例: 単体的集合

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 6 日

普遍随伴が現れる例としてここでは単体的集合を扱う．またここでは **Cat** を小圏全体と関手がなす圏とする．また $0 \in \mathbb{N}$ とする．

定義. $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$ として，これを通常の大小関係で順序集合，即ち圏とみなす．このとき $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$ が定める充満部分圏を単体圏 (simplex category) といい $\mathbb{\Delta}$ で表す．(従って $\mathbb{\Delta}$ の射とは順序を保つ写像である．)

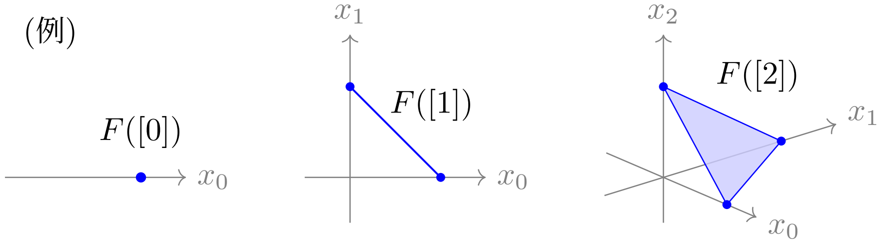
定義. 関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合 (simplicial set) という．また単体的集合の間の射とは自然変換のこととする．故に $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ が単体的集合の圏である[*1].

$X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ とするとき，$k \in \mathbb{N}$ に対して通常 $X_k := X([k])$ と書く．$\Delta^n := y([n]) \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を standard n-simplex という．つまり $k \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n_k = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([k], [n])$ である．また Kan 拡張の一般論により，任意の単体的集合 X は Δ^n の余極限で書ける．(即ちある関手 $T\colon J \to \mathbb{\Delta}$ が存在して $X \cong \mathrm{colim}(y \circ T) \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \Delta^{n_j}$ となる．ここで n_j は $[n_j] = Tj$ となるように取った．)

$n \in \mathbb{N}$ に対して位相空間 $F([n]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を次により定める．

$$F([n]) := \{\langle x_0, \cdots, x_n \rangle \in [0, 1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$$

(例)



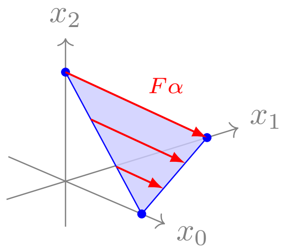
*1 この圏を $\mathbf{sSet}, \mathbf{Set}_{\Delta}$ などの記号で表すことが多い．

次に $\mathbb{\Delta}$ の射[*2] $\alpha\colon [m]\to[n]$ に対して $F\alpha\colon F([m])\to F([n])$ を次により定める．

$$F\alpha(x_0,\cdots,x_m) := \left\langle \sum_{i\in\alpha^{-1}(0)} x_i\,,\cdots,\ \sum_{i\in\alpha^{-1}(n)} x_i \right\rangle$$

$$(例)\ \alpha\colon [2]\to[1] \qquad F\alpha\colon F([2])\to F([1])$$

$$\begin{aligned}\alpha(0) &:= 0\\ \alpha(1) &:= 1\\ \alpha(2) &:= 1\end{aligned}$$



このとき F は関手 $F\colon \mathbb{\Delta}\to\mathbf{Top}$ になることが容易に分かるから普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．$|-| := y^\dagger F\colon \widehat{\mathbb{\Delta}}\to\mathbf{Top}$ を幾何学的実現，$\mathrm{Sing} := F^\dagger y\colon \mathbf{Top}\to\widehat{\mathbb{\Delta}}$ を singular functor と呼ぶ．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=2, "|-|"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, shift left=2, "\mathrm{Sing}"]
\end{tikzcd}$$

y が忠実充満だから $|\Delta^n|\cong F([n])$ である．また左随伴は余極限と交換するから，単体的集合 X を上記のように $X\cong \operatorname*{colim}_{j\in J}\Delta^{n_j}$ と書けばその幾何学的実現は $|X|\cong \operatorname*{colim}_{j\in J}F([n_j])$ となる．（つまり $|X|$ は $F([n])$ を貼り合わせることで得られる位相空間である．）

次に $\mathbb{\Delta}\subset\mathbf{Cat}$ が充満部分圏だったから，これの包含関手を $F\colon\mathbb{\Delta}\to\mathbf{Cat}$ とすれば普遍随伴 $y^\dagger F\dashv F^\dagger y$ が得られる．$\tau_1 := y^\dagger F$ と書き，$X\in\widehat{\mathbb{\Delta}}$ に対して $\tau_1(X)$ を X の fundamental category と呼ぶ．また $N := F^\dagger y\colon \mathbf{Cat}\to\widehat{\mathbb{\Delta}}$ を nerve functor という．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=2, "\tau_1"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[ul, shift left=2, "N"]
\end{tikzcd}$$

[*2] この PDF では圏 $\mathbb{\Delta}$ の射をギリシャ文字 α,β などで表し，逆に $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ の射を f,g などで表すことにする．

これらの随伴は普遍随伴の具体例の中でも特に重要なものであり，これらの随伴を通して単体的集合，位相空間，圏の 3 つには様々な関係がある．以下ではその一部を紹介して，最後に quasi-category を定義しよう．

$0 \leq i \leq n$ に対して Δ の射 $\delta_i^n \colon [n-1] \to [n]$ と $\sigma_i^n \colon [n+1] \to [n]$ を以下により定める．

$$\delta_i^n(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x < i) \\ x+1 & (i \leq x \leq n-1) \end{cases}$$
$$\sigma_i^n(x) := \begin{cases} x & (0 \leq x \leq i) \\ x-1 & (i < x \leq n+1) \end{cases}$$

$$[n-1] \xrightarrow{\delta_i^n} [n] \qquad\qquad [n+1] \xrightarrow{\sigma_i^n} [n]$$

$$\begin{tikzcd}
 & n & & n+1 \arrow[dr, mapsto] & \\
n-1 \arrow[ur, mapsto] & \vdots & & \vdots & n \\
\vdots & i+1 & & i+2 \arrow[dr, mapsto] & \vdots \\
i \arrow[ur, mapsto] & i & & i+1 \arrow[dr, mapsto] & i+1 \\
i-1 \arrow[r, mapsto] & i-1 & & i \arrow[r, mapsto] & i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[r, mapsto] & 0 & & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

