくつか流儀があるようだが [5] によれば

- 条件 (1)(〜2) を満たすものを前加法圏 (preadditive category) という.
- 条件 (1)〜(3) を満たすものを加法圏 (additive category) という.
- 条件 (1)〜(4) を満たすものを前アーベル圏 (preabelian category) という.

また前アーベル圏は「有限完備かつ有限余完備な圏で条件 (1) を満たすもの」と言うこともできる．

定理 41. 圏 C が命題 40 の条件 (1)〜(4) を満たすとき

$$C \text{ がアーベル圏} \iff \text{任意の射 } f \text{ に対して (21) の } \bar{f} \text{ が同型になる．}$$

証明． ($\Longrightarrow$) 命題 13 より $\ker(\operatorname{coker}(f)) \cong \operatorname{Im}(f)$ かつ $\operatorname{coker}(\ker(f)) \cong \operatorname{Coim}(f)$ となる．よって命題 5 より，次の図式の i はモノ射である．

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "\ker(\operatorname{coker}(f)) \cong \operatorname{Im}(f)"] & \\
a \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\operatorname{Coim}(f) \cong \operatorname{coker}(\ker(f))"'] & & b \\
 & x' \arrow[uu, dashed, "\bar{f}"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

故に像の普遍性より次の点線の射が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "\ker(\operatorname{coker}(f))"] \arrow[dd, dashed] & \\
a \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\operatorname{coker}(\ker(f))"'] & & b \\
 & x' \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

従って像と余象の普遍性から明らかに $\bar{f}$ は同型である．

($\Longleftarrow$) 命題 40 の条件 (5) を示す．双対を考えればよいから C が正規であることを示せばよい．$f\colon a \to b$ をモノ射として (21) のように $\bar{f}$ を取る．命題 19 を使って次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dr, "\ker(\operatorname{coker}(f))"] & \\
a \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\sim"'] & & b \\
 & x' \arrow[uu, "\wr"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

従って $f \cong \ker(\operatorname{coker}(f))$ となり f は正規モノ射である． □

7 弱完全圏

以降の内容は [3] を参考にした．

定義. C を零対象を持つ圏とする．集まり $D \subset \mathrm{Mor}(C)$ が deflation の集まりとは以下の条件を満たすことをいう．

(1) D は同型射と一意な射 $!\colon a \to 0$ を全て含む．
(2) 任意の $f \in D$ は核 $\ker(f)$ を持ち，更に $\mathrm{coker}(\ker(f)) \cong f$ となる．
(3) D は合成で閉じている．
(4) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で $f, g \circ f \in D$ ならば $g \in D$ である．

このとき D の元を deflation と呼び，deflation の核となる射を inflation と呼ぶ．

定義. $D \subset \mathrm{Mor}(C)$ を deflation の集まりとする．
$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が短完全列 (short exact sequence) $\Longleftrightarrow$ $g \in D$ かつ $f \cong \ker(g)$.

以下，inflation を赤色の矢印，deflation を青色の矢印で表すことにする．例えば短完全列は $a \mathrel{\color{red}{\xrightarrow{f}}} b \mathrel{\color{blue}{\xrightarrow{g}}} c$ のようになる．

$f\colon a \mathrel{\color{blue}{\to}} b$ を deflation とする．このとき定義より $\ker(f)$ が存在して $x \mathrel{\color{red}{\xrightarrow{\ker(f)}}} a \mathrel{\color{blue}{\xrightarrow{f}}} b$ は短完全列である．
今度は $f\colon a \mathrel{\color{red}{\to}} b$ を inflation とする．このとき定義より，ある deflation $g\colon b \mathrel{\color{blue}{\to}} c$ が存在して $\ker(g) \cong f$ となる．すると deflation の条件 (2) により $\mathrm{coker}(\ker(g)) \cong g$ である．従って $\mathrm{coker}(f) \cong g$ であり $a \mathrel{\color{red}{\xrightarrow{f}}} b \mathrel{\color{blue}{\xrightarrow{\mathrm{coker}(f)}}} c$ は短完全列である．

定義. 零対象を持つ圏 C が弱完全圏 (weakly exact category) とは，次の条件を満たす deflation の集まり $D \subset \mathrm{Mor}(C)$ が与えられていることをいう．

次の可換図式で縦列が全て短完全列のとき
中央と下の横列が短完全列ならば上の横列も短完全列となる．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r] \arrow[d, red] & a_1 \arrow[r] \arrow[d, red] & a_2 \arrow[d, red] \\
b_0 \arrow[r, red] \arrow[d, blue] & b_1 \arrow[r, blue] \arrow[d, blue] & b_2 \arrow[d, blue] \\
c_0 \arrow[r, red] & c_1 \arrow[r, blue] & c_2
\end{tikzcd}
$$

この条件を 9 項補題 (上) と呼ぶことにする．

以下，弱完全圏 C が与えられているとする．

命題 42. inflation は正規モノ射 (従ってモノ射) であり，deflation は正規エピ射 (従ってエピ射) である．

証明． 定義から明らか． □

命題 43. f が inflation かつ deflation ならば f は同型射である．

証明． 命題 42 と命題 3 より明らか． □

命題 44. $f\colon 0 \to a$ が deflation のとき $a \cong 0$ である．

証明． 命題 43 より明らか． □

命題 45 (9 項補題 (下))**.** 次の可換図式で縦列が全て短完全列のとき，上と中央の横列が短完全列ならば下の縦列も短完全列となる．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "g_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}$$

証明． v_1, g_2 が deflation だから条件 (3) より $g_2 \circ v_1 = w_1 \circ g_1$ も deflation である．故に条件 (4) より w_1 は deflation である．よって核 $\ker(w_1)\colon c_0' \to c_1$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] & \\
 & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1 \arrow[r, "v_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
 & & c_2
\end{tikzcd}
= 0_{b_0 c_2}$$

だから，$\ker(w_1)$ の普遍性により，$h\colon b_0 \to c_0'$ が存在し可換となる．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, dashed, "h"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0' \arrow[r, "\ker(w_1)"'] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}$$

故に 9 項補題 (上) により左の縦列が短完全列であることが分かる．すると g_0 と h の両方が f_0 の余核となるから，同型 $k\colon c_0 \to c'_0$ が存在して $k \circ g_0 = h$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
& a_0 \arrow[d, "f_0"'] & \\
& b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "g_0"'] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
& c'_0 \arrow[r, "\ker(w_1)"] & c_1 \\
c_0 \arrow[ur, dashed, "k"'] \arrow[urr, bend right, "w_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\ker(w_1) \circ k = w_0$ である．

∵)

$$
\begin{tikzcd}
& b_0 \arrow[dl, bend right, "g_0"'] & \\
c_0 \arrow[rr, bend right, "w_0"'] & & c_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1 \arrow[d, "g_1"] \\
& c_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[d, "h"] & \\
c'_0 \arrow[r, "\ker(w_1)"] & c_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b_0 \arrow[dl, bend right, "g_0"'] & \\
c_0 \arrow[r, "k"'] & c'_0 \arrow[r, "\ker(w_1)"] & c_1
\end{tikzcd}
$$

であり，g_0 が deflation 即ちエピ射だから $\ker(w_1) \circ k = w_0$ が分かる．

k が同型射だったから w_0 が w_1 の核になることが分かり $c_0 \xrightarrow{w_0} c_1 \xrightarrow{w_1} c_2$ は短完全列である．　□

命題 46. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で g と $g \circ f$ が inflation ならば f も inflation である．

証明．次の実線の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & b \arrow[d, "g"'] & \\
a \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d] & c \arrow[r, "\mathrm{coker}(g\circ f)"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(g)"] & s \arrow[d, dashed, "h"] \\
0 \arrow[r] & t \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & t
\end{tikzcd}
$$

よって余核 $\mathrm{coker}(g \circ f)$ の普遍性により点線の射 h が存在して可換となる．弱完全圏の条

件 (4) により h は deflation である．故に $\ker(h)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & b \arrow[r, dashed, "k"] \arrow[d, "g"'] & u \arrow[d, "\ker(h)"] \\
a \arrow[r, "g\circ f"] \arrow[d] & c \arrow[r, "\mathrm{coker}(g\circ f)"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(g)"] & s \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & t \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & t
\end{tikzcd}$$

核 $\ker(h)$ の普遍性により，点線の射 k が存在して可換となる．9 項補題 (上) により上の横列は短完全列である．従って f は inflation である．$\square$

