例: 位相空間上の層　その 2

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 7 日

この PDF では Kan 拡張を使って位相空間上の層について述べる．層の基本的なことについては前の PDF「例: 位相空間上の層」も参照.

目次

1 前提知識

まず復習しておくと Kan 拡張については以下のような定理が成り立っていた．(証明は「Kan 拡張」の PDF を参照．)

定理 1. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ で各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し，関手 $K\colon U \to V$ は余極限と交換するとする．このとき K は $F^\dagger E$ と交換する． □

定理 2. $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が各点左 Kan 拡張で F が忠実充満とする．このとき $\eta\colon E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ は同型である． □

定理 3. C を小圏，U を圏，$F\colon C \to U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在する

とする．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}
$$

□

系 4. $F\colon C \to D$ が関手で C が小圏のとき $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
$$

□

系 5. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
$$

系 6. 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して，ある $T\colon J \to C$ が存在して $P \cong \mathrm{colim}(J \xrightarrow{T} C \xrightarrow{y} \widehat{C})$ となる． □

2　位相空間上の層

X を位相空間としたとき X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．このとき $\widehat{\mathcal{O}_X} = \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である．

「Kan 拡張」の PDF でも述べた通り，位相空間の間の連続写像 $f\colon X \to Y$ に対して，f の逆像と呼ばれる関手 $f^*\colon \widehat{\mathcal{O}_Y} \to \widehat{\mathcal{O}_X}$ が左 Kan 拡張により得られる．即ち $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ に対して $f^*P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ であるが，これは各点左 Kan 拡張によれば $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$
f^*P(U) \cong \operatorname*{colim}_{V \supset f(U)} P(V) \tag{7}
$$

となることが分かる．つまり $Q \mapsto Q(U)$ で定まる関手を $\mathrm{ev}_U\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \mathbf{Set}$ とすれば

$$\mathrm{ev}_U(f^*P) \cong \operatorname*{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$$

である．ここで点 $x \in X$ を取り f として包含写像 $i_x\colon \{x\} \to X$ を考えれば，i_x の逆像として関手 $i_x^*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_{\{x\}}}$ が得られる．前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ に対して集合 $P_x := \mathrm{ev}_{\{x\}}(i_x^*P)$ を P の x における茎 (stalk) という．この P_x は同型 (7) を使えば $P_x \cong \operatorname*{colim}_{U \ni x} P(U)$ と書けることが分かる．即ち，集合 $\coprod_{U \ni x} P(U)$ における同値関係 $\sim$ を $u \in P(U)$，$v \in P(V)$ に対して

$$u \sim v \iff \text{ある開集合 } W \subset U \cap V \text{ が存在して } u|_W = v|_W$$

と定めたとき $P_x \cong \Big(\coprod_{U \ni x} P(U)\Big)/\!\sim$ である．この同値関係における $u \in P(U)$ の同値類を u の x における芽 (germ) といい u_x と書く．

例 8. $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ を「実数値連続関数がなす前層」とする．$x \in X$ を取り $U, V \ni x$ を開近傍とする．このとき $u \in P(U)$，$v \in P(V)$ に対して $u \sim v$ となるのは

$$\text{ある開集合 } W \subset U \cap V \text{ が存在して，任意の } a \in W \text{ に対して } u(a) = v(a)$$

となるときである．従って，x の近傍で定義された 2 つの関数 u, v に対して $u_x = v_x$ となるのは，u と v が x の十分小さい近傍上で一致しているときである． □

例 9. 開集合 $O \in \mathcal{O}_X$ を取り $P := y(O)$ とする．$x \in X$ に対して P_x を計算しよう．

まず $x \notin O$ の場合は，任意の開近傍 $U \ni x$ に対して $P(U) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U, O) = \emptyset$ だから

$$P_x \cong \operatorname*{colim}_{U \ni x} P(U) = \operatorname*{colim}_{U \ni x} \emptyset \cong \emptyset$$

である．次に $x \in O$ とする．この場合は開近傍 $U \ni x$ に対して

$$P(U) \cong \begin{cases} 1 & (U \subset O) \\ \emptyset & (U \not\subset O) \end{cases}$$

であるから $P_x \cong 1$ が分かる． □

次に開集合 $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $F(U)$ で包含写像 $U \to X$ を表すことにする．この F は

