ココンマ圏と profunctor

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2024 年 12 月 24 日

これまで見てきた通り，圏論ではコンマ圏が非常に重要な役割を果たす．そうすると気になるのは，コンマ圏の双対となる「ココンマ圏」は存在するのであろうか，ということである．

定義. 圏 C の図式 $a \leftarrow c \rightarrow b$ を a から b への span という．双対的に，図式 $a \rightarrow c \leftarrow b$ を a から b への cospan という．

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a から b への span がなす圏 $\mathrm{Span}_C(a, b)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}_C(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle k, l\rangle \in \mathrm{Span}_C(a, b)$ とする．$c := \mathrm{dom}(f)$，$d := \mathrm{dom}(k)$ とする．$\langle f, g\rangle$ から $\langle k, l\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to d$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
a & & b \\
& d \arrow[ul, "k"'] \arrow[ur, "l"] & \\
& c \arrow[u, "h"] \arrow[uul, bend left, "f"] \arrow[uur, bend right, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

圏 C が文脈から明らかな場合は添え字を省略して単に $\mathrm{Span}(a, b)$ と書く．また同様にして cospan がなす圏 $\mathrm{Cospan}_C(a, b)$ が以下のように定まる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Cospan}_C(a, b)) := \{\langle f, g\rangle \in \mathrm{Mor}(C)^2 \mid c \in C,\ a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g\rangle, \langle k, l\rangle \in \mathrm{Cospan}_C(a, b)$ とする．$c := \mathrm{cod}(f)$，$d := \mathrm{cod}(k)$ とする．$\langle f, g\rangle$ か

ら $\langle k, l\rangle$ への射は，次の図式を可換とする射 $h\colon c \to d$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & d & \\
 & c \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "f"'] \arrow[uur, bend left, "k"] & & b \arrow[ul, "g"] \arrow[uul, bend right, "l"']
\end{tikzcd}
$$

ここでは小圏の圏 **Cat** における span，cospan を考える．

$A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ を **Cat** の cospan としたとき，コンマ圏 $G{\downarrow}F$ は span $A \leftarrow G{\downarrow}F \to B$ を与えるのであった[*1]．

命題 1. コンマ圏を取る操作は関手 $\downarrow\colon \mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ を与える．

証明． $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$，$A \xrightarrow{K} D \xleftarrow{L} B$ を cospan，$H\colon \langle F, G\rangle \to \langle K, L\rangle$ を $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射とする．このとき関手 ${\downarrow}H\colon G\downarrow F \to L\downarrow K$ をコンマ圏の普遍性により定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & D & \\
A \arrow[ur, bend left, "K"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "L"'] \\
 & L\downarrow K \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & G\downarrow F \arrow[u, dashed, "{\downarrow}H"] \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \\
 & G\downarrow F \arrow[ul, bend left, "P_1"] \arrow[ur, bend right, "P_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

普遍性により，これは明らかに関手 $\downarrow\colon \mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ を与える． □

そこで，もしこの関手が左随伴を持つとすると，それが「ココンマ圏を与える関手」であるとみなすことができる．というのも「コンマ圏の普遍性」の双対バージョン (定理 2) が成り立つからである．

それを説明するため，関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow\colon \mathrm{Span}(A, B) \to \mathrm{Cospan}(A, B)$ を持つとして，その unit を η とする．$A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ を span とすると $\uparrow\langle F, G\rangle$ は cospan であるから，それを $A \xrightarrow{Q_0} F\uparrow G \xleftarrow{Q_1} B$ と書くと，これのコンマ圏を考えることができる．このとき

[*1] 後の構成の都合上，$F\downarrow G$ ではなく $G\downarrow F$ を考える．ここを $F\downarrow G$ に変えた場合は，後で出てくる $\mathbf{Prof}(A, B)$ が $\mathbf{Prof}(B, A)$ になる．

$S := \eta_{\langle F,G\rangle}$ は $\mathrm{Span}(A,B)$ の射 $C \to Q_1 \downarrow Q_0$ (次の図式の点線の射) のことである (ここで P_0, P_1, θ はコンマ圏 $Q_1 \downarrow Q_0$ から得られる関手と自然変換である).

$$
\begin{tikzcd}
& A \arrow[r, "Q_0"] & F \uparrow G \\
& Q_1 \downarrow Q_0 \arrow[u, "P_1"'] \arrow[r, "P_0"] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \theta"] & B \arrow[u, "Q_1"'] \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, dashed, "S"'] \arrow[urr, bend right, "G"'] & &
\end{tikzcd}
$$

これらを合成して得られる自然変換を $\kappa\colon Q_1G \Rightarrow Q_0F$ とする.

定理 2. 関手 $\downarrow$ が左随伴 $\uparrow\colon \mathrm{Span}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ を持つとする. このとき上のように定義した図式

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "Q_0"] & F \uparrow G \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \kappa"] & B \arrow[u, "Q_1"']
\end{tikzcd}
$$

は以下の普遍性を満たす. X を圏, $R_0\colon A \to X$, $R_1\colon B \to X$ を関手, $\beta\colon R_1G \Rightarrow R_0F$ を自然変換とする.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R_0"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \beta"] & B \arrow[u, "R_1"']
\end{tikzcd}
$$

このとき関手 $H\colon F \uparrow G \to X$ が一意に存在して以下を満たす.

(1) $HQ_0 = R_0$, $HQ_1 = R_1$ である.
(2) 次の自然変換の等式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
& & X \\
A \arrow[r, "Q_0"] \arrow[urr, bend left, "R_0"] & F \uparrow G \arrow[ur, dashed, "H"'] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \kappa"] & B \arrow[u, "Q_1"'] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& & X \\
A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \beta"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明．まず H の存在を示す．そのためにコンマ圏 $R_1\downarrow R_0$ を取り，そこから得られる関手と自然変換を P_0', P_1', θ' とする．普遍性により次の図式の点線の関手 $M\colon C\to R_1\downarrow R_0$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A & & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[ur, dashed, "M"'] \arrow[uur, phantom, "=", pos=0.3] \arrow[urr, phantom, "=", pos=0.6] & & &
\arrow[from=2-2, to=1-4, bend left, "R_0"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A & & \\
 & & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\beta"] & \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & & &
\arrow[from=2-2, to=1-4, bend left, "R_0"]
\end{tikzcd}
$$

このとき随伴 $\mathrm{Hom}(\uparrow\langle F,G\rangle,\langle R_0,R_1\rangle)\cong\mathrm{Hom}(\langle F,G\rangle,\downarrow\langle R_0,R_1\rangle)$ により，M の随伴射となる関手 $H\colon F\uparrow G\to X$ が取れる．これが条件 (1)(2) を満たすことを示す．

まず条件 (1) は，定義より H が $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射であるからよい．条件 (2) を示そう．随伴の unit の性質から $\downarrow H\circ S=M$ が成り立つ．従って

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A & & \\
 & & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\beta"] & \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] & & &
\arrow[from=2-2, to=1-4, bend left, "R_0"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A & & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[ur, "M"'] \arrow[uur, phantom, "=", pos=0.3] \arrow[urr, phantom, "=", pos=0.6] & & &
\arrow[from=2-2, to=1-4, bend left, "R_0"]
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A & & \\
 & & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "\downarrow H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[uur, phantom, "=", pos=0.6] \arrow[urr, phantom, "=", pos=0.6] & & & \\
C \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[ur, "S"'] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] \arrow[uuurr, phantom, "=", pos=0.3] \arrow[uurrr, phantom, "=", pos=0.35] & & & &
\arrow[from=2-3, to=1-5, bend left, "R_0"]
\end{tikzcd}
$$

$$
=\quad
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta"] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & & \\
 C \arrow[ur, "S"'] \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=\quad
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[urr, bend left, "R_0"] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[urr, bend right, "G"'] \arrow[uur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & & &
\end{tikzcd}
$$