定義． C の射 $f\colon a \to b$ が admissible

$\iff$ ある $x \in C$ と deflation $f'\colon a \to x$, inflation $f''\colon x \to b$ が存在して $f = f'' \circ f'$ となる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & b \\
& x \arrow[ur, "f''"'] &
\end{tikzcd}$$

命題 47. admissible な射 $f\colon a \to b$ を $f = (\ a \xrightarrow{f'} x \xrightarrow{f''} b\ )$ と分解したとき，次の同型が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\ker(f) \cong \ker(f'), \quad \mathrm{coker}(\ker(f)) \cong f', \\
&\mathrm{coker}(f) \cong \mathrm{coker}(f''), \quad \ker(\mathrm{coker}(f)) \cong f''.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\ker(f)\cong\ker(f')"] & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)\cong\mathrm{coker}(f'')"] & \bullet \\
& & x \arrow[ur, "f''"'] & &
\end{tikzcd}$$

証明． 命題 42 より deflation f' がエピ射だから，命題 9 により $\mathrm{coker}(f) \cong \mathrm{coker}(f'')$ であり，これは deflation である．よって $\ker(\mathrm{coker}(f)) \cong f''$ となる．

同様にして $\ker(f) \cong \ker(f')$，$\mathrm{coker}(\ker(f)) \cong f'$ も分かる．$\square$

従って f が admissible のとき $f = (\ a \xrightarrow{f'} x \xrightarrow{f''} b\ )$ という分解の仕方は同型を除いて一意であることが分かる．そこで以下，そのような分解を $f = (\ a \xrightarrow{f^{\mathrm{d}}} [f] \xrightarrow{f^{\mathrm{i}}} b\ )$ で表す．

定義. 図式 $a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}$ が完全列 (exact sequence) とは，$0 \leq k \leq n$ に対して f_k が admissible であり，かつ $0 \leq k < n$ に対して $[f_k] \xrightarrow{f_k^{\mathrm{i}}} a_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}^{\mathrm{d}}} [f_{k+1}]$ が短完全列になることをいう．

$$\begin{tikzcd}
\cdots & a_k \arrow[rr, "f_k"] \arrow[dr, "f_k^{\mathrm{d}}"'] & & a_{k+1} \arrow[rr, "f_{k+1}"] \arrow[dr, "f_{k+1}^{\mathrm{d}}"'] & & a_{k+2} & \cdots \\
& & {[f_k]} \arrow[ur, "f_k^{\mathrm{i}}"'] & & {[f_{k+1}]} \arrow[ur, "f_{k+1}^{\mathrm{i}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

定義から明らかに，$a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1}$ が完全列ならばその一部分を取り出してできる列 $a_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_j} a_{j+1}$ も完全列である．

命題 48. $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が完全列 $\iff$ g が admissible で $\ker(g) \cong f$ となる．

証明. ($\Longrightarrow$) 完全列の定義より g は admissible である．また完全列の定義と命題 44 を使えば次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{\mathrm{d}}"'] & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g^{\mathrm{d}}"'] & & c \\
& 0 \arrow[ur, "!"'] & & {[f]} \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"'] & & {[g]} \arrow[ur, "g^{\mathrm{i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $0 \xrightarrow{!} a \xrightarrow{f^{\mathrm{d}}} [f]$ と $[f] \xrightarrow{f^{\mathrm{i}}} b \xrightarrow{g^{\mathrm{d}}} [g]$ は短完全列である．よって $f^{\mathrm{d}} \cong \mathrm{coker}(!)$ は同型射である．従って $\ker(g^{\mathrm{d}}) \cong f$ が分かる．故に命題 47 より $\ker(g) \cong \ker(g^{\mathrm{d}}) \cong f$ である．

($\Longleftarrow$) $f \cong \ker(g) \cong \ker(g^{\mathrm{d}})$ だから f は inflation である．よって

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g^{\mathrm{d}}"'] & & c \\
& 0 \arrow[ur, "!"'] & & a \arrow[ur, "f"'] & & {[g]} \arrow[ur, "g^{\mathrm{i}}"'] &
\end{tikzcd}$$

が得られるから $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ は完全列である． □

命題 49. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が完全列 $\iff$ f が admissible で $\mathrm{coker}(f) \cong g$ となる．

証明. 命題 48 と同様.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^{\mathrm{d}}"'] & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g^{\mathrm{d}}"'] & & c \arrow[rr] \arrow[dr, "!"'] & & 0 \\
& {[f]} \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}}"'] & & {[g]} \arrow[ur, "g^{\mathrm{i}}"'] & & 0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

□

命題 50. $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が完全列 $\Longleftrightarrow$ $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が短完全列.

証明. ($\Longrightarrow$) 補題 49 より g は deflation であり，補題 48 より $\ker(g) \cong f$ である.

($\Longleftarrow$) 次の図式により完全列の条件が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_a"'] & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "g"'] & & c \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c"'] & & 0 \\
& 0 \arrow[ur] & & a \arrow[ur, "f"'] & & c \arrow[ur, "\mathrm{id}_c"'] & & 0 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

□

補題 51. 次の可換図式で横列は両方とも短完全列とする.

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

また $i = 0, 1, 2$ に対して f_i は admissible で，f_i の核と余核をそれぞれ $\ker(f_i)\colon d_i \to a_i$, $\mathrm{coker}(f_i)\colon b_i \to c_i$ とする．このとき完全列

$$d_0 \xrightarrow{\overline{u_0}} d_1 \xrightarrow{\overline{u_1}} d_2 \xrightarrow{\delta} c_0 \xrightarrow{\overline{v_0}} c_1 \xrightarrow{\overline{v_1}} c_2$$

が存在して，更に $\overline{u_0}$ は inflation で $\overline{v_1}$ は deflation である.

証明. これから以下の射を定義して，完全列となっていることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
d_0 \arrow[rr, "\overline{u_0}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & d_1 \arrow[rr, "\overline{u_1}"] \arrow[dr, "\overline{u_1}'"'] & & d_2 \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\delta'"'] & & c_0 \arrow[rr, "\overline{v_0}"] \arrow[dr, "\overline{v_0}'"'] & & c_1 \arrow[rr, "\overline{v_1}"] \arrow[dr, "\overline{v_1}"'] & & c_2 \\
& d_0 \arrow[ur, "\overline{u_0}"'] & & z_0 \arrow[ur, "\ker(\delta')"'] & & z_1 \arrow[ur, "\ker(\overline{v_0}')"'] & & z_2 \arrow[ur, "\ker(\overline{v_1})"'] & & c_2 \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
$$

※ これからこの証明で得られる図式は最終的に次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
 & d_0 \arrow[rr, "\overline{u_0}"] \arrow[dd, "\ker(f_0)"'] & & d_1 \arrow[r, "\overline{u_1}'"] \arrow[dl, bend right, "i_3"'] \arrow[dd, "\ker(f_1)"] & z_0 \arrow[r, "\ker(\delta')"] & d_2 \arrow[dd, "\ker(f_2)"] \arrow[dddddlllll, bend left=60, "\delta'"] \\
 & & t \arrow[urrr, "p_2"] \arrow[dr, "\ker(f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1)"'] \arrow[dd, "p_3"'] & & & \\
 & a_0 \arrow[ur, "i_2"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & & a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[drr, "f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"'] & & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
 & {[f_0]} \arrow[r, bend left, "i_1"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & s \arrow[r, "\ker(w_1)"] \arrow[dl, bend right, "i_0"] \arrow[ddll, bend left, "p_1"] & {[f_1]} \arrow[rr, "w_1"'] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
 & b_0 \arrow[rr, "v_0"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_0)"'] \arrow[dr, bend right, "p_0"] & & b_1 \arrow[rr, "v_1"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"'] & & b_2 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_2)"] \\
z_1 \arrow[r, "\ker(\overline{v_0}')"'] & c_0 \arrow[r, "\overline{v_0}'"'] & z_2 \arrow[r, "\ker(\overline{v_1})"'] & c_1 \arrow[rr, "\overline{v_1}"'] & & c_2
\end{tikzcd}
$$

まず次の図式の実線部分を考える．(命題 47 により $\mathrm{coker}(f_i)$ は deflation である．)

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"'] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_1 \arrow[r, "v_1"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"'] & b_2 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_2)"] \\
c_1 \arrow[r, dashed, "\overline{v_1}"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{coker}(f_1)$ の普遍性により点線の射 $\overline{v_1}$ が存在して可換となる．$v_1, \mathrm{coker}(f_2)$ が deflation だから，条件 (3) より $\mathrm{coker}(f_2) \circ v_1 = \overline{v_1} \circ \mathrm{coker}(f_1)$ も deflation である．故に条件 (4)