この記号を使うと Δ は次のような圏である．

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, shift left=3, "\delta_0^1"] \arrow[r, shift right=3, "\delta_1^1"'] & {[1]} \arrow[l, "\sigma_0^0" description] \arrow[r, shift left=6, "\delta_0^2"] \arrow[r, "\delta_1^2" description] \arrow[r, shift right=6, "\delta_2^2"'] & {[2]} \arrow[l, shift right=3, "\sigma_0^1" description] \arrow[l, shift left=3, "\sigma_1^1" description] \arrow[r, shift left=8, "\delta_0^3"] \arrow[r, phantom, "\vdots"] \arrow[r, shift right=8, "\delta_3^3"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

これらは次のような性質を持つ．

命題 1. Δ の任意の射は δ_i^n, σ_i^n の合成で表せる． □

命題 2. 以下の等式が成り立つ．

$$\delta_j^{n+1} \circ \delta_i^n = \delta_i^{n+1} \circ \delta_{j-1}^n \quad (i < j)$$
$$\sigma_j^n \circ \sigma_i^{n+1} = \sigma_i^n \circ \sigma_{j+1}^{n+1} \quad (i \leq j)$$
$$\sigma_j^n \circ \delta_i^{n+1} = \begin{cases} \delta_i^n \circ \sigma_{j-1}^{n-1} & (i < j) \\ \mathrm{id}_{[n]} & (i = j, j+1) \\ \delta_{i-1}^n \circ \sigma_j^{n-1} & (i > j+1) \end{cases}$$

$\square$

X を単体的集合とするとき $d_i^n := X(\delta_i^n)$，$s_i^n := X(\sigma_i^n)$ と書く．命題 2 により

$$
\begin{aligned}
d_i^n \circ d_j^{n+1} &= d_{j-1}^n \circ d_i^{n+1} \quad (i < j)\\
s_i^{n+1} \circ s_j^n &= s_{j+1}^{n+1} \circ s_i^n \quad (i \leq j)\\
d_i^{n+1} \circ s_j^n &= \begin{cases} s_{j-1}^{n-1} \circ d_i^n & (i < j)\\ \mathrm{id}_{X_n} & (i = j, j+1)\\ s_j^{n-1} \circ d_{i-1}^n & (i > j+1) \end{cases}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．

X, Y を単体的集合とする．各 $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_k \subset Y_k$ であり，その包含写像 $f_k \colon X_k \to Y_k$ が射 $f \colon X \to Y$ を与えるとき，X を Y の部分集合といい $X \subset Y$ と書く．

X を単体的集合，$n \in \mathbb{N}$ として $A \subset X_n$ とすると，A を含む最小の部分集合 $Y \subset X$ が存在する．この Y を A で生成される X の部分集合という．また A で生成される X の部分集合が X 自身となるとき，X は A で生成されるという．

命題 3. $A \subset X_n$ で生成される X の部分集合を Y とするとき

$$Y_k = \{X\alpha(a) \mid a \in A,\ \alpha \colon [k] \to [n]\}$$

となる．

証明．$Z_k := \{X\alpha(a) \mid a \in A,\ \alpha \colon [k] \to [n]\}$ と書く．これは単体的集合 Z を定める．

∵) $\beta \colon [k] \to [l]$ を $\mathbb{\Delta}$ の射とする．$z \in Z_l$ に対して $X\beta(z) \in Z_k$ である．

∵) 定義よりある $a \in A$ と $\alpha \colon [l] \to [n]$ が存在して $z = X\alpha(a)$ と書ける．このとき $X\beta(z) = X\beta(X\alpha(a)) = X(\alpha \circ \beta)(a)$ となり $\alpha \circ \beta \colon [k] \to [n]$ だから $X\beta(z) \in Z_k$ である．

従って写像 $Z\beta \colon Z_l \to Z_k$ を $Z\beta := X\beta|_{Z_l}$ で定義することができる．$X \colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が関手だから $Z \colon \mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ も関手であり，従って Z は単体的集合である．

定義から明らかに包含写像 $Z_k \to X_k$ は自然だから，$Z \subset X$ は部分集合であり $A \subset Z_n$ となる．故に Y の最小性より $Y \subset Z$ である．

後は $Z \subset Y$ を示せばよい．そこで $z \in Z_k$ を取る．ある $a \in A$ と $\alpha \colon [k] \to [n]$ が存在

して $z = X\alpha(a)$ と書ける．包含写像 $Y_k \to X_k$ が自然だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} Y_k \arrow[r, "\subset"] & X_k \\ Y_n \arrow[u, "Y\alpha"] \arrow[r, "\subset"'] & X_n \arrow[u, "X\alpha"'] \end{tikzcd}$$

$a \in A \subset Y_n$ だから $X\alpha(a) \in Y_k$ でなければならない．故に $Z_k \subset Y_k$ が分かる． □

命題 4. X が $A \subset X_n$ で生成されているとき，射 $f\colon X \to Y$ は $f_n(a)$ $(a \in A)$ で決定される．即ち，$f, g\colon X \to Y$ が「任意の $a \in A$ に対して $f_n(a) = g_n(a)$」を満たすならば $f = g$ である．

証明. $f, g\colon X \to Y$ が，任意の $a \in A$ に対して $f_n(a) = g_n(a)$ を満たすとする．任意の $k \in \mathbb{N}$，$x \in X_k$ に対して $f_k(x) = g_k(x)$ を示せばよい．まず X が A で生成されているから，命題 3 よりある $a \in A$ と $\alpha\colon [k] \to [n]$ が存在して $x = X\alpha(a)$ と書ける．このとき次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "f_k"] & Y_k \\ X_n \arrow[u, "X\alpha"] \arrow[r, "f_n"'] & Y_n \arrow[u, "Y\alpha"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_k \arrow[r, "g_k"] & Y_k \\ X_n \arrow[u, "X\alpha"] \arrow[r, "g_n"'] & Y_n \arrow[u, "Y\alpha"'] \end{tikzcd}$$

従って $f_k(x) = f_k(X\alpha(a)) = Y\alpha(f_n(a)) = Y\alpha(g_n(a)) = g_k(X\alpha(a)) = g_k(x)$ である． □

例 5. Δ^n は $\{\mathrm{id}_{[n]}\} \subset \Delta^n_n = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([n], [n])$ で生成される．

証明. $X \subset \Delta^n$ を $\{\mathrm{id}_{[n]}\} \subset \Delta^n_n$ で生成された部分集合とする．命題 3 より

$$X_k = \{X\alpha(\mathrm{id}_{[n]}) \mid \alpha\colon [k] \to [n]\} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([k], [n]) = \Delta^n_k$$

