同型でないものを同じとみなす

～モデル圏の話～

alg-d　2024-10-20

※ `https://alg-d.com/math/kan_extension/` 下部にスライド有
※この講演は Youtube で同時配信されます．
　音声は alg-d の声のみで他の声は Youtube 上では聞こえません．

同型でないものを同じとみなす

- alg-d　twitter: `https://x.com/alg_d`
  Youtube: `https://www.youtube.com/alg-dx`
  WEB サイト: `https://alg-d.com/`
- ハッシュタグ: #alg_d　#tsudoimath2
- 代表作 (?)
  選択公理と同値な命題集 `https://alg-d.com/math/ac/`
  常識的な圏論の PDF `https://alg-d.com/math/kan_extension/`
  Ti*k*Z の使い方 `https://alg-d.com/math/tex.html`
- 選択公理が専門ではない
- 圏論が専門でもない
- 動画色々あるので良ければ見てください

スライド中に登場する動画

- 圏の局所化
  https://www.youtube.com/watch?v=hC4MBoggmIQ
- 導来関手の構成
  https://www.youtube.com/watch?v=6XvYHV2sEQc
- 圏論における左と右
  https://www.youtube.com/watch?v=nZTsL229d0w
- 随伴は Kan 拡張である
  https://www.youtube.com/watch?v=CH3ywTk2NiQ
- 随伴とは「行き来ができる」ということ
  https://www.youtube.com/watch?v=uKNTAzi8SgY
- 単体的集合
  https://www.youtube.com/watch?v=UXs0X7yTd0g
- 第 11 回関西すうがく徒のつどい「高次元圏入門」
  https://www.youtube.com/watch?v=SZvWqu8xfbY
- 第 12 回関西すうがく徒のつどい「#豊穣圏は射が取れないからクソ」
  https://www.youtube.com/watch?v=h06EtxSbcl8

しっかりした証明

- https://alg-d.com/math/kan_extension/
  第 3 章　モデル圏　model.pdf
  今回の話の大半は書いてある.

参考文献

- W. G. Dwyer and J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, HANDBOOK OF ALGEBRAIC TOPOLOGY (1995)
  基本的に model.pdf はこの論文を参考に書かれている．
- M. Hovey, Model Categories, volume 63 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI (1999)
  標準的な文献はこれ
- M. Hovey, Errata to Model Categories
  上記のエラッタ (検索したら出てくる)
- I. Amrani, Model structure on the category of small topological categories, J. Homotopy Relat. Struct. (2015) 10:63–70
  今回の目標

導入

導入

数学ではよく〈同型〉というものが登場する．

- 群論 $\rightsquigarrow$ 群の同型
- 環論 $\rightsquigarrow$ 環の同型
- 体論 $\rightsquigarrow$ 体の同型
- 位相空間論 $\rightsquigarrow$ 位相空間の同型 (同相)
- ホモロジー代数 $\rightsquigarrow$ 鎖複体の同型
- 圏論 $\rightsquigarrow$ 圏の同型

普通は，同型なものは「同じもの」として扱い区別しない．

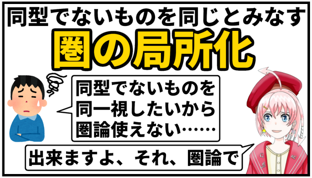
導入

ところが，数学では同型射でない射によって
2 つのものを同一視したい場合がある．

- 位相幾何学 $\rightsquigarrow$ 位相空間のホモトピー同値
  弱ホモトピー同値
- ホモロジー代数 $\rightsquigarrow$ 鎖複体の擬同型
- 圏論 $\rightsquigarrow$ 圏同値

このようなものを圏論的に扱うための仕組みがモデル圏である．
このモデル圏を理解するのが今回の目標である．

「同一視」について
詳しくはこっちを見て$\rightarrow$



モデル圏

【定義】

C を圏とする．

C の射 $f\colon a \to b$ の retract とは，$g\colon u \to v$ であって

他の射を上手く取ると次を可換にできるものをいう．

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_u"] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & u \arrow[d, "g"] \\ v \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_v"'] & b \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

(arrow category $C^{\mathbf{2}}$ における retract という意味)

モデル圏

【定義】

可換図式
$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & u \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & v \end{tikzcd}$$
のリフトとは

$h\colon b \to u$ であって $f = h \circ i$，$g = p \circ h$ を満たすものをいう．

モデル圏

※モデル圏の定義は文献によって多少違う．
例えば昨日の講演だと (4) の分解に関手性が
仮定されていてここより強い定義になっている

【定義】

モデル圏とは，完備かつ余完備な圏 C であって
$\mathrm{W}, \mathrm{Cof}, \mathrm{Fib} \subset \mathrm{Mor}(C)$ が与えられ，以下を満たすこと．

(1) (2-out-of-3) C の射 f, g が $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ を満たすとする．$f, g, g \circ f$ のうち少なくとも 2 つが W に属するならば，残りの 1 つも W に属する．

(2) (Retracts) C の射 g が f の retract のとき

- $f \in \mathrm{W} \Longrightarrow g \in \mathrm{W}$
- $f \in \mathrm{Cof} \Longrightarrow g \in \mathrm{Cof}$
- $f \in \mathrm{Fib} \Longrightarrow g \in \mathrm{Fib}$

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r] \arrow[d, "g"'] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_u"] & a \arrow[r] \arrow[d, "f"] & u \arrow[d, "g"] \\
v \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_v"'] & b \arrow[r] & v
\end{tikzcd}
$$

(続く)

モデル圏

※モデル圏の定義は文献によって多少違う．
例えば昨日の講演だと (4) の分解に関手性が
仮定されていてここより強い定義になっている

【定義】 (続き)

(3) (Lifting) C の可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & u \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] & v \end{tikzcd}$$

は

- $i \in \mathrm{Cof}$，$p \in \mathrm{Fib} \cap \mathrm{W}$ ならばリフトを持つ．
- $i \in \mathrm{Cof} \cap \mathrm{W}$，$p \in \mathrm{Fib}$ ならばリフトを持つ．

(4) (Factorization) 任意の射 $f\colon a \to b$ は

- $f = p \circ i$，$i \in \mathrm{Cof}$，$p \in \mathrm{Fib} \cap \mathrm{W}$ と分解できる．
- $f = p \circ i$，$i \in \mathrm{Cof} \cap \mathrm{W}$，$p \in \mathrm{Fib}$ と分解できる．

モデル圏

※ (co)fibration という用語が唐突に登場したように感じるかもしれない．これは後で説明する．
※ trivial ではなく acyclic を使う文献もある．

- $f \in \mathrm{W}$ を weak equivalence という．$f\colon a \xrightarrow{\sim} b$ と書く．
- $f \in \mathrm{Cof}$ を cofibration という．$f\colon a \hookrightarrow b$ と書く．
- $f \in \mathrm{Fib}$ を fibration という．$f\colon a \twoheadrightarrow b$ と書く．
- $f \in \mathrm{Cof} \cap \mathrm{W}$ を trivial cofibration という．$f\colon a \overset{\sim}{\hookrightarrow} b$ と書く．
- $f \in \mathrm{Fib} \cap \mathrm{W}$ を trivial fibration という．$f\colon a \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} b$ と書く．