より $\overline{v_1}$ も deflation である．次に図式

$$
\begin{tikzcd}
{[f_1]} \arrow[r, dashed, "w_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
b_1 \arrow[r, "v_1"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1^{\mathrm{i}}) \cong \mathrm{coker}(f_1)"'] & b_2 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_2) \cong \mathrm{coker}(f_2^{\mathrm{i}})"] \\
c_1 \arrow[r, "\overline{v_1}"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

の実線部分を考えると

$$
\begin{tikzcd}
{[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & \\
b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_2)"] \\
& c_2
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
{[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & \\
b_1 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"'] & \\
c_1 \arrow[r, "\overline{v_1}"'] & c_2
\end{tikzcd}
\quad = \quad 0
$$

だから核 $f_2^{\mathrm{i}} = \mathrm{ker}(\mathrm{coker}(f_2))$ の普遍性により点線の射 w_1 が得られる．このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"'] & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
{[f_1]} \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

∵) 下の四角は w_1 の取り方より可換なので，上の四角が可換であることを示せばよい．f_2^{i} がモノ射だから

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "u_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
& {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
& b_2
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"'] & \\
{[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & \\
b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"'] & \\
{[f_1]} \arrow[r, "w_1"] & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
& b_2
\end{tikzcd}
$$

より $f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1 = w_1 \circ f_1^{\mathrm{d}}$ を得る．

よって再び条件 (3), (4) により w_1 は deflation である．このとき $w_1, v_1, \overline{v_1}$ の核を考えることで次の図式の実線部分を得る．

$$
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "\ker(w_1)"] \arrow[d, dashed, "i_0"'] & {[f_1]} \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] \arrow[d, dashed, "p_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"'] & b_2 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_2)"] \\
z_2 \arrow[r, "\ker(\overline{v_1})"'] & c_1 \arrow[r, "\overline{v_1}"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

このとき核の普遍性により点線の射が得られ，可換となる．9 項補題 (上) により，左の縦列は短完全列である．

次に $\overline{v_1}$ の定義と同様にして $\overline{v_0}$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
{[f_0]} \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & s \arrow[r, "\ker(w_1)"] \arrow[dl, "i_0"] & {[f_1]} \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"'] & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_0)"'] \arrow[dr, "p_0"] & & b_1 \arrow[r, "v_1"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"'] & b_2 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_2)"] \\
c_0 \arrow[rr, dashed, bend right, "\overline{v_0}"'] & z_2 \arrow[r, "\ker(\overline{v_1})"'] & c_1 \arrow[r, "\overline{v_1}"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{coker}(f_0)$ の普遍性により $\overline{v_1} \circ \overline{v_0} = 0$ が分かる．故に $\ker(\overline{v_1})$ の普遍性により，次の点線の射 $\overline{v_0}'$ が存在して次の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_0)"'] \arrow[dr, "p_0"] & & b_1 \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"] & \\
c_0 \arrow[r, dashed, "\overline{v_0}'"'] \arrow[rr, bend right, "\overline{v_0}"'] & z_2 \arrow[r, "\ker(\overline{v_1})"'] & c_1 \arrow[r, "\overline{v_1}"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

よって条件 (4) により $\overline{v_0}'$ も deflation であることが分かる．従って $\overline{v_0}'$ の核を考えれば短完全列 $z_1 \xrightarrow{\ker(\overline{v_0}')} c_0 \xrightarrow{\overline{v_0}'} z_2$ を得る．再び核の普遍性により次の点線の射が得られ，可

換となる．

$$\begin{tikzcd}
{[f_0]} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "i_1"'] & {[f_0]} \arrow[r] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & 0 \arrow[d] \\
s \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, dashed, "p_1"'] & b_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_0)"'] & z_2 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
z_1 \arrow[r, "\ker(\overline{v_0}')"'] & c_0 \arrow[r, "\overline{v_0}'"'] & z_2
\end{tikzcd}$$

9 項補題 (上) により左の縦列は短完全列である．

　今度は次の図式を考えると，核の普遍性により次の点線の射が得られ，可換となる．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, dashed, "i_2"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & t \arrow[r, dashed, "p_2"] \arrow[d, "\ker(f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1)"'] & d_2 \arrow[d, "\ker(f_2)"] \\
a_0 \arrow[r, "u_0"'] \arrow[d] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1"'] & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
0 \arrow[r] & {[f_2]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[f_2]}
\end{tikzcd}$$

9 項補題 (上) により上の横列は短完全列である．

　次に w_1 の定義より

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"'] & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
{[f_1]} \arrow[r, "w_1"'] & {[f_2]}
\end{tikzcd}$$

が可換だったから，$\ker(w_1 \circ f_1^{\mathrm{d}}) = \ker(f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1)$ となる．よって次の図式が得られる．再び核の普遍性により次の点線の射が得られ，可換となる．

$$\begin{tikzcd}
d_1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "i_3"'] & d_1 \arrow[r] \arrow[d, "\ker(f_1)"'] & 0 \arrow[d] \\
t \arrow[r, "\ker(w_1 \circ f_1^{\mathrm{d}}) \cong \ker(f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1)"'] \arrow[d, dashed, "p_3"'] & a_1 \arrow[r, "w_1 \circ f_1^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] & {[f_2]} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
s \arrow[r, "\ker(w_1)"'] & {[f_1]} \arrow[r, "w_1"'] & {[f_2]}
\end{tikzcd}$$

9 項補題 (上) により左の縦列は短完全列である．

以上により得られた射について，次の図式は可換になる．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & t \arrow[d, "p_3"] \\
{[f_0]} \arrow[r, "i_1"'] & s
\end{tikzcd}
$$

∵) 次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & t \arrow[r, "\ker(f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1)"] \arrow[d, "p_3"] & a_1 \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] \\
{[f_0]} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & s \arrow[r, "\ker(w_1)"'] \arrow[dl, "i_0"] & {[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"] \\
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] & & b_1
\end{tikzcd}
$$

$v_0 \circ i_0$ がモノ射だから $v_0 \circ i_0 \circ i_1 \circ f_0^{\mathrm{d}} = v_0 \circ i_0 \circ p_3 \circ i_2$ を示せばよい．それは

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & & \\
{[f_0]} \arrow[r, "i_1"] & s \arrow[dl, "i_0"] & \\
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] & & b_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & \\
{[f_0]} \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"] & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "i_2"] & t \arrow[r, "\ker(f_2^{\mathrm{d}} \circ u_1)"] & a_1 \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] \\
& & {[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"] \\
& & b_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "i_2"'] & t \arrow[d, "p_3"] & \\
& s \arrow[dl, "i_0"] & \\
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] & & b_1
\end{tikzcd}
$$

より分かる．

よって余核 p_2 の普遍性により点線の射 $\delta'\colon d_2 \to z_1$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & t \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_3"] & d_2 \arrow[d, dashed, "\delta'"] \\
{[f_0]} \arrow[r, "i_1"'] & s \arrow[r, "p_1"'] & z_1
\end{tikzcd}
$$

条件 (3), (4) により δ' は deflation である．従って短完全列 $z_0 \xrightarrow{\ker(\delta')} d_2 \xrightarrow{\delta'} z_1$ を得る．再び核の普遍性により次の点線の射が得られ，可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
d_0 \arrow[r, dashed, "\overline{u_0}"] \arrow[d, "\ker(f_0)"'] & d_1 \arrow[r, dashed, "\overline{u_1}'"] \arrow[d, "i_3"] & z_0 \arrow[d, "\ker(\delta')"] \\
a_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & t \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_3"] & d_2 \arrow[d, "\delta'"] \\
{[f_0]} \arrow[r, "i_1"'] & s \arrow[r, "p_1"'] & z_1
\end{tikzcd}
$$

9 項補題 (上) により上の横列は短完全列である．

以上により，$\delta := \ker(\overline{v_0}') \circ \delta'$，$\overline{u_1} := \ker(\delta') \circ \overline{u_1}'$ と定義すれば完全列

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
d_0 \arrow[rr, "\overline{u_0}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & d_1 \arrow[rr, "\overline{u_1}"] \arrow[dr, "\overline{u_1}'"'] & & d_2 \arrow[rr, "\delta"] \arrow[dr, "\delta'"'] & & c_0 \arrow[rr, "\overline{v_0}"] \arrow[dr, "\overline{v_0}'"'] & & c_1 \arrow[rr, "\overline{v_1}"] \arrow[dr, "\overline{v_1}"'] & & c_2 \\
& d_0 \arrow[ur, "\overline{u_0}"'] & & z_0 \arrow[ur, "\ker(\delta')"'] & & z_1 \arrow[ur, "\ker(\overline{v_0}')"'] & & z_2 \arrow[ur, "\ker(\overline{v_1})"'] & & c_2 \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}
$$