である． □

定義. $0 \leq k \leq n$ とする．

(1) $\{\delta^n_k\} \subset \Delta^n_{n-1}$ で生成される Δ^n の部分集合を $\partial_k \Delta^n$ と書く．

(2) $\{\delta^n_i \mid 0 \leq i \leq n\} \subset \Delta^n_{n-1}$ で生成される Δ^n の部分集合を $\partial \Delta^n$ と書き simplicial n-sphere という．

(3) $\{\delta_i^n \mid 0 \leq i \leq n, i \neq k\} \subset \Delta_{n-1}^n$ で生成される Δ^n の部分集合を horn といい，記号で $\Lambda^{n,k}$ と書く．$0 < k < n$ のときの $\Lambda^{n,k}$ を inner horn といい，$k = 0, n$ のときの $\Lambda^{n,k}$ を outer horn という．

以下，包含 $\Lambda^{n,k} \subset \Delta^n$ が与える射を inc で表す．

命題 6. $|\partial\Delta^n| \cong S^n$.　($n$ 次元球面)

証明. 略. □

定義. $X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ が Kan 複体 (Kan complex)
$\iff 0 \leq k \leq n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to X$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to X$ が存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

定理 7. $S \in \mathbf{Top}$ に対して $\mathrm{Sing}(S)$ は Kan 複体である．

証明. $f\colon \Lambda^{n,k} \to \mathrm{Sing}(S)$ を取る．随伴により $\widetilde{f}\colon |\Lambda^{n,k}| \to S$ を得る．このとき次の図式を可換にする $\widetilde{h}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^{n,k}| \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "|\mathrm{inc}|"'] & S \\ |\Delta^n| \arrow[ur, dashed, "\widetilde{h}"'] & \end{tikzcd}$$

故に再び随伴により可換図式

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & \mathrm{Sing}(S) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

を得る． □

C を圏とするとき Kan 拡張の一般論より $N(C)$ は $N(C)_n \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}([n], C)$ で与えられる．つまり $N(C)_n$ の元は圏 C における図式

$$a_0 \xrightarrow{f_0} a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} a_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} a_n$$

と同一視できる．この同一視をしたとき，d_i^n, s_i^n は

$$
\begin{aligned}
&d_i^n(a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n)\\
&= \begin{cases}
a_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & (i=0)\\
a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} a_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} a_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n & (0<i<n)\\
a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} a_{n-1} & (i=n)
\end{cases}\\
&s_i^n(a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n)\\
&= a_0 \xrightarrow{f_0} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} a_i \xrightarrow{\mathrm{id}} a_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} a_n
\end{aligned}
$$

で与えられる．特に $N(C)_0 \cong \mathrm{Ob}(C)$，$N(C)_1 \cong \mathrm{Mor}(C)$ であり，また $d_0^1(f) = \mathrm{cod}(f)$，$d_1^1(f) = \mathrm{dom}(f)$，$d_1^2(a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c) = (a \xrightarrow{g\circ f} c)$，$s_0^0(a) = \mathrm{id}_a$ となる．

以上を踏まえて，一般の単体的集合 X に対しても以下のような記法を使うことにする．まず $x \in X_1$ に対して $x_0 := d_0^1(x)$，$x_1 := d_1^1(x)$ とすれば $x_0, x_1 \in X_0$ である．このとき $x\colon x_1 \to x_0$ と書き表すことにする．

今度は $x \in X_2$ として $x_0 := d_0^2(x)$, $x_1 := d_1^2(x)$, $x_2 := d_2^2(x)$ とすると $x_0, x_1, x_2 \in X_1$ である．よって $x_{00} := (x_0)_0$ 等を考えることができるが，命題 2 により

$$
\begin{aligned}
x_{00} &= d_0^1(d_0^2(x)) = d_0^1(d_1^2(x)) = x_{10}\\
x_{01} &= d_1^1(d_0^2(x)) = d_0^1(d_2^2(x)) = x_{20}\\
x_{11} &= d_1^1(d_1^2(x)) = d_1^1(d_2^2(x)) = x_{21}
\end{aligned}
$$

となるから $a := x_{11}$，$b := x_{01}$，$c := x_{00}$ と置けば $x_0\colon b \to c$，$x_1\colon a \to c$，$x_2\colon a \to b$ である．この状況を

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & x & c \\
& b \arrow[ur, "x_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

と書き表すことにする．

$u\colon a \to b$ とする．即ち $u \in X_1$ で $a := d_1^1(u)$，$b := d_0^1(u)$ である．$x := s_0^1(u)$ と置く．このとき命題 2 により

$$
\begin{aligned}
x_0 &= d_0^2(x) = d_0^2(s_0^1(u)) = u\\
x_1 &= d_1^2(x) = d_1^2(s_0^1(u)) = u\\
x_2 &= d_2^2(x) = d_2^2(s_0^1(u)) = s_0^0(d_1^1(u)) = s_0^0(a)
\end{aligned}
$$

であるから，上記の記法で表せば次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "s_0^0(a)"'] & & b \\
& a \arrow[ur, "u"'] \arrow[u, phantom, "s_0^1(u)"] &
\end{tikzcd}$$

同様にして $s_1^1(u)$ については次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "u"'] & & b \\
& b \arrow[ur, "s_0^0(b)"'] \arrow[u, phantom, "s_1^1(u)"] &
\end{tikzcd}$$

　次に $x \in X_3$ としたときに，同様の記法を使えば 4 つの $x_0, x_1, x_2, x_3 \in X_2$ があり，命題 2 により

$$\begin{aligned}
x_{00} &= d_0^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_1^3(x)) = x_{10} \\
x_{01} &= d_1^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_2^3(x)) = x_{20} \\
x_{02} &= d_2^2(d_0^3(x)) = d_0^2(d_3^3(x)) = x_{30} \\
x_{11} &= d_1^2(d_1^3(x)) = d_1^2(d_2^3(x)) = x_{21} \\
x_{12} &= d_2^2(d_1^3(x)) = d_1^2(d_3^3(x)) = x_{31} \\
x_{22} &= d_2^2(d_2^3(x)) = d_2^2(d_3^3(x)) = x_{32}
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{tikzcd}
& d & \\
a \arrow[ur, "x_{21}"] \arrow[rr, "x_{31}"] \arrow[dr, "x_{22}"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "x_2"] & & c \arrow[ul, "x_{00}"'] \arrow[l, phantom, shift left=4, "x_0"] \\
& b \arrow[uu, "x_{01}"' near end] \arrow[ur, "x_{02}"'] \arrow[u, phantom, "x_3"] &
\end{tikzcd}$$

のようになっている (注: 奥の三角形は x_1).

