自然変換の定義について

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 6 日

自然変換の定義に現れる可換図式は一体何なのか？ と思ったことはないだろうか．関手の定義は，要は《演算》と交換するということだから，「圏の準同型」だと思えば当然の定義である．では「関手の準同型」であるべき自然変換の定義は何なのだろうか．何らかの《演算》と交換するという事なのか？

それを述べるために，一旦自然変換の定義は忘れて，次の定義をする．

定義. Cartesian 閉圏とは次の条件を満たす圏 C のことである．

(1) C は有限直積を持つ．
(2) 任意の対象 $x \in C$ に対して関手 $(-)^x\colon C \to C$ が与えられている．
(3) 任意の $a, b, x \in C$ に対して全単射 $\varphi_{abx}\colon \mathrm{Hom}_C(a \times x, b) \to \mathrm{Hom}_C(a, b^x)$ が与えられている．
(4) $f\colon a \times x \to b$, $g\colon a' \times x \to b'$, $p\colon a \to a'$, $q\colon b \to b'$ とすると，次の 2 つの図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
a \times x \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p \times x"'] & b \arrow[d, "q"] \\
a' \times x \arrow[r, "g"'] & b'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\varphi_{abx}(f)"] \arrow[d, "p"'] & b^x \arrow[d, "q^x"] \\
a' \arrow[r, "\varphi_{a'b'x}(g)"'] & (b')^x
\end{tikzcd}
$$

このとき左の図式が可換 $\Longleftrightarrow$ 右の図式が可換となる．（これはつまり，φ_{abx} が a, b について自然ということである．）

例えば集合の圏 **Set** は Cartesian 閉圏である．

さて，圏の圏 **Cat** は Cartesian 閉圏だろうか？ これは勿論 YES であって，圏 B, C に対して B^C を関手圏とすればよい．ところが我々は今自然変換の定義を忘れているの

で関手圏は定義できず，Cartesian 閉圏かどうかは分からない．そこで **Cat** が Cartesian 閉圏であるという仮定をしよう．すると圏 B, X に対して圏 B^X が (具体的にどんなものかは分からないが) 存在して，圏 A, B に対して全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times X, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, B^X) \tag{1}$$

が存在することになる．今 $\mathbb{1} = \{*\}$ を 1 点圏とすれば，圏 B^X の対象と関手 $\mathbb{1} \to B^X$ は 1 対 1 に対応する．故に

$$\mathrm{Ob}(B^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{1}, B^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{1} \times X, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, B)$$

となる．つまり圏 B^X の対象とは関手 $X \to B$ のことだと思ってよい．要するに，**Cat** を Cartesian 閉圏にしようと思うと，B^X は $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, B)$ を圏にしたものにならざるをえないということである．

では B^X の射はどうなっているのだろうか．それを見るために $\mathbb{2} = \{0 < 1\}$ を考える．この圏での射 $0 \to 1$ を l と書くことにする．圏 B^X の射は関手 $\mathbb{2} \to B^X$ と 1 対 1 に対応する．従って

$$\mathrm{Mor}(B^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{2}, B^X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{2} \times X, B) \tag{2}$$

となる．つまり圏 B^X の射とは関手 $\mathbb{2} \times X \to B$ のことだと思ってよい．今 θ を圏 B^X の射として，全単射 (2) で対応する関手を

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Mor}(B^X) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{2}, B^X) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{2} \times X, B) \\
\Cup & & \Cup & & \Cup \\
\theta & \longmapsto & K & \longmapsto & T
\end{array}$$

とする．このとき $\mathrm{dom}(\theta) = K(0)$，$\mathrm{cod}(\theta) = K(1)$ である．また関手 $0\colon \mathbb{1} \to \mathbb{2}$ を $0(*) := 0$ で定めると，同型 (1) が A について自然だから

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[d, "0"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{1}, B^X) \arrow[r, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{1} \times X, B) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(X, B) \\
\mathbb{2} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{2}, B^X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[u, "-\circ 0"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathbb{2} \times X, B) \arrow[u, "-\circ(0 \times \mathrm{id}_X)"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．よって $K\colon \mathbb{2} \to B^X$ の行き先を見れば $K(0) = T(0, -)$ が分かる．つまり $\mathrm{dom}(\theta) = K(0) = T(0, -)$ である．同様にして $\mathrm{cod}(\theta) = K(1) = T(1, -)$ も分かる．

従って逆に $F, G\colon X \to B$ を関手とするとき，F から G への (圏 B^X における) 射とは，関手 $T\colon \mathbb{2} \times X \to B$ であって $T(0, -) = F$，$T(1, -) = G$ を満たすもののことであ

