モデル圏

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2019 年 3 月 24 日

目次

1 定義と導入

通常の圏では同型な対象は同じものとみなすが，数学では同型でないものでも同じとみなすことがある．例えば位相空間の圏 **Top** においてはホモトピー同値や弱ホモトピー同値という概念がある．更にこの **Top** は cofibration，fibration と呼ばれる種類の射も持っている．このような，「weak equivalence」「cofibration」「fibration」と呼ばれる射を持つ圏のことをモデル圏という．

定義. 可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & u \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] & v \end{tikzcd}$$

のリフトとは，射 $h\colon b \to u$ であって $f = h \circ i$，$g = p \circ h$ を満たすものをいう．即ち次

の図式が可換となるような h である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & u \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & v \end{tikzcd}$$

定義． モデル圏とは，完備かつ余完備な圏 C であって，$W, \mathrm{Cof}, \mathrm{Fib} \subset \mathrm{Mor}(C)$ が与えられ，以下の条件を満たすことをいう．

(1) (2-out-of-3) C の射 f, g が $\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ を満たすとする．$f, g, f \circ g$ のうち少なくとも 2 つが W に属するならば，残りの 1 つも W に属する．

(2) (Retracts) C の射 g が f の retract で，$f \in W$ ($f \in \mathrm{Cof}$，$f \in \mathrm{Fib}$) ならば $g \in W$ ($g \in \mathrm{Cof}$，$g \in \mathrm{Fib}$) である．

(3) (Lifting) C の可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & u \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "g"'] & v \end{tikzcd}$$

は

(a) $i \in \mathrm{Cof}$，$p \in \mathrm{Fib} \cap W$ ならばリフトを持つ．

(b) $i \in \mathrm{Cof} \cap W$，$p \in \mathrm{Fib}$ ならばリフトを持つ．

(4) (Factorization) 任意の射 $f \colon a \to b$ は

(a) $f = p \circ i$，$i \in \mathrm{Cof}$，$p \in \mathrm{Fib} \cap W$ と分解できる．

(b) $f = p \circ i$，$i \in \mathrm{Cof} \cap W$，$p \in \mathrm{Fib}$ と分解できる．

$W, \mathrm{Cof}, \mathrm{Fib}$ に属する射をそれぞれ weak equivalence，cofibration，fibration と呼び，ここでは記号で $a \xrightarrow{\sim} b$，$a \hookrightarrow b$，$a \twoheadrightarrow b$ のように書く．また $\mathrm{Cof} \cap W$，$\mathrm{Fib} \cap W$ に属する射をそれぞれ trivial cofibration，trivial fibration と呼び，記号では $a \overset{\sim}{\hookrightarrow} b$，$a \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} b$ と書く．

定義． $f \colon a \to b$ が $g \colon u \to v$ に対して LLP (Left Lifting Property) を持つ (もしくは g が f に対して RLP (Right Lifting Property) を持つ)

$\Longleftrightarrow$ 任意の可換図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & u \arrow[d, "g"] \\ b \arrow[r] & v \end{tikzcd}$$

がリフトを持つ.

例 1. 位相空間の圏 **Top** を考える．任意の CW 複体 A に対する包含写像 $A \times \{0\} \to A \times [0,1]$ に対して RLP を持つ射を Serre fibration という.

- $f \in$ **Top** が weak equivalence $\Longleftrightarrow$ f が weak homotopy equivalence
- $f \in$ **Top** が fibration $\Longleftrightarrow$ f が Serre fibration
- $f \in$ **Top** が cofibration $\Longleftrightarrow$ f が trivial fibration に対して LLP を持つ

と定めると，**Top** はモデル圏となる. □

例 2. R を単位的環とする．左 R 加群の鎖複体の圏 $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ において

- f が weak equivalence $\Longleftrightarrow$ f がホモロジー群の同型を誘導する
- $f\colon M \to N$ が cofibration $\Longleftrightarrow$ 任意の $n \geq 0$ に対して $f_n\colon M_n \to N_n$ が単射であり，$\operatorname{coker} f_n$ が射影的
- $f\colon M \to N$ が fibration $\Longleftrightarrow$ 任意の $n > 0$ に対して $f_n\colon M_n \to N_n$ が全射

と定めると，$\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ はモデル圏となる. □

モデル圏では weak equivalence を同型射と扱いたいのであるが，実はモデル圏 C の「weak equivalence を同型射とした」圏 $\mathrm{Ho}(C)$ を構成することができる (これをホモトピー圏という)．先の $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ の例では，このホモトピー圏が導来圏になっている．また C, D をモデル圏，$F\colon C \to D$ を関手とするとホモトピー圏に対して自然に関手 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$，$P'\colon D \to \mathrm{Ho}(D)$ が得られるから，次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) & & \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "P'"'] & \mathrm{Ho}(D) \end{tikzcd}$$

よってもし Kan 拡張が存在すれば，自然に関手 $\mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ を得ることができる．この関手を F の導来関手という.