関手 $F\colon \mathcal{O}_X \to \mathbf{Top}/X$ を定める．普遍随伴 (定理 3) により

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top}/X \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

を得る．この随伴により「X 上の前層」は「コドメインが X となる連続写像」と大きな関係がある (定理 17)．このことを示すために $F^\dagger y$ と $y^\dagger F$ を計算する．

まず $f\colon Y \to X$ に対して系 4 より $F^\dagger y(f) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F-, f)$ だから $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$\begin{aligned} F^\dagger y(f)(U) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F(U), f) \\ &= \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, Y) \mid f \circ s = F(U)\} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "F(U)"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

となる．$f \circ s = F(U)$ を満たす連続写像 $s\colon U \to Y$ は f の U 上の切断 (section) と呼ばれる．この言葉を使えば $F^\dagger y(f)$ は「f の切断がなす前層」と言うことができる[*1]．

次に $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ とすると系 6 の証明より

$$P \cong \mathrm{colim}(y \downarrow P \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{y} \widehat{\mathcal{O}_X}) \tag{11}$$

と書けて，更に

$$\begin{aligned} y^\dagger F(P) &\cong \operatorname*{colim}_{\langle U, u\rangle \in y\downarrow P} y^\dagger F(y(U)) && \text{(左随伴は余極限と交換する)} \\ &\cong \operatorname*{colim}_{\langle U, u\rangle \in y\downarrow P} F(U) && \text{(命題 2)} \end{aligned} \tag{12}$$

となる．この余極限の余極限余錐がどうなっているか考えよう．まず

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
y\downarrow P \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & \mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] & \widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[ul, phantom, "\mathrm{id} \Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

---

*1 $F^\dagger y(f)$ は実は層になる (命題 18)．よってより正確に言えば $F^\dagger y(f)$ は「f の切断がなす層」である．

が余極限 (11) の余極限余錐である．故に (12) の余極限余錐は合成

$$
\beta \quad := \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \\
y\downarrow P \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] & \mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}\Uparrow"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[r, "y^\dagger F"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\wr"] & \mathbf{Top}/X \\
& & &
\end{tikzcd}
$$

で与えられる．従って $y^\dagger F(P) = (\Lambda_P \xrightarrow{p} X)$ と書くと，Λ_P は $\langle U, u\rangle \in y\downarrow P$ (即ち $U \in \mathcal{O}_X$ で $u\colon y(U) \Rightarrow P$) を動かしたときに U を貼り合わせてできる空間であり，その貼り合わせ方は $\beta_{\langle U,u\rangle}$ で与えられる．この $\beta_{\langle U,u\rangle}$ は $\mathbf{Top}/X$ における射

$$F(U) \cong y^\dagger F(y(U)) \xrightarrow{y^\dagger F(u)} y^\dagger F(P) = p$$

となる．この射を与える連続写像 $U \to \Lambda_P$ を $\mu_{\langle U,u\rangle}$ で表すことにする．即ち

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\mu_{\langle U,u\rangle}"] \arrow[dr, "F(U)"'] & & \Lambda_P \arrow[dl, "p"] \\
& X &
\end{tikzcd}
$$

である．以下，この空間 Λ_P がより具体的にどうなっているかを調べるが，そのために次の関手 T_x, G_x を導入する．

まず $x \in X$ に対して関手 $T_x\colon \mathbf{Top}/X \to \mathbf{Set}$ を $T_x(Y \xrightarrow{f} X) := f^{-1}(x)$ によって定める．この T_x は余極限と交換する．よって定理 1 より

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[drr, "T_x \circ y^\dagger F"] & & \\
\mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Top}/X \arrow[r, "T_x"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

は左 Kan 拡張である．次に最初に定義した $i_x^*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_{\{x\}}}$ と $\mathrm{ev}_{\{x\}}\colon \widehat{\mathcal{O}_{\{x\}}} \to \mathbf{Set}$ は余極限と交換するから $G_x := \mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \circ y$ とすれば，系 5 と定理 1 より

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, "\mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*"] & \\
\mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "G_x"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & & \\
\mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}\Uparrow"] & \widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[r, "i_x^*"'] & \widehat{\mathcal{O}_{\{x\}}} \arrow[r, "\mathrm{ev}_{\{x\}}"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}
$$