この記号を使うとモデル圏の条件は↓のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, hook] & u \arrow[d, two heads, "\wr"] \\
b \arrow[r] & v
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, hook, "\wr"] & u \arrow[d, two heads] \\
b \arrow[r] & v
\end{tikzcd}
$$

こういう可換図式はリフトを持つ．

任意の $f\colon a \to b$ は

$$f = (a \hookrightarrow x \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} b)$$

$$f = (a \overset{\sim}{\hookrightarrow} x \twoheadrightarrow b)$$

と分解できる．

モデル圏

モデル圏 C に対しては

- weak equivalence を同型にした圏 $\mathrm{Ho}(C)$
- 標準的な関手 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$

を構成することができる (構成方法は後で述べる).
$\mathrm{Ho}(C)$ を C のホモトピー圏という.
（つまり $\langle \mathrm{Ho}(C), P \rangle$ は「C の W による局所化」である.）

「weak equivalence を同型にした圏」とはつまり
C の射 f に対して次が成り立つ.

$$f \text{ が weak equivalence} \iff Pf \text{ が } \mathrm{Ho}(C) \text{ の同型射}$$

モデル圏

【例】 (Strøm model structure)

位相空間の圏 **Top** を考える．**Top** の射 f に対して

- f が weak equivalence $\iff$ f がホモトピー同値
- f が fibration $\iff$ f が Hurewicz fibration
- f が cofibration $\iff$ f が closed Hurewicz cofibration

と定めると，**Top** はモデル圏となる．よって $\mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$ は
ホモトピー同値が同型になるような圏である．つまり

$$f \text{ がホモトピー同値} \iff Pf \text{ が } \mathrm{Ho}(\mathbf{Top}) \text{ の同型射}$$

である． □

弱ホモトピー同値で同一視したい場合は次のモデル圏を考える．

モデル圏

【例】 (classical model structure)

compactly generated Hausdorff 空間の圏 $\mathbf{CGH}$ に

- f が weak equivalence $\Longleftrightarrow$ f が弱ホモトピー同値.
- f が fibration $\Longleftrightarrow$ f が Serre fibration
- f が cofibration
  $\Longleftrightarrow$ relative cell complex g の retract になる.

と定めると，$\mathbf{CGH}$ はモデル圏となる.
$\mathrm{Ho}(\mathbf{CGH})$ は弱ホモトピー同値が同型になる圏である. $\square$

※注: 位相空間の圏 $\mathbf{Top}$ は~~クソ~~圏論的な性質が悪いので
後の都合により代わりに部分圏 $\mathbf{CGH} \subset \mathbf{Top}$ を考えます.

モデル圏

モデル圏の定義で唐突に (co)fibration が
登場したように見えるかもしれない.

実は fibration とは元々はホモトピー論に登場するものであり
Serre fibration や Hurewicz fibration など
様々な fibration が考えられてきた.

モデル圏はこれらを意識して定義されている.

そうするとモデル圏はホモトピー論に関する圏なのかというと
実は次の例がある.

【例】 (projective model structure)

R を単位的環とする．
左 R 加群の鎖複体 (負次数は全部 0) の圏 $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ において

- f が weak equivalence $\Longleftrightarrow$ f が擬同型
- $f\colon X \to Y$ が fibration
  $\Longleftrightarrow$ 任意の $n > 0$ に対して $f_n\colon X_n \to Y_n$ が全射
- $f\colon X \to Y$ が cofibration
  $\Longleftrightarrow$ 任意の $n \geq 0$ に対して $f_n\colon X_n \to Y_n$ が単射であり
  $\operatorname{coker} f_n$ が射影的

と定めると，$\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ はモデル圏となる．
$\mathrm{Ho}(\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R))$ を導来圏という． $\square$

モデル圏

つまりモデル圏とは

ホモトピー論とホモロジー代数の共通の一般化

になっており，(似ている部分はあるものの) 全くの別物と思われていたホモトピーとホモロジーが，モデル圏により統一的に理解できるようになったのである．

モデル圏の他の例としては次のようなものがある．

【例】 (trivial model structure)

C を完備かつ余完備な圏とするとき

- f が weak equivalence $\iff$ f は同型射である．
- 任意の射を fibration かつ cofibration とする．

と定めると，C はモデル圏となる．　$\square$

【例】 (canonical model structure)

小圏の圏 $\mathbf{Cat}$ において

- F が weak equivalence $\iff$ F が圏同値を与える．
- $F\colon C \to D$ が fibration
  $\iff$ 任意の $c \in C$，$d \in D$ と同型射 $f\colon Fc \to d$ に対して，
  $c' \in C$ と同型射 $g\colon c \to c'$ が存在して $Fg = f$ となる．
- F が cofibration $\iff$ F が対象について単射．

と定めると，$\mathbf{Cat}$ はモデル圏となる．
つまり $\mathrm{Ho}(\mathbf{Cat})$ は圏同値を同型とする圏である． $\square$

モデル圏

【例】

I を集合，$\{C_i\}_{i\in I}$ をモデル圏の族としたとき
直積 $\displaystyle\prod_{i\in I} C_i$ は以下によりモデル圏になる．

- $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ が weak equivalence $\Longleftrightarrow$ 各 f_i が weak equivalence．
- $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ が fibration $\Longleftrightarrow$ 各 f_i が fibration．
- $\langle f_i\rangle_{i\in I}$ が cofibration $\Longleftrightarrow$ 各 f_i が cofibration． $\square$

モデル圏

【例】

C をモデル圏とすると C^{op} は以下によりモデル圏になる．

- $f \in C^{\mathrm{op}}$ が weak equivalence
  $\iff$ C の射として weak equivalence．
- $f \in C^{\mathrm{op}}$ が fibration $\iff$ C の射として cofibration．
- $f \in C^{\mathrm{op}}$ が cofibration $\iff$ C の射として fibration． $\square$

ホモトピー圏の構成

ホモトピー圏の構成

【定義】

C を圏，$f\colon a \to b$ と $g\colon u \to v$ を C の射とする．
f が g に対して LLP を持つ
(もしくは g が f に対して RLP を持つ)

$\iff$ 任意の可換図式 $\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & u \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \longrightarrow & v \end{array}$ がリフトを持つ．

※ LLP = Left Lifting Property
RLP = Right Lifting Property

ホモトピー圏の構成

【定義】(さっきの)

f が g に対して LLP を持つ $\iff$ $\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \longrightarrow & v \end{array}$ がリフトを持つ．

例えばモデル圏の定義が言っているのは

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, hook] & u \arrow[d, two heads, "\wr"] \\
b \arrow[r] & v
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, hook, "\wr"] & u \arrow[d, two heads] \\
b \arrow[r] & v
\end{tikzcd}
$$

- cofibration は trivial fibration に対して LLP を持つ
  (= trivial fibration は cofibration に対して RLP を持つ)
- trivial cofibration は fibration に対して LLP を持つ
  (= fibration は trivial cofibration に対して RLP を持つ)

ということである．

ホモトピー圏の構成

【命題】

モデル圏 C において

(1) f が cofibraton
$\iff f$ は trivial fibration に対して LLP を持つ．

(2) f が trivial cofibraton
$\iff f$ は fibration に対して LLP を持つ．

(3) f が fibraton
$\iff f$ は trivial cofibration に対して RLP を持つ．

(4) f が trivial fibraton
$\iff f$ は cofibration に対して RLP を持つ．

同様なため (1) のみ示す．

ホモトピー圏の構成

証明.