る．このような関手 T は，各 $x \in X$ に対して $\theta_x := T(l, \mathrm{id}_x)\colon Fx \to Gx$ を決めれば定まる．即ち，F から G への射とは B の射の族 $\{\theta_x\colon Fx \to Gx\}_{x\in X}$ のことだと思ってよい．但し，このような射の族が全て F から G への射になるわけではなく，T が関手になるという条件が付く．今 $k\colon x \to z$ を X の射とすると，圏 $\mathbb{2} \times X$ において

$$\langle \mathrm{id}_1, k\rangle \circ \langle l, \mathrm{id}_x\rangle = \langle l, k\rangle = \langle l, \mathrm{id}_z\rangle \circ \langle \mathrm{id}_0, k\rangle \tag{3}$$

$$\begin{tikzcd}
\langle 0, x\rangle \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_0, k\rangle"] \arrow[d, "\langle l, \mathrm{id}_x\rangle"'] & \langle 0, z\rangle \arrow[d, "\langle l, \mathrm{id}_z\rangle"] \\
\langle 1, x\rangle \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_1, k\rangle"'] & \langle 1, z\rangle
\end{tikzcd}$$

となるから，両辺に T を適用することで

$$Gk \circ \theta_x = T(\mathrm{id}_1, k) \circ T(l, \mathrm{id}_x) = T(l, \mathrm{id}_z) \circ T(\mathrm{id}_0, k) = \theta_z \circ Fk$$

が分かる．逆に $Gk \circ \theta_x = \theta_z \circ Fk$ が成り立てば，θ が定める T が関手になることも分かる．従って，F から G への (圏 B^X における) 射とは，自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow G$ に他ならないということが分かった．

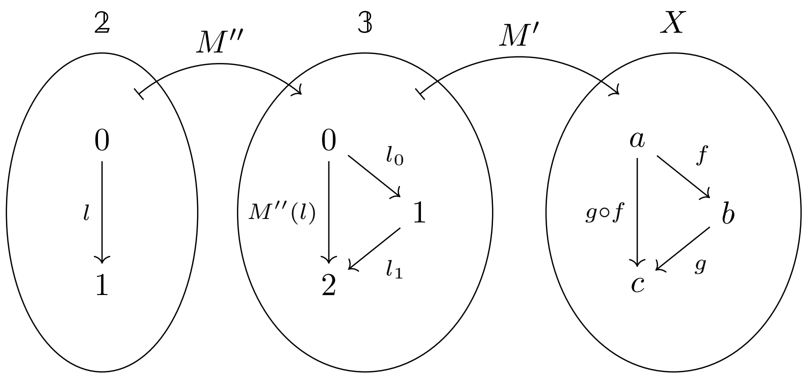
以上のように，**Cat** を Cartesian 閉圏にしようと思うと，自然変換 (関手の間の射) はこのように定義せざるをえないのである．

ちなみに，自然変換の合成の定義もここから出てくる．一般に，圏 X の射 $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ に対応する関手 $K, L\colon \mathbb{2} \to X$ を取ったとき，$g \circ f$ に対応する関手 $\mathbb{2} \to X$ は次のように与えられる．まず $\mathbb{3}$ を順序集合 $\{0 < 1 < 2\}$ を圏とみなしたものとして，その射を $l_0\colon 0 \to 1$，$l_1\colon 1 \to 2$ と書く．関手 $M'\colon \mathbb{3} \to X$ を

- $M'(0) := a$，$M'(1) := b$，$M'(2) := c$.
- $M'(l_0) := f$，$M'(l_1) := g$.

で定め，関手 $M''\colon \mathbb{2} \to \mathbb{3}$ を $M''(0) := 0$，$M''(1) := 2$ で定める．このときこれらの合成

$M := M'M'' \colon \mathbb{2} \to X$ に対応する X の射が $g \circ f \colon a \to c$ である．



これを踏まえて $\theta, \sigma \in \mathrm{Mor}(B^X)$ を $\mathrm{cod}(\theta) = \mathrm{dom}(\sigma)$ となるように取る．θ, σ に対応する関手 $K, L \colon \mathbb{2} \to B^X$ を取り，上で述べたように関手 M, M', M'' を定義する．M に対応する射が $\sigma \circ \theta \in \mathrm{Mor}(B^X)$ であるから，M に対応する関手 $T \colon \mathbb{2} \times X \to B$ を考えれば $(\sigma \circ \theta)_a = T(l, \mathrm{id}_a)$ となる．次に $M' \colon \mathbb{3} \to B^X$ に対応する関手 $T' \colon \mathbb{3} \times X \to B$ を取ると $T(l, -) = T'(M''(l), -) = T'(l_1 \circ l_0, -)$ である．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{2} \times X \arrow[d, "M'' \times \mathrm{id}_X"'] \arrow[dr, "T"] & \\ \mathbb{3} \times X \arrow[r, "T'"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{2} \arrow[d, "M''"'] \arrow[dr, "M"] & \\ \mathbb{3} \arrow[r, "M'"'] & B^X \end{tikzcd}$$