この PDF の目的はホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(C)$ を構成し，(ある程度の条件の下で) 導来関手が存在することを示すことである．

2　基本的性質

命題 3. モデル圏 C において

(1) f が cofibraton $\Longleftrightarrow$ f は trivial fibration に対して LLP を持つ．
(2) f が trivial cofibraton $\Longleftrightarrow$ f は fibration に対して LLP を持つ．
(3) f が fibraton $\Longleftrightarrow$ f は trivial cofibration に対して RLP を持つ．
(4) f が trivial fibraton $\Longleftrightarrow$ f は cofibration に対して RLP を持つ．

証明. 同様なため，1 のみ示す．

$\Longrightarrow$ はモデル圏の定義である．$\Longleftarrow$ を示すため，$f\colon a \to b$ が trivial fibration に対して LLP を持つとする．$f = (a \underset{i}{\hookrightarrow} x \underset{p}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} b)$ と分解すれば，次の実線の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f"'] & x \arrow[d, two heads, "\wr\, p"] \\
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & b
\end{tikzcd}$$

故に点線の射 $g\colon b \to x$ が存在する．これにより次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, "f"'] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, hook, "i"] & a \arrow[d, "f"] \\
b \arrow[r, "g"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_b"'] & x \arrow[r, two heads, "\sim", "p"'] & b
\end{tikzcd}$$

即ち f は cofibration i のレトラクトであり，従って cofibration である．　$\square$

命題 4. Cof は射の合成について閉じている．即ち，$f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ が cofibration ならば $g \circ f$ も cofibration である．

証明. 命題 3 を使う．$f\colon a \hookrightarrow b$，$g\colon b \hookrightarrow c$ を cofibration とする．$p\colon u \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} v$ を任意の

trivial fibration として次の実線の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r] \arrow[d, hook, "f"'] & u \arrow[dd, two heads, "\wr\, p"] \\
b \arrow[ur, dashed, "h_0"] \arrow[d, hook, "g"'] & \\
c \arrow[r] \arrow[uur, dashed, "h"'] & v
\end{tikzcd}
$$

f が cofibration で p が trivial fibration だから，リフト $h_0\colon b \to u$ が存在する．g が cofibration で p が trivial fibration だから，リフト $h\colon c \to u$ が存在する．故に，$g \circ f$ は trivial fibration に対して LLP を持つから，命題 3 により cofibration であることがわかる． $\square$

W も合成について閉じているから，$\mathrm{Cof} \cap W$ が合成について閉じていることも分かる．

命題 5. Cof ($\mathrm{Cof} \cap W$) は pushout について閉じている．即ち，$f\colon a \to b$ が cofibration (trivial cofibration) で $g\colon a \to u$ が射ならば，pushout[*1]で得られる射 $\widetilde{f}\colon u \to b \amalg_a u$ も cofibration (trivial cofibration) である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "f"'] & u \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\
b \arrow[r] & b \amalg_a u
\end{tikzcd}
$$

証明. $f\colon a \hookrightarrow b$ を cofibration，$g\colon a \to u$ を射とする．任意の trivial fibration $p\colon v \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} w$ と次の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
u \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{f}"] & v \arrow[d, two heads, "\wr\, p"] \\
b \amalg_a u \arrow[r] & w
\end{tikzcd}
$$

f が cofibration だから，リフト $h_0\colon b \to v$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "f"'] & u \arrow[r] \arrow[d] & v \arrow[d, two heads, "\wr\, p"] \\
b \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "h_0"] & b \amalg_a u \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "h"'] & w
\end{tikzcd}
$$

[*1] 定義よりモデル圏は余完備だから，この pushout は存在する．

よって pushout の普遍性から射 $h\colon b \amalg_a u \to v$ が存在し，可換となる．従って命題 3 から $\widetilde{f}$ は cofibration である．trivial cofibration に関しても同様である． $\square$

命題 6. 同型射は weak equivalence かつ cofibration かつ fibration である．

証明. これも命題 3 から容易に分かる． $\square$

定義. (1) $a \in C$ が cofibrant $\iff$ 一意な射 $0 \to a$ が cofibration.