$(\Longrightarrow)$ モデル圏の定義より明らか．

$(\Longleftarrow)$ $f = (a \underset{i}{\hookrightarrow} x \overset{\sim}{\underset{p}{\twoheadrightarrow}} b)$ と分解すれば，次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & x \arrow[d, two heads, "p"', "\wr"] \\
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, hook, "i"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "h"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_b"'] & x \arrow[r, two heads, "\sim", "p"'] & b
\end{tikzcd}
$$

仮定より点線の射 $h\colon b \to x$ が存在する． これにより右の可換図式を得る．即ち f は cofibration i の retract であり，従って cofibration である． $\square$

ホモトピー圏の構成

モデル圏では cofibration 等の LLP や RLP を使った特徴付けを駆使して証明を行っていく．

【命題】

cofibration 同士の合成は cofibration である．

証明．

$f\colon a \hookrightarrow b$，$g\colon b \hookrightarrow c$ を cofibration とする．

さっきの命題を使って $g \circ f$ が cofibration であることを示す．

即ち，$g \circ f$ が trivial fibration に対して LLP を持つことを示す．

証明.

$p\colon u \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} v$ を任意に取り次の可換図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & u \arrow[dd, two heads, "p"', "\wr"] \\
b \arrow[ur, dashed, "h_0"] \arrow[d, hook, "g"'] & \\
c \arrow[r] \arrow[uur, dashed, "h"] & v
\end{tikzcd}$$

f が cofibration で p が trivial fibration だから，リフト $h_0\colon b \to u$ が存在する．g が cofibration で p が trivial fibration だから，リフト $h\colon c \to u$ が存在する．即ち故に $g \circ f$ は trivial fibration に対して LLP を持つ □

ホモトピー圏の構成

※ 0 は始対象，1 は終対象

【定義】

(1) $a \in C$ が cofibrant $\iff$ 一意な射 $0 \to a$ が cofibration．

(2) $a \in C$ が fibrant $\iff$ 一意な射 $a \to 1$ が fibration．

$f\colon a \to c$，$g\colon b \to c$ のとき，余直積の普遍性により得られる次の点線の射を $\langle f, g\rangle$ と書くことにする．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "\mu_0"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & b \arrow[dl, "\mu_1"'] \arrow[ddl, bend left, "g"] \\
& a \amalg b \arrow[d, dashed, "\langle f,g\rangle"] & \\
& c &
\end{tikzcd}$$

ホモトピー圏の構成

【定義】

$a \in C$ とする．

$$(a \amalg a \xrightarrow{\langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a \rangle} a) = (a \amalg a \xrightarrow{i} x \underset{p}{\overset{\sim}{\to}} a)$$

と分解できるとき，この x を a の cylinder object と呼ぶ．更に

(1) i が cofibration のとき good cylinder object と呼ぶ．

(2) i が cofibration で p が fibration のとき
very good cylinder object と呼ぶ．

モデル圏の定義から，各 $a \in C$ の very good cylinder object が少なくとも一つ存在する (一意とは限らない)．
a の cylinder object を $a \wedge I$ で表す．

【定義】

$f, g\colon a \to b$ が left homotopic (記号 $f \overset{l}{\sim} g$ で表す)
$\iff$ ある cylinder object $a \amalg a \xrightarrow{i} a \wedge I \xrightarrow{\sim} a$ と
射 $h\colon a \wedge I \to b$ が存在して，次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} a \amalg a \arrow[d, "i"'] \arrow[drr, "{\langle f,g \rangle}"] \arrow[dd, bend right=90, "{\langle \mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a \rangle}"'] & & \\ a \wedge I \arrow[rr, dashed, "h"'] \arrow[d, "\wr"] & & b \\ a & & \end{tikzcd}$$

このときの h を f から g への left homotopy という．
更に $a \wedge I$ が (very) good cylinder object のとき
h を (very) good left homotopy という．

ホモトピー圏の構成

【命題】

a が cofibrant ならば $\overset{l}{\sim}$ は $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ の同値関係となる． $\square$

【定義】

C をモデル圏，$a, b \in C$ を対象とする．
$\overset{l}{\sim}$ で生成される $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ 上の同値関係を R として
$\pi^l(a,b) := \mathrm{Hom}_C(a,b)/R$ と定める．

上の命題から
a が cofibrant ならば $\pi^l(a,b) = \mathrm{Hom}_C(a,b)/\overset{l}{\sim}$ である．

ホモトピー圏の構成

※ [ ] で同値類を表す

【命題】

$f, g\colon a \to b$ と $s, t\colon b \to c$ を C の射とする．

(1) $f \overset{l}{\sim} g \Longrightarrow s \circ f \overset{l}{\sim} s \circ g$ である．
(即ち $\pi^l(a,b) \ni [f] \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(a,c)$ は well-defined)

(2) c が fibrant のとき
$s \overset{l}{\sim} t \Longrightarrow s \circ f \overset{l}{\sim} t \circ f$ である．
(即ち $\pi^l(b,c) \ni [s] \longmapsto [s \circ f] \in \pi^l(a,c)$ は well-defined) □

【命題】

c が fibrant のとき

$$\pi^l(b,c) \times \pi^l(a,b) \ni \langle [s], [f] \rangle \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(a,c)$$

は well-defined である． □

ホモトピー圏の構成

【命題】(さっきの)

c が fibrant のとき

$$\pi^l(b,c) \times \pi^l(a,b) \ni \langle [s],[f] \rangle \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(a,c)$$

は well-defined である. □

これはつまり fibrant な対象だけ考えれば
π^l を Hom とする圏を作ることができるということである.

即ち圏 πC_{f} を次のように定義する.

- $\mathrm{Ob}(\pi C_{\mathrm{f}}) := \{a \in C \mid a$ は fibrant$\}$
- $\mathrm{Hom}_{\pi C_{\mathrm{f}}}(a,b) := \pi^l(a,b)$.