従って $T'(l_1 \circ l_0, \mathrm{id}_a) = T(l, \mathrm{id}_a) = (\sigma \circ \theta)_a$ が分かる．一方

$$T'(l_1 \circ l_0, \mathrm{id}_a) = T'(l_1, \mathrm{id}_a) \circ T'(l_0, \mathrm{id}_a) = \sigma_a \circ \theta_a$$

となるから $(\sigma \circ \theta)_a = \sigma_a \circ \theta_a$ であることが分かる．

さて，以上により自然変換の条件がなんなのかは分かったが，ここで次の定義をしよう．

定義. C, D を圏として $F, G \colon C \to D$ を関手とする．F から G への変換とは，D の射の族 $\theta = \{\theta_a \colon Fa \to Ga\}_{a \in C}$ のことをいう．θ が F から G への変換であることを記号で $\theta \colon F \rightrightarrows G$ と表すことにする．

つまり，自然変換から自然性の条件を完全に取り除いたものである．このように定義すれば明らかに，関手 $C \to D$ を対象，変換を射とすれば圏になる (合成は成分ごとに考える)．この圏をここでは $\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(C, D)$ と書くことにする．この定義は，本当に何も知らない状態で関手全体を圏にしようと思うとまず思いつく定義だと思うが，上で述べた通りこれでは

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(B, C))$$

は成り立たない．そこで $\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(C,D)$ の定義を変えて得られたのが関手圏 D^C であったが，実は直積 $A\times B$ の方の定義を変える方法もある．

定義. 圏 C に対して，部分圏 $C_0\subset C$ を「$\mathrm{Ob}(C_0)=\mathrm{Ob}(C)$ となる離散圏」と定めることにする．包含関手を $J\colon C_0\to C$ で表す．また関手 $F\colon C\to D$ を C_0 に制限して得られる関手 $C_0\to D_0$ を F_0 で表す．

このとき $\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(B,C)=C^{B_0}$ である．

定義. 圏 A,B に対して圏 $A\mathbin{\square}B$ を，$\mathbf{Cat}$ における pushout

$$
\begin{tikzcd}
A_0\times B_0 \arrow[r, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times J"'] & A\times B_0 \arrow[d, "P_1"] \\
A_0\times B \arrow[r, "P_0"'] & A\mathbin{\square}B
\end{tikzcd}
$$

で定める．$A\mathbin{\square}B$ を funny tensor product という．

命題 4. funny tensor product は関手 $\square\colon\mathbf{Cat}\times\mathbf{Cat}\to\mathbf{Cat}$ を与える．

証明. $F\colon C\to C'$，$G\colon D\to D'$ を関手とする．次の図式の実線部は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
C_0\times D_0 \arrow[rr, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times J"'] \arrow[dd, "F_0\times G_0"'] & & C\times D_0 \arrow[dr] \arrow[dd, "F\times G_0"] & \\
& C_0\times D \arrow[rr] \arrow[dd, "F_0\times G"] & & C\mathbin{\square}D \arrow[dd, dashed, "F\square G"] \\
C'_0\times D'_0 \arrow[rr, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times J"'] & & C'\times D'_0 \arrow[dr] & \\
& C'_0\times D' \arrow[rr] & & C'\mathbin{\square}D'
\end{tikzcd}
$$

よって pushout の普遍性により点線の射が得られる．これを $F\mathbin{\square}G$ とする．このとき $\square$ が関手 $\mathbf{Cat}\times\mathbf{Cat}\to\mathbf{Cat}$ となることが pushout の普遍性により容易に分かる． $\square$

命題 5. $\langle\mathbf{Cat},\square,\mathbb{1}\rangle$ はモノイダル圏になる．

証明. 省略． $\square$

定理 6. 圏 X に対して随伴 $-\mathbin{\square}X\dashv\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,-)\colon\mathbf{Cat}\to\mathbf{Cat}$ が成り立つ．即ち，圏 A,B について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A\mathbin{\square}X,B)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A,\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,B))$$

が存在する．

証明．まず初めに写像 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \,\Box\, X, B) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X, B))$ を定義する．そこで写像 φ' を合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \,\Box\, X, B) \xrightarrow{-\circ P_0} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times X_0, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}(X_0, B))$$