となり条件 (2) が成り立つ．

後は H の一意性を示せばよい．H が条件 (1)(2) を満たすとすると H は $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射 $F\uparrow G \to X$ だから，随伴射 $M\colon C \to R_1\downarrow R_0$ が取れる．従ってこの M が一意であることを示せばよい．再び unit の性質から，これは $\downarrow H \circ S = M$ を満たす．故に

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & & \\
 & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
 C \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, "M"'] \arrow[urr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}
\quad=\quad
\begin{tikzcd}
 & & & & X \\
 & & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & & \\
 & & R_1\downarrow R_0 \arrow[u, "P_1'"'] \arrow[r, "P_0'"] & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta'"] & \\
 & Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "\downarrow H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & & \\
 C \arrow[ur, "S"'] \arrow[uuurr, bend left, "F"] \arrow[uurrr, bend right, "G"'] & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, "Q_0"'] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\theta"] & \\
 Q_1\downarrow Q_0 \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & & \\
 C \arrow[uuur, bend left, "F"] \arrow[u, "S"'] \arrow[uurr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] \arrow[r, "Q_0"'] & F\uparrow G \arrow[ur, "H"'] & \\
 & & B \arrow[u, "Q_1"] \arrow[uur, bend right, "R_1"'] & \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\kappa"] & & \\
 C \arrow[uuur, bend left, "F"] \arrow[uurr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & & X \\
 & A \arrow[urr, bend left, "R_0"] & & \\
 & & B \arrow[uur, bend right, "R_1"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\beta"] & \\
 & & & \\
 C \arrow[uuur, bend left, "F"] \arrow[uurr, bend right, "G"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

となるから，$R_1 \downarrow R_0$ の普遍性により M は一意である． $\square$

そこで問題は$\downarrow$: $\mathrm{Cospan}(A, B) \to \mathrm{Span}(A, B)$ が左随伴を持つか，ということになる．答えは存在する，であるが，これを構成するために profunctor というものを導入する．

定義． C, D を圏とする．C から D への profunctor (もしくは distributor もしくは correspondence もしくは bimodule) とは関手 $P\colon C \to \widehat{D}$ のことである．profunctor を記号 $P\colon C \nrightarrow D$ などで表す．

自然同型 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A\times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, C^B)$ により，profunctor $P\colon C \nrightarrow D$ 即ち関手 $P\colon C \to \widehat{D}$ と関手 $P\colon D^{\mathrm{op}}\times C \to \mathbf{Set}$ を同一視することができる．以下, 特に断らずこの同一視を行う．また C から D への profunctor がなす圏を $\mathbf{Prof}(C,D) := \mathbf{Set}^{D^{\mathrm{op}}\times C}$ で定める．

定義． $P\colon A \nrightarrow B$, $Q\colon B \nrightarrow C$ に対して profunctor の合成 $Q\otimes P\colon A \nrightarrow C$ を関手 $(y^\dagger Q)\circ P\colon A \to \widehat{C}$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{B} \arrow[r, "y^\dagger Q"] & \widehat{C} \\
A \arrow[ur, "P"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "Q"'] &
\end{tikzcd}$$

圏 C に対して米田埋込 $y\colon C \to \widehat{C}$ が定める profunctor を $\mathrm{id}_C\colon C \nrightarrow C$ で表す．米田埋込と左 Kan 拡張の性質から容易に分かるように $P\colon C \nrightarrow D$ に対して $P\otimes \mathrm{id}_C \cong P$, $\mathrm{id}_D \otimes P \cong P$ である．

命題 3. $P\colon A \nrightarrow B$, $Q\colon B \nrightarrow C$ を profunctor とするとき，$a\in A$ に対して

$$Q\otimes P(a) \cong \int^{b\in B} P(b,a)\times Q(-,b).$$

証明． $X \in \widehat{B}$ に対して $y^\dagger Q(X) \cong \displaystyle\int^{b\in B} \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}(y(b), X)\times Qb \cong \int^{b\in B} Xb\times Qb$ であるから $Q\otimes P(a) = y^\dagger Q(Pa) \cong \displaystyle\int^{b\in B} Pa(b)\times Qb = \int^{b\in B} P(b,a)\times Q(-,b).$ □

$F\colon C\to D$ を関手とする．このとき profunctor $F_*\colon C \nrightarrow D$, $F^*\colon D \nrightarrow C$ が

$$F_*(d,c) := \mathrm{Hom}_D(d, Fc), \quad F^*(c,d) := \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$$

により定まる．つまり $F_*(c) = y\circ F(c) = F^{-1}y(c)$, $F^*(d) \cong F^\dagger y(d)$ である．

そこで cospan $A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B$ に対して profunctor $A \nrightarrow B$ が $G^*\otimes F_*$ により得られる．これは

$$G^*\otimes F_* \cong (G^\dagger y)\otimes (y\circ F) \cong y^\dagger(G^\dagger y)\circ y\circ F$$

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger(G^\dagger y)"] & \\
& C \arrow[ur, "y"] \arrow[rr, "G^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F"] & & B \arrow[ul, "G"'] \arrow[ur, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

となる．ここで y が忠実充満より $y^\dagger(G^\dagger y)\circ y \cong G^\dagger y$ となるから $G^* \otimes F_* \cong (G^\dagger y)\circ F$ が分かる．そこで $\Phi\langle F, G\rangle := (G^\dagger y)\circ F$ と定める．各点左 Kan 拡張の性質から，$a \in A$ に対して

$$
\Phi\langle F, G\rangle(a) = G^\dagger y(Fa) \cong \mathrm{Hom}_C(G-, Fa)
$$

となる．

命題 4. $\Phi\colon \mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathbf{Prof}(A,B)$ は関手となる．

証明. $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射 $H\colon \langle F, G\rangle \to \langle K, L\rangle$ (次の図式を参照) を取る．

$$
\begin{tikzcd}
& D & \\
& C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] & & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"']
\end{tikzcd}
$$

ここで自然変換 τ^H を，左 Kan 拡張 $G^\dagger y$ の普遍性により，次の等号が成り立つように取る．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "L^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau^H"] & & \widehat{B} \\
C \arrow[u, "H"] \arrow[urr, "G^\dagger y"'] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & & \\
& B \arrow[ul, "G"] \arrow[uur, "y"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C \arrow[u, "H"] \arrow[r, phantom, "="] & \arrow[r, phantom, "\Uparrow"] & \\
& B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[uur, "y"'] &
\end{tikzcd}
$$

この τ^H を使って自然変換 $\Phi(H)\colon \Phi\langle F, G\rangle \Rightarrow \Phi\langle K, L\rangle$ が得られる．

$$
\Phi(H) \quad := \quad
\begin{tikzcd}
& D \arrow[rr, "L^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\tau^H"] & & \widehat{B} \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[urr, "G^\dagger y"'] & & \\
A \arrow[ur, "F"'] \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[u, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