　$f\colon \Lambda^{2,0} \to X$ を射とする．$\Lambda^{2,0}$ は $\{\delta_1^2, \delta_2^2\}$ で生成されているから，f は $x_1 := f_1(\delta_1^2)$,

$x_2 := f_1(\delta_2^2)$ で定まる．また f が自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
\Lambda_1^{2,0} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "-\circ\delta_1^1"'] & X_1 \arrow[d, "d_1^1"] \\
\Lambda_0^{2,0} \arrow[r, "f_0"'] & X_0
\end{tikzcd}$$

が可換である．命題 2 より $\delta_2^2 \circ \delta_1^1 = \delta_1^2 \circ \delta_1^1$ だから

$$d_1^1(x_1) = d_1^1 \circ f_1(\delta_1^2) = f_0(\delta_1^2 \circ \delta_1^1) = f_0(\delta_2^2 \circ \delta_1^1) = d_1^1 \circ f_1(\delta_2^2) = d_1^1(x_2)$$

となる．つまり次のような状況である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & & c \\
& b &
\end{tikzcd}$$

逆に $x_1, x_2 \in X_1$ が

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & & c \\
& b &
\end{tikzcd}$$

となっていれば，射 $f\colon \Lambda^{2,0} \to X$ を $f_1(\delta_1^2) := x_1$，$f_1(\delta_2^2) := x_2$ により定義することができる．つまり，射 $\Lambda^{2,0} \to X$ は

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] & & c \\
& b &
\end{tikzcd}$$

と同一視することができる．同様にして，射 $f\colon \Lambda^{2,1} \to X$，$g\colon \Lambda^{2,2} \to X$ はそれぞれ

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f_1(\delta_2^2)"'] & & c & a \arrow[rr, "g_1(\delta_1^2)"] & & c \\
& b \arrow[ur, "f_1(\delta_0^2)"'] & & & b \arrow[ur, "g_1(\delta_0^2)"'] &
\end{tikzcd}$$

と同一視できる．

$0 \leq i < j \leq n$ に対して射 $\gamma_{ij}^n\colon [1] \to [n]$ を $\gamma_{ij}^n(0) := i$，$\gamma_{ij}^n(1) := j$ により定める．また $\gamma_i^n := \gamma_{i,i+1}^n$ と書く．

補題 8. 圏 C に対して射 $f\colon \Delta^n \to N(C)$ は $f_1(\gamma_0^n), \cdots, f_1(\gamma_{n-1}^n)$ により決定される.

証明. 米田の補題により $f \in N(C)_n$ とみなしたときの図式を

$$a_0 \xrightarrow{p_0} a_1 \xrightarrow{p_1} \cdots \xrightarrow{p_{n-2}} a_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} a_n$$

とする. 米田の補題の証明 (即ち, 図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^1, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_1 \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "-\circ y(\gamma_i^n)"] & N(C)_n \arrow[u, "N(C)(\gamma_i^n)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \circ y(\gamma_i^n) \arrow[r, mapsto] & (a_i \xrightarrow{p_i} a_{i+1}) \\
f \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & (f \text{ に対応する図式}) \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

の可換性) より $f_1(\gamma_i^n) = p_i$ が分かる. つまり f は $f_1(\gamma_0^n), \cdots, f_1(\gamma_{n-1}^n)$ により決定される. □

補題 9. $0 < k < n$ とする. 射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to N(C)$ は $f_1(\gamma_0^n), \cdots, f_1(\gamma_{n-1}^n)$ により決定される.

証明. $0 \leq l \leq n$, $l \neq k$ に対して $f^l := (\Delta^{n-1} \xrightarrow{y(\delta_l^n)} \Lambda^{n,k} \xrightarrow{f} N(C))$ とすれば, f は f^l によって決定される.

$\because$) 命題 4 より f は $f(\delta_i^n)$ $(0 \leq i \leq n,\ i \neq k)$ で決定される. ここで米田の補題の同型の自然性 (「米田の補題」の PDF を参照) より

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, \Lambda^{n,k}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f\circ-"'] & \Lambda^{n,k}_n \arrow[d, "f_n"] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_n
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y(\delta_i^n) \arrow[r, mapsto, "\sim"] \arrow[d, mapsto, "f\circ-"'] & \delta_i^n \arrow[d, mapsto, "f_n"] \\
f^l \arrow[r, mapsto, "\sim"] & f_n(\delta_i^n)
\end{tikzcd}$$

は可換である. 故に f は f^l で決定されることが分かる.

そこで $f^l \in N(C)_{n-1}$ とみなしたときの図式を

$$a_0^l \xrightarrow{p_0^l} a_1^l \xrightarrow{p_1^l} \cdots \xrightarrow{p_{n-3}^l} a_{n-2}^l \xrightarrow{p_{n-2}^l} a_{n-1}^l$$

とすれば, f は p_i^l $(0 \leq l \leq n,\ l \neq k,\ 0 \leq i \leq n-2)$ により決定されることになる. 補題 8 の証明を $f^l\colon \Delta^{n-1} \to N(C)$ に適用すると

$$p_i^l = f_1^l(\gamma_i^{n-1}) = f_1(\delta_l^n \circ \gamma_i^{n-1}) = \begin{cases} f_1(\gamma_i^n) & (i < l-1) \\ f_1(\gamma_{l-1,l+1}^n) & (i = l-1) \\ f_1(\gamma_{i+1}^n) & (i > l-1) \end{cases}$$

$$[1] \xrightarrow{\gamma^{n-1}_{l-1,l}} [n-1] \xrightarrow{\delta^n_l} [n]$$

$$\begin{tikzcd}
 & & n \\
 & n-1 \arrow[ur, mapsto] & \vdots \\
 & \vdots & l+1 \\
 & l \arrow[ur, mapsto] & l \\
 & l-1 \arrow[r, mapsto] & l-1 \\
1 \arrow[uur, mapsto] & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[uur, mapsto] & 0 \arrow[r, mapsto] & 0
\end{tikzcd}$$