は左 Kan 拡張である．

命題 13. $\mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \cong T_x \circ y^\dagger F$ である．

証明. 例 9 を使えば容易に $G_x \cong T_x \circ F$ が分かる．よって左 Kan 拡張の普遍性により $\mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \cong T_x \circ y^\dagger F$ が分かる． $\square$

従って

$$P_x = \mathrm{ev}_{\{x\}}(i_x^* P) \cong T_x(y^\dagger F(P)) \cong T_x(\Lambda_P \xrightarrow{p} X) = p^{-1}(x)$$

である．故に Λ_P は集合 $E := \coprod_{x \in X} P_x$ に位相を入れた空間になる．写像 $q \colon E \to X$ を，$a \in P_x$ に対して $q(a) := x$ で定めておく．$\langle U, u \rangle \in y{\downarrow}P$ に対して写像 $\nu_{\langle U,u \rangle} \colon U \to E$ を $\nu_{\langle U,u \rangle}(z) := u_z$ で定める．更に E の位相を

$$\{\nu_{\langle U,u \rangle}(V) \mid \langle U, u \rangle \in y{\downarrow}P,\ V \in \mathcal{O}_X,\ V \subset U\}$$

で生成される位相とする．

命題 14. $\langle E, \nu \rangle$ は余極限 $\operatorname*{colim}_{\langle U,u \rangle \in y\downarrow P} F(U)$ を与える．

証明. $f \in \mathbf{Top}/X$ として $\theta_{\langle U,u \rangle} \colon F(U) \to f$ を $\langle U, u \rangle \in y{\downarrow}P$ について自然な $\mathbf{Top}/X$ の射とする．従って $\theta_{\langle U,u \rangle}$ は次の図式を可換にする連続写像である．

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "\theta_{\langle U,u \rangle}"] \arrow[dr, "F(U)"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

このとき連続写像 $h \colon E \to Y$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\nu_{\langle U,u \rangle}"'] \arrow[drrr, "\theta_{\langle U,u \rangle}"] & & & \\
& E \arrow[rr, dashed, "h"'] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& & X &
\end{tikzcd}$$

が可換となることを示せばよい．

まず h の存在を示す．h を定義するため，任意の $e \in E$ を取る．$x := q(e)$ とすればある開近傍 $U \ni x$ と $u \in P(U)$ が存在して $e = u_x$ と書ける．このとき $h(e) := \theta_{\langle U,u \rangle}(x)$ と定義する．これは well-defined である．

∵) 別の $v \in P(V)$ により $e = u_x = v_x$ と書けたとする．このとき定義よりある開近傍 $x \in W \subset U \cap V$ が存在して $u|_W = v|_W$ である．よって $w := u|_W$ とすれば $y{\downarrow}P$ の射 $\langle W, w\rangle \to \langle U, u\rangle$，$\langle W, w\rangle \to \langle V, v\rangle$ が存在する．このとき $\theta_{\langle U,u\rangle}$ の自然性から

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "\theta_{\langle U,u\rangle}"] & & \\
W \arrow[u, hook] \arrow[d, hook] \arrow[rr, "\theta_{\langle W,w\rangle}"] & & Y \\
V \arrow[urr, "\theta_{\langle V,v\rangle}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

が可換であり，従って $\theta_{\langle U,u\rangle}(x) = \theta_{\langle W,w\rangle}(x) = \theta_{\langle V,v\rangle}(x)$ である．

h の定義から明らかに

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\nu_{\langle U,u\rangle}"'] \arrow[drrr, "\theta_{\langle U,u\rangle}"] & & & \\
& E \arrow[rr, dashed, "h"'] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& & X &
\end{tikzcd}
$$

は可換である．次に h は連続である．

∵) 任意の $e \in E$ と開近傍 $h(e) \in O \subset Y$ を取る．上記のように $e = u_x$ と書けば $h(e) = \theta_{\langle U,u\rangle}(x)$ である．このとき $\theta_{\langle U,u\rangle} \colon U \to Y$ の連続性より $V := \theta^{-1}_{\langle U,u\rangle}(O) \subset U$ は x の開近傍である．また $O' := \nu_{\langle U,u\rangle}(V) \subset E$ は e の開近傍である．