これにより Φ が関手になることを示せばよい．

まず $H = \mathrm{id}$ の場合は $G = L$ となるから $G^\dagger y = L^\dagger y$ であり，故に $\tau^{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ となるから $\Phi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である．故に Φ が合成と交換することを示せばよい．そこで H, H' を次の図式のような $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射とする．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_2 & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"'] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"'] & \\
A \arrow[uuur, bend left, "S"] \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[ur, "F"'] & & B \arrow[uuul, bend right, "T"'] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[ul, "G"]
\end{tikzcd}
$$

このとき τ の定義より

$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \tau^{H'H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & & \\
 & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, "="] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, "="] & & \\
 & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[uuul, bend right, "T"'] \arrow[uur, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \tau^{H'}"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, "="] & & \\
 & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[uur, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \tau^{H'}"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \tau^{H}"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & & \\
 & B \arrow[ul, "G"] \arrow[uur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

となるから，左 Kan 拡張 $G^\dagger y$ の普遍性により

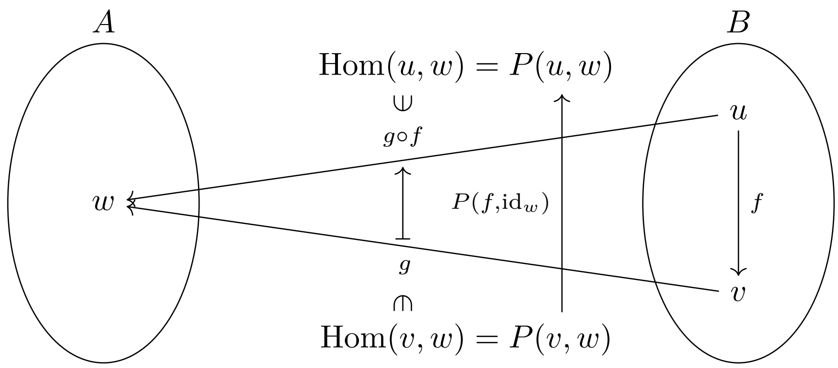
$$
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \tau^{H'}"] \arrow[rr, "L^\dagger y"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \tau^{H}"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[rrd, "T^\dagger y"] & & \\
C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \tau^{H'H}"] & & \widehat{B} \\
C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[rru, "G^\dagger y"] & &
\end{tikzcd}
$$

となるので $\Phi(H'H) = \Phi(H')\Phi(H)$ が分かる． $\square$

逆に profunctor $P\colon A \nrightarrow B$ に対して cospan $\Sigma(P) = (A \xrightarrow{F_P} C_P \xleftarrow{G_P} B)$ を以下のように定義することができる．まず圏 C_P を次により定める．

- $\mathrm{Ob}(C_P) := \mathrm{Ob}(A) \sqcup \mathrm{Ob}(B)$.
- $\mathrm{Hom}_{C_P}(u,v) := \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(u,v) & (u, v \in A \text{ のとき}) \\ \mathrm{Hom}_B(u,v) & (u, v \in B \text{ のとき}) \\ \emptyset & (u \in A,\ v \in B \text{ のとき}) \\ P(u,v) & (u \in B,\ v \in A \text{ のとき}) \end{cases}$
- 射 $f\colon u \to v$, $g\colon v \to w$ の合成 $g \circ f$ を次で定める．

$$g \circ f := \begin{cases} g \circ f & (u, v, w \in A \text{ のとき}) \\ g \circ f & (u, v, w \in B \text{ のとき}) \\ P(f, \mathrm{id}_w)(g) & (u, v \in B,\ w \in A \text{ のとき．下図参照}) \\ P(\mathrm{id}_u, g)(f) & (u \in B,\ v, w \in A \text{ のとき}) \end{cases}$$



関手 $F_P\colon A \to C_P$, $G_P\colon B \to C_P$ を標準的な埋込とすれば $\Sigma(P) \in \mathrm{Cospan}(A, B)$ である．

命題 5. $\Sigma\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ は関手となる．

証明. $\mathbf{Prof}(A,B)$ の射 $\theta\colon P \Rightarrow Q$ に対して $\mathrm{Cospan}(A,B)$ の射 $\Sigma(\theta)\colon \Sigma(P) \to \Sigma(Q)$, 即ち次の図式が可換となるような関手 $\Sigma(\theta)$ を定めたい．

$$\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
 & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] & \\
A \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[uur, bend left, "F_Q"] & & B \arrow[ul, "G_P"] \arrow[uul, bend right, "G_Q"']
\end{tikzcd}$$

そのためには対象 $a \in A$，$b \in B$ に対して写像 $\Sigma(\theta)\colon \mathrm{Hom}_{C_P}(b,a) \to \mathrm{Hom}_{C_Q}(b,a)$ をうまく定めればよい．Hom_{C_P} の定義から $\Sigma(\theta) := \theta_{ba}\colon P(b,a) \to Q(b,a)$ と定義することができる．これにより $\Sigma(\theta)$ は関手になる．

∵) 定義から $\Sigma(\theta)(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかである．従って $f\colon u \to v$，$g\colon v \to w$ としたときに $\Sigma(\theta)(g \circ f) = \Sigma(\theta)(g) \circ \Sigma(\theta)(f)$ となることを示せばよい．

(i) $u, v, w \in A$ または $u, v, w \in B$ の場合，明らか

(ii) $u, v \in B$，$w \in A$ の場合，定義から

$$\Sigma(\theta)(g \circ f) = \theta_{uw}(g \circ f), \quad \Sigma(\theta)(g) = \theta_{vw}(g), \quad \Sigma(\theta)(f) = f$$

であり，一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g \circ f) = \theta_{vw}(g) \circ f$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
P(u,w) \arrow[r, "\theta_{uw}"] & Q(u,w) \\
P(v,w) \arrow[u, "P(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, "\theta_{vw}"'] & Q(v,w) \arrow[u, "Q(f,\mathrm{id}_w)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g \circ f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uw}"] & \theta_{uw}(g \circ f) \\
 & \theta_{vw}(g) \circ f \\
g \arrow[uu, mapsto, "P(f,\mathrm{id}_w)"] \arrow[r, mapsto, "\theta_{vw}"'] & \theta_{vw}(g) \arrow[u, mapsto, "Q(f,\mathrm{id}_w)"']
\end{tikzcd}$$

(iii) $u \in B$，$v, w \in A$ の場合，定義から

$$\Sigma(\theta)(g \circ f) = \theta_{uw}(g \circ f), \quad \Sigma(\theta)(g) = g, \quad \Sigma(\theta)(f) = \theta_{uv}(f)$$

であり，一方 θ が自然変換だから $\theta_{uw}(g \circ f) = g \circ \theta_{uv}(f)$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
P(u,v) \arrow[r, "\theta_{uv}"] \arrow[d, "P(\mathrm{id}_u,g)"'] & Q(u,v) \arrow[d, "Q(\mathrm{id}_u,g)"] \\
P(u,w) \arrow[r, "\theta_{uw}"'] & Q(u,w)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uv}"] \arrow[dd, mapsto, "P(\mathrm{id}_u,g)"'] & \theta_{uv}(f) \arrow[d, mapsto, "Q(\mathrm{id}_u,g)"] \\
 & g \circ \theta_{uv}(f) \\
g \circ f \arrow[r, mapsto, "\theta_{uw}"'] & \theta_{uw}(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

以上により $\Sigma(\theta)$ は関手であることが分かった．

これにより Σ が関手になることを示す．Σ の定義より $\Sigma(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかである．そこで $\theta\colon P \Rightarrow Q$，$\sigma\colon Q \Rightarrow R$ に対して $\Sigma(\sigma \circ \theta) = \Sigma(\sigma) \circ \Sigma(\theta)$ を示す．そのためには $a \in A$，$b \in B$ に対して $(\sigma \circ \theta)_{ba} = \sigma_{ba} \circ \theta_{ba}$ を示せばよいが，それは自然変換の合成の定義である． $\square$