が分かる．故に

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma^n_1) &= p^0_0 \\
f_1(\gamma^n_2) &= p^0_1 = p^1_1 \\
&\vdots \\
f_1(\gamma^n_k) &= p^0_{k-1} = \cdots = p^{k-1}_{k-1} \\
f_1(\gamma^n_{k+1}) &= p^0_k = \cdots = p^{k-1}_k \\
f_1(\gamma^n_{k+2}) &= p^0_{k+1} = \cdots = p^{k-1}_{k+1} = p^{k+1}_{k+1} \\
&\vdots \\
f_1(\gamma^n_{n-2}) &= p^0_{n-3} = \cdots = p^{k-1}_{n-3} = p^{k+1}_{n-3} = \cdots = p^{n-3}_{n-3} \\
f_1(\gamma^n_{n-1}) &= p^0_{n-2} = \cdots = p^{k-1}_{n-2} = p^{k+1}_{n-2} = \cdots = p^{n-3}_{n-2} = p^{n-2}_{n-2}
\end{aligned}$$

となる．同様にして

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma^n_0) &= p^2_0 = p^3_0 = \cdots = p^{k-1}_0 = p^{k+1}_0 = \cdots = p^n_0 \\
f_1(\gamma^n_1) &= p^3_1 = \cdots = p^{k-1}_1 = p^{k+1}_1 = \cdots = p^n_1 \\
&\vdots \\
f_1(\gamma^n_{k-3}) &= p^{k-1}_{k-3} = p^{k+1}_{k-3} = \cdots = p^n_{k-3} \\
f_1(\gamma^n_{k-2}) &= p^{k+1}_{k-2} = \cdots = p^n_{k-2} \\
f_1(\gamma^n_{k-1}) &= p^{k+1}_{k-1} = \cdots = p^n_{k-1} \\
&\vdots \\
f_1(\gamma^n_{n-3}) &= p^{n-1}_{n-3} = p^n_{n-3} \\
f_1(\gamma^n_{n-2}) &= p^n_{n-2}
\end{aligned}$$

であり，また

$$f_1(\gamma^n_{02}) = p^1_0, \quad \cdots, \quad f_1(\gamma^n_{k-2,k}) = p^{k-1}_{k-2},$$
$$f_1(\gamma^n_{k,k+2}) = p^{k+1}_k, \quad \cdots, \quad f_1(\gamma^n_{n-2,n}) = p^{n-1}_{n-2}$$

となる．即ち f は

$$f_1(\gamma^n_0),\ \cdots,\ f_1(\gamma^n_{n-1}),\ f_1(\gamma^n_{02}),\ \cdots,\ f_1(\gamma^n_{k-2,k}),\ f_1(\gamma^n_{k,k+2}),\ \cdots,\ f_1(\gamma^n_{n-2,n})$$

で決定される．ここで $0 \leq j \leq n-3$ に対して $\nu_j \colon [2] \to [n-1]$ を

$$\nu_j(0) := j, \quad \nu_j(1) := j+1, \quad \nu_j(2) := j+2$$

で定義すると，再び米田の補題の証明 (即ち図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^2, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_2 \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, "-\circ y(\nu_j)"] & N(C)_{n-1} \arrow[u, "N(C)(\nu_j)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f^l \circ y(\nu_j) \arrow[r, mapsto, "\sim"] & (a^l_j \xrightarrow{p^l_j} a^l_{j+1} \xrightarrow{p^l_{j+1}} a^l_{j+2}) \\
f^l \arrow[r, mapsto, "\sim"] \arrow[u, mapsto, "-\circ y(\nu_j)"] & (f^l \text{ に対応する図式}) \arrow[u, mapsto, "N(C)(\nu_j)"']
\end{tikzcd}$$

が可換であること) より $f^l_2(\nu_j) = (a^l_j \xrightarrow{p^l_j} a^l_{j+1} \xrightarrow{p^l_{j+1}} a^l_{j+2})$ が分かる．故に図式

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{n-1}_1 \arrow[r, "f^l_1"] & N(C)_1 \\
\Delta^{n-1}_2 \arrow[r, "f^l_2"'] \arrow[u, "-\circ\delta^2_1"] & N(C)_2 \arrow[u, "N(C)(\delta^2_1)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\gamma^{n-1}_{j,j+2} \arrow[r, mapsto, "f^l_1"] & (a^l_j \xrightarrow{p^l_{j+1}\circ p^l_j} a^l_{j+2}) \\
\nu_j \arrow[r, mapsto, "f^l_2"'] \arrow[u, mapsto, "-\circ\delta^2_1"] & (a^l_j \xrightarrow{p^l_j} a^l_{j+1} \xrightarrow{p^l_{j+1}} a^l_{j+2}) \arrow[u, mapsto, "N(C)(\delta^2_1)"']
\end{tikzcd}$$

の可換性から $f^l_1(\gamma^{n-1}_{j,j+2}) = p^l_{j+1} \circ p^l_j$ となる．従って $0 \leq i \leq k-2$ に対しては

$$f_1(\gamma^n_{i,i+2}) = f_1(\delta^n_n \circ \gamma^{n-1}_{i,i+2}) = f^n_1(\gamma^{n-1}_{i,i+2}) = p^n_{i+1} \circ p^n_i = f_1(\gamma^n_{i+1}) \circ f_1(\gamma^n_i)$$

$$
[1] \xrightarrow{\gamma^{n-1}_{i,i+2}} [n-1] \xrightarrow{\delta^n_n} [n]
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & n \\
 & n-1 \arrow[r, maps to] & n-1 \\
 & \vdots & \vdots \\
 & i+2 \arrow[r, maps to] & i+2 \\
 & i+1 \arrow[r, maps to] & i+1 \\
 & i \arrow[r, maps to] & i \\
1 \arrow[uuur, maps to] & \vdots & \vdots \\
0 \arrow[uur, maps to] & 0 \arrow[r, maps to] & 0
\end{tikzcd}
$$

であり，$k \leq i \leq n-2$ に対しては

$$
f_1(\gamma^n_{i,i+2}) = f_1(\delta^n_0 \circ \gamma^{n-1}_{i-1,i+1}) = f^0_1(\gamma^{n-1}_{i-1,i+1}) = p^0_i \circ p^0_{i-1} = f_1(\gamma^n_{i+1}) \circ f_1(\gamma^n_i)
$$

$$
[1] \xrightarrow{\gamma^{n-1}_{i-1,i+1}} [n-1] \xrightarrow{\delta^n_0} [n]
$$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & n \\
 & n-1 \arrow[ur, maps to] & \vdots \\
 & \vdots & i+2 \\
 & i+1 \arrow[ur, maps to] & i+1 \\
 & i \arrow[ur, maps to] & i \\
 & i-1 \arrow[ur, maps to] & \vdots \\
1 \arrow[uuur, maps to] & \vdots & 1 \\
0 \arrow[uur, maps to] & 0 \arrow[ur, maps to] & 0
\end{tikzcd}
$$