(2) $a \in C$ が fibrant $\iff$ 一意な射 $a \to 1$ が fibration.

定義. $a \in C$ とする．普遍性により射 $\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle\colon a \amalg a \to a$ が得られる．この射が $\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle = (a \amalg a \xrightarrow{i} x \underset{p}{\xrightarrow{\sim}} a)$ と分解するとき，この x を a の cylinder object と呼ぶ．更に

(1) i が cofibration のとき good cylinder object と呼ぶ.

(2) i が cofibration で p が fibration のとき very good cylinder object と呼ぶ.

モデル圏の定義から，各 $a \in C$ の very good cylinder object が少なくとも一つ存在する (一意とは限らない)．a の cylinder object を $a \wedge I$ で表す.

定義. $f, g\colon a \to b$ が left homotopic (記号 $f \overset{l}{\sim} g$ で表す)
$\iff$ ある cylinder object $a \amalg a \xrightarrow{i} a \wedge I \xrightarrow{\sim} a$ と射 $h\colon a \wedge I \to b$ が存在して，次が可換となる.

$$\begin{tikzcd} a \wedge I \arrow[dr, dashed, "h"] & \\ a \amalg a \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b \end{tikzcd}$$

このときの射 h を f から g への left homotopy という．更に $a \wedge I$ が (very) good cylinder object のとき，h を (very) good left homotopy という.

$a \amalg a \xrightarrow{i} a \wedge I \xrightarrow{\sim} a$ を a の cylinder object とする．$a \xrightarrow{\mu_0} a \amalg a \xleftarrow{\mu_1} a$ を coproduct の標準射として $i_0 := i \circ \mu_0$，$i_1 := i \circ \mu_1\colon a \to a \wedge I$ とおく.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\mu_0"] \arrow[dr, "i_0"'] & a \amalg a \arrow[d, "i"] & a \arrow[l, "\mu_1"'] \arrow[dl, "i_1"] \\ & a \wedge I & \end{tikzcd}$$

命題 7. $a \in C$ が cofibrant で $a \amalg a \underset{i}{\hookrightarrow} a \wedge I \xrightarrow{\sim} a$ を a の good cylinder object とすると

き，$i_0, i_1 \colon a \to a \wedge I$ は trivial cofibration である．

証明. 定義から次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "\mu_0"'] \arrow[dr, "i_0"] \arrow[drr, bend left, "\mathrm{id}_a"] & & \\
a \amalg a \arrow[r, hook, "i"] \arrow[rr, bend right, "\langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a \rangle"'] & a \wedge I \arrow[r, "\sim"] & a
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{id}_a \colon a \to a$ は weak equivalence だから，i_0 も weak equivalence である．(この証明から分かるように，$i_0 \in W$ は a が cofibrant でなくても成り立つ．)

次に，a が cofibrant だから，$0 \to a$ が cofibration である．次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & a \arrow[d, "\mu_0"'] \arrow[dr, bend left, "i_0"] & \\
a \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[rr, bend right, "i_1"'] & a \amalg a \arrow[r, hook, "i"] & a \wedge I
\end{tikzcd}
$$

左上の四角は pushout である．よって命題 5 より μ_0 は cofibration であり，従って命題 4 より合成 $i_0 = i \circ \mu_0$ も cofibration である．故に i_0 が trivial cofibration であることが分かった．i_1 についても同様である． $\square$

命題 8. $f \overset{l}{\sim} g \colon a \to b$ のとき，$f \in W \iff g \in W$ である．

証明. $h \colon a \wedge I \to b$ を f から g への left homotopy とする．定義から次の図式が可換である．(命題 7 で示したように $i_0 \in W$ となる．)

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & a \arrow[d, "\mu_0"'] \arrow[dr, "i_0"', "\sim"] \arrow[ddrr, bend left, "f"] & & \\
a \arrow[r, "\mu_1"'] \arrow[drrr, bend right, "g"'] & a \amalg a \arrow[r, "i"] \arrow[drr, "\langle f, g \rangle"'] & a \wedge I \arrow[dr, "h"] & \\
& & & b
\end{tikzcd}
$$

2-out-of-3 より $f \in W \iff h \in W$ が分かる．同様にして $g \in W \iff h \in W$ である．よって $f \in W \iff g \in W$ となる． $\square$