命題 6. 随伴 $\Sigma \dashv \Phi\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ が成り立つ．更にこの随伴の unit

は同型である．従って $\Phi \circ \Sigma \cong \mathrm{id}$ である．

証明. 随伴であることを示すため $P \in \mathbf{Prof}(A, B)$，$(A \xrightarrow{F} C \xleftarrow{G} B) \in \mathrm{Cospan}(A, B)$ について自然な全単射

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cospan}(A,B)}(\Sigma(P), \langle F, G\rangle) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(A,B)}(P, \Phi\langle F, G\rangle)$$

を定義する．

まず profunctor $P\colon A \nrightarrow B$ に対して自然同型

$$\Phi(\Sigma(P))(-, \Box) = \Phi\langle F_P, G_P\rangle(-, \Box) \cong \mathrm{Hom}_{C_P}(G_P-, F_P\Box) = P(-, \Box)$$

が成り立つ．この自然同型を $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow \Phi \circ \Sigma$ とする．また，θ を $\mathrm{cod}(\theta) = \Phi\langle F, G\rangle$ なる自然変換としたとき，それと $\Phi\langle F, G\rangle \cong \mathrm{Hom}_C(G-, F\Box)$ を合成して得られる自然変換を $\widetilde{\theta}\colon P \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(G-, F\Box)$ と書くことにする．

$H\colon \Sigma(P) \to \langle F, G\rangle$ を cospan の射としたとき $\varphi(H) := \Phi(H) \circ \eta_P\colon P \Rightarrow \Phi\langle F, G\rangle$ と定める．即ち

$$\varphi(H) \quad := \quad \begin{tikzcd}
 & C \arrow[rd, "G^\dagger y"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\tau^H", shift left=6] & \\
 & C_P \arrow[u, "H"] \arrow[r, "G_P^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta_P"', shift right=4] & \widehat{B} \\
A \arrow[ruu, bend left, "F"] \arrow[ru, "F_P"'] \arrow[ru, phantom, "=", shift left=5] \arrow[rru, bend right, "P"'] & &
\end{tikzcd}$$

である．φ は全単射 $\mathrm{Hom}(\Sigma(P), \langle F, G\rangle) \to \mathrm{Hom}(P, \Phi\langle F, G\rangle)$ を与える．

∵) $a \in A$，$b \in B$ として $f \in P(b, a)$ を取る．即ち $f\colon b \to a$ は C_P の射である．このとき $\tau^H\colon G_P^\dagger y \Rightarrow (G^\dagger y) \circ H$ が自然変換であるから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C_P}(G_P-, b) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f\circ-"'] & G_P^\dagger y(b) \arrow[r, "\tau_b^H"] \arrow[d, "G_P^\dagger y(f)"] & G^\dagger y(Hb) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "G^\dagger y(Hf)"] & \mathrm{Hom}_C(G-, Gb) \arrow[d, "Hf\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_{C_P}(G_P-, a) \arrow[r, "\sim"] & G_P^\dagger y(a) \arrow[r, "\tau_a^H"'] & G^\dagger y(Ha) \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Hom}_C(G-, Fa)
\end{tikzcd}$$

よってこの図式の b 成分を考えると次の可換図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{C_P}(b,b) \arrow[r, "G"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_C(Gb,Gb) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}_{C_P}(b,a) \arrow[r, "\widetilde{\varphi(H)}_{ba}"'] & \mathrm{Hom}_C(Gb,Fa)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_b \arrow[r, mapsto, "G"] \arrow[d, mapsto] & \mathrm{id}_{Gb} \arrow[d, mapsto] \\
f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\varphi(H)}_{ba}"'] & Hf
\end{tikzcd}
$$

従って写像 $\widetilde{\varphi(H)}_{ba}$ は $H\colon P(b,a) \to \mathrm{Hom}_C(Gb,Fa)$ と一致しているから φ は単射である.

全射であることを示す. そのために $\theta\colon P \Rightarrow \Phi\langle F,G\rangle$ を自然変換とする. H を

- 対象 $x \in C_P$ に対して $Hx := \begin{cases} Fx & (x \in A) \\ Gx & (x \in B). \end{cases}$
- 射 $f\colon u \to v$ に対して $Hf := \begin{cases} Ff & (u,v \in A) \\ Gf & (u,v \in B) \\ \widetilde{\theta}_{uv}(f) & (u \in B, v \in A). \end{cases}$

と定義する. この $H\colon C_P \to C$ は関手である.

$\because$) $H(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ は明らかなので $f\colon u \to v$, $g\colon v \to w$ として $H(g \circ f) = Hg \circ Hf$ を示す.

(i) $u,v,w \in A$ または $u,v,w \in B$ の場合, 明らか

(ii) $u,v \in B$, $w \in A$ の場合, 定義から

$$H(g \circ f) = \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f), \quad Hg = \widetilde{\theta}_{vw}(g), \quad Hf = Gf$$

であり, 一方 $\widetilde{\theta}$ が自然変換だから $\widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) = \widetilde{\theta}_{vw}(g) \circ Gf$ である.

$$
\begin{tikzcd}
P(u,w) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{uw}"] & \mathrm{Hom}_C(Gu,Fw) \\
P(v,w) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{vw}"'] \arrow[u, "{P(f,\mathrm{id}_w)}"] & \mathrm{Hom}_C(Gv,Fw) \arrow[u, "-\circ Gf"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
g \circ f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{uw}"] & \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) \\
& \widetilde{\theta}_{vw}(g) \circ Gf \\
g \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{vw}"'] \arrow[uu, mapsto, "{P(f,\mathrm{id}_w)}"] & \widetilde{\theta}_{vw}(g) \arrow[u, mapsto, "-\circ Gf"']
\end{tikzcd}
$$

(iii) $u \in B$, $v,w \in A$ の場合, 定義から

$$H(g \circ f) = \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f), \quad Hg = Fg, \quad Hf = \widetilde{\theta}_{uv}(f)$$

であり，一方 $\widetilde{\theta}$ が自然変換だから $\widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f) = Fg \circ \widetilde{\theta}_{uv}(f)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
P(u,v) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{uv}"] \arrow[d, "P(\mathrm{id}_u, g)"'] & \mathrm{Hom}_C(Gu, Fv) \arrow[d, "Fg\circ -"] \\
P(u,w) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_{uw}"'] & \mathrm{Hom}_C(Gu, Fw)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{uv}"] \arrow[dd, mapsto, "P(\mathrm{id}_u, g)"'] & \widetilde{\theta}_{uv}(f) \arrow[d, mapsto, "Fg\circ -"] \\
 & Fg \circ \widetilde{\theta}_{uv}(f) \\
g \circ f \arrow[r, mapsto, "\widetilde{\theta}_{uw}"'] & \widetilde{\theta}_{uw}(g \circ f)
\end{tikzcd}
$$

以上により H は関手であることが分かった．

このとき明らかに $HF_P = F$，$G_P H = G$ だから H は射 $\Sigma(P) \to \langle F, G\rangle$ である．

$$
\begin{tikzcd}
 & C & \\
 & C_P \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F"] \arrow[ur, "F_P"'] & & B \arrow[uul, bend right, "G"'] \arrow[ul, "G_P"]
\end{tikzcd}
$$

上で示したように $\widetilde{\varphi(H)}_{ba}$ は $H\colon P(b,a) \to \mathrm{Hom}_C(Gb, Fa)$ と一致しているから，H の定義より $\widetilde{\varphi(H)}_{ba} = \widetilde{\theta}_{ba}$ である．故に $\varphi(H) = \theta$ となり φ は全射である．

定義から明らかに φ は自然である．従って随伴 $\Sigma \dashv \Phi$ が成り立つ．φ の定義よりこの随伴の unit は η であり，これは同型である． $\square$

unit が同型だから $\Sigma\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Cospan}(A,B)$ は忠実充満である (「随伴」の PDF を参照).