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, "\nu_{\langle U,u\rangle}"'] \arrow[drrr, "\theta_{\langle U,u\rangle}"] & & & \\
& E \arrow[rr, "h"'] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\
& & X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
V \ni x \arrow[dr, mapsto, "\nu_{\langle U,u\rangle}"'] \arrow[drrr, mapsto, "\theta_{\langle U,u\rangle}"] & & & \\
& O' \ni e \arrow[rr, mapsto, "h"'] \arrow[dr, mapsto, "q"'] & & h(e) \in O \arrow[dl, mapsto, "f"] \\
& & x &
\end{tikzcd}
$$

このとき h の定義から明らかに $h(O') = \theta_{\langle U,u\rangle}(V) \subset O$ となる．故に h は連続である．

最後に h の一意性を示せばよいが，それは h の定義から容易に分かる． □

従って余極限の普遍性から同相写像 $\Lambda_P \to E$ であって

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, "\mu_{\langle U,u\rangle}"'] \arrow[dr, "\nu_{\langle U,u\rangle}"] & \\ \Lambda_P \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "p"'] & & E = \coprod_{x\in X} P_x \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

が可換となるものが存在する．そこで以下これにより $\Lambda_P = \coprod_{x\in X} P_x$ とみなす．この同一視によれば $U \in \mathcal{O}_X$，$u \in P(U)$，$x \in U$ に対して $\mu_{\langle U,u\rangle}(x) = u_x$ であり，また $a \in P_x$ に対して $p(a) = x$ である．

さて，随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ の unit を η とする．η_P は自然変換 $P \Rightarrow F^\dagger y(y^\dagger F(P))$ だから，$U \in \mathcal{O}_X$ に対して $(\eta_P)_U \colon P(U) \to F^\dagger y(y^\dagger F(P))(U)$ となるが (10) により

$$F^\dagger y(y^\dagger F(P))(U) \cong \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, \Lambda_P) \mid p \circ s = F(U)\}$$

となるから，$u \in P(U)$ に対して $(\eta_P)_U(u) \colon U \to \Lambda_P$ となる．

命題 15. $(\eta_P)_U(u) = \mu_{\langle U,u\rangle}$ である．

証明. $\eta \colon \mathrm{id} \Rightarrow F^\dagger y \circ y^\dagger F$ が自然変換だから

$$\begin{tikzcd} y(U) \arrow[r, "\eta_{y(U)}"] \arrow[d, "u"'] & F^\dagger y(y^\dagger F(y(U))) \arrow[d, "F^\dagger y(y^\dagger F(u))"] \\ P \arrow[r, "\eta_P"'] & F^\dagger y(y^\dagger F(P)) \end{tikzcd}$$

が可換である．ここで $y^\dagger F \circ y \cong F$ と μ の定義を使えば

$$\begin{tikzcd} y(U) \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & F^\dagger y(F(U)) \arrow[d, "F^\dagger y(\mu_{\langle U,u\rangle})"] \\ P \arrow[r, "\eta_P"'] & F^\dagger y(y^\dagger F(P)) \end{tikzcd}$$

を得る．この可換図式の U 成分を考えれば

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U,U) \arrow[r] \arrow[d, "u_U"'] & \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U,U) \mid F(U) \circ s = F(U)\} \arrow[d, "\mu_{\langle U,u\rangle} \circ -"] \\ P(U) \arrow[r, "(\eta_P)_U"'] & \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U,\Lambda_P) \mid p \circ s = F(U)\} \end{tikzcd}$$

が可換となる．ここで $F(U)\circ s = F(U)$ となる $s\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U,U)$ は $s=\mathrm{id}_U$ しか存在しないから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U,U) \arrow[r] \arrow[d, "u_U"'] & \{\mathrm{id}_U\} \arrow[d, "\mu_{\langle U,u\rangle}\circ -"] \\
P(U) \arrow[r, "(\eta_P)_U"'] & \{k\in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U,\Lambda_P)\mid p\circ k = F(U)\}
\end{tikzcd}$$

を得る．よって $\mathrm{id}_U \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U,U)$ の行き先を考えれば $(\eta_P)_U(u) = \mu_{\langle U,u\rangle}$ である． □