ホモトピー圏の構成

双対的に (つまり C^{op} を考えることで)

- a の path object $a \xrightarrow{\sim} a^I \to a \times a$
- right homotopic $\overset{r}{\sim}$
- $\pi^r(a,b) := \mathrm{Hom}_C(a,b)/(\overset{r}{\sim}$ で生成される同値関係)

が定義できる．

また a が cofibrant，b が fibrant のとき

$$\mathrm{Hom}_C(a,b) \text{ 上の 2 項関係として } \overset{l}{\sim} = \overset{r}{\sim} \text{ となる．}$$
$$\text{従って } \pi^l(a,b) = \pi^r(a,b) \text{ である．}$$

が分かる．よってこの場合，これらを $\sim$ や $\pi(a,b)$ で表す．

ホモトピー圏の構成

【定義】

充満部分圏 $\mathcal{C}_{\mathrm{c}}, \mathcal{C}_{\mathrm{f}}, \mathcal{C}_{\mathrm{cf}} \subset \mathcal{C}$ を以下により定める．

(1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{c}}) := \{a \in \mathcal{C} \mid a$ は cofibrant$\}$．

(2) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{f}}) := \{a \in \mathcal{C} \mid a$ は fibrant$\}$．

(3) $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{cf}}) := \{a \in \mathcal{C} \mid a$ は cofibrant かつ fibrant$\}$．

更に，圏 $\pi\mathcal{C}_{\mathrm{c}}, \pi\mathcal{C}_{\mathrm{f}}, \pi\mathcal{C}_{\mathrm{cf}}$ を以下により定める．

(1) $\mathrm{Ob}(\pi\mathcal{C}_{\mathrm{c}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{c}})$ で，$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{\mathrm{c}}}(a, b) := \pi^{r}(a, b)$．

(2) $\mathrm{Ob}(\pi\mathcal{C}_{\mathrm{f}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{f}})$ で，$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{\mathrm{f}}}(a, b) := \pi^{l}(a, b)$．

(3) $\mathrm{Ob}(\pi\mathcal{C}_{\mathrm{cf}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}_{\mathrm{cf}})$ で，$\mathrm{Hom}_{\pi\mathcal{C}_{\mathrm{cf}}}(a, b) := \pi(a, b)$．

ホモトピー圏の構成

$a \in C$ に対して $(0 \xrightarrow{!} a) = (0 \hookrightarrow Q(a) \underset{p_a^\star}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} a)$ と分解する．

この $Q(a)$ は cofibrant である．

(つまり任意の a に対して良い対象 (cofibrant な対象) $Q(a)$ を
対応させるのが Q になる．)

但し cofibrant な a に対しては $Q(a) := a$，$p_a^\star := \mathrm{id}_a$ としておく．

$p_a^\star \colon Q(a) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} a$ を a の cofibrant resolution という．

ホモトピー圏の構成

【例】

$\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ を考える．

- f が weak equivalence $\iff$ f が擬同型
- $f\colon X \to Y$ が fibration
  $\iff$ 任意の $n > 0$ に対して $f_n\colon X_n \to Y_n$ が全射
- $f\colon X \to Y$ が cofibration
  $\iff$ 任意の $n \geq 0$ に対して $f_n\colon X_n \to Y_n$ が単射であり
  $\operatorname{coker} f_n$ が射影的

だったから

$$X \in \mathbf{Ch}_{\geq 0}(R) \text{ が cofibrant} \iff \text{各 } X_n \text{ が射影的．}$$

ホモトピー圏の構成

【例】 (続き)

つまり cofibrant resolution $0 \hookrightarrow Q(X) \underset{p_X^\star}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} X$ とは，鎖複体

$$\cdots \to X_2 \to X_1 \to X_0 \to 0 \to \cdots$$

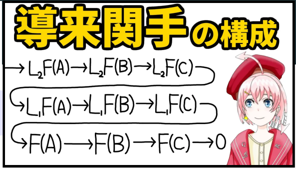
に対して，各対象が射影的な鎖複体 $Q(X)$ と擬同型

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q(X)_2 \arrow[r] \arrow[d, "(p_X^\star)_2"] & Q(X)_1 \arrow[r] \arrow[d, "(p_X^\star)_1"] & Q(X)_0 \arrow[r] \arrow[d, "(p_X^\star)_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

を与えるものである．

ホモトピー圏の構成

射影分解については
この動画を見て→



【例】(続き)

左 R-加群 M を鎖複体 $\cdots \to 0 \to M \to 0 \to \cdot$
と同一視して cofibrant resolution $0 \hookrightarrow Q(M) \underset{p^\star_M}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} M$ を取ると

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Q(M)_2 \arrow[r] \arrow[d, "(p^\star_M)_2"] & Q(M)_1 \arrow[r] \arrow[d, "(p^\star_M)_1"] & Q(M)_0 \arrow[r] \arrow[d, "(p^\star_M)_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

が可換で，この $p^\star_M$ は擬同型である． つまり

$$\cdots \to Q(M)_2 \to Q(M)_1 \to Q(M)_0 \xrightarrow{(p^\star_M)_0} M \to 0$$

が完全列となるから，この $Q(M)$ は M の射影分解である． □

ホモトピー圏の構成

このように $c \in C$ に対して $Q(c) \in C$ が取れるが
これは関手 $Q\colon C \to C$ とは限らない．
(モデル圏の定義を強くして関手にする場合もある)

【命題】

この Q は関手 $Q\colon C \to \pi C_{\mathrm{c}}$ を定める．
この Q を cofibrant replacement functor と呼ぶ．

証明．

まず C の射 $f\colon a \to b$ に対して $Q(f) \in \pi C_{\mathrm{c}}$ を定義する．

ホモトピー圏の構成

【今示したい主張】

$f\colon a \to b$ に対して $Q(f)\colon Qa \to Qb$ in πC_{c} を定義する．

証明．

$f, p_a^\star, p_b^\star$ と 0 から次の実線の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_b^\star"', "\wr"] \\
Q(a) \arrow[rru, dashed, "f^Q"] \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a^\star"'] & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

リフト $f^Q\colon Q(a) \to Q(b)$ が存在する．

このような f^Q は $\overset{r}{\sim}$ を除いて一意と分かる．

よって $Q(f) := [f^Q] \in \pi^r(a, b) = \mathrm{Hom}_{\pi C_c}(a, b)$ と定義できる．

ホモトピー圏の構成

【今示したい主張】

$(0 \xrightarrow{!} a) = (0 \hookrightarrow Q(a) \underset{p_a^\star}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} a)$ は関手 $Q\colon C \to \pi C_{\mathrm{c}}$ を定める．

証明．

$Q(f) := [f^Q] \in \pi^r(a,b) = \mathrm{Hom}_{\pi C_c}(a,b)$

この Q が関手 $C \to \pi C_c$ となることを示す．

まず $Q(\mathrm{id}_a) = [\mathrm{id}_{Q(a)}]$ は明らかである．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & Q(a) \arrow[d, two heads, "p_a^\star"', "\wr"] \\
Q(a) \arrow[ur, dashed, "\mathrm{id}_{Q(a)}"] \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a^\star"'] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

ホモトピー圏の構成

【今示したい主張】

$(0 \xrightarrow{!} a) \mapsto (0 \hookrightarrow Q(a) \overset{\sim}{\underset{p_a^\star}{\twoheadrightarrow}} a)$ は関手 $Q\colon \mathcal{C} \to \pi\mathcal{C}_{\mathrm{c}}$ を定める．

証明.