次に span $A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B$ に対して profunctor $A \nrightarrow B$ が $G_* \otimes F^*$ により得られる．これは各点左 Kan 拡張の一般論により

$$G_* \otimes F^* \cong (yG) \otimes (F^\dagger y) \cong y^\dagger(yG) \circ F^\dagger y \cong F^\dagger(yG)$$

$$
\begin{tikzcd}
 & \widehat{C} \arrow[rr, "y^\dagger(yG)"] & & \widehat{B} \\
A \arrow[ur, "F^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ur, "y"'] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow"] & \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] \arrow[uu, "y"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, "F^\dagger(yG)"] \arrow[r, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C \arrow[ul, "F"] \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

となる．そこで $\Psi\langle F, G\rangle = F^\dagger(yG)$ と定める．

命題 7. $\Psi\colon \mathrm{Span}(A,B) \to \mathbf{Prof}(A,B)$ は関手となる．

証明. $\mathrm{Span}(A,B)$ の射 $H\colon \langle F,G\rangle \to \langle K,L\rangle$ (次の図式を参照) を取る．

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& D \arrow[ul, "K"'] \arrow[ur, "L"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

左 Kan 拡張の普遍性により自然変換 $\Psi(H)\colon \Psi\langle F,G\rangle \Rightarrow \Psi\langle K,L\rangle$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "K^\dagger(yL)", ""{name=U, below}] \arrow[urr, bend right, "F^\dagger(yG)"', ""{name=D}] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& C \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\arrow[Rightarrow, from=D, to=U, "\Psi(H)"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left, "K^\dagger(yL)"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
& D \arrow[ul, "K"] \arrow[ur, "L"'] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

これにより Ψ が関手となることを示そう．

まず明らかに $\Psi(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ である．よって Ψ が合成と交換することを示せばよい．そこで $\mathrm{Span}(A,B)$ の射 H, H' を次の図式のように取る．

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C_2 \arrow[ul, "S"'] \arrow[ur, "T"] & \\
& C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[uul, bend left, "K"] \arrow[uur, bend right, "L"'] & \\
& C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uuul, bend left, "F"] \arrow[uuur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, "K^\dagger(yL)" description] \arrow[urr, bend right=30, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=25, "\Uparrow\Psi(H')"] \arrow[urr, phantom, bend right=12, "\Uparrow\Psi(H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_0 \arrow[ul, bend left=20, "F"] \arrow[ur, bend right=20, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, "K^\dagger(yL)" description] \arrow[urr, phantom, bend left=25, "\Uparrow\Psi(H')"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_1 \arrow[ul, "K"] \arrow[ur, "L"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left=20, "F"] \arrow[uur, bend right=20, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_2 \arrow[ul, "S"] \arrow[ur, "T"'] & \\
 & C_1 \arrow[u, "H'"] \arrow[uul, bend left=15, "K"] \arrow[uur, bend right=15, "L"'] & \\
 & C_0 \arrow[u, "H"] \arrow[uuul, bend left=20, "F"] \arrow[uuur, bend right=20, "G"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "S^\dagger(yT)"] \arrow[urr, bend right=30, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[urr, phantom, bend left=10, "\Uparrow\Psi(H'H)"] & & B \arrow[u, "y"'] \\
 & C_0 \arrow[ul, bend left=20, "F"] \arrow[ur, bend right=20, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

より普遍性から $\Psi(H'H) = \Psi(H')\Psi(H)$ が分かる． □

関手 $\Lambda\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ を $\Lambda := {\downarrow} \circ \Sigma$ で定義する．(後に $\Psi \dashv \Lambda$ が分かる (命題 12)．)

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Span}(A,B) \arrow[r, shift left, "\Psi"] & \mathbf{Prof}(A,B) \arrow[l, shift left, dashed, "\Lambda"] \arrow[r, shift left, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Cospan}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Phi"] \arrow[ll, rounded corners, to path={ -- ([yshift=-4ex]\tikztostart.south) -- node[below]{$\downarrow$} ([yshift=-4ex]\tikztotarget.south) -- (\tikztotarget.south)}]
\end{tikzcd}
$$

profunctor $P\colon A \nrightarrow B$ に対して $\Lambda(P) = (A \xleftarrow{F^P} C^P \xrightarrow{G^P} B)$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
& C_P & \\
A \arrow[ur, "F_P"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ul, "G_P"'] \\
& G_P \downarrow F_P \arrow[ul, "F^P"] \arrow[ur, "G^P"'] \arrow[d, equal] & \\
& C^P &
\end{tikzcd}$$

コンマ圏の定義より，圏 C^P は以下のような圏である．

- $\mathrm{Ob}(C^P) = \{\langle a,b,f\rangle \mid a\in A,\ b\in B,\ f\in P(b,a)\}$.
- $\langle a,b,f\rangle, \langle a',b',f'\rangle \in \mathrm{Ob}(C^P)$ に対して

$$\mathrm{Hom}_{C^P}(\langle a,b,f\rangle, \langle a',b',f'\rangle) = \left\{ \langle g,h\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} g\colon a\to a', h\colon b'\to b,\\ P(h,g)(f)=f' \end{array} \right\}.$$

$\theta\colon P \Rightarrow Q$ を $\mathbf{Prof}(A,B)$ の射とする．Λ はコンマ圏を使って定義しているから，$\Lambda(\theta)$ は次の等式を満たすような関手 $C^P \to C^Q$ である．

$$\begin{tikzcd}
& C_Q & \\
A \arrow[ur, bend left, "F_Q"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "G_Q"'] \\
& C^Q \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& C^P \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] \arrow[u, dashed, "\Lambda(\theta)"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& C_Q & \\
& C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow"] & & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \\
& C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}$$

命題 8. $\Lambda\colon \mathbf{Prof}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ は忠実充満である．

証明. $P,Q \in \mathbf{Prof}(A,B)$ とする．

　まず忠実であることを示す．$\theta,\sigma\colon P\Rightarrow Q$ が $\Lambda(\theta)=\Lambda(\sigma)$ を満たすとする．このとき $a\in A,\ b\in B$ に対して $\theta_{ba} = \sigma_{ba}$ であることを示せばよい．(ここで θ_{ba} と σ_{ba} は写像

$P(b,a) \to Q(B,a)$ である．）Λ の定義より

$$
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
 & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] & & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \\
 & C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] \arrow[u, phantom, "\Longleftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
A \arrow[ur, bend left, "F_Q"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "G_Q"'] \\
 & C^Q \arrow[ul, "F^Q"'] \arrow[ur, "G^Q"] & \\
 & C^P \arrow[u, "\Lambda(\theta)"] \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
 & C_P \arrow[u, "\Sigma(\sigma)"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] & & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \\
 & C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] \arrow[u, phantom, "\Longleftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