従って特に $x\in U$ に対して $(\eta_P)_U(u)(x) = u_x$ となる．

この η を使うと，層の条件を次のように言い換えることができる．

命題 16. 前層 $P\in\widehat{\mathcal{O}_X}$ に対して

$$P \text{ が層} \iff \eta_P\colon P\to F^\dagger y(y^\dagger F(P)) \text{ が同型}.$$

証明．($\Longrightarrow$) P を層，$U\in\mathcal{O}_X$ としてまず $(\eta_P)_U$ が単射であることを示す．そのために $u,v\in P(U)$ に対して $(\eta_P)_U(u) = (\eta_P)_U(v)$ とする．即ち $x\in U$ とすると $u_x = v_x$ である．これは各 $x\in U$ に対して開近傍 $U^x\ni x$ を上手くとると $u|_{U^x} = v|_{U^x}$ となることを意味する．この $\{U^x\}_{x\in U}$ は U の開被覆であり，P が層だから $u=v$ である．

次に $(\eta_P)_U$ が全射であることを示す．そのために $s\in\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U,\Lambda_P)$ が $p\circ s = F(U)$ を満たすとする．$x\in U$ とすると $s(x)\in P_x$ だから，ある開近傍 $U^x\ni x$ と $u^x\in P(U^x)$ が存在して $s(x) = (u^x)_x$ と書ける．このとき $\mu_{\langle U^x,u^x\rangle}(U^x)\subset\Lambda_P$ が開集合だから s の連続性により $V^x := s^{-1}(\mu_{\langle U^x,u^x\rangle}(U^x))\subset U$ は x の開近傍である．よって $\{V^x\}_{x\in U}$ は U の開被覆であるが，これは $x,x'\in U$ に対して $u^x|_{V^x\cap V^{x'}} = u^{x'}|_{V^x\cap V^{x'}}$ を満たす．

$\because$) まず $z\in V^x$ とする．定義より $s(z)\in\mu_{\langle U^x,u^x\rangle}(U^x)$ である．よって $w\in U^x$ が存在して $\mu_{\langle U^x,u^x\rangle}(w) = s(z)$ と書ける．ここで $p\circ s = F(U)$，$p\circ\mu_{\langle U^x,u^x\rangle} = F(U^x)$

だったから $w = z$ が分かる．よって $s(z) = \mu_{\langle U^x, u^x \rangle}(z) = (u^x)_z$ である．

$$
\begin{tikzcd}
 & U^x \arrow[dd, "F(U^x)"'] \arrow[dr, "\mu_{\langle U^x, u^x \rangle}"] & \\
U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "F(U)"'] & & \Lambda_P \arrow[dl, "p"] \\
 & X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & w \arrow[dd, mapsto, "F(U^x)"'] \arrow[dr, mapsto, "\mu_{\langle U^x, u^x \rangle}"] & \\
z \arrow[rr, mapsto, "s"] \arrow[dr, mapsto, "F(U)"'] & & s(z) \arrow[dl, mapsto, "p"] \\
 & z &
\end{tikzcd}
$$

従って任意の $z \in V^x \cap V^{x'}$ に対して $(u^x)_z = s(z) = (u^{x'})_z$ となるから，上の単射性の議論を使えば $u^x|_{V^x \cap V^{x'}} = u^{x'}|_{V^x \cap V^{x'}}$ が分かる．

今 P が層だから，$u \in P(U)$ が存在して任意の $x \in U$ に対して $u|_{V^x} = u^x|_{V^x}$ である．このとき $x \in U$ に対して $(\eta_P)_U(u)(x) = u_x = (u^x)_x = s(x)$ となるから $(\eta_P)_U(u) = s$ である．

($\Longleftarrow$) 上記と同様の議論により，$(\eta_P)_U$ の全単射性から層の条件が従う． $\square$

従って $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ の counit を ε としたとき

$$f \in \mathbf{Top}/X \text{ がエタール束 (etale bundle)} \iff \varepsilon_f \colon y^\dagger F(F^\dagger y(f)) \to f \text{ が同型}$$

と定義して，$\mathrm{Sh}(X) \subset \widehat{\mathcal{O}_X}$ を層がなす充満部分圏，$\mathrm{Etale}(X) \subset \mathbf{Top}/X$ をエタール束がなす充満部分圏とすれば，随伴関手の一般論より次の定理が得られる．