次に $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ とする．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & 0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_c^\star"', "\wr"] \\
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_b^\star"'] \arrow[d, two heads, "p_b^\star"', "\wr"] \arrow[rru, dashed, "g^Q"] & b \arrow[r, "g"'] & c \arrow[d, "\mathrm{id}_c"] \\
Q(a) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a^\star"'] \arrow[rru, dashed, "f^Q"] & a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[rr, "g"'] & & c
\end{tikzcd}$$

図式から明らかに，$Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f)$ である． $\square$

ホモトピー圏の構成

【命題】

$Q\colon C \to \pi C_{\mathrm{c}}$ を C_{f} に制限することで
関手 $Q\colon \pi C_{\mathrm{f}} \to \pi C_{\mathrm{cf}}$ が得られる． □

双対的に $R\colon C \to \pi C_{\mathrm{f}}$ が $a \underset{i_a^\star}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} R(a) \twoheadrightarrow 1$ により定まる．
（これを fibrant replacement functor という．）
ここから $R\colon \pi C_{\mathrm{c}} \to \pi C_{\mathrm{cf}}$ が定まるから
合成 $C \xrightarrow{Q} \pi C_{\mathrm{c}} \xrightarrow{R} \pi C_{\mathrm{cf}}$ が得られる．

ホモトピー圏の構成

$C \xrightarrow{Q} \pi C_{\mathrm{c}} \xrightarrow{R} \pi C_{\mathrm{cf}}$ を使って $\mathrm{Ho}(C)$ を定義する．

【定義】

モデル圏 C のホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(C)$ を以下のように定める．

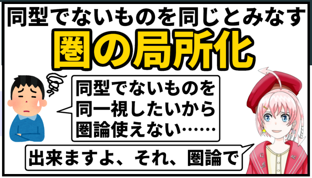
- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(C)) := \mathrm{Ob}(C)$．
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a, b) := \mathrm{Hom}_{\pi C_{\mathrm{cf}}}(RQa, RQb)$．

また関手 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$ を以下のように定める．

- 対象 $a \in C$ に対して $P(a) := a$．
- $f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ に対して $P(f) := RQ(f)$．

ホモトピー圏の構成

局所化については
こっちを見て→



【命題】

C の射 f に対して

f が weak equivalence $\iff P(f)$ が同型射． $\square$

【定理】

$F\colon C\to X$ が関手で「$f\in \mathrm{W} \implies Ff$ は同型」を満たすならば
$H\colon\ \mathrm{Ho}(C)\to X$ が一意に存在して $HP=F$ となる．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "F"'] & \mathrm{Ho}(C) \arrow[d, dashed, "H"] \\ & X \end{tikzcd}$$

（つまり $\langle \mathrm{Ho}(C), P\rangle$ は C の W による局所化である．） $\square$

ホモトピー圏の構成

【命題】

$a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a, b) \cong \pi(Qa, Rb)$ である． □

【命題】

C をモデル圏，X を圏として $F, G\colon \mathrm{Ho}(C) \to X$ を関手とする．
$\theta\colon FP \Rightarrow GP\colon C \to X$ が自然変換ならば
これは自然変換 $F \Rightarrow G\colon \mathrm{Ho}(C) \to X$ を与える． □

導來關手

導来関手

C をモデル圏，X を圏としたとき，関手 $F\colon C \to X$ に対しては

$$f\colon a \xrightarrow{\sim} b \Longrightarrow Ff\colon Fa \to Fb \text{ は同型}$$

とは限らない．つまり本当に考えたい関手は $F'\colon \mathrm{Ho}(C) \to X$ で

$$\begin{aligned} f\colon a \xrightarrow{\sim} b &\Longrightarrow Pf\colon Pa \to Pb \text{ は同型} \\ &\Longrightarrow F'Pf\colon F'Pa \to F'Pb \text{ は同型} \end{aligned}$$

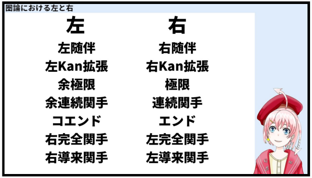
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[dr, dashed, "F'"] & \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & X \end{tikzcd}$$

導来関手

【定義】

C をモデル圏，X を圏，$F\colon C \to X$ を関手とする．
右 Kan 拡張 $\mathbf{L}F := P^{\ddagger}F$ を F の左導来関手という．
左 Kan 拡張 $\mathbf{R}F := P^{\dagger}F$ を F の右導来関手という．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[dr, "\mathbf{L}F"] & \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[dr, "\mathbf{R}F"] & \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & X \end{tikzcd}$$

左と右の話→ 

導来関手

C をモデル圏，X を圏として左導来関手について考える

【命題】

関手 $K\colon C_{\mathrm{c}} \to X$ は trivial cofibration を同型に送るとする．
(つまり $f\colon a \overset{\sim}{\hookrightarrow} b \Longrightarrow Kf$ は同型．)

このとき C_{c} の射 f, g に対して $f \overset{r}{\sim} g \Longrightarrow Kf = Kg$． □

特に $\overline{K}[f] := Kf$ により，関手 $\overline{K}\colon \pi C_{\mathrm{c}} \to X$ が得られる．

【定理】

$F\colon C \to X$ は C_{c} の weak equivalence を同型に送るとする．
このとき $P^{\ddagger}F$，即ち F の左導来関手が存在する．

導来関手

【命題】(さっきの)

$K\colon C_\mathrm{c} \to X$ は trivial cofibration を同型に送るとする．
このとき C_c の射 f, g に対して $f \overset{r}{\sim} g \Longrightarrow Kf = Kg$．

【今示したい主張】

$F\colon C \to X$ は C_c の weak equivalence を同型に送るとする．
このとき $P^\ddagger F$，即ち F の左導来関手が存在する．

証明．

$F|_{C_\mathrm{c}}\colon C_\mathrm{c} \to X$ に命題を適用して $\overline{F}\colon \pi C_\mathrm{c} \to X$ を得る．
$f \in C$ を weak equivalence とすれば $\overline{F}Q(f) \in X$ は同型．

$$C \xrightarrow{Q} \pi C_\mathrm{c} \xrightarrow{\overline{F}} X$$

導来関手

【今示したい主張】

このとき $P^{\ddagger}F$ が存在する．

証明．

よって局所化 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$ の普遍性により

関手 $L\colon\ \mathrm{Ho}(C) \to X$ が一意に存在して $LP = \overline{F}Q$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[drr, dashed, "L"] & & \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "Q"'] & \pi C_{\mathrm{c}} \arrow[r, "\overline{F}"'] & X
\end{tikzcd}
$$

【今示したい主張】

このとき $P^{\ddagger}F$ が存在する.

証明.