である．ここで $f \in P(b,a)$ とすると $\langle a,b,f\rangle$ は C^P の対象だから $\Sigma(\theta)(f) = \Sigma(\sigma)(f)$ となる．故に Σ の定義から $\theta_{ba}(f) = \Sigma(\theta)(f) = \Sigma(\sigma)(f) = \sigma_{ba}(f)$ となって $\theta_{ba} = \sigma_{ba}$ である．

次に充満であることを示すため $H\colon \Lambda(P) \to \Lambda(Q)$ とする．$\theta\colon P \Rightarrow Q$ を定義しよう．そのために $b \in B$，$a \in A$ を取り $f \in P(b,a)$ とする．このとき $\langle a,b,f\rangle \in C^P$ だから $H\langle a,b,f\rangle \in C^Q$ である．圏 C^P の定義より $H\langle a,b,f\rangle = \langle a,b,\theta_{ba}(f)\rangle$ と書ける．これにより写像 $\theta_{ba}\colon P(b,a) \to Q(b,a)$ が定まる．θ_{ba} は $b \in B$，$a \in A$ について自然である．

$\because$) $g\colon a \to a'$，$h\colon b' \to b$ とする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
P(b,a) \arrow[r, "\theta_{ba}"] \arrow[d, "P(h,g)"'] & Q(b,a) \arrow[d, "Q(h,g)"] \\
P(b',a') \arrow[r, "\theta_{b'a'}"'] & Q(b',a')
\end{tikzcd}
$$

$f \in P(b,a)$ を取り $f' := P(h,g)(f)$ とする．このとき $\langle g,h\rangle\colon \langle a,b,f\rangle \to \langle a',b',f'\rangle$ は C^P の射である．故に $H\langle g,h\rangle\colon H\langle a,b,f\rangle \to H\langle a',b',f'\rangle$ は C^Q の射である．一方で H は span の射だから次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
 & C^Q \arrow[ul, "F^Q"'] \arrow[ur, "G^Q"] & \\
 & C^P \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] &
\end{tikzcd}
$$

従って $H\langle g,h\rangle = \langle g,h\rangle$ となる．故に $\langle g,h\rangle\colon \langle a,b,\theta_{ba}(f)\rangle \to \langle a',b',\theta_{b'a'}(f')\rangle$ が C^Q

の射だから $Q(h,g)(\theta_{ba}(f)) = \theta_{b'a'}(f') = \theta_{b'a'}(P(h,g)(f))$ となる．

よって $\theta\colon P \Rightarrow Q$ となる．このとき定義から明らかに等式

$$
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
 & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[r, phantom, "="] & {} & B \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \arrow[l, phantom, "="] \\
 & C^P \arrow[ul, bend left, "F^P"] \arrow[ur, bend right, "G^P"'] \arrow[u, phantom, "\Longleftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
A \arrow[ur, bend left, "F_Q"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "G_Q"'] \\
 & C^Q \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & C^P \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F^P"] \arrow[uur, bend right, "G^P"'] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．故に Λ の定義より $\Lambda(\theta) = H$ である． $\square$

命題 9. $\Lambda \circ \Phi \cong \downarrow$ である．

証明. $\mathrm{Cospan}(A, B)$ の射 $H\colon \langle F, G \rangle \to \langle K, L \rangle$ (次の図式を参照) を取る．

$$
\begin{tikzcd}
 & D & \\
 & C \arrow[u, "H"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "K"] \arrow[ur, "F"'] & & B \arrow[uul, bend right, "L"'] \arrow[ul, "G"]
\end{tikzcd}
$$

定義より $\Lambda(\Phi(H))$ は

$$
\begin{tikzcd}
 & C_{\Phi\langle K,L\rangle} & \\
A \arrow[ur, bend left, "F_{\Phi\langle K,L\rangle}"] \arrow[rr, phantom, "\Longleftarrow"] & & B \arrow[ul, bend right, "G_{\Phi\langle K,L\rangle}"'] \\
 & C^{\Phi\langle K,L\rangle} \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & C^{\Phi\langle F,G\rangle} \arrow[u, dashed, "\Lambda(\Phi(H))"] \arrow[uul, bend left, "F^{\Phi\langle F,G\rangle}"] \arrow[uur, bend right, "G^{\Phi\langle F,G\rangle}"'] \arrow[ul, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_{\Phi\langle K,L\rangle} & \\
 & C_{\Phi\langle K,L\rangle} \arrow[u, "\Sigma(\Phi(H))"] & \\
A \arrow[uur, bend left, "F_{\Phi\langle K,L\rangle}"] \arrow[ur, "F_{\Phi\langle F,G\rangle}"'] \arrow[r, phantom, "="] & {} & B \arrow[uul, bend right, "G_{\Phi\langle K,L\rangle}"'] \arrow[ul, "G_{\Phi\langle F,G\rangle}"] \arrow[l, phantom, "="] \\
 & C^{\Phi\langle K,L\rangle} \arrow[ul, bend left, "F^{\Phi\langle F,G\rangle}"] \arrow[ur, bend right, "G^{\Phi\langle F,G\rangle}"'] \arrow[u, phantom, "\Longleftarrow"] &
\end{tikzcd}
$$

で与えられる関手である．ここで

$$\Phi\langle F,G\rangle \cong \mathrm{Hom}_C(G-,F-),\quad \Phi\langle K,L\rangle \cong \mathrm{Hom}_D(L-,K-)$$

であるから $C^{\Phi\langle F,G\rangle} \cong G\downarrow F$，$C^{\Phi\langle K,L\rangle} \cong L\downarrow K$ であり，$\Sigma(\Phi(H))$ は

$$H\colon \mathrm{Hom}_C(Gb,Fa) \to \mathrm{Hom}_D(Lb,Ka)$$

により定まる関手である．よって $\Lambda\circ\Phi \cong \downarrow$ である． $\square$

ここで補題を 1 つ証明する．

補題 10. $X \xrightarrow{G} D \xleftarrow{F} C$ と $X \xrightarrow{S} U \xleftarrow{E} C$ を cospan として，コンマ圏 $F\downarrow G$ を考える．

$$\begin{tikzcd} & & U \\ X \arrow[r, "G"] \arrow[urr, bend left, "S"] & D & \\ F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[uur, bend right, "E"'] & \end{tikzcd}$$

このとき全単射

$$\kappa\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-,G\square),\mathrm{Hom}_U(E-,S\square)) \to \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0,SP_1)$$

が存在する．更にこの全単射は $S\in U^X$ について自然である．

証明. まず Λ の定義より $\Lambda(\mathrm{Hom}_D(F-,G\square)) = F\downarrow G$ である．命題 8 により Λ は忠実充満だから全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-,G\square),\mathrm{Hom}_U(E-,S\square)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(X,C)}(F\downarrow G, E\downarrow S)$$

が得られる．この全単射で $\theta\colon \mathrm{Hom}_D(F-,G\square) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,S\square)$ に対応するのは関手 $\Lambda(\theta)\colon F\downarrow G \to E\downarrow S$ である．この関手は定義より次の等式によって定まる関手である

(但し $P := \mathrm{Hom}_D(F-, G\Box)$，$Q := \mathrm{Hom}_U(E-, S\Box)$ と書いた).