で定義する．つまり関手 $T\colon A \,\Box\, X \to B$ に対して $\varphi'(T)\colon A \to \mathrm{Fun}(X_0, B)$ であるから，$a \in A$ に対して $\varphi'(T)(a)\colon X_0 \to B$ となる．同様に写像 φ'' を合成

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \,\Box\, X, B) \xrightarrow{-\circ P_1} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A_0 \times X, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A_0, \mathrm{Fun}(X, B))$$

で定義する．こちらは $a \in A$ に対して $\varphi''(T)(a)\colon X \to B$ となる．また $a \in A$ ，$x \in X$ に対して $\varphi'(T)(a)(x) = \varphi''(T)(a)(x)$ である．

$\because$) 定義より $\varphi'(T)(a)(x) = TP_0(a,x)$，$\varphi''(T)(a)(x) = TP_1(a,x)$ である．一方で $A \,\Box\, X$ の定義

$$\begin{tikzcd} A_0 \times X_0 \arrow[r, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times J"'] & A \times X_0 \arrow[d, "P_0"] \\ A_0 \times X \arrow[r, "P_1"'] & A \,\Box\, X \end{tikzcd}$$

により $P_0(a,x) = P_0 \circ (J \times \mathrm{id})(a,x) = P_1 \circ (\mathrm{id} \times J)(a,x) = P_1(a,x)$ である．よって $\varphi'(T)(a)(x) = \varphi''(T)(a)(x)$ が分かった．

さて，$\varphi(T)$ を

- $a \in A$ に対して $\varphi(T)(a) := \varphi''(T)(a)\colon X \to B$ とする．
- A の射 $f\colon a \to a'$ に対して変換 $\varphi(T)(f)\colon \varphi(T)(a) \rightrightarrows \varphi(T)(a')$ を，$x \in X$ に対して $\varphi(T)(f)_x := \varphi'(T)(f)_x\colon \varphi'(T)(a)(x) \to \varphi'(T)(a')(x)$ で定める．

で定義するとこれは関手 $\varphi(T)\colon A \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X, B)$ である．よって写像

$$\varphi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \,\Box\, X, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X, B))$$

が得られた．

次に ψ を定義するため，$F\colon A \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X, B)$ を関手とする．射 $\theta \in \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X, B)$ (つまり変換) は容易に射 $\theta \in \mathrm{Fun}(X_0, B)$ (つまり自然変換) とみなすことができるから，F を関手 $F\colon A \to \mathrm{Fun}(X_0, B)$ とみなすことができる．よって随伴により $\widetilde{F}\colon A \times X_0 \to B$ を得る．次に関手 $\widehat{F}\colon A_0 \times X \to B$ を次のように定義する．

- $a \in A$，$x \in X$ に対して $\widehat{F}(a,x) := F(a)(x)$ とする．
- $a \in A$ と，X の射 $k\colon x \to x'$ に対して $\widehat{F}(\mathrm{id}_a, k) := F(a)(k)$ とする．

すると pushout の普遍性により次の点線の関手 $\psi(F)$ が得られる．

$$\begin{tikzcd}
A_0 \times X_0 \arrow[r, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times J"'] & A \times X_0 \arrow[d, "P_0"'] \arrow[ddr, bend left, "\widetilde{F}"] & \\
A_0 \times X \arrow[r, "P_1"] \arrow[drr, bend right, "\widehat{F}"'] & A \,\square\, X \arrow[dr, dashed, "\psi(F)"'] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

従って写像 $\psi\colon \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,B)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \,\square\, X, B)$ が得られた．

$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$ を示す．そのために $T\colon A \,\square\, X \to B$ とすると定義より $\widetilde{\varphi(T)} = TP_0$，$\widehat{\varphi(T)} = TP_1$ である．故に $\psi(\varphi(T))$ は次の点線の射になる．

$$\begin{tikzcd}
A_0 \times X_0 \arrow[r, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times J"'] & A \times X_0 \arrow[d, "P_0"'] \arrow[ddr, bend left, "TP_0"] & \\
A_0 \times X \arrow[r, "P_1"] \arrow[drr, bend right, "TP_1"'] & A \,\square\, X \arrow[dr, dashed, "\psi(\varphi(T))"'] & \\
& & B
\end{tikzcd}$$

よって pushout の普遍性から明らかに $\psi(\varphi(T)) = T$ である．

次に $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ を示す．そのために $F\colon A \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,B)$ を関手すると，定義より $\varphi(\psi(F))$ は