$a \in C$ に対して $\varepsilon_a := F(p_a^{\star}) \colon \overline{F}Qa \to Fa$ と定める.
これにより自然変換 $\varepsilon \colon LP = \overline{F}Q \Rightarrow F$ が定まる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[drr, "L"] & & \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "Q"'] \arrow[rr, bend right=60, "F"'] & \pi C_{\mathrm{c}} \arrow[u, phantom, "\|"] \arrow[r, "\overline{F}"'] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & D \\
 & &
\end{tikzcd}
$$

$\langle L, \varepsilon \rangle$ が右 Kan 拡張である. $\square$

導来関手

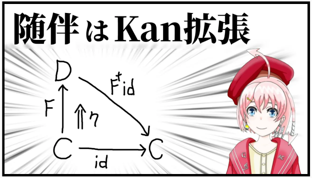
【定理】(今示した)

C をモデル圏，X を圏，$F\colon C \to X$ を関手とする．
F は C_{c} の weak equivalence を同型に送るとする．
このとき $P^{\ddagger}F$，即ち F の左導来関手が存在する．

【定理】

この定理の右 Kan 拡張は絶対右 Kan 拡張である． □

絶対 Kan 拡張についてはこちら→



導来関手

双対的に

【定理】

C をモデル圏，X を圏，$F\colon C \to X$ を関手とする．
F は C_{f} の weak equivalence を同型に送るとする．
このとき左 Kan 拡張 $P^{\dagger}F$，即ち F の右導来関手が存在する．
この $P^{\dagger}F$ は絶対左 Kan 拡張である． $\square$

導来関手

【定義】

C, D をモデル圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, dashed, shift left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[r, dashed, shift right, "\underline{\mathbf{R}}F"'] & \mathrm{Ho}(D) \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

このとき左導来関手 $P^{\ddagger}(PF)$ を
F の total left derived functor といい $\underline{\mathbf{L}}F$ で表す．
また右導来関手 $P^{\dagger}(PF)$ を
F の total right derived functor といい $\underline{\mathbf{R}}F$ で表す．

導来関手

【命題】

$C, \widetilde{C}, D, \widetilde{D}$ を圏，$S\colon C \to \widetilde{C}$，$T\colon D \to \widetilde{D}$ を関手，
$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手とする．

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, dashed, shift left, "S^{\ddagger}(TF)"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \widetilde{D} \arrow[ll, dashed, shift left, "T^{\dagger}(SG)"] \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[rr, shift left, "F"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & D \arrow[u, "T"'] \arrow[ll, shift left, "G"]
\end{tikzcd}$$

絶対右 Kan 拡張 $S^{\ddagger}(TF)$，絶対左 Kan 拡張 $T^{\dagger}(SG)$ が存在するとする．このとき $S^{\ddagger}(TF) \dashv T^{\dagger}(SG)\colon \widetilde{C} \to \widetilde{D}$ である．

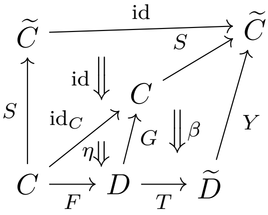
証明.

随伴 $F \dashv G$ の unit，counit を $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow GF$，$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ とする．また絶対右 Kan 拡張 $X := S^{\ddagger}(TF)$，絶対左 Kan 拡張 $Y := T^{\dagger}(SG)$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[r, "X"] & \widetilde{D} \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] & D \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} & \widetilde{D} \arrow[l, "Y"'] \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\beta"] & D \arrow[l, "G"] \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}
$$

証明.

次の合成で自然変換 $S \Rightarrow YTF$ を得る.



$$\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & & \widetilde{C} \\
& & C \arrow[ur, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[r, "F"'] \arrow[urr, "\mathrm{id}_C"] & D \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, "\eta\Downarrow"] & \widetilde{D} \arrow[uur, "Y"'] &
\end{tikzcd}$$

証明．

今 X は絶対右 Kan 拡張だから，$S^{\ddagger}(YTF) = YX$ である．よって $S^{\ddagger}(YTF)$ の普遍性から自然変換 $\widetilde{\eta}\colon \mathrm{id} \Rightarrow YX$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & & \widetilde{C} \\
& & C \arrow[ur, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[urr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\eta\Downarrow"] & D \arrow[ur, "G"'] \arrow[rr, "T"'] & & \widetilde{D} \arrow[uu, "Y"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, "X"] \arrow[d, phantom, shift right=-6, "\Downarrow\alpha"] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\widetilde{\eta}\Downarrow"] & & \widetilde{C} \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[u, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

証明.

同様にして $T^{\dagger}(XSG)$ の普遍性から自然変換 $\widetilde{\varepsilon}\colon XY \Rightarrow \mathrm{id}$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}
& & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\widetilde{\varepsilon}"] & \\
C \arrow[urr, "S"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uur, "Y"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
C \arrow[urr, "S"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & D \arrow[drr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

証明.

このとき $\widetilde{\varepsilon}_X \circ X\widetilde{\eta} = \mathrm{id}_X$，$Y\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\eta}_Y = \mathrm{id}_Y$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, "X"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & & \widetilde{C} \arrow[dr, "X"] \arrow[dl, phantom, "\widetilde{\eta}\Downarrow"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\widetilde{\varepsilon}"] & \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[ur, "Y"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow\widetilde{\varepsilon}"] & \\
& C \arrow[urr, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Downarrow", shift left=3] & D \arrow[u, "G"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uur, "Y"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
& C \arrow[urr, "S"'] \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon", shift left=4] & D \arrow[drr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Downarrow", shift left=3] & D \arrow[u, "G"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

証明.

$$
=\quad
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
& C \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & D \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
\quad=\quad
\begin{tikzcd}
& \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
C \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"] & D \arrow[dr, "T"'] & \\
& & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

であるが，右 Kan 拡張 $\langle X, \alpha\rangle$ の普遍性から $\widetilde{\varepsilon}_X \circ X\widetilde{\eta} = \mathrm{id}_X$ が分かる．同様にして $Y\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\eta}_Y = \mathrm{id}_Y$ も分かる． □

【定理】

C, D をモデル圏，$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手として
次の 2 条件を満たすとする．

(1) F は cofibrant 間の weak equivalence を保つ．
(即ち $a, b \in C$ が cofibrant で $f\colon a \to b$ が weak equivalence
ならば Ff も weak equivalence．)

(2) G は fibrant 間の weak equivalence を保つ．

このとき $\underline{\mathbf{L}}F$ と $\underline{\mathbf{R}}G$ が存在して
随伴 $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G\colon \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ が成り立つ．

【定理】 (さっき示した)

C_{c} の射 f が weak equivalence ならば Ff は同型とする.
$\Longrightarrow F$ の左導来関手 $\mathbf{L}F$ が存在する (これは絶対 Kan 拡張).

証明.

(1) の条件より，C_{c} の射 f が weak equivalence ならば
Ff は weak equivalence になる．従って PFf は同型である.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, dashed, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(D) \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "P"'] \end{tikzcd}$$

PF は定理の条件を満たすから $\underline{\mathbf{L}}F = P^{\ddagger}(PF)$ が存在する.

導来関手

【定理】 (さっき示した)

C_c の射 f が weak equivalence ならば Ff は同型とする．
$\Longrightarrow$ F の左導来関手 $\underline{\mathbf{L}}F$ が存在する (これは絶対 Kan 拡張)．

証明.