を得る． □

定理 52 (蛇の補題)**.** 次の可換図式で横列は両方とも完全列とする．

$$
\begin{tikzcd}
 & a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2 &
\end{tikzcd}
$$

また $i = 0, 1, 2$ に対して f_i は admissible で，f_i の核と余核をそれぞれ $\ker(f_i)\colon d_i \to a_i$，$\operatorname{coker}(f_i)\colon b_i \to c_i$ とする．このとき完全列

$$
d_0 \xrightarrow{\overline{u_0}} d_1 \xrightarrow{\overline{u_1}} d_2 \xrightarrow{\delta} c_0 \xrightarrow{\overline{v_0}} c_1 \xrightarrow{\overline{v_1}} c_2
$$

が存在する．

証明. 定理の条件より次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & {[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] & a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] & & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
{[f_0]} \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & & {[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"] & & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] \\
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] & & b_1 \arrow[r, "v_1^{\mathrm{d}}"'] & {[v_1]} \arrow[r, "v_1^{\mathrm{i}}"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

u_0 の核を $\ker(u_0)\colon z \to a_0$ とするとき

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "\ker(u_0)"] & a_0 \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & \\
& {[f_0]} \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & \\
& b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "\ker(u_0)"] & a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] & {[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] & a_1 \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] \\
& & & {[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"] \\
& & & b_1
\end{tikzcd}
\quad = \quad 0$$

で，inflation f_0^{i}, v_0 がモノ射だから $f_0^{\mathrm{d}} \circ \ker(u_0) = 0$ が分かる．故に $u_0^{\mathrm{d}} \cong \operatorname{coker}(\ker(u_0))$ の普遍性から $h\colon [u_0] \to [f_0]$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "\ker(u_0)"] & a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & {[u_0]} \arrow[dl, dashed, "h"] \\
& {[f_0]} &
\end{tikzcd}$$

弱完全圏の条件 (4) より h は deflation である．また次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & {[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] \arrow[dl, "h"] & a_1 \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] \\
{[f_0]} \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & & {[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"] \\
b_0 \arrow[rr, "v_0"'] & & b_1
\end{tikzcd}$$

同様にして inflation $k\colon [f_2] \to [v_1]$ が得られる．このとき次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
{[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "h"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1^{\mathrm{d}}"] & a_2 \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] \\
{[f_0]} \arrow[d, "f_0^{\mathrm{i}}"'] & {[f_1]} \arrow[d, "f_1^{\mathrm{i}}"] & {[f_2]} \arrow[d, "k"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1^{\mathrm{d}}"'] & {[v_1]}
\end{tikzcd}
$$

これは補題 51 の条件を満たすから，$\ker(h)\colon d_0' \to [u_0]$，$\operatorname{coker}(k)\colon [v_1] \to c_2'$ とすれば完全列

$$
d_0' \xrightarrow{\overline{u_0^{\mathrm{i}}}} d_1 \xrightarrow{\overline{u_1}} d_2 \xrightarrow{\delta} c_0 \xrightarrow{\overline{v_0}} c_1 \xrightarrow{\overline{v_1^{\mathrm{d}}}} c_2'
$$

が得られる．さらに $\overline{u_0^{\mathrm{i}}}$ は inflation で $\overline{v_1^{\mathrm{d}}}$ は deflation である．ここで次の図式の実線部分を考えれば，核の普遍性により点線の射が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & d_0 \arrow[r, dashed, "\overline{u_0^{\mathrm{d}}}"] \arrow[d, "\ker(f_0)"'] & d_0' \arrow[d, "\ker(h)"] \\
z \arrow[r, "\ker(u_0)"'] \arrow[d] & a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0^{\mathrm{d}}"'] & {[u_0]} \arrow[d, "h"] \\
0 \arrow[r] & {[f_0]} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & {[f_0]}
\end{tikzcd}
$$

よって 9 項補題 (上) により $\overline{u_0^{\mathrm{d}}}$ は deflation である．従って $\overline{u_0} := \overline{u_0^{\mathrm{d}}} \circ \overline{u_0^{\mathrm{i}}}$ と置けば

$$
d_0 \xrightarrow{\overline{u_0}} d_1 \xrightarrow{\overline{u_1}} d_2 \xrightarrow{\delta} c_0 \xrightarrow{\overline{v_0}} c_1 \xrightarrow{\overline{v_1^{\mathrm{d}}}} c_2'
$$

は完全列である．

同様にして $\overline{v_1^{\mathrm{i}}}$ を取り $\overline{v_1} := \overline{v_1^{\mathrm{i}}} \circ \overline{v_1^{\mathrm{d}}}$ とすれば完全列

$$
d_0 \xrightarrow{\overline{u_0}} d_1 \xrightarrow{\overline{u_1}} d_2 \xrightarrow{\delta} c_0 \xrightarrow{\overline{v_0}} c_1 \xrightarrow{\overline{v_1}} c_2
$$

を得る． □

定理 53 (5 項補題)**.** ここでは inflation の合成が inflation になると仮定する[*3]．次の可

[*3] この仮定を付けないと証明できなかったため．この仮定なしで証明できる方は教えてください．

換図式で，横の列は完全列であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & a_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d, "f_3"] & a_4 \arrow[d, "f_4"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2 \arrow[r, "v_2"'] & b_3 \arrow[r, "v_3"'] & b_4
\end{tikzcd}
$$

また f_2 が admissible とする．このとき

(1) f_0 が deflation で，f_1, f_3 が inflation ならば f_2 も inflation である．

(2) f_4 が inflation で，f_1, f_3 が deflation ならば f_2 も deflation である．

証明．次の実線部分は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0"'] & {[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, dashed, "g_0"] & a_1 \arrow[r, "u_1^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_1"] & {[u_1]} \arrow[r, "u_1^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, dashed, "g_1"] & a_2 \arrow[r, "u_2^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_2"] & {[u_2]} \arrow[r, "u_2^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, dashed, "g_2"] & a_3 \arrow[r, "u_3^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_3"] & {[u_3]} \arrow[r, "u_3^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, dashed, "g_3"] & a_4 \arrow[d, "f_4"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0^{\mathrm{d}}"'] & {[v_0]} \arrow[r, "v_0^{\mathrm{i}}"'] & b_1 \arrow[r, "v_1^{\mathrm{d}}"'] & {[v_1]} \arrow[r, "v_1^{\mathrm{i}}"'] & b_2 \arrow[r, "v_2^{\mathrm{d}}"'] & {[v_2]} \arrow[r, "v_2^{\mathrm{i}}"'] & b_3 \arrow[r, "v_3^{\mathrm{d}}"'] & {[v_3]} \arrow[r, "v_3^{\mathrm{i}}"'] & b_4
\end{tikzcd}
$$

容易に分かるように，核や余核の普遍性から点線の射が存在して可換となる．

(1) f_0 を deflation で，f_1, f_3 を inflation とする．条件 (4) により g_0 は deflation である．また定理の仮定より $f_1 \circ u_0^{\mathrm{i}}$ $(= v_0^{\mathrm{i}} \circ g_0)$ は inflation であるから命題 46 より g_0 は inflation でもある．故に命題 43 より g_0 は同型射であり，$\mathrm{coker}(g_0) \cong \,!\colon [v_0] \to 0$ となる．また g_0 と同様にして g_2 も inflation である．以上により次の実線の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0"'] & {[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_0"] & a_1 \arrow[r, "u_1^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_1"] & {[u_1]} \arrow[r, "u_1^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_1"] & a_2 \arrow[r, "u_2^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_2"] & {[u_2]} \arrow[r, "u_2^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_2"] & a_3 \arrow[d, "f_3"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0^{\mathrm{d}}"'] & {[v_0]} \arrow[r, "v_0^{\mathrm{i}}"'] \arrow[d] & b_1 \arrow[r, "v_1^{\mathrm{d}}"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"] & {[v_1]} \arrow[r, "v_1^{\mathrm{i}}"'] & b_2 \arrow[r, "v_2^{\mathrm{d}}"'] & {[v_2]} \arrow[r, "v_2^{\mathrm{i}}"'] & b_3 \\
& 0 \arrow[r, dashed] & x & & & &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{coker}(g_0)$ の普遍性から点線の射が存在して可換となるが，この射は一意な射 $0 \to \overline{b_1}$ だ