定理 17. 圏同値 $\mathrm{Sh}(X) \simeq \mathrm{Etale}(X)$ が成り立つ． $\square$

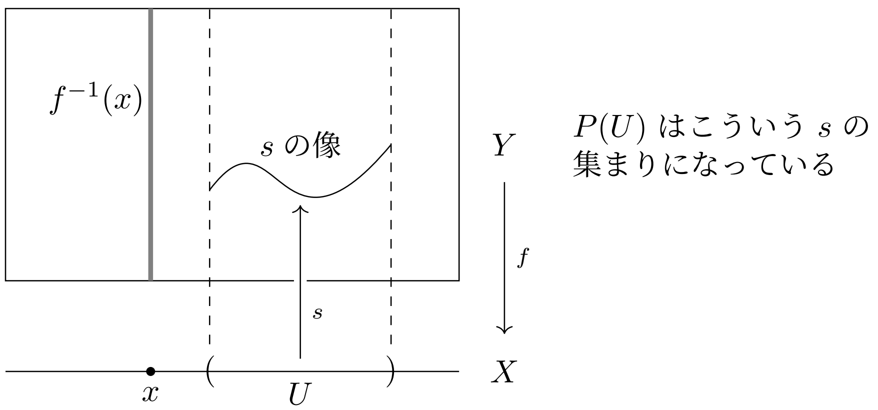
こうして X 上の層とはエタール束 (つまり特別な連続写像 $Y \to X$ のこと) として理解することができる．

※ この圏同値で X 上の層 P に対応するエタール束 $f \colon Y \to X$ を取ると，これは $P \cong F^\dagger y(f)$ となるが (10) で見たように

$$P(U) \cong \{ s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, Y) \mid f \circ s = F(U) \}$$

である．つまり絵で描くと次のようになっており，層というのはまさに「層」をなし

ていると言える．



命題 18. $f \in \mathbf{Top}/X$ に対して $F^\dagger y(f) \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ は X 上の層である．

証明. (10) により $F^\dagger y(f)$ が層の条件を満たすことが容易に分かる． $\square$

故に命題 16 より $\eta_{F^\dagger y}$ は自然同型である．即ち随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ は冪等随伴である (「随伴関手」の PDF を参照)．従って包含関手 $\mathrm{Sh}(X) \to \widehat{\mathcal{O}_X}$ は左随伴 L を持つ．これは $L := F^\dagger y \circ y^\dagger F$ で与えられる．この L を層化関手 (sheafification functor) といい，前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ に対して LP を P の層化 (sheafification) という．言い換えると，P の層化とは $Q \in \mathrm{Sh}(X)$ について自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(X)}(LP, Q) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{O}_X}}(P, Q)$ が存在するような層 LP のことである．随伴関手の一般論によれば LP は次のような普遍性を持つ．

命題 19. $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$，$Q \in \mathrm{Sh}(X)$ として $\theta \colon P \Rightarrow Q$ を自然変換とする．このとき自然変換 $\tau \colon LP \Rightarrow Q$ が一意に存在して $\tau \circ \eta_P = \theta$ となる．

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\eta_P"] \arrow[dr, "\theta"'] & LP \arrow[d, dashed, "\tau"] \\ & Q \end{tikzcd}$$

$\square$

例 20. X を位相空間，A を集合として，P を A に値を取る定数関数がなす前層とする．即ち $U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$P(U) := \{ s \colon U \to A \mid s \text{ は定数関数 } \} \cong A$$

と定める (これが一般に層とは限らないことは前の PDF「例: 位相空間上の層」で述べ

た)．この前層 P の層化 $LP = F^\dagger y(y^\dagger F(P))$ を定数層 (constant sheaf) という．これを計算しよう．

まず上で計算した通り，$U \in \mathcal{O}_X$ に対して

$$LP(U) \cong \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, \Lambda_P) \mid p \circ s = F(U)\}$$

である．ここで $\Lambda_P = \coprod_{x \in X} P_x$ であるが，$x \in X$ に対して

$$P_x \cong \operatorname*{colim}_{U \ni x} P(U) \cong \operatorname*{colim}_{U \ni x} A \cong A$$