同様にして右導来関手 $\underline{\mathbf{R}}G$ も存在する．
定理より，これらは絶対 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, shift left=1.5, "\underline{\mathbf{L}}F = P^{\ddagger}(PF)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathrm{Ho}(D) \arrow[l, shift left=1.5, "\underline{\mathbf{R}}F = P^{\dagger}(PF)"] \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, shift left=1.5, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[r, shift right=1.5, "G"'] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}$$

故に前命題より $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G$ である． □

【例】

$\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ を考える．左 R-加群 N を鎖複体

$$\cdots \to 0 \to 0 \to N \to 0 \to \cdots$$

と同一視して cofibrant resolution $0 \hookrightarrow Q(N) \xrightarrow{\sim} N$ を取ると

$$\cdots \to Q(N)_2 \to Q(N)_1 \to Q(N)_0 \to N \to 0$$

は射影分解であることをさっき見た．

右 R 加群 M に対してテンソル積 $M \otimes_R -$ は
関手 $T\colon \mathbf{Ch}_{\geq 0}(R) \to \mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z})$ を定める．

このとき total left derived functor $\underline{\mathbf{L}}T = P^{\ddagger}(PT)$ が存在する．

導来関手

【今示したい主張】

$\underline{\mathbf{L}}T = P^{\ddagger}(PT)$ が存在する．

証明.

T は cofibrant 間の weak equivalence を保つことが分かる．

よってさっきと同様に $\underline{\mathbf{L}}T$ が存在することが分かる． $\square$

【例】 (続き)

導来関手の構成

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[drr, "L"] & & \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "Q"'] \arrow[rr, bend right=60, "F"'] & \pi C_{\mathrm{c}} \arrow[r, "\overline{F}"'] \arrow[u, phantom, "\parallel"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"] & X \\
& {} &
\end{tikzcd}
$$

より $\underline{\mathbf{L}}T(N) = PTQ(N) \in \mathrm{Ho}(\mathbf{Ch}_{\geq 0}(\mathbb{Z}))$ である．

つまり $H_n(\underline{\mathbf{L}}T(N)) \cong \mathrm{Tor}_n(M, N)$ となる． $\square$

【命題】

モデル圏 C, D の間の随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ に対して

(1) F が cofibration を保つ $\iff$ G が trivial fibration を保つ.

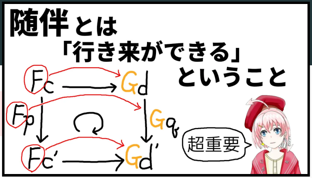
(2) F が trivial cofibration を保つ $\iff$ G が fibration を保つ.

証明.

同様なので (1) の ($\Longrightarrow$) のみ示す.

F が cofibration を保つとする.
D の $f\colon a \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} b$ に対して Gf が trivial fibration を示す.

即ち cofibration に対する RLP を示す.



【今示したい主張】

Gf は cofibration に対して RLP を持つ．

証明.

$g\colon c_0 \hookrightarrow c_1$ を cofibration として次の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
c_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "g"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
c_1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & Gb
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
Fc_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "Fg"'] & a \arrow[d, two heads, "f"', "\wr"] \\
Fc_1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & b
\end{tikzcd}
$$

$F \dashv G$ より右の可換図式が得られる．
モデル圏の定義より点線の射が存在して可換となる．
再び $F \dashv G$ より左の点線の射が得られる． $\square$

【定義】

モデル圏 C, D の間の随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ に対して
以下の条件が同値であることが前命題より分かる．

- F が cofibration と trivial cofibration を保つ．
- G が fibration と trivial fibration を保つ．
- F が cofibration を保ち，G が fibration を保つ．
- F が trivial cofibration を保ち，G が trivial fibration を保つ．

これらの条件を満たす随伴 $F \dashv G$ を Quillen 随伴と呼ぶ．
また F を左 Quillen 関手，G を右 Quillen 関手という．

【命題】

$F \dashv G\colon C \to D$ を Quillen 随伴とするとき

(1) F は cofibrant を保つ.

(2) F は cofibrant 間の weak equivalence を保つ.

(3) G は fibrant を保つ.

(4) G は fibrant 間の weak equivalence を保つ.

証明.

同様なので (1)(2) のみ示す.

導来関手

【今示したい主張】

(1) F は cofibrant を保つ．

証明．

a を cofibrant とする．即ち $!\colon 0 \to a$ が cofibration である．

F が左 Quillen 関手 (cofibration を保つ) だから
$F(!)\colon F(0) \to F(a)$ も cofibration である．

左随伴は始対象と交換するので
$0 \to F(a)$ が cofibration となり $F(a)$ は cofibrant である．

【今示したい主張】

(2) F は cofibrant 間の weak equivalence を保つ．

証明．

$a, b \in C$ を cofibrant として $f\colon a \xrightarrow{\sim} b$

とする (Ff が weak equivalence を示す)．

$b \hookleftarrow 0 \hookrightarrow a$ の pushout を取る．

cofibration の pushout は cofibration より

i_a, i_b は cofibration である．

$f\colon a \to b$，$\mathrm{id}_b\colon b \to b$ から普遍性で

点線の射 h を取る．

この h を $h = (a \amalg b \underset{i}{\hookrightarrow} x \underset{p}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} b)$ と分解する．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & a \arrow[d, hook, "i_a"] \arrow[ddr, bend left, "f"', "\sim"] & \\
b \arrow[r, hook, "i_b"'] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}_b"', "\sim"] & a \amalg b \arrow[ul, phantom, "\ulcorner", very near start] \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & b
\end{tikzcd}
$$

【今示したい主張】

Ff が weak equivalence.

証明.

cofibration の合成は cofibration なので
$i \circ i_a$ と $i \circ i_b$ は cofibration である.

2-out-of-3 により $i \circ i_a$ と $i \circ i_b$ は
trivial cofibration となる.

この図式を F で送る.

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, hook, "i_a"] \arrow[dddrr, bend left, "\sim", "f"'] & & \\
b \arrow[r, hook, "i_b"'] \arrow[ddrrr, bend right, "\sim", "\mathrm{id}_b"'] & a \amalg b \arrow[dr, hook, "i"'] & & \\
 & & x \arrow[dr, "\sim", "p"'] & \\
 & & & b
\end{tikzcd}
$$

【今示したい主張】

Ff が weak equivalence．

証明.

F は trivial cofibration を保つから
右の図式を得る．
2-out-of-3 により
Ff も weak equivalence となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & Fa \arrow[dd, hook, "\wr"', "F(i\circ i_a)"] \arrow[ddr, bend left, "Ff"] & \\
Fb \arrow[drr, hook, "\sim", "F(i\circ i_b)"'] \arrow[drrr, bend right, "\sim", "\mathrm{id}_{Fb}"'] & & & \\
 & & Fx \arrow[r, "Fp"'] & Fb
\end{tikzcd}
$$

$\square$

導来関手

【命題】 (今示した)

$F \dashv G\colon C \to D$ を Quillen 随伴とするとき

(1) F は cofibrant 間の weak equivalence を保つ.

(2) G は fibrant 間の weak equivalence を保つ.