から inflation である．故にこれは余核 $\mathrm{id}\colon x \to x$ を持つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_0"'] & {[u_0]} \arrow[r, "u_0^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_0"] & a_1 \arrow[r, "u_1^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_1"] & {[u_1]} \arrow[r, "u_1^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_1"] & a_2 \arrow[r, "u_2^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_2"] & {[u_2]} \arrow[r, "u_2^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_2"] & a_3 \arrow[d, "f_3"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0^{\mathrm{d}}"'] & {[v_0]} \arrow[r, "v_0^{\mathrm{i}}"'] \arrow[d] & b_1 \arrow[r, "v_1^{\mathrm{d}}"'] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f_1)"] & {[v_1]} \arrow[r, "v_1^{\mathrm{i}}"'] \arrow[d, dashed] & b_2 \arrow[r, "v_2^{\mathrm{d}}"'] & {[v_2]} \arrow[r, "v_2^{\mathrm{i}}"'] & b_3 \\
 & 0 \arrow[r] & x \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & x & & &
\end{tikzcd}
$$

$v_1^{\mathrm{d}} = \mathrm{coker}(v_0)$ の普遍性から点線の射が存在し可換となる．9 項補題 (下) により g_1 は inflation である．以上により次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
{[u_1]} \arrow[r, "u_1^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & a_2 \arrow[r, "u_2^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_2^{\mathrm{d}}"] & {[u_2]} \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
{[u_1]} \arrow[d, "g_1"] & {[f_2]} \arrow[d, "f_2^{\mathrm{i}}"] & {[u_2]} \arrow[d, "g_2"] \\
{[v_1]} \arrow[r, "v_1^{\mathrm{i}}"'] & b_2 \arrow[r, "v_2^{\mathrm{d}}"'] & {[v_2]}
\end{tikzcd}
$$

これに蛇の補題を適用すると完全列 $0 \to \ker(f_2) \to 0 \to \overline{b_1} \to \mathrm{coker}(f_2) \to \mathrm{coker}(g_2)$ を得る．よって f_2^{d} は同型射即ち inflation であり，$f_2 = f_2^{\mathrm{i}} \circ f_2^{\mathrm{d}}$ が inflation であることが分かる．

(2) 1 と同様，次の図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & x \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & x \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
a_1 \arrow[r, "u_1^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_1"] & {[u_1]} \arrow[r, "u_1^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_1"] & a_2 \arrow[r, "u_2^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_2"] & {[u_2]} \arrow[r, "u_2^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_2"] & a_3 \arrow[r, "u_3^{\mathrm{d}}"] \arrow[d, "f_3"] & {[u_3]} \arrow[r, "u_3^{\mathrm{i}}"] \arrow[d, "g_3"] & a_4 \arrow[d, "f_4"] \\
b_1 \arrow[r, "v_1^{\mathrm{d}}"'] & {[v_1]} \arrow[r, "v_1^{\mathrm{i}}"'] & b_2 \arrow[r, "v_2^{\mathrm{d}}"'] & {[v_2]} \arrow[r, "v_2^{\mathrm{i}}"'] & b_3 \arrow[r, "v_3^{\mathrm{d}}"'] & {[v_3]} \arrow[r, "v_3^{\mathrm{i}}"'] & b_4
\end{tikzcd}
$$

□

補題 54. C を零対象を持つ圏として $D \subset \mathrm{Mor}(C)$ を deflation の集まりとする．このとき次の 2 条件を満たせば 9 項補題 (上) が成り立つ (従って弱完全圏になる)．

(a) deflation の deflation に沿った pullback は存在し，deflation になる．

(b) 可換図式

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\ b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2 \end{tikzcd}$$

において $a_0 \xrightarrow{u_0} a_1 \xrightarrow{u_1} b_2$ と $b_0 \xrightarrow{v_0} b_1 \xrightarrow{v_1} b_2$ が短完全列であるとする．このとき「f_0 が deflation $\iff$ f_1 が deflation」である．

証明. 次の可換図式で縦列と，中央と下の横列は短完全列であるとする．

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\ b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "g_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\ c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2 \end{tikzcd}$$

w_1, g_2 が deflation だから，条件 (a) より w_1 と g_2 の pullback

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"'] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\ c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2 \end{tikzcd}$$

が存在し，p_0, p_1 は deflation である．pullback の普遍性から次の点線の射 k が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd} b_1 \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "v_1"] \arrow[ddr, bend right, "g_1"'] & & \\ & x \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\ & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2 \end{tikzcd}$$

今 $(c_0 \xrightarrow{w_0} c_1 \xrightarrow{w_1} c_2) = 0_{c_0c_1}$ だから，次の実線部分は可換であり，従って点線の射 i_0 が

存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
& x \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0 \arrow[ur, dashed, "i_0"] \arrow[r, "w_0"'] \arrow[urr, bend left, "0_{c_0b_2}"] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

$\ker(p_0) \cong i_0$ である．

∵) $f\colon z \to x$ が $p_0 \circ f = 0_{zb_2}$ を満たすとする．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "f"] & x \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0 \arrow[ur, "i_0"] \arrow[r, "w_0"'] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

今

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "f"] & x \arrow[d, "p_1"] & \\
& c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "f"] & x \arrow[r, "p_0"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& & c_2
\end{tikzcd}
= 0_{zc_2}
$$

だから，$w_0 \cong \ker(w_1)$ の普遍性により次の点線の射 h が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[r, "f"] \arrow[d, dashed, "h"'] & x \arrow[d, "p_1"] \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1
\end{tikzcd}
$$

このとき次の図式が可換であるから，pullback の普遍性により $i_0 \circ h = f$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "0_{zb_2}"] \arrow[ddr, bend right, "w_0 \circ h"'] & & \\
& x \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, dashed, "i_0 \circ h"] \arrow[drr, bend left, "0_{zb_2}"] \arrow[ddr, bend right, "w_0 \circ h"'] & & \\
& x \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

あとはこのような h の一意性を示せばよいが，それは w_0 がモノ射であるから明らか.

これらを組み合わせて次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[ddd, "g_0"'] & b_1 \arrow[rr, "v_1"] \arrow[ddd, "g_1"] \arrow[ddr, "k"] & & b_2 \arrow[ddd, "g_2"] \\
& & & \\
& & x \arrow[uur, "p_0"'] \arrow[dl, "p_1"] & \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] \arrow[urr, "i_0"] & c_1 \arrow[rr, "w_1"'] & & c_2
\end{tikzcd}$$

この図式は可換である.

$\because$) 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[dd, "g_0"'] & b_1 \arrow[dr, "k"] & \\
& & x \\
c_0 \arrow[urr, "i_0"] & &
\end{tikzcd}$$

それは次の図式が可換であるから pullback の普遍性により分かる.

$$\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[dr, "k \circ v_0"] \arrow[drr, bend left, "0_{b_0 b_2}"] \arrow[ddr, bend right, "w_0 \circ g_0"'] & & \\
& x \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[dr, "i_0 \circ g_0"] \arrow[drr, bend left, "0_{b_0 b_2}"] \arrow[ddr, bend right, "w_0 \circ g_0"'] & & \\
& x \arrow[r, "p_0"'] \arrow[d, "p_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
& c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}$$

図式が対称だから，i_0 と全く同様にして $i_1 \cong \ker(p_1)$ が存在して次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & & a_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[ddl, "i_1"'] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[dd, "g_0"'] & b_1 \arrow[rr, "v_1"] \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "g_1"'] & & b_2 \arrow[dd, "g_2"] \\
& & x \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[dl, "p_1"] & \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] \arrow[urr, "i_0"] & c_1 \arrow[rr, "w_1"'] & & c_2
\end{tikzcd}$$

図式

$$\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[dd, "g_0"'] & b_1 \arrow[rr, "v_1"] \arrow[dr, "k"] & & b_2 \\
& & x \arrow[ur, "p_0"'] & \\
c_0 \arrow[urr, "i_0"] & & &
\end{tikzcd}$$

に条件 (b) を適用すれば k が deflation であることが分かる．更に図式

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & & a_2 \arrow[ddl, "i_1"'] \\
b_1 \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "g_1"'] & & \\
& x \arrow[dl, "p_1"] & \\
c_1 & &
\end{tikzcd}$$