命題 9. $f \overset{l}{\sim} g\colon a \to b$ のとき，f から g への good left homotopy が存在する．更にもし b が fibrant ならば，very good left homotopy が存在する．

証明. $f \overset{l}{\sim} g$ だから，cylinder object $a \amalg a \xrightarrow{i} a \wedge I \underset{p}{\overset{\sim}{\to}} a$ と $h\colon a \wedge I \to b$ が存在して，次が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
a \wedge I \arrow[dr, "h"] & \\
a \amalg a \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b
\end{tikzcd}$$

$(a \amalg a \xrightarrow{i} a \wedge I) = (a \amalg a \underset{i'}{\hookrightarrow} x \underset{p'}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} a \wedge I)$ と分解する．

$$\begin{tikzcd}
a & \\
a \wedge I \arrow[u, "p", "\wr"'] \arrow[ddr, "h"] & \\
x \arrow[u, two heads, "p'", "\wr"'] & \\
a \amalg a \arrow[u, hook, "i'"] \arrow[uu, bend left, "i"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b
\end{tikzcd}$$

$a \amalg a \underset{i'}{\hookrightarrow} x \underset{p \circ p'}{\overset{\sim}{\to}} a$ は a の good cylinder object である．故に $h \circ p'\colon x \to b$ が f から g への good left homotopy となる．

次に b を fibrant として $h\colon a \wedge I \to b$ を改めて good left homotopy とする．今度は $(a \wedge I \underset{p}{\overset{\sim}{\to}} a) = (a \wedge I \underset{i'}{\hookrightarrow} x \underset{p'}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} a)$ と分解する．2-out-of-3 により i' は trivial cofibration である．これに終対象 1 を加えて，次の実線の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
a & \\
x \arrow[u, two heads, "p'", "\wr"'] \arrow[dr, "!"] \arrow[ddr, dashed, "h'"] & \\
a \wedge I \arrow[u, hook, "i'", "\wr"'] \arrow[uu, bend left, "p"] \arrow[dr, "h"] & 1 \\
a \amalg a \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b \arrow[u, two heads, "!"']
\end{tikzcd}$$

$a \amalg a \underset{i'\circ i}{\hookrightarrow} x \underset{p'}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} a$ は very good cylinder object である．今 b が fibrant だから，一意な射 $!\colon b \to 1$ は fibration である．i' が trivial cofibration だから，モデル圏の条件より点線のリフト $h'\colon x \to b$ が存在する．この h' が very good left homotopy である． $\square$

命題 10. a が cofibrant なら，left homotopic は $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ の同値関係となる．

証明. $f\colon a \to b$ とする．$a \amalg a \xrightarrow{\langle \mathrm{id},\mathrm{id}\rangle} a \underset{\mathrm{id}}{\overset{\sim}{\to}} a$ は cylinder object で，図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"] & \\ a \amalg a \arrow[u, "{\langle \mathrm{id},\mathrm{id}\rangle}"] \arrow[r, "{\langle f,f\rangle}"'] & b \end{tikzcd}$$

は可換である．故に $f \overset{l}{\sim} f$ である．

次に $f \overset{l}{\sim} g\colon a \to b$ とする．cylinder object $a \amalg a \xrightarrow{i} a \wedge I \underset{p}{\overset{\sim}{\to}} a$ と $h\colon a \wedge I \to b$ が存在して，次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} a \wedge I \arrow[dr, "h"] & \\ a \amalg a \arrow[u, "i"] \arrow[r, "{\langle f,g\rangle}"'] & b \end{tikzcd}$$

$a \xrightarrow{\mu_0} a \amalg a \xleftarrow{\mu_1} a$ を標準射とすれば，普遍性から次の射 s を得る．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "\mu_1"'] \arrow[dr, "\mu_0"] & \\ a \amalg a \arrow[r, dashed, "s"] & a \amalg a \\ a \arrow[u, "\mu_0"] \arrow[ur, "\mu_1"'] & \end{tikzcd}$$

以上を組み合わせて次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} & a \wedge I \arrow[dr, "h"] & \\ a \amalg a \arrow[r, "s"] & a \amalg a \arrow[u, "i"] \arrow[r, "{\langle f,g\rangle}"'] & b \\ a \arrow[u, "\mu_0"] \arrow[ur, "\mu_1"'] \arrow[urr, bend right, "g"'] & & \end{tikzcd}$$