$$
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
X \arrow[ur, bend left, "F_Q"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow" above=12pt] & & C \arrow[ul, bend right, "G_Q"'] \\
 & E \downarrow S \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & F \downarrow G \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] \arrow[u, dashed, "\Lambda(\theta)"] \arrow[u, phantom, "=" left=14pt] \arrow[u, phantom, "=" right=14pt] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & C_Q & \\
 & C_P \arrow[u, "\Sigma(\theta)"] \arrow[u, phantom, "=" left=14pt] \arrow[u, phantom, "=" right=14pt] & \\
X \arrow[uur, bend left, "F_Q"] \arrow[ur, "F_P"'] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow" below=20pt] & & C \arrow[uul, bend right, "G_Q"'] \arrow[ul, "G_P"] \\
 & F \downarrow G \arrow[ul, bend left, "P_1"] \arrow[ur, bend right, "P_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

特に対象 $\langle c, x, f\rangle \in F \downarrow G$ に対して $\Lambda(\theta)\langle c, x, f\rangle = \langle c, x, \theta_{cx}(f)\rangle$ となる．次にコンマ圏 $E \downarrow S$ の普遍性から全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(X,C)}(F \downarrow G, E \downarrow S) \cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

が得られる．この全単射は $H\colon F \downarrow G \to E \downarrow S$ に対して，自然変換

$$
\kappa'(H) \quad := \quad
\begin{tikzcd}
 & U & \\
X \arrow[ur, bend left, "S"] \arrow[rr, phantom, "\Leftarrow" above=12pt] & & C \arrow[ul, bend right, "E"'] \\
 & E \downarrow S \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
 & F \downarrow G \arrow[uul, bend left, "P_1"] \arrow[uur, bend right, "P_0"'] \arrow[u, "H"] \arrow[u, phantom, "=" left=14pt] \arrow[u, phantom, "=" right=14pt] &
\end{tikzcd}
$$

を対応させる全単射である．従って $\kappa(\theta)_{\langle c,x,f\rangle} := \kappa'(\Lambda(\theta))_{\langle c,x,f\rangle} = \theta_{cx}(f)$ と定義すればこれが全単射

$$\kappa\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-, G\Box), \mathrm{Hom}_U(E-, S\Box)) \to \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

を定める．この κ が $S \in U^X$ について自然であることを示すため $\xi\colon S \Rightarrow S'$ を自然変換とする．$\zeta\colon \mathrm{Hom}_U(E-, S\Box) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, S'\Box)$ を

$$\zeta_{cx} := \xi_x \circ -\colon \mathrm{Hom}_U(Ec, Sx) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(Ec, S'x)$$

により定めたとき

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-,G\square),\mathrm{Hom}_U(E-,S\square)) & \xrightarrow{\kappa} & \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0,SP_1) \\
{\scriptstyle \zeta\circ-}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \xi_{P_1}\circ-} \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(X,C)}(\mathrm{Hom}_D(F-,G\square),\mathrm{Hom}_U(E-,S'\square)) & \xrightarrow[\kappa]{} & \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow G}}(EP_0,S'P_1)
\end{array}$$

が可換であることを示せばよい．これは $\theta\colon \mathrm{Hom}_D(F-,G\square) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,S\square)$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\theta \arrow[r, mapsto, "\kappa"] \arrow[dd, mapsto, "\zeta\circ-"'] & \kappa(\theta) \arrow[d, mapsto, "\xi_{P_1}\circ-"] \\
 & \xi_{P_1}\circ\kappa(\theta) \\
\zeta\circ\theta \arrow[r, mapsto, "\kappa"'] & \kappa(\zeta\circ\theta)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{aligned}
(\xi_{P_1}\circ\kappa(\theta))_{\langle c,x,f\rangle} &= \xi_x\circ\theta_{cx}(f) \\
(\kappa(\zeta\circ\theta))_{\langle c,x,f\rangle} &= (\zeta\circ\theta)_{cx}(f) = \xi_x\circ\theta_{cx}(f)
\end{aligned}$$

となるから可換である． □

従って特に $X := \mathbb{1}$ として $d := G(*)$，$u := S(*)$ と書けば全単射

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(EP_0,\Delta u)$$

が得られる．これは各点左 Kan 拡張の特徴付けで使用した全単射 (「Kan 拡張」の PDF を参照) である．

この補題を使えば，各点左 Kan 拡張についてより一般に次の条件が成り立つ．

命題 11. $\langle T,\eta\rangle$ が $F\colon C\to D$ に沿った $E\colon C\to U$ の各点左 Kan 拡張
$\Longleftrightarrow$ 任意の圏 X と関手 $G\colon X\to D$ に対して合成

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "G"] & D \arrow[dr, "T"] & \\
F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

は左 Kan 拡張である．

証明．($\Longleftarrow$) 各点左 Kan 拡張の定義より明らか．

($\Longrightarrow$) $\langle T, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張だから $d \in D$，$u \in U$ について自然な全単射

$$\varphi_{du} \colon \operatorname{Hom}_U(Td, u) \to \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(\operatorname{Hom}_D(F-, d), \operatorname{Hom}_U(E-, u))$$

が存在する．$k \in \operatorname{Hom}_U(Td, u)$ に対して $\varphi_{du}(k)_c \colon \operatorname{Hom}_D(Fc, d) \to \operatorname{Hom}_U(Ec, u)$ は

$$\beta^{d,u,k} \quad := \quad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d"] \arrow[drr, bend left, "u"] & D \arrow[dr, "T"] \arrow[r, phantom, "\Nearrow k"] & \\ F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

として $\varphi_{du}(k)_c(f) = \beta^{d,u,k}_{\langle c, f \rangle}$ で与えられる (「Kan 拡張」の PDF を参照)．

さて $S \in U^X$ について自然に

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{U^X}(TG, S) &\cong \int_{x \in X} \operatorname{Hom}_U(TGx, Sx) \\ &\cong \int_{x \in X} \operatorname{Hom}_{\widehat{C}}(\operatorname{Hom}_D(F-, Gx), \operatorname{Hom}_U(E-, Sx)) \\ &\cong \int_{x \in X} \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\operatorname{Hom}_D(Fc, Gx), \operatorname{Hom}_U(Ec, Sx)) \\ &\cong \int_{\langle c, x \rangle \in C^{\mathrm{op}} \times X} \operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}}(\operatorname{Hom}_D(Fc, Gx), \operatorname{Hom}_U(Ec, Sx)) \\ &\cong \operatorname{Hom}_{\mathbf{Prof}(X, C)}(\operatorname{Hom}_D(F-, G\square), \operatorname{Hom}_U(E-, S\square)) \end{aligned}$$

である．この全単射を ψ と書くと，$\tau \colon TG \Rightarrow S$ に対して

$$\psi(\tau) \colon \operatorname{Hom}_D(F-, G\square) \Rightarrow \operatorname{Hom}_U(E-, S\square)$$

は上で定義した β を使うと

$$\psi(\tau)_{cx}(f) = \beta^{Gx, Sx, \tau_x}_{\langle c, f \rangle}$$

で与えられる．

よって補題 10 を使えば $S \in U^X$ について自然な全単射

$$\kappa \circ \psi \colon \operatorname{Hom}_{U^X}(TG, S) \to \operatorname{Hom}_{U^{F \downarrow G}}(EP_0, SP_1)$$

が得られる．故に $P_1^\dagger(EP_0) \cong TG$ が分かる．この左 Kan 拡張の unit は $\kappa \circ \psi(\mathrm{id}_{TG})$ である．その $\langle c, x, f \rangle \in F \downarrow G$ 成分を計算すると

$$\kappa \circ \psi(\mathrm{id}_{TG})_{\langle c, x, f \rangle} = \psi(\mathrm{id}_{TG})_{cx}(f) = \beta^{Gx, TGx, \mathrm{id}}_{\langle c, f \rangle} = Tf \circ \eta_c$$