【定理】 (さっき示した)

$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手として

(1) F は cofibrant 間の weak equivalence を保つ.

(2) G は fibrant 間の weak equivalence を保つ.

このとき $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G\colon \operatorname{Ho}(C) \to \operatorname{Ho}(D)$ である.

従って次の定理を得る．

【定理】

$F \dashv G\colon C \to D$ を Quillen 随伴関手とする．
このとき $\underline{\mathbf{L}}F, \underline{\mathbf{R}}G$ が存在して
$\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G\colon \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ は随伴である． $\square$

そこで次のように定義する．

【定義】

Quillen 随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ が Quillen 同値
$\iff \underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G\colon \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ が圏同値を与える．

つまり Quillen 同値とは「weak equivalence を同一視する立場で見れば，C と D は同じ圏である」ということ．

単体的集合の解説動画→

【例】

圏 $\mathbb{\Delta}$ を次により定める． #0 は自然数

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{\Delta}) := \{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ (但し $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$)
- 射は順序を保つ写像 $f\colon [m] \to [n]$ とする．

$\widehat{\mathbb{\Delta}} := \mathbf{Set}^{\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}}}$ を単体的集合の圏という．

左 Kan 拡張により次の随伴を得る (普遍随伴)

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{CGH} \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}
$$

$|-| := y^\dagger F$ を幾何学的実現という．

$\mathrm{Sing} := F^\dagger y$ を singular functor という．

導来関手

【例】 (続き)

$\widehat{\mathbb{\Delta}}$ は次によりモデル圏になる．

- f が weak equivalence
  $\iff |f|$ が $\mathbf{CGH}$ の weak equivalence．
- f が fibration $\iff f$ が Kan fibration．
- f が cofibration $\iff f$ がモノ射．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=1.5, "|-|"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{CGH} \arrow[ul, shift left=1.5, "\mathrm{Sing}"]
\end{tikzcd}$$

このとき普遍随伴 $|-| \dashv \mathrm{Sing}$ は Quillen 同値である．
つまり「weak equivalence を同一視する立場」では
$\widehat{\mathbb{\Delta}}$ と $\mathbf{CGH}$ は「同じ圏」である．つまり
単体的集合と C.G.H. な位相空間は「同じもの」である．

導来関手

【例】(続き)

これはもう少し具体的な主張を
書くと次のようなことが成り立つ．

$$\begin{tikzcd} \widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=1.5, "|-|"] & \\ \mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{CGH} \arrow[ul, shift left=1.5, "\mathrm{Sing}"] \arrow[ul, phantom, "\perp"] \end{tikzcd}$$

$X \in \mathbf{CGH}$ に対して
$|\mathrm{Sing}(X)|$ と X は weak equivalence である．

$S \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ に対して
S と $\mathrm{Sing}|S|$ は weak equivalence である．

つまり weak equivalence で同一視すれば
Sing と $|-|$ は「互いに逆」であり
この対応により $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ と $\mathbf{CGH}$ を「同じ圏」とみなせる． □

導来関手

Quillen 同値の定義は対称ではない．
つまり Quillen 同値 $F \dashv G\colon C \to D$ が存在するからといって
Quillen 同値 $F' \dashv G'\colon D \to C$ が存在するかは分からない．
そこで次のように定義することがある．

【定義】

モデル圏 C と D が Quillen 同値
$\iff$ Quillen 同値の列

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left=2, "F_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C_1 \arrow[l, shift left=2, "G_1"] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "F_2"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \cdots \arrow[l, shift right=2, leftarrow, "G_2"'] \arrow[r, shift right=2, leftarrow, "F_n"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C_n \arrow[l, shift right=2, leftarrow, "G_n"'] \arrow[r, shift left=2, "F_{n+1}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left=2, "G_{n+1}"] \end{tikzcd}$$

が存在する．

導来関手

【定義】

次のように定めると strict 2-category になる ($\mathbf{Model}$ で表す)

- モデル圏を対象とする.
- Quillen 随伴 $F \dashv G\colon A \to B$ を A から B への 1-morphism とする.
- 自然変換 $F \Rightarrow F'$ を，$F \dashv G$ から $F' \dashv G'$ への 2-morphism とする.

【定理】

ホモトピー圏を取る操作は pseudofunctor $\mathrm{Ho}\colon \mathbf{Model} \to \mathrm{Adj}$ を与える. □

∞-category

第 11 回関西すうがく徒のつどい「高次元圏入門」
`https://www.youtube.com/watch?v=SZvWqu8xfbY`
↑この回で $(\infty, 1)$-category には様々な定義があることを紹介した．

- quasi-category (weak Kan complex)
- simplicial category
- topological category
- Segal category
- complete Segal space

これらは全て「同じ」であると説明したが，これはつまり

【定理】

- quasi-category のなす圏
- simplicial category のなす圏
- topological category のなす圏
- Segal category のなす圏
- complete Segal space のなす圏

を考えると，これらは全てモデル圏になり
更に互いに Quillen 同値である． □

このように，モデル圏を使ってこれらの定義が「同じ」であることを説明することができる．

∞-category

$\mathrm{Hom}(a, b) \in V$ となるような「圏」を V-豊穣圏という．

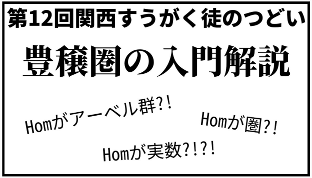
【定義】

CGH-豊穣圏を topological category という．

【定義】

$\widehat{\mathbb{\Delta}}$-豊穣圏を simplicial category という．

豊穣圏はこれを見て→



簡単のため $V = \mathbf{CGH}$ or $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ とする．
小 V-豊穣圏がなす圏を V-$\mathbf{Cat}$ と書く．

【定義】

V-$\mathbf{Cat}$ はモデル圏となる．

ざっくりいうと

$\mathcal{C}, \mathcal{D} \in V$-$\mathbf{Cat}$ が weak equivalence
$\Longleftrightarrow$ V における weak equivalence を除いて「同じ圏」である
(Dwyer-Kan 同値)

というようにしてモデル圏になっている．

幾何学的実現 $|-|\colon \widehat{\mathbb{\Delta}} \to \mathbf{CGH}$ から
関手 $F\colon \widehat{\mathbb{\Delta}}\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathbf{CGH}\text{-}\mathbf{Cat}$ が

$\mathcal{C}$ を $\widehat{\mathbb{\Delta}}$-豊穣圏とするとき，$\mathbf{CGH}$-豊穣圏 $F\mathcal{C}$ を
$F\mathcal{C}(a,b) := |\mathcal{C}(a,b)|$ により定める

により定まる．
同様に Sing から $G\colon \mathbf{CGH}\text{-}\mathbf{Cat} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}\text{-}\mathbf{Cat}$ が定まる．

【定理】

$F \dashv G\colon \widehat{\mathbb{\Delta}}\text{-}\mathbf{Cat} \to \mathbf{CGH}\text{-}\mathbf{Cat}$ は Quillen 同値である． □

これにより simplicial category と topological category は同じものである．