- $a \in A$ に対して $\varphi(\psi(F))(a) = \widehat{F}(a,-) = F(a)$.
- A の射 $f\colon a \to a'$ に対して変換 $\varphi(\psi(F))(f)\colon \varphi(\psi(F))(a) \rightrightarrows \varphi(\psi(F))(a')$ を，$x \in X$ に対して $\varphi(\psi(F))(f)_x := \widetilde{F}(f,x) = F(f)_x$ で定める．

により定義される関手である．よって $\varphi(\psi(F)) = F$ である．

最後に ψ が A, B について自然であることを示せばよい．従って関手 $K\colon A' \to A$，$L\colon B \to B'$ に対して次の図式が可換になることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \,\square\, X, B) \arrow[d, "L\circ-\circ(K\square\mathrm{id}_X)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,B)) \arrow[l, "\psi"'] \arrow[d, "\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,L)\circ-\circ K"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A' \,\square\, X, B') & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A', \mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(X,B')) \arrow[l, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

即ち $F\colon A \to \mathrm{Fun_{un}}(X, B)$ に対して $\psi(\mathrm{Fun_{un}}(X, L) \circ F \circ K) = L \circ \psi(F) \circ (K \mathbin{\Box} \mathrm{id}_X)$ を示せばよい．$Z := \mathrm{Fun_{un}}(X, L) \circ F \circ K$ と置く．図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A \times X_0, B) \arrow[d, "L \circ - \circ (K \times \mathrm{id}_X)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A, \mathrm{Fun}(X_0, B)) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{Fun}(X_0, L) \circ - \circ K"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A' \times X_0, B') & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}}(A', \mathrm{Fun}(X_0, B')) \arrow[l, "\cong"']
\end{tikzcd}$$

が可換だから $\widetilde{Z} = L \circ \widetilde{F} \circ (K \times \mathrm{id}_X)$ が分かる．

次に $\widehat{Z}$ を考えるが，その前に $\widehat{FK}$ は，定義より $a \in A'$，$x, x' \in X$，$k\colon x \to x'$ に対して

$$\begin{aligned}
\widehat{FK}(a, x) &= FK(a)(x) = F(Ka)(x) = \widehat{F} \circ (K_0 \times \mathrm{id}_X)(a, x) \\
\widehat{FK}(\mathrm{id}_a, k) &= FK(a)(k) = F(Ka)(k) = \widehat{F} \circ (K_0 \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_a, k)
\end{aligned}$$

となるから $\widehat{FK} = \widehat{F} \circ (K_0 \times \mathrm{id}_X)$ である．故に

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}(a, x) &= Z(a)(x) = \bigl(L \circ FK(a)\bigr)(x) = L\bigl(FK(a)(x)\bigr) = L\bigl(\widehat{FK}(a, x)\bigr) \\
&= L \circ \widehat{F} \circ (K_0 \times \mathrm{id}_X)(a, x) \\
\widehat{Z}(\mathrm{id}_a, k) &= Z(a)(k) = \bigl(L \circ FK(a)\bigr)(k) = L\bigl(FK(a)(k)\bigr) = L\bigl(\widehat{FK}(\mathrm{id}_a, k)\bigr) \\
&= L \circ \widehat{F} \circ (K_0 \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_a, k)
\end{aligned}$$

となるから $\widehat{Z} = L \circ \widehat{F} \circ (K_0 \times \mathrm{id})$ が分かる．

以上により，次の図式を考えれば

$$\begin{tikzcd}
A_0 \times X_0 \arrow[rr, "J \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times J"'] & & A \times X_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{F}"] & & \\
& A_0 \times X \arrow[rr] \arrow[rrr, bend right, "\widehat{F}"'] & & A \mathbin{\Box} X \arrow[r, "\psi(F)"'] & B \arrow[dd, "L"] \\
A'_0 \times X_0 \arrow[uu, "K_0 \times \mathrm{id}"] \arrow[rr, "J \times \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times J"'] & & A' \times X_0 \arrow[uu, "K \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{Z}"] & & \\
& A'_0 \times X \arrow[uu, "K_0 \times \mathrm{id}"'] \arrow[rr] \arrow[rrr, bend right, "\widehat{Z}"'] & & A' \mathbin{\Box} X \arrow[uu, "K \Box \mathrm{id}"'] \arrow[r, "\psi(Z)"'] & B'
\end{tikzcd}$$

pushout の普遍性から $\psi(Z) = L \circ \psi(F) \circ (K \mathbin{\Box} \mathrm{id})$ が分かった． $\Box$

さて，以上により，随伴が成り立つ「積と関手圏の組」が 2 つあることが分かった．他にもあるだろうか？

定理 7. $\langle \mathbf{Cat}, \otimes, I\rangle$ を biclosed なモノイダル圏とする．このとき $\otimes \cong \times$ または $\otimes \cong \square$ であり，更に $I \cong \mathbb{1}$ となる．(よってこのようなモノイダル圏は対称モノイダル閉圏である．)