となる．即ち

$$\kappa \circ \psi(\mathrm{id}_{TG}) \quad = \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "G"] & D \arrow[dr, "T"] & \\ F \downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

となりこの図式は左 Kan 拡張である． □

命題 12. 随伴 $\Psi \dashv \Lambda\colon \mathrm{Span}(A,B) \to \mathbf{Prof}(A,B)$ が成り立つ．更にこれの counit は同型である．従って $\Psi \circ \Lambda \cong \mathrm{id}$ である．

証明. 随伴であることを示すため，$(A \xleftarrow{F} C \xrightarrow{G} B) \in \mathrm{Span}(A,B)$，$P \in \mathbf{Prof}(A,B)$ について自然な全単射

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{Span}(A,B)}(\langle F,G\rangle, \Lambda(P)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Prof}(A,B)}(\Psi\langle F,G\rangle, P)$$

を定義する．そのためにまず自然同型 $\varepsilon\colon \Psi(\Lambda(P)) \Rightarrow P$ が存在することを示す．

∵) 次の 2 つの図式を考える．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[drr, "\Psi(\Lambda(P))"] & & \\ C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[u, phantom, shift left=3ex, "\Uparrow"] & B \arrow[r, "y"'] & \widehat{B} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "F_P"] \arrow[rr, bend left, "P"] & C_P \arrow[dr, "G_P^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & {} \\ C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & B \arrow[u, "G_P"'] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{B} \end{tikzcd}$$

定義より $\Psi(\Lambda(P)) = (F^P)^\dagger(y \circ G^P)$ だから左の図式は左 Kan 拡張である．一方で右の図式において，$A \xleftarrow{F^P} C^P \xrightarrow{G^P} B$ はコンマ圏 $G_P \downarrow F_P$ として与えられていたから，命題 11 により $(F^P)^\dagger(y \circ G^P) \cong G_P^\dagger y \circ F_P$ が分かる．また命題 6 より $G_P^\dagger y \circ F_P = \Phi(\Sigma(P)) \cong P$ となる．故に普遍性から自然同型 $\varepsilon\colon \Psi(\Lambda(P)) \Rightarrow P$ が存

在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, bend left=70, "P"] \arrow[drr, "\Psi(\Lambda(P))"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & \\
C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & B \arrow[r, "y"'] & \widehat{B}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F_P"] \arrow[drr, bend left=70, "P"] & C_P \arrow[dr, "G_P^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \\
C^P \arrow[u, "F^P"] \arrow[r, "G^P"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & B \arrow[u, "G_P"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{B}
\end{tikzcd}
$$

$H\colon \langle F, G\rangle \to \Lambda(P)$ を射とする．即ち H は次を可換とする関手である．

$$
\begin{tikzcd}
A & & B \\
& C^P \arrow[ul, "F^P"'] \arrow[ur, "G^P"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uur, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき自然変換 $\psi(H)\colon \Psi\langle F, G\rangle \Rightarrow P$ を $\psi(H) := \varepsilon \circ (\Psi(H))$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "P"] \arrow[urr, "\Psi(\Lambda(P))"] \arrow[urr, bend right=40, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\varepsilon \quad \Uparrow\Psi(H)"] & B \arrow[ur, "y"'] & \\
& C \arrow[ul, bend left, "F"] \arrow[u, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=50, "P"] \arrow[urr, "\Psi(\Lambda(P))"] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & B \arrow[ur, "y"'] & \\
& C^P \arrow[ul, "F^P"] \arrow[u, "G^P"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uu, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
& C_P \arrow[ur, "G_P^\dagger y"] \arrow[r, phantom, "\cong"] & \\
A \arrow[uurr, bend left=50, "P"] \arrow[ur, "F_P"'] & B \arrow[u, "G_P"'] \arrow[uur, "y"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] & \\
& C^P \arrow[ul, "F^P"] \arrow[u, "G^P"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow"] & \\
& C \arrow[u, "H"] \arrow[uul, bend left, "F"] \arrow[uu, bend right, "G"'] &
\end{tikzcd}
$$

この $\psi(H)$ は全単射 $\psi\colon \mathrm{Hom}(\langle F, G\rangle, \Lambda(P)) \to \mathrm{Hom}(\Psi\langle F, G\rangle, P)$ を与える．

∵) 単射性は明らかだから全射性を示す．そのために $\sigma\colon \Psi\langle F, G\rangle \Rightarrow P$ を自然変換とする．このとき

$$
\theta \quad := \quad
\begin{tikzcd}
& & \widehat{B} \\
A \arrow[urr, bend left=40, "P"] \arrow[urr, "F^\dagger(yG)"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\sigma"] & B \arrow[ur, "y"'] & \\
& C \arrow[ul, "F"] \arrow[u, "G"'] \arrow[ul, phantom, "\Leftarrow\eta"] &
\end{tikzcd}
$$

と定義して，これを使って H を

- 対象 $c \in C$ に対して $Hc := \langle Fc, Gc, \theta_c \rangle$
- 射 $f \colon c \to c'$ に対して $Hf := \langle Ff, Gf \rangle$

と定義する．これは明らかに関手 $H \colon C \to C^P$ を定める．また明らかに H は射 $\langle F, G \rangle \to \Lambda(P)$ であり $\psi(H) = \sigma$ である．故に ψ は全射である．

定義から明らかに ψ は自然である．従って随伴 $\Psi \dashv \Lambda$ が成り立つ．ψ の定義よりこの随伴の counit は ε であり，これは同型である． □

以上により $\uparrow := \Sigma \circ \Psi$ と定義すれば

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Span}(A,B) \arrow[r, shift left, "\Psi"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend left, "\uparrow"] & \mathbf{Prof}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Lambda"] \arrow[r, shift left, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Cospan}(A,B) \arrow[l, shift left, "\Phi"] \arrow[ll, bend left, "\downarrow"] \end{tikzcd}$$

より $\uparrow \dashv \downarrow$ となる．従って次の定理を得る．

定理 13. 関手 $\downarrow \colon \mathrm{Cospan}(A,B) \to \mathrm{Span}(A,B)$ は左随伴 $\uparrow$ を持つ． □

Λ, Σ が忠実充満だから $\uparrow \dashv \downarrow$ は冪等随伴である (「随伴関手」の PDF を参照)．そこで充満部分圏 $\mathrm{Comma}(A,B) \subset \mathrm{Span}(A,B)$，$\mathrm{Cocomma}(A,B) \subset \mathrm{Cospan}(A,B)$ を

$$\begin{aligned} &\mathrm{Ob}(\mathrm{Comma}(A,B)) \\ &\qquad := \{x \in \mathrm{Span}(A,B) \mid \text{ある } z \in \mathrm{Cospan}(A,B) \text{ が存在して} {\downarrow}(z) \cong x\}, \\ &\mathrm{Ob}(\mathrm{Cocomma}(A,B)) \\ &\qquad := \{x \in \mathrm{Cospan}(A,B) \mid \text{ある } z \in \mathrm{Span}(A,B) \text{ が存在して} {\uparrow}(z) \cong x\} \end{aligned}$$

で定義すれば圏同値 $\mathrm{Comma}(A,B) \simeq \mathbf{Prof}(A,B) \simeq \mathrm{Cocomma}(A,B)$ が得られる．

参考文献

[1] Jean Bénabou, Distributors at Work, `http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/~streicher/`