であるから，結局 f は $f_1(\gamma^n_0)$，$\cdots$，$f_1(\gamma^n_{n-1})$ のみで決定されることが分かった． $\square$

定理 10. $X \in \widehat{\Delta}$ がある圏 C により $X \cong N(C)$ と書ける
$\Longleftrightarrow$ $0 < k < n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to X$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to X$ が一意に存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\
\Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明． $(\Longrightarrow)$ 任意の $f\colon \Lambda^{n,k} \to N(C)$ を取る．$\gamma^n_i \in \Lambda^{n,k}_1$ だから $p_i := f_1(\gamma_i) \in N(C)_1$ と定めると，これは図式

$$
\bullet \xrightarrow{p_0} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{p_{n-1}} \bullet
$$

を与えるから，$N(C)_n$ の対象を定める．これを米田の補題により $h\colon \Delta^n \to N(C)$ とみなす．このとき

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & N(C) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

は可換である．

∵) 補題 9 より，$0 \le i \le n-1$ に対して $f_1(\gamma_i^n) = h_1(\gamma_i^n)$ を示せばよいがそれは h の定義から明らか.

h の一意性を示すため

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & N(C) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

が可換であるとする．このとき $h'_1(\gamma_i^n) = f_1(\gamma_i^n) = h_1(\gamma_i^n)$ である．故に補題 9 より $h = h'$ となることが分かる．

($\Longleftarrow$) 圏 C を以下のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(C) := X_0$，$\mathrm{Mor}(C) := X_1$.
- $f \in X_1$ に対して $\mathrm{dom}(f) := d_1^1(f) \in X_0$，$\mathrm{cod}(f) := d_0^1(f) \in X_0$ と定める．
- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して $g \circ f\colon a \to c$ を定めたい．そのために $k\colon \Lambda^{2,1} \to X$ を

$$k_1(\delta_0^2) := g \in X_1, \quad k_1(\delta_2^2) := f \in X_1$$

により定める．つまり k は

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"'] & & c \\ & b \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

で定まる射である．仮定により $\widetilde{k}\colon \Delta^2 \to X$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{2,1} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "\widetilde{k}"'] & \end{tikzcd}$$

が可換となる．このとき米田の補題により $\widetilde{k}\colon \Delta^2 \to X$ を $\widetilde{k} \in X_2$ とみなして $g \circ f := d_1^2(\widetilde{k})$ と定める．つまり次のような状況になる．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & \widetilde{k} & c \\ & b \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

- $a \in X_0$ に対して $\mathrm{id}_a := s_0^0(a) \in X_1$ と定める．命題 2 により

$$\mathrm{dom}(\mathrm{id}_a) = d_1^1 \circ s_0^0(a) = a, \quad \mathrm{cod}(\mathrm{id}_a) = d_0^1 \circ s_0^0(a) = a$$

  である．

以上の定義により C は圏となる．

$\because$) まず恒等射について示す．$f \in X_1$ に対して $x := s_1^1(f)$ と置けば，$a := \mathrm{dom}(f)$, $b := \mathrm{cod}(f)$ としたとき

$$\begin{aligned} d_0^2(x) &= d_0^2(s_1^1(f)) = s_0^0(d_0^1(f)) = s_0^0(b) = \mathrm{id}_b \\ d_1^2(x) &= d_1^2(s_1^1(f)) = \mathrm{id}(f) = f \\ d_2^2(x) &= d_2^2(s_1^1(f)) = \mathrm{id}(f) = f \end{aligned}$$

である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"'] & x & b \\ & b \arrow[ur, "\mathrm{id}_b"'] & \end{tikzcd}$$

即ち

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{2,1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^2 \arrow[ur, dashed, "x"'] & \end{tikzcd}$$

が可換となり，合成の定義より $\mathrm{id} \circ f = f$ となる．同様にして $f \circ \mathrm{id} = f$ も分かるので id は恒等射の条件を満たす．

後は結合律を示せばよい．$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ とする．$h \circ g$ を定める $x_0 \in X_2$ と

$(h \circ g) \circ f$ を定める $x_2 \in X_2$ を取ると次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
 & d & \\
a \arrow[ur, "(h\circ g)\circ f"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[r, phantom, "x_2"] & & c \arrow[ul, "h"'] \arrow[l, phantom, "x_0"'] \\
 & b \arrow[uu, "h\circ g"' near start] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

同様に $g \circ f$ を定める $x_3 \in X_2$ と $h \circ (g \circ f)$ を定める $x_1 \in X_2$ を取ると次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
 & d & \\
 & x_1 & \\
a \arrow[uur, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & x_3 & c \arrow[uul, "h"'] \\
 & b \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき x_0, x_1, x_3 を組み合わせると

$$
\begin{tikzcd}
 & d & \\
 & & \\
a \arrow[uur, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rr, "g\circ f", near start] \arrow[dr, "f"'] & x_3 \quad x_0 & c \arrow[uul, "h"'] \\
 & b \arrow[uuu, "h\circ g"'] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\tag{11}
$$

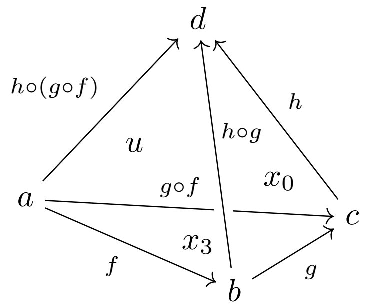
を得る (注: 三角錐の中身と，手前左の三角形の部分が空いている．また奥の三角形は x_1)．つまりこれは射 $k\colon \Lambda^{3,2} \to X$ であって

- $k_2(\delta^3_0) := x_0 \in X_2$.
- $k_2(\delta^3_1) := x_1 \in X_2$.
- $k_2(\delta^3_3) := x_3 \in X_2$.

により定まるものである．仮定により $x\colon \Delta^3 \to X$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{3,2} \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^3 \arrow[ur, dashed, "x"'] & \end{tikzcd}$$

が可換となる．(つまり x は (11) の中身を埋める三角錐である．) このとき $u := d_2^3(x)$ と置くと



となるから，合成の定義より $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$ である (計算で示す場合は

$$\begin{aligned} d_0^2(u) &= d_0^2(d_2^3(x)) = d_1^2(d_0^3(x)) = d_1^2(x_0) = h\circ g \\ d_2^2(u) &= d_2^2(d_2^3(x)) = d_2^2(d_3^3(x)) = d_2^2(x_3) = f \end{aligned}$$

となる).