に条件 (b) を適用すれば u_1 が deflation であることが分かる．

後は $\ker(u_1) \cong u_0$ であることを示せばよい．まず $\ker(k) \cong v_0 \circ f_0$ である．

∵) まず

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1 \arrow[dr, "k"] & \\
& & x
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & \\
b_0 \arrow[dd, "g_0"'] & \\
& x \\
c_0 \arrow[ur, "i_0"] &
\end{tikzcd}
= 0_{a_0 x}
$$

である．次に $f\colon z \to b_1$ が $k \circ f = 0_{a_0 x}$ を満たすとする．このとき

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "f"] & \\
b_1 \arrow[r, "v_1"] & b_2
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "f"] & & \\
b_1 \arrow[dr, "k"] & & b_2 \\
& x \arrow[ur, "p_0"'] &
\end{tikzcd}
= 0_{z b_2}
$$

だから $v_0 \cong \ker(v_1)$ の普遍性により次の点線の射 h' が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
& z \arrow[dl, dashed, "h'"'] \arrow[d, "f"] & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"] & b_2
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
& z \arrow[dl, "h'"'] \\
b_0 \arrow[dd, "g_0"'] & \\
& x \\
c_0 \arrow[ur, "i_0"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "f"] & \\
b_1 \arrow[dr, "k"] & \\
& x
\end{tikzcd}
= 0_{zx} =
\begin{tikzcd}
z \arrow[dd, "0_{zc_0}"'] & \\
& x \\
c_0 \arrow[ur, "i_0"] &
\end{tikzcd}
$$

となるから，i_0 がモノ射であることより

$$
\begin{tikzcd}
 & z \arrow[dl, "h'"'] \\
b_0 \arrow[d, "g_0"'] & \\
c_0 &
\end{tikzcd}
\quad = \quad 0_{zc_0}
$$

が分かる．従って $f_0 \cong \ker(g_0)$ の普遍性により次の点線の射 h が存在し可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & z \arrow[l, dashed, "h"'] \arrow[dl, "h'"'] \arrow[d, "f"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1
\end{tikzcd}
$$

あとはこのような h が一意であることを示せばよいが，それは f_0, v_0 がモノ射であるから明らか．

よって $u_1 \circ u_0 = 0_{a_0a_2}$ である．

$\because$) i_1 がモノ射だから次の等式より分かる．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] & a_1 \arrow[r, "u_1"] & a_2 \arrow[dl, "i_1"'] \\
 & x &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1 \arrow[dr, "k"] & \\
 & & x
\end{tikzcd}
\quad = \quad 0_{a_0x}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "0_{a_0a_2}"] & a_2 \arrow[dl, "i_1"'] \\
x &
\end{tikzcd}
$$

$\ker(u_1) \cong u_0$ を示すため $f\colon z \to a_1$ が $u_1 \circ f = 0_{za_2}$ を満たすとする.

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "f"] & \\
& a_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& b_1 \arrow[dr, "k"] & \\
& & x
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "f"] & & \\
& a_1 \arrow[r, "u_1"] & a_2 \arrow[dl, "i_1"'] \\
& x &
\end{tikzcd}
= 0_{zx}
$$

だから $\ker(k) \cong v_0 \circ f_0$ の普遍性により次の点線の射 h が存在して可換となる.

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
z \arrow[dr, "f"'] & \\
& a_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& b_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "h"'] & \\
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] & b_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
z \arrow[d, "h"'] & \\
a_0 \arrow[r, "u_0"] & a_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& b_1
\end{tikzcd}
$$

で f_1 がモノ射だから $u_0 \circ h = f$ が分かる．後はこのような h の一意性を示せばよいが，それは f_0, v_0 がモノ射より分かる. □

命題 55 (9 項補題 (中)). 弱完全圏 C が補題 54 の条件を満たすとする．次の可換図式で縦列が全て短完全列のとき，上と下の横列が短完全列で，$v_1 \circ v_0 = 0$ ならば中央の横列も短完全列となる.

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[d, "g_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

証明．補題 54 の証明と同様にして次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & & a_2 \arrow[d, "f_2"] \arrow[dl, "i_1"'] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"] \arrow[dd, "g_0"'] & b_1 \arrow[rr, "v_1"] \arrow[dd, "g_1"'] \arrow[dr, "k"] & & b_2 \arrow[dd, "g_2"] \\
& & x \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[dl, "p_1"] & \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1 \arrow[rr, "w_1"'] & & c_2
\end{tikzcd}$$

条件 b を

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[rr, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & & a_2 \arrow[dl, "i_1"] \\
b_1 \arrow[dr, "k"] \arrow[dd, "g_1"'] & x \arrow[dl, "p_1"] & \\
& & \\
c_1 & &
\end{tikzcd}$$

に適用することで k が deflation であることが分かる．故に $v_1 = p_0 \circ k$ も deflation である．v_1 の核を $\ker(v_1)\colon s \to b_1$ とすると核の普遍性により次の点線の射が得られる．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, dashed, "f_3"'] & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
s \arrow[r, "\ker(v_1)"] \arrow[d, dashed, "g_3"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}$$

9 項補題 (上) により左の縦列は短完全列である．仮定より $v_1 \circ v_0 = 0$ であるから，核 $\ker(v_1)$ の普遍性により $h\colon b_0 \to s$ が存在して $\ker(v_1) \circ h = v_0$ となる．

$$\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "\ker(v_1)"] & b_1 \arrow[r, "v_1"] & b_2 \\
b_0 \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "v_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[rr, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] \arrow[dr, "f_3"] & & a_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_0 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g_0"'] & s \arrow[r, "\ker(v_1)"] \arrow[dl, "g_3"] & b_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"'] & b_2 \arrow[d, "g_2"] \\
c_0 \arrow[rr, "w_0"'] & & c_1 \arrow[r, "w_1"'] & c_2
\end{tikzcd}
$$

∵) 左側の二つの三角形が可換であることを示せばよいが

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[d, "f_0"'] & & \\
b_0 \arrow[r, "h"] & s \arrow[r, "\ker(v_1)"] & b_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] & a_1 \arrow[d, "f_1"] \\
& b_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[dr, "f_3"] & & \\
& s \arrow[r, "\ker(v_1)"] & b_1
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "h"] & s \arrow[dl, "g_3"] & b_1 \\
c_0 \arrow[rr, "w_0"'] & & c_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[r, "h"] & s \arrow[r, "\ker(v_1)"] & b_1 \arrow[d, "g_1"'] \\
& & c_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b_0 \arrow[d, "g_0"'] & \\
c_0 \arrow[r, "w_0"'] & c_1
\end{tikzcd}
$$

で $\ker(v_1)$ と w_0 がモノ射であることから分かる．

条件 b を

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_0"'] & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
b_0 \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g_0"'] & s \arrow[dl, "g_3"] \\
c_0 &
\end{tikzcd}
$$

に適用すれば h が deflation であることが分かる．今，図式

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_0"'] & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
b_0 \arrow[r, "h"'] & s
\end{tikzcd}
$$

は pullback である．

∵) 次の実線の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, dashed, "l"] \arrow[drr, bend left, "q_0"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& a_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_0"'] & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
& b_0 \arrow[r, "h"'] \arrow[d, "g_0"'] & s \arrow[dl, "g_3"] \\
& c_0 &
\end{tikzcd}$$

今

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, bend right, "q_1"'] & \\
& b_0 \arrow[d, "g_0"'] \\
& c_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
t \arrow[drr, bend left, "q_0"] & & \\
& & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
& & s \arrow[dl, "g_3"] \\
& c_0 &
\end{tikzcd}
= 0_{tc_0}$$

だから，核 $f_0 \circ \ker(g_0)$ の普遍性により $l \colon t \to a_0$ が存在して $f_0 \circ l = q_1$ となる．このとき

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, "l"] & & \\
& a_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
& & s
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, "l"] & & \\
& a_0 \arrow[d, "f_0"'] & \\
& b_0 \arrow[r, "h"'] & s
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, bend right, "q_1"'] & & \\
& b_0 \arrow[r, "h"'] & s
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, bend left, "q_0"] & \\
& a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
& s
\end{tikzcd}$$

となり，f_3 がモノ射だから $q_0 = l$ が分かる．故に

$$\begin{tikzcd}
t \arrow[dr, "l"] \arrow[drr, bend left, "q_0"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& a_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_0"'] & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
& b_0 \arrow[r, "h"'] & s
\end{tikzcd}$$