証明. [2] を参照. $\square$

さて，圏の直積は良く知っているだろうからいいとして，funny tensor product は実際にはどのような圏になるのか，というと次のようになる．

- $\mathrm{Ob}(A \mathbin{\square} X) = \mathrm{Ob}(A) \times \mathrm{Ob}(X)$ である．
- $A \mathbin{\square} X$ の射は

  $$\{\langle f, x\rangle \mid f \in \mathrm{Mor}(A),\ x \in \mathrm{Ob}(X)\} \cup \{\langle a, k\rangle \mid a \in \mathrm{Ob}(A),\ k \in \mathrm{Mor}(X)\}$$

  で生成される．但し $f \in \mathrm{Hom}_A(a, b)$ のとき $\langle f, x\rangle \colon \langle a, x\rangle \to \langle b, x\rangle$ であり，$k \in \mathrm{Hom}_X(x, z)$ のとき $\langle a, k\rangle \colon \langle a, x\rangle \to \langle a, z\rangle$ である．また次の関係式が成り立つ．

  $$\begin{aligned}\langle g, x\rangle \circ \langle f, x\rangle &= \langle g \circ f, x\rangle\\ \langle a, h\rangle \circ \langle a, k\rangle &= \langle a, h \circ k\rangle\\ \langle \mathrm{id}_a, x\rangle = \langle a, \mathrm{id}_x\rangle &= \mathrm{id}_{\langle a, x\rangle}\end{aligned}$$

$f \in \mathrm{Hom}_A(a, b)$，$k \in \mathrm{Hom}_X(x, z)$ のとき，直積 $A \times X$ では

$$\langle f, \mathrm{id}_z\rangle \circ \langle \mathrm{id}_a, k\rangle = \langle f, k\rangle = \langle \mathrm{id}_b, k\rangle \circ \langle f, \mathrm{id}_x\rangle$$

であった．(式 (3) で使ったことを思い出そう．) つまり次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\langle a, x\rangle \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_a, k\rangle"] \arrow[d, "\langle f, \mathrm{id}_x\rangle"'] & \langle a, z\rangle \arrow[d, "\langle f, \mathrm{id}_z\rangle"] \\
\langle b, x\rangle \arrow[r, "\langle \mathrm{id}_b, k\rangle"'] & \langle b, z\rangle
\end{tikzcd}$$

一方，$A \mathbin{\square} X$ では定義より $\langle f, z\rangle \circ \langle a, k\rangle \neq \langle b, k\rangle \circ \langle f, x\rangle$ である．つまり

$$\begin{tikzcd}
\langle a, x\rangle \arrow[r, "\langle a, k\rangle"] \arrow[d, "\langle f, x\rangle"'] & \langle a, z\rangle \arrow[d, "\langle f, z\rangle"] \\
\langle b, x\rangle \arrow[r, "\langle b, k\rangle"'] & \langle b, z\rangle
\end{tikzcd}$$

は可換ではない．

このように，圏の「積」における可換性と自然変換の条件は対応しており，「積」の方で可換性を認めれば自然変換の条件が付いてくるし，「積」の方で可換性を取り除けば自然変換の条件も取り除かれることになる．

以上の話は，strict 2-category でも同じようなことを考えることができる．まず strict 2-category とは **Cat**-豊穣圏のことであった．このときの **Cat** ではモノイダル圏としては直積で考えているが，上記で見たように funny tensor product もある．そこで次の定義をする．

定義. $\langle \mathbf{Cat}, \square \rangle$-豊穣圏を sesquicategory という．

sesquicategory も Hom が圏になっているので，ある意味では 2-category のようなものだと考えることができる．今，strict 2-category $\mathcal{C}$ において

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & b \arrow[r, bend left, "k"] \arrow[r, bend right, "l"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \gamma"] & c \end{tikzcd}$$

という状況だとしよう．すると $\mathcal{C}$ における合成とは関手 $M^{abc} \colon \mathcal{C}(b,c) \times \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{C}(a,c)$ だから，これを使って β と γ の合成 $\gamma \bullet \beta := M^{abc}(\gamma, \beta)$ を考えることができる (これを水平合成と呼ぶのであった)．