定義から $N(C)_0 = X_0$，$N(C)_1 = X_1$ である．そこで写像 $f_n\colon X_n \to N(C)_n$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} x & (n=0) \\ \bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet & (n \geq 1) \end{cases}$$

で定める．この f_n は射 $X \to N(C)$ を定める．

∵) $\alpha\colon [m] \to [n]$ に対して

$$\begin{tikzcd} X_m \arrow[r, "f_m"] & N(C)_m \\ X_n \arrow[u, "X\alpha"] \arrow[r, "f_n"'] & N(C)_n \arrow[u, "NC(\alpha)"'] \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．命題 1 より $\alpha = \delta_i^n, \sigma_i^n$ の場合に示せばよい．

(0) $\alpha = \delta_0^n$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$d_0^n \circ f_n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_1^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet)$$
$$f_{n-1} \circ X\delta_0^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_0^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_0^n(x))} \bullet)$$

となる．故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して $X\gamma_k^{n-1}(X\delta_0^n(x)) = X\gamma_{k+1}^n(x)$ を示せばよい．そのためには $\delta_0^n \circ \gamma_k^{n-1} = \gamma_{k+1}^n$ を示せばよいが，それは定義より明らか．

(1) $\alpha = \delta_n^n$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$d_n^n \circ f_n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^n(x)} \bullet)$$
$$f_{n-1} \circ X\delta_n^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_n^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_n^n(x))} \bullet)$$

となる．故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して $X\gamma_k^{n-1}(X\delta_n^n(x)) = X\gamma_k^n(x)$ を示せばよい．そのためには $\delta_n^n \circ \gamma_k^{n-1} = \gamma_k^n$ を示せばよいが，それは定義より明らか．

(2) $\alpha = \delta_i^n$ $(0 < i < n)$ の場合，$x \in X_n$ に対して

$$\begin{aligned} &d_i^n \circ f_n(x) \\ &\quad = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_i^n(x)\circ X\gamma_{i-1}^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \\ &f_{n-1} \circ X\delta_i^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n-1}(X\delta_i^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-2}^{n-1}(X\delta_i^n(x))} \bullet) \end{aligned}$$

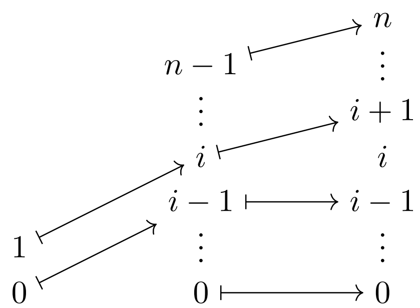
となる．故に $0 \leq k \leq n-2$ に対して

$$X\gamma_k^{n-1}(X\delta_i^n(x)) = \begin{cases} X\gamma_k^n(x) & (0 \leq k < i-1) \\ X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x) & (k = i-1) \\ X\gamma_{k+1}^n(x) & (i-1 < k \leq n-2) \end{cases}$$

を示せばよい．まず $k \neq i-1$ の場合は定義から明らか．$k = i-1$ の場合は $N(C)$

の定義より $X\gamma_{i-1}^{n-1}(X\delta_i^n(x)) = X\gamma_i^n(x) \circ X\gamma_{i-1}^n(x)$ である．

$$[1] \xrightarrow{\gamma_{i-1}^{n-1}} [n-1] \xrightarrow{\delta_i^n} [n]$$



(3) $\alpha = \sigma_i^n$ $(0 \leq i \leq n)$ の場合，$x \in X_n$ に対して

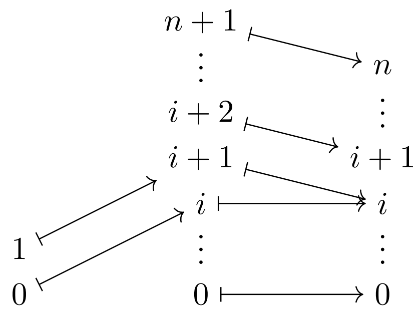
$$\begin{aligned}
&s_i^n \circ f_n(x) \\
&= (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_i^n(x)} \bullet \xrightarrow{\mathrm{id}} \bullet \xrightarrow{X\gamma_{i+1}^n(x)} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_{n-1}^n(x)} \bullet) \\
&f_{n+1} \circ X\sigma_i^n(x) = (\bullet \xrightarrow{X\gamma_0^{n+1}(X\sigma_i^n(x))} \bullet \to \cdots \to \bullet \xrightarrow{X\gamma_n^{n+1}(X\sigma_i^n(x))} \bullet)
\end{aligned}$$

となる．故に $0 \leq k \leq n$ に対して

$$X\gamma_k^{n+1}(X\sigma_i^n(x)) = \begin{cases} X\gamma_k^n(x) & (0 \leq k < i) \\ \mathrm{id} & (k = i) \\ X\gamma_{k-1}^n(x) & (i < k \leq n) \end{cases}$$

を示せばよい．まず $k \neq i$ の場合は定義から明らか．$k = i$ の場合は β をうまくとることで $\sigma_i^n \circ \gamma_i^{n+1} = \beta \circ \sigma_0^0$ と書ける．

$$[1] \xrightarrow{\gamma_i^{n+1}} [n+1] \xrightarrow{\sigma_i^n} [n]$$



よって $X\gamma_i^{n+1}(X\sigma_i^n(x)) = s_0^0(X\beta(x)) = \mathrm{id}_{X\beta(x)}$ となる．

この f が同型であることを示せばよい．即ち各 n に対して f_n が全単射であることを示せばよい．米田の補題の同型の自然性 (「米田の補題」の PDF を参照) より

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, X) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f\circ -"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[r, "\sim"] & N(C)_n \end{tikzcd}$$

が可換であるから $f \circ -$ が全単射であること示せばよい．それを n に関する帰納法により示す．

まず $n = 0, 1$ の場合は定義より明らかである．$n \geq 2$ のとき，$0 < k < n$ となる k を 1 つ取ると次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, X) \arrow[r, "f\circ -"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, X) \arrow[r, "f\circ -"'] \arrow[u, "-\circ\mathrm{inc}"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^n, N(C)) \arrow[u, "-\circ\mathrm{inc}"'] \end{tikzcd}$$

$- \circ \mathrm{inc}$ は仮定より全単射だから，$\varphi := f \circ -\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, X) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, N(C))$ が全単射であることを示せばよい．