は可換である．また f_0 がモノ射だからこのような l は一意である．

よって h の核を $\ker(h)\colon z \to b_0$ とすると，次の図式を可換にする点線の射が存在する．

$$\begin{tikzcd}
& a_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "f_0"] & a_0 \arrow[d, "f_3"] \\
z \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\ker(h)"'] \arrow[urr, bend left, "0_{za_0}"] & b_0 \arrow[r, "h"'] & s
\end{tikzcd}$$

補題 54 の証明の時と同様にして，この点線の射が id の核になることが分かる．よって $z = 0$ である．故に h は同型射となる．従って $v_0 \cong \ker(v_1)$ である． □

8 弱完全圏の例

弱完全圏において deflation は正則エピ射である．そこで次の定義をする．

定義． 零対象を持つ圏 C が weakly homological
$\iff D := \{f \in \mathrm{Mor}(C) \mid f$ は正則エピ射 $\}$ により C が弱完全圏になる．

定理 56． 零対象を持つ正則圏 C に対して

$$\text{weakly homological} \iff \text{正則エピ射 } f \text{ に対して } \mathrm{coker}(\ker(f)) \cong f.$$

証明． $(\Longrightarrow)$ 正則エピ射 $f\colon a \to b$ は deflation であり，よって $f \cong \mathrm{coker}(\ker(f))$ となる．

$(\Longleftarrow)$ まず $D := \{f \in \mathrm{Mor}(C) \mid f$ は正則エピ射 $\}$ が deflation の集まりであることを示す．

(1) 明らか．

(2) 明らか．

(3) $f\colon a \to b$ と $g\colon b \to c$ が正則エピ射であるとする．$g \circ f$ を $a \xrightarrow{p} x \xrightarrow{i} c$ (p は正則エピ射，i はモノ射) と分解する．

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, bend left, "i"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "p"] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

i が同型射であることを示せばよい．そのために g と i の pullback $\langle z, j, k \rangle$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
& z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"] & x \arrow[d, "i"] \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, bend left=60, "p"] & b \arrow[r, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

pullback の普遍性により点線の射 h が存在して可換となる．f が正則エピ射だから $f \cong \mathrm{coker}(\mathrm{ker}(f))$ であり

$$\begin{tikzcd}
& & z \arrow[d, "j"] \\
s \arrow[r, "\mathrm{ker}(f)"'] & a \arrow[ur, "h"] & b
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
s \arrow[r, "\mathrm{ker}(f)"'] & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
= 0_{sb} =
\begin{tikzcd}
& z \arrow[d, "j"] \\
s \arrow[ur, "0_{sz}"] & b
\end{tikzcd}$$

となる．モノ射の pullback はモノ射だから j はモノ射となり，よって

$$\begin{tikzcd}
& & z \\
s \arrow[r, "\mathrm{ker}(f)"'] & a \arrow[ur, "h"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& z \\
s \arrow[ur, "0_{sz}"] &
\end{tikzcd}$$

となる．従って余核 f の普遍性により，$l\colon b \to z$ が存在して $l \circ f = h$ となる．

$$\begin{tikzcd}
& & z \arrow[d, shift left, "j"] \\
s \arrow[r, "\mathrm{ker}(f)"'] & a \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[u, dashed, shift left, "l"]
\end{tikzcd}$$

このとき $l = j^{-1}$ である．

$\because$) まず

$$
\begin{tikzcd} & z \arrow[d, shift left, "j"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[u, shift left, "l"] \end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd} & z \arrow[d, "j"] \\ a \arrow[ur, "h"] & b \end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}
$$

で f がエピ射だから $j \circ l = \mathrm{id}_b$ である．従って $j \circ l \circ j = j$ となり，今 j がモノ射だから $l \circ j = \mathrm{id}_z$ も分かる．

故に次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd} & & x \arrow[d, "i"] \\ a \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, bend left, "p"] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "k\circ l"] & c \end{tikzcd}
$$

g が正則エピ射だから，同様の議論により i が同型射となることが分かる．

(4) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で $g \circ f$ が正則エピ射であるとする．$g = (b \xrightarrow{p} x \xrightarrow{i} c)$ (p は正則エピ射，i はモノ射) と分解する．

$$
\begin{tikzcd} & & & x \arrow[d, "i"] \\ s \arrow[r, "\ker(g\circ f)"'] & a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, "p"] & c \end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd} & & & x \arrow[d, "i"] \\ s \arrow[r, "\ker(g\circ f)"'] & a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[ur, "p"] & c \end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd} s \arrow[r, "\ker(g\circ f)"'] & a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}
$$

$$
= 0_{sc} =
\begin{tikzcd} & x \arrow[d, "i"] \\ s \arrow[ur, "0_{sx}"] & c \end{tikzcd}
$$

となり，i がモノ射だから

$$
\begin{tikzcd} & & & x \\ s \arrow[r, "\ker(g\circ f)"'] & a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[ur, "p"] \end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd} & x \\ s \arrow[ur, "0_{sx}"] \end{tikzcd}
$$

となる．従って余核 $g\circ f$ の普遍性により，$l\colon c\to x$ が存在して $l\circ g\circ f=p\circ f$ となる．

$$\begin{tikzcd}
 & & & x \arrow[d, shift left, "i"] \\
s \arrow[r, "\ker(g\circ f)"'] & a \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, "p\circ f"] & b \arrow[r, "g"'] & c \arrow[u, dashed, shift left, "l"]
\end{tikzcd}$$

(3) の証明の時と同様にして i が同型射となることが分かる．よって g は正則エピ射である．

従ってあとは補題 54 の条件 (a), (b) を示せばよい．

(a) 正則エピ射の pullback が正則エピ射なので明らか．

(b の $\Longleftarrow$) 次の可換図式で f_1,u_1,v_1 は正則エピ射，$u_0\cong\ker(u_1)$，$v_0\cong\ker(v_1)$ とする．

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

このとき左の四角が pullback であることを示せばよい．そのために次の図式が可換であるとする．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[drr, bend left, "q_0"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & & \\
 & a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
 & b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

すると

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, bend left, "q_0"] & & \\
 & a_1 \arrow[dr, "u_1"] & \\
 & & b_2
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, bend left, "q_0"] & & \\
 & a_1 \arrow[d, "f_1"'] & \\
 & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, bend right, "q_1"'] & & & \\
& b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}
\quad = \quad 0
$$

となるから $u_0 \cong \ker(u_1)$ の普遍性により点線の射 h が存在して $u_0 \circ h = q_0$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "q_0"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & & \\
& a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
& b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

v_0 がモノ射だからこの図式は可換である．また u_0 がモノ射だからこのような h は一意である．

(b の $\Longrightarrow$) 次の図式で f_0, u_1, v_1 は正則エピ射，$u_0 \cong \ker(u_1)$，$v_0 \cong \ker(v_1)$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"'] \arrow[dr, "u_1"] & \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1 \arrow[r, "v_1"'] & b_2
\end{tikzcd}
$$

$f_1 = (a_1 \xrightarrow{f_1'} x \xrightarrow{f_1''} b_1)$ (f_1' は正則エピ射，f_1'' はモノ射) と分解する．核 $\ker(f_1)$ の普遍性から次の点線の射 $\overline{u_0}$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\overline{a_0} \arrow[r, dashed, "\overline{u_0}"] \arrow[d, "\ker(f_0)"'] & \overline{a_1} \arrow[d, "\ker(f_1)"] \\
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1"] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1
\end{tikzcd}
$$

よって余核 $f_0 \cong \mathrm{coker}(\ker(f_0))$ の普遍性から次の点線の射 w_0 を得る.

$$\begin{tikzcd}
\overline{a_0} \arrow[r, "\overline{u_0}"] \arrow[d, "\ker(f_0)"'] & \overline{a_1} \arrow[d, "\ker(f_1)\cong\ker(f_1')"] \\
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1'"] \\
b_0 \arrow[r, dashed, "w_0"'] & x
\end{tikzcd}$$

このとき次の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
a_0 \arrow[r, "u_0"] \arrow[d, "f_0"'] & a_1 \arrow[d, "f_1'"'] \\
b_0 \arrow[r, "w_0"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & x \arrow[d, "f_1''"'] \\
b_0 \arrow[r, "v_0"'] & b_1
\end{tikzcd}$$

よって次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "v_1\circ f_1''"] \arrow[dd, "f_1''"] & \\
b_0 \arrow[ur, "w_0"] \arrow[dr, "v_0"'] & & b_2 \\
& b_1 \arrow[ur, "v_1"'] &
\end{tikzcd}$$

u_1 が正則エピ射で $u_1 = v_1 \circ f_1'' \circ f_1'$ だから，既に示した条件 (4) より $v_1 \circ f_1''$ も正則エピ射である．また v_0 がモノ射だから w_0 もモノ射である．従って f_1'' は同型であるから $f_1 = f_1'' \circ f_1'$ は正則エピ射である． $\square$