一方，$\mathcal{S}$ を sesquicategory として上記と同じ状況を考える．この $\mathcal{S}$ における合成とは関手 $M^{abc} \colon \mathcal{S}(b,c) \,\square\, \mathcal{S}(a,b) \to \mathcal{S}(a,c)$ である．ところで圏 $\mathcal{S}(b,c) \,\square\, \mathcal{S}(a,b)$ において，β と γ から得られる射は $\langle \gamma, g \rangle \circ \langle k, \beta \rangle$ と $\langle l, \beta \rangle \circ \langle \gamma, f \rangle$ の 2 つがあり，これらは異なる．つまり sesquicategory において水平合成を考えようとすると 2 つの定義が得られる．更に，仮に水平合成を $\gamma \bullet \beta := M^{abc}(\langle \gamma, g \rangle \circ \langle k, \beta \rangle)$ で定義するとこれは interchange law $(\gamma' * \gamma) \bullet (\beta' * \beta) = (\gamma' \bullet \beta') * (\gamma \bullet \beta)$ を満たさない．

このように，sesquicategory は strict 2-category と似ているが，少し条件が弱まっていることになる．(逆に，strict 2-category とは sesquicategory であって $M^{abc}(\langle \gamma, g \rangle \circ \langle k, \beta \rangle) = M^{abc}(\langle l, \beta \rangle \circ \langle \gamma, f \rangle)$ が成り立つもの，という定義をすることもできる．)

さて，次に strict 2-category と strict 2-functor がなす圏をここでは **2Cat** と書く．**2Cat** は Cartesian 閉圏である．$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を strict 2-category としたとき，この場合の関手圏は

- strict 2-functor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を対象とする．
- strict natural transformation を 1-morphism とする．

- modification を 2-morphism とする．

により定まる strict 2-category である．これを $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ と書く．これが Cartesian 閉圏の条件，即ち

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cat}}(\mathcal{A}\times\mathcal{X},\mathcal{B})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cat}}(\mathcal{A},\mathrm{Fun}_{\mathrm{st}}(\mathcal{X},\mathcal{B}))$$

を満たすことはよく知られている．

一方で，funny tensor product も圏の場合と同様に定義できる．

定義. strict 2-category $\mathcal{C}$ に対して，部分 2-category $\mathcal{C}_0\subset\mathcal{C}$ を「$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}_0)=\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ となる離散 2-category」と定めることにする．包含関手を $J\colon\mathcal{C}_0\to\mathcal{C}$ で表す．

定義. strict 2-category $\mathcal{C},\mathcal{D}$ に対して $\mathcal{C}\,\Box\,\mathcal{D}$ を，$2\mathbf{Cat}$ における pushout

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_0\times\mathcal{D}_0 \arrow[r, "J\times\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times J"'] & \mathcal{C}\times\mathcal{D}_0 \arrow[d, "P_0"] \\
\mathcal{C}_0\times\mathcal{D} \arrow[r, "P_1"'] & \mathcal{C}\,\Box\,\mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

で定める．$\mathcal{C}\,\Box\,\mathcal{D}$ を funny tensor product という．

定義. $\mathcal{C},\mathcal{D}$ を strict 2-category として $F,G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を strict 2-functor とする．このとき F から G への 2-変換とは $\mathcal{D}$ の 1-morphism の族 $\theta=\{\theta_a\colon Fa\to Ga\}_{a\in\mathcal{C}}$ のことである．記号では $\theta\colon F\rightrightarrows G$ と書くことにする．

定義. $\theta,\tau\colon F\rightrightarrows G\colon\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を 2-変換とする．θ から τ への modification とは $\mathcal{D}$ の 2-morphism の族 $\{\Gamma_a\colon\theta_a\Rightarrow\tau_a\}_{a\in\mathcal{C}}$ のことである．

定義. 2-category $\mathcal{C},\mathcal{D}$ に対して 2-category $\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ を次により定める．

- strict 2-functor $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を対象とする．
- 2-変換を 1-morphism とする．
- modification を 2-morphism とする．

定理 8. $\mathcal{X}$ を strict 2-category とするとき，strict 2-category $\mathcal{A},\mathcal{B}$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cat}}(\mathcal{A}\,\Box\,\mathcal{X},\mathcal{B})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cat}}(\mathcal{A},\mathrm{Fun}_{\mathrm{un}}(\mathcal{X},\mathcal{B}))$$

が成り立つ． □

さて，すると **2Cat** の場合もこの 2 つのみなのか，ということが気になるが，実は **2Cat** の場合は直積と funny tensor product の「中間」となる積 (Gray テンソル積) が存在する．これは strict 2-category においては strict natural transformation と 2-変換の「中間」に pseudonatural transformation があることに対応している．

定義. strict 2-category $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して strict 2-category $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st,ps}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ を

- strict 2-functor $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を対象とする．
- pseudonatural transformation を 1-morphism とする．
- modification を 2-morphism とする．