となる．ここでこの同型は $P_x \ni s_x \mapsto s \in A$ で与えられる．故に $\Lambda_P \cong A \times X$ である．そこで $\Lambda_P = A \times X$ と見なしたとき，Λ_P の位相は $\{\{a\} \times U \mid a \in A,\ U \in \mathcal{O}_X\}$ で生成されるものとなる．即ち A に離散位相を入れれば，位相空間として $\Lambda_P \cong A \times X$ である．また $p \colon \Lambda_P \to X$ は標準射影 $\pi_X \colon A \times X \to X$ となる．故に

$$LP(U) \cong \{s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, A \times X) \mid \pi_X \circ s = F(U)\}$$

となる．$s \in LP(U)$ に対して $k := \pi_A \circ s \colon U \to A$ と定める．この k は次の条件を満たす．

$$\text{任意の } x \in U \text{ に対してある開近傍 } x \in V \subset U \text{ が存在して } k \text{ は } V \text{ 上定数関数} \tag{21}$$

$\because$) $a := k(x) \in A$ に対して $V := k^{-1}(\{a\}) \subset U$ と定める．定義より $k \colon U \to A$ は連続である．故に V は開集合である．

逆に写像 $k \colon U \to A$ が条件 (21) を満たすとする．このとき $x \in U$ に対して $s(x) := \langle k(x), x \rangle \in A \times X$ と定めれば $s \in LP(U)$ である．

$\because$) 条件 (21) より $k \colon U \to A$ は連続である．故に $s \colon U \to A \times X$ は直積の普遍性から得られる **Top** の射であり，従って $s \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(U, A \times X)$ である．定義から明らかに $\pi_X \circ s = F(U)$ となるので $s \in LP(U)$ である．

従って LP は「局所的に定数となっている関数」がなす層になっていると言える． □

命題 22. 層化は茎を保つ．即ち $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$，$x \in X$ に対して $P_x \cong (LP)_x$ である．

証明. 自然変換 $(\mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*)\eta \colon \mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \Rightarrow \mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^* \circ L$ を考える．これの $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ 成分は $P_x \to (LP)_x$ である．故にこの $(\mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*)\eta$ が自然同型であることを示せばよい．そのためには命題 13 より $T_x \circ y^\dagger F \cong \mathrm{ev}_{\{x\}} \circ i_x^*$ だったから $(y^\dagger F)\eta$ が自然同型であることを示せばよいが，それは $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が冪等随伴であることから成り立つ． □

命題 23. 連続写像 $f\colon Y \to X$ に対して次の条件は同値である．

(1) f はエタール束である．

(2) ある $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ が存在して $y^\dagger F(P) \cong f$ となる．

(3) 任意の $a \in Y$ に対してある開近傍 $O \ni a$ が存在して，$f(O) \subset X$ が開集合かつ $f|_O\colon O \to f(O)$ が同相となる[*2]．

証明．$(1 \Longrightarrow 2)$ $P := F^\dagger y(f)$ とすればよい．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 条件 (2) よりある $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ が存在して $f \cong y^\dagger F(P)$ と書ける．即ち同相写像 $h\colon Y \to \Lambda_P$ が存在して

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & \Lambda_P \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

が可換となる．

条件 (3) を示すため任意の $a \in Y$ を取る．$h(a) \in \Lambda_P = \coprod_{x \in X} P_x$ だから $x := f(a)$ とすれば，ある $U \ni x$ と $u \in P(U)$ が存在して $h(a) = u_x$ と書ける．このとき $O' := \mu_{\langle U,u\rangle}(U)$ は $h(a)$ の開近傍である．また $p(O') = U$ であり $p|_{O'}\colon O' \to U$ は同相となる．よって $O := h^{-1}(O')$ は a の開近傍であり $f|_O\colon O \to f(O)$ は同相である．

$(3 \Longrightarrow 1)$ f が条件 (3) を満たすとして $\varepsilon_f\colon y^\dagger F(F^\dagger y(f)) \to f$ が同型であることを示す．