命題 57. C は weakly homological な弱完全圏で，核と余核を持つとする．$f\colon a \to b$ に対して (21) のように $\overline{f}\colon x' \to x$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & \\
a \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(\ker(f))"'] & & b \\
& x' \arrow[uu, "\overline{f}"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき

$$f \text{ が admissible} \iff \overline{f} \text{ が同型}.$$

証明. $(\Longrightarrow)$ f が admissible のとき命題 47 により

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(\ker(f)) \cong f^{\mathrm{d}}"'] & & b \\
& {[f]} \arrow[ur, "f^{\mathrm{i}} \cong \ker(\mathrm{coker}(f))"'] &
\end{tikzcd}$$

となるから $\overline{f}$ は同型である．

$(\Longleftarrow)$ C が weakly homological だから正則エピ射 $\mathrm{coker}(f), \mathrm{coker}(\ker(f))$ は deflation である．よって $\ker(\mathrm{coker}(f))$ は inflation である．また $\overline{f}$ は同型だから deflation である．

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dr, "\ker(\mathrm{coker}(f))"] & \\
a \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(\ker(f))"'] & & b \\
& x' \arrow[uu, "\overline{f}"] \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

故に $f = \left(a \xrightarrow{\overline{f} \circ \mathrm{coker}(\ker(f))} x \xrightarrow{\ker(\mathrm{coker}(f))} b \right)$ は admissible である． □

命題 58. C は weakly homological な弱完全圏で，coequalizer を持ち正規かつ余正規であるとする．このとき

$$a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_n} a_{n+1} \text{ が完全列} \iff \text{各 } 0 \le i < n \text{ について } \mathrm{Im}(f_i) \cong \ker(f_{i+1}).$$

証明. $(\Longrightarrow)$ 完全列の定義より次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\cdots & a_k \arrow[rr, "f_k"] \arrow[dr, "f_k^{\mathrm{d}}"'] & & a_{k+1} \arrow[rr, "f_{k+1}"] \arrow[dr, "f_{k+1}^{\mathrm{d}}"'] & & a_{k+2} & \cdots \\
& & {[f_k]} \arrow[ur, "f_k^{\mathrm{i}}"'] & & {[f_{k+1}]} \arrow[ur, "f_{k+1}^{\mathrm{i}}"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき $\mathrm{Im}(f_i) \cong \ker(\mathrm{coker}(f_i)) \cong \ker(\mathrm{coker}(f_i^{\mathrm{i}})) \cong \ker(f_{i+1}^{\mathrm{d}}) \cong \ker(f_{i+1})$ である．

$(\Longleftarrow)$ $f_i = (a_i \xrightarrow{f_i'} x_i \xrightarrow{\mathrm{Im}(f_i)} a_{i+1})$ と分解する．$\mathrm{Im}(f_i)$ がモノ射だから $\ker(f_{i+1}') = \ker(f_{i+1}) = \mathrm{Im}(f_i)$ である．故に f_{i+1}' が正則エピ射であることを示せばよい．命題 5 の双対により f_{i+1}' はエピ射である．今 C が余正規だから f_{i+1}' は正規エピ射即ち正則エピ射である． □

例 59. アーベル圏は正則圏であることが知られている．故に定理 56 よりアーベル圏は weakly homological である．アーベル圏 C は余正規だから $D := \{f \in \mathrm{Mor}(C) \mid f \text{ はエピ射}\}$ により弱完全圏となる．またこのとき inflation はモノ射と一致する (命題

12 から分かる)．従って定理 41 よりアーベル圏の任意の射は admissible である．またアーベル圏は命題 58 の条件を満たす．従ってこの場合の完全列とは $\mathrm{Im}(f_i) \cong \ker(f_{i+1})$ を満たす列のことという事になる． $\square$

例 60. 群の圏 **Grp** は正則圏であることが知られている．よって定理 56 により **Grp** は weakly homological である．**Grp** においては任意のエピ射が正則エピ射となるから，**Grp** は $D = \{f \in \mathrm{Mor}(C) \mid f$ はエピ射 $\}$ により弱完全圏となることが分かる．従って **Grp** においても (定理 52 の意味で) 蛇の補題が成り立つ．ここで **Grp** では admissible でない射が存在することに注意する．よって **Grp** における蛇の補題では (アーベル圏でのよく知られている蛇の補題とは違って) 縦向きの射に admissible という制限がかかっている．命題 57 によれば，群準同型 $f\colon G \to H$ が admissible となるのは $f(G) \subset H$ が正規部分群になるときである． $\square$

命題 61. C, D をアーベル圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．このとき次の条件は同値である．

(1) F は有限極限と交換する．

(2) $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が C における完全列のとき $0 \to Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ が D における完全列になる．

(3) $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が C における完全列のとき $0 \to Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ が D における完全列になる．

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が C における完全列とする．このとき補題 48 より $\ker(g) \cong f$ である．今 F が有限極限，従って核と交換するから $\ker(Fg) \cong Ff$ となる．故に $0 \to Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ は完全列である．

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか．

($3 \Longrightarrow 1$) まず F が直積と交換することを示す．そのために $a, b \in C$ とする．このとき次の図式をそれぞれ C, D における双積とする．

$$a \underset{p_0}{\overset{i_0}{\rightleftarrows}} a \oplus b \underset{p_1}{\overset{i_1}{\leftrightarrows}} b \qquad Fa \underset{q_0}{\overset{j_0}{\rightleftarrows}} Fa \oplus Fb \underset{q_1}{\overset{j_1}{\leftrightarrows}} Fb$$

これらにより完全列

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{i_0} a \oplus b \xrightarrow{p_1} b \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{j_0} Fa \oplus Fb \xrightarrow{q_1} Fb \longrightarrow 0$$

が得られる．$(*)$ に F を適用すれば，仮定 3 より完全列

$$0 \longrightarrow Fa \xrightarrow{Fi_0} F(a \oplus b) \xrightarrow{Fp_1} Fb$$

が得られる．これらの図式と普遍性により次の可換図式を得る．

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Fa & \xrightarrow{j_0} & Fa \oplus Fb & \xrightarrow{q_1} & Fb & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \\
0 & \longrightarrow & Fa & \xrightarrow[Fi_0]{} & F(a \oplus b) & \xrightarrow[Fp_1]{} & Fb & &
\end{array}$$

よって蛇の補題 (定理 52) により完全列

$$0 \to \ker(h) \to 0 \to 0 \to \operatorname{coker}(h) \to 0$$

が得られる．故に h が同型であるから F は直積と交換する．

次に F が核と交換することを示す．そのために C の任意の射 $f\colon a \to b$ を取る．このとき $\ker(f)\colon s \to a$，$\operatorname{coker}(f)\colon b \to t$ とすれば次の完全列を得る．

$$0 \longrightarrow s \xrightarrow{\ker(f)} a \xrightarrow{f^{\mathrm{d}}} [f] \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow [f] \xrightarrow{f^{\mathrm{i}}} b \xrightarrow{\operatorname{coker}(f)} t \longrightarrow 0$$

これらに F を適用すれば，仮定 3 より次の完全列を得る．

$$0 \longrightarrow Fs \xrightarrow{F(\ker(f))} Fa \xrightarrow{Ff^{\mathrm{d}}} F[f]$$

$$0 \longrightarrow F[f] \xrightarrow{Ff^{\mathrm{i}}} Fb \xrightarrow{F(\operatorname{coker}(f))} Ft$$

従って $\ker(Ff) \cong F(\ker(f))$ となり F は核と交換する． □

双対を考えることで次の命題を得る．

命題 62. C, D をアーベル圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．このとき次の条件は同値である．

(1) F は有限余極限と交換する．

(2) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が C における完全列のとき $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \to 0$ が D における完全列になる.

(3) $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が C における完全列のとき $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \to 0$ が D における完全列になる. □

参考文献

[1] Martti Karvonen, Biproducts without zero morphisms, `https://arxiv.org/abs/1801.06488`

[2] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[3] Amir Jafari, Weakly Exact Categories and the Snake Lemma, `https://arxiv.org/abs/0901.2372`

[4] Francis Borceux, Handbook of Categorical Algebra Volume 2, Cambridge University Press (1994)

[5] nLab, additive and abelian categories, `https://ncatlab.org/nlab/show/additive+and+abelian+categories`