により定める．これは関手 $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st,ps}} \colon \mathbf{2Cat} \times \mathbf{2Cat} \to \mathbf{2Cat}$ を与える．

定義. 任意の strict 2-category $\mathcal{X}$ に対して $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st,ps}}(\mathcal{X}, -) \colon \mathbf{2Cat} \to \mathbf{2Cat}$ は左随伴をもつ．これを $- \otimes \mathcal{X}$ と書く．strict 2-category $\mathcal{A}, \mathcal{X}$ に対して $\mathcal{A} \otimes \mathcal{X}$ を $\mathcal{A}$ と $\mathcal{X}$ の Gray テンソル積という．

つまり Gray テンソル積とは自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cat}}(\mathcal{A} \otimes \mathcal{X}, \mathcal{B}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{2Cat}}(\mathcal{A}, \mathrm{Fun}_{\mathrm{st,ps}}(\mathcal{X}, \mathcal{B}))$$

が成り立つ積である．また，次の図式は「同型を除いて可換」となる．

$$\begin{tikzcd}
\langle a, x \rangle \arrow[r, "\langle a,k \rangle"] \arrow[d, "\langle f,x \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\rotatebox{45}{$\not\cong$}"] & \langle a, z \rangle \arrow[d, "\langle f,z \rangle"] \\
\langle b, x \rangle \arrow[r, "\langle b,k \rangle"'] & \langle b, z \rangle
\end{tikzcd}$$

つまり Gray テンソル積は直積と funny tensor product の中間と言える[*1]．

更に，Gray テンソル積は関手 $\otimes \colon \mathbf{2Cat} \times \mathbf{2Cat} \to \mathbf{2Cat}$ を与えるが，これにより $\langle \mathbf{2Cat}, \otimes \rangle$ はモノイダル閉圏になる．これを **Gray** と書き，次の定義をする．

定義. **Gray**-豊穣圏を Gray-category という．

Gray-category は Hom が 2-category となっているので 3-category と呼ばれるようなものになっている．但し Gray テンソル積においては今述べた通り $\langle f, z \rangle \circ \langle a, k \rangle \neq \langle b, k \rangle \circ \langle f, x \rangle$ なので，sesquicategory と同様，interchange law が成り立たないような

[*1] より具体的に $\mathcal{A} \otimes \mathcal{X}$ がどのような strict 2-category になっているかは [3] 等を参照.

3-category となっている．($\langle f,z\rangle \circ \langle a,k\rangle \cong \langle b,k\rangle \circ \langle f,x\rangle$ にはなっているので，同型の意味では interchange law が成り立っているとも言える．)

最後に，Gray テンソル積は「lax バージョン」もある*2.

定義. strict 2-category $\mathcal{C},\mathcal{D}$ に対して strict 2-category $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st,lax}}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ を

- strict 2-functor $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を対象とする.
- lax natural transformation を 1-morphism とする.
- modification を 2-morphism とする.

により定める．これは関手 $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st,lax}}\colon 2\mathbf{Cat}\times 2\mathbf{Cat}\to 2\mathbf{Cat}$ を与える.

定義. 任意の strict 2-category $\mathcal{X}$ に対して $\mathrm{Fun}_{\mathrm{st,lax}}(\mathcal{X},-)\colon 2\mathbf{Cat}\to 2\mathbf{Cat}$ は左随伴をもつ．これを $-\otimes_l \mathcal{X}$ と書く.

$\mathcal{A}\otimes_l \mathcal{X}$ の場合は，次の図式は可換ではないが 2-morphism が存在する.

$$\begin{tikzcd}
\langle a,x\rangle \arrow[r, "\langle a,k\rangle"] \arrow[d, "\langle f,x\rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\swarrow"] & \langle a,z\rangle \arrow[d, "\langle f,z\rangle"] \\
\langle b,x\rangle \arrow[r, "\langle b,k\rangle"'] & \langle b,z\rangle
\end{tikzcd}$$

参考文献

[1] Foltz F., Lair C., and Kelly G. M., Algebraic categories with few monoidal biclosed structures or none, Journal of Pure and Applied Algebra 17 (1980) 2, 171–177.

[2] J. Bourke and N. Gurski, a Cocategorical obstruction to Tensor Products of Gray-Categories, Theory and Applications of Categories Vol. 30 (2015) No. 11, 387–409, `http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/30/11/30-11abs.html`

[3] N. Gurski, An algebraic theory of tricategories

[4] J. Bourke and N. Gurski, The Gray tensor product via factorisation, `https://arxiv.org/abs/1508.07789v2`

*2 元々 Gray が考えたのはこの lax バージョンの方らしい.