まず単射であることを示すため $g, h\colon \Lambda^{n,k} \to X$ が $g \neq h$ を満たすとする．命題 3 よりある $0 \leq i \leq n$，$i \neq k$ が存在して $g_{n-1}(\delta_i^n) \neq h_{n-1}(\delta_i^n)$ となる．$\delta_i^n \in \Lambda_{n-1}^{n,k}$ に対応する射を $p_i\colon \Delta^{n-1} \to \Lambda^{n,k}$ と書けば $g \circ p_i \neq h \circ p_i$ となる．また

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^{n-1}, X) \arrow[r, "f\circ -"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, X) \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[u, "-\circ p_i"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathbb{\Delta}}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \arrow[u, "-\circ p_i"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} g \circ p_i \arrow[r, mapsto, "f\circ -"] & f \circ g \circ p_i \\ g \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"] & \varphi(g) \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} h \circ p_i \arrow[r, mapsto, "f\circ -"] & f \circ h \circ p_i \\ h \arrow[r, mapsto, "\varphi"'] \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"] & \varphi(h) \arrow[u, mapsto, "-\circ p_i"'] \end{tikzcd}$$

は可換であり，上側の $f \circ -$ は帰納法の仮定から単射である．故に $f \circ g \circ p_i \neq f \circ h \circ p_i$ となり，$\varphi(g) \circ p_i \neq \varphi(h) \circ p_i$ が分かる．従って $\varphi(g) \neq \varphi(h)$ である．

次に全射であることを示すため $g\colon \Lambda^{n,k} \to N(C)$ とする．$0 \leq i \leq n,\ i \neq k$ に対して次の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
X_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & N(C)_{n-1} & \ni & g_{n-1}(\delta_i^n) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, X) \arrow[u, "\wr"] \arrow[r, "f\circ -"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Delta^{n-1}, N(C)) \arrow[u, "\wr"'] & \ni & g \circ p_i \arrow[u] \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, X) \arrow[u, "-\circ p_i"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{\Delta}}(\Lambda^{n,k}, N(C)) \arrow[u, "-\circ p_i"'] & \ni & g \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

帰納法の仮定から f_{n-1} は全単射である．よって $x_i \in X_{n-1}$ を $f_{n-1}(x_i) = g_{n-1}(\delta_i^n)$ となるように取ることができる．命題 3 より，任意の $l \in \mathbb{N},\ \alpha \in \Lambda_l^{n,k}$ に対してある i_α と $\beta_\alpha\colon [l] \to [n-1]$ が存在して $\alpha = \delta_{i_\alpha}^n \circ \beta_\alpha$ と書ける．そこで $q_l(\alpha) := X\beta_\alpha(x_i) \in X_l$ と定義する．これは射 $q\colon \Lambda^{n,k} \to X$ を定める．

$\because$) まず q_l が well-defined であることを確かめる．そのために $\alpha = \delta_i^n \circ \beta = \delta_j^n \circ \gamma$ と書けたとする．f の自然性から次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
X_l \arrow[r, "f_l"] & N(C)_l \\
X_{n-1} \arrow[u, "X\beta"] \arrow[r, "f_{n-1}"'] & N(C)_{n-1} \arrow[u, "NC(\beta)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Lambda_l^{n,k} \arrow[r, "g_l"] & N(C)_l \\
\Lambda_{n-1}^{n,k} \arrow[u, "-\circ\beta"] \arrow[r, "g_{n-1}"'] & N(C)_{n-1} \arrow[u, "NC(\beta)"']
\end{tikzcd}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
f_l(X\beta(x_i)) &= NC(\beta)(f_{n-1}(x_i)) = NC(\beta)(g_{n-1}(\delta_i^n)) = g_l(\delta_i^n \circ \beta) \\
&= g_l(\alpha) \\
f_l(X\gamma(x_j)) &= NC(\gamma)(f_{n-1}(x_j)) = NC(\gamma)(g_{n-1}(\delta_j^n)) = g_l(\delta_j^n \circ \gamma) \\
&= g_l(\alpha)
\end{aligned}
$$

となるから $f_l(X\beta(x_i)) = f_l(X\gamma(x_j))$ である．既に示した通り f_l は単射だから $X\beta(x_i) = X\gamma(x_j)$ となり $q_l(\alpha)$ は well-defined である．

あとは $q_l\colon \Lambda_l^{n,k} \to X_l$ が自然であることを示せばよい．そこで $\tau\colon [l] \to [m]$ と

する．

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k}_l \arrow[r, "q_l"] & X_l \\ \Lambda^{n,k}_m \arrow[u, "-\circ\tau"] \arrow[r, "q_m"'] & X_m \arrow[u, "X\tau"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \alpha\circ\tau \arrow[r, mapsto, "q_l"] & q_l(\alpha\circ\tau) \\ & X\tau(X\beta_\alpha(x_{i_\alpha})) \\ \alpha \arrow[uu, mapsto, "-\circ\tau"] \arrow[r, mapsto, "q_m"'] & X\beta_\alpha(x_{i_\alpha}) \arrow[u, mapsto, "X\tau"'] \end{tikzcd}$$

$\alpha = \delta^n_{i_\alpha} \circ \beta_\alpha$ だから $\alpha\circ\tau = \delta^n_{i_\alpha} \circ (\beta_\alpha \circ \tau)$ と書ける．よって $q_l(\alpha\circ\tau) = X(\beta_\alpha\circ\tau)(x_{i_\alpha})$ となる．

このとき $\varphi(q)_{n-1}(\delta^n_i) = (f\circ q)_{n-1}(\delta^n_i) = f_{n-1}(q_{n-1}(\delta^n_i)) = f_{n-1}(x_i) = g_{n-1}(\delta^n_i)$ だから $\varphi(q) = g$ である． □

Kan 複体と定理 10 の共通の一般化として次の定義を得る．

定義． $X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ が quasi-category (もしくは弱 Kan 複体)
$\iff 0 < k < n$ とするとき，任意の射 $f\colon \Lambda^{n,k} \to X$ に対してある射 $h\colon \Delta^n \to X$ が存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} \Lambda^{n,k} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{inc}"'] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

この quasi-category が，[2] などで ∞-category と呼ばれているものである．

参考文献

[1] A. Joyal and M. Tierney, Notes on simplicial homotopy theory
[2] J. Lurie, Higher Topos Theory, `https://www.math.ias.edu/~lurie/`
[3] Stacks Project, `https://stacks.math.columbia.edu/`