まず準備のため，$\mathbf{Top}/X$ の射 $s\colon F(U) \to f$ を取る．F は明らかに忠実充満だから定理 2 より $F^\dagger y(F(U)) \cong y(U)$ である．これと $F^\dagger y(s)\colon F^\dagger y(F(U)) \Rightarrow F^\dagger y(f)$ を組み合わせて得られる自然変換を $\theta\colon y(U) \Rightarrow F^\dagger y(f)$ とする．即ち θ_U は合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(U,U) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F(U),F(U)) \xrightarrow{s\circ-} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}/X}(F(U),f)$$

で与えられる射である．よって θ は米田の補題により s に対応する自然変換である．そこ

[*2] 通常エタール束はこの条件により定義される．

で以下 θ と s を同一視してどちらも s で表す．このとき次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
F(U) \arrow[r, "\cong"] \arrow[rrr, bend left, "\mathrm{id}_{F(U)}"] \arrow[drr, bend right, "\mu_{\langle U,s\rangle}"'] & y^\dagger F(y(U)) \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "y^\dagger F(s)"'] \arrow[r, phantom, bend left=60, "(0)"] & y^\dagger F(F^\dagger y(F(U))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(U)}"] \arrow[d, "y^\dagger F(F^\dagger y(s))"] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & F(U) \arrow[d, "s"] \\
\arrow[ur, phantom, "(1)"] & \arrow[u, phantom, "(2)"] & y^\dagger F(F^\dagger y(f)) \arrow[r, "\varepsilon_f"'] & f
\end{tikzcd}$$

$\mathbf{Top}/X$ の射 $F(U) \to F(U)$ は id しかないから (0) は可換である．(1) は μ の定義より可換である．(2) は $\theta = s$ の定義より可換である．(3) は ε が自然変換であるから可換である．従って $s\colon F(U) \to f$ に対して

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mu_{\langle U,s\rangle}"] \arrow[rr, bend left, "s"] \arrow[dr, "F(U)"'] & \Lambda_{F^\dagger y(f)} \arrow[r, "\varepsilon_f"] \arrow[d, "p"] & Y \arrow[dl, "f"] \\
& X &
\end{tikzcd} \tag{24}$$

が可換となる．故に $x \in U$ に対して $s(x) = \varepsilon_f(s_x)$ である．

さて，ε_f が同型であることを示そう．まず ε_f は単射である．

$\because$) $e, e' \in \Lambda_{F^\dagger y(f)}$ が $\varepsilon_f(e) = \varepsilon_f(e')$ を満たすとする．

$$p(e) = f \circ \varepsilon_f(e) = f \circ \varepsilon_f(e') = p(e')$$

だから，$x := p(e)$ とすればある開近傍 $U, V \ni x$ と $s \in F^\dagger y(f)(U)$，$t \in F^\dagger y(f)(V)$ により $e = s_x = \mu_{\langle U,s\rangle}(x)$，$e' = t_x = \mu_{\langle V,t\rangle}(x)$ と書ける．このとき (24) の直後に述べたことから $x \in U \cap V$ に対して $s(x) = \varepsilon_f(s_x) = \varepsilon_f(t_x) = t(x)$ である．即ち $s|_{U\cap V} = t|_{U\cap V}$ だから $e = s_x = t_x = e'$ となる．

ε_f は全射である．

$\because$) 任意の $a \in Y$ を取る．このとき条件 (3) を満たす開近傍 $O \ni a$ が存在する．$f|_O$ が同相だから $s := (f|_O)^{-1}\colon f(O) \to Y$ が定まる．このとき $x := f(a)$ と定めれば (24) より $\varepsilon_f(\mu_{\langle U,u\rangle}(x)) = s(x) = (f|_O)^{-1}(x) = a$ である．

$h\colon Y \to \Lambda_P$ は開写像である．

$\because$) $U, V \in \mathcal{O}_X$，$V \subset U$，$s \in F^\dagger y(f)(U)$ を取る．$\varepsilon_f(\mu_{\langle U,s\rangle}(V)) = s(V)$ が Y の開

集合であることを示せばよい．まず s は

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "F(U)"'] & & Y \arrow[dl, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

を可換にする射である．任意の $a \in s(V)$ を取る．このとき条件 3 を満たす開近傍 $O \ni a$ が存在する．このとき $O' := O \cap f^{-1}(V)$ とすれば $a \in O' \subset s(V)$ は Y の開集合である．

以上により ε_f は同型である．□

参考文献

[1] S. Mac Lane and I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer (1992), 第 II 章