普遍性により $\langle f,g\rangle\circ s=\langle g,f\rangle$ である．また $a\amalg a \xrightarrow{i\circ s} a\wedge I \underset{p}{\xrightarrow{\sim}} a$ は cylinder object である．よって次の図式が得られて $g \overset{l}{\sim} f$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
a\wedge I \arrow[rd, "h"] & \\
a\amalg a \arrow[u, "i\circ s"] \arrow[r, "\langle g,f\rangle"'] & b
\end{tikzcd}
$$

最後に $f \overset{l}{\sim} g$ かつ $g \overset{l}{\sim} h$ とする．命題 9 により f から g への good left homotopy $s\colon a\wedge I\to b$, g から h への good left homotopy $t\colon a\wedge I'\to b$ が取れる．

$$
\begin{tikzcd}
 & a\wedge I \arrow[rd, "s"] & \\
 & a\amalg a \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\langle f,g\rangle"'] & b \\
a \arrow[ruu, bend left, "i_0"] \arrow[ru, "\mu_0"] \arrow[rru, bend right, "f"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a\wedge I' \arrow[rd, "t"] & \\
 & a\amalg a \arrow[u, hook, "i'"] \arrow[r, "\langle g,h\rangle"'] & b \\
a \arrow[ruu, bend left, "i_0"] \arrow[ru, "\mu_0"] \arrow[rru, bend right, "g"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rd, "\mu_0"'] \arrow[rrrddd, bend left, "f"] & & & \\
 & a\amalg a \arrow[rd, "i"] \arrow[rrdd, "\langle f,g\rangle"] & & \\
 & & a\wedge I \arrow[rd, "s"] & \\
a \arrow[ruu, "\mu_1"] \arrow[rrr, "g"] \arrow[rddd, "\mu_0"'] & & & b \\
 & & a\wedge I' \arrow[ru, "t"] & \\
 & & & \\
 & a\amalg a \arrow[ruu, "i'"] \arrow[rruuu, "\langle g,h\rangle"'] & & \\
a \arrow[ru, "\mu_1"] \arrow[rrruuuu, bend right, "h"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$a\wedge I\leftarrow a\to a\wedge I'$ の pushout を x とする．

$$
\begin{tikzcd}
 & a\wedge I \arrow[rd] \arrow[rrd, "s"] & & \\
a \arrow[ru, "i_0"] \arrow[rd, "i_1"'] & & x \arrow[r, dashed] & b \\
 & a\wedge I' \arrow[ru] \arrow[rru, "t"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この x は a の cylinder object である．

∵) 定義から，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \amalg a \arrow[r, hook, "i"] \arrow[drr, "\langle \mathrm{id},\mathrm{id} \rangle"'] & a \wedge I \arrow[dr, "\sim"] & \\
a \arrow[ur, "\mu_0"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mu_1"'] & & & a \\
 & a \amalg a \arrow[r, hook, "i'"'] \arrow[urr, "\langle \mathrm{id},\mathrm{id} \rangle"] & a \wedge I' \arrow[ur, "\sim"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって pushout の普遍性により射 $x \to a$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \amalg a \arrow[r, hook, "i"] & a \wedge I \arrow[dr] \arrow[drr, "\sim"] & & \\
a \arrow[ur, "\mu_0"] \arrow[urr, hook, "\sim", "i_0"'] \arrow[dr, "\mu_1"'] \arrow[drr, hook, "i_1", "\sim"'] & & & x \arrow[r, dashed] & a \\
 & a \amalg a \arrow[r, hook, "i'"'] & a \wedge I' \arrow[ur] \arrow[urr, "\sim"'] & &
\end{tikzcd}
$$

trivial cofibration の pushout は trivial cofibration であることと，2-out-of-3 により $x \to a$ が weak equivalence だと分かる．よって x は a の cylinder object である．

この x と先の図式を組み合わせて次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "\mu_0"] \arrow[ddd, "\mu_0"'] \arrow[rrrddd, bend left, "f"] & & & \\
 & a \amalg a \arrow[dr, "i"'] & & \\
 & & a \wedge I \arrow[d] & \\
a \amalg a \arrow[rr] & & x \arrow[r, "u"] & b \\
 & & a \wedge I' \arrow[u] & \\
 & a \amalg a \arrow[ur, "i'"] & & \\
a \arrow[ur, "\mu_1"'] \arrow[uuu, "\mu_1"] \arrow[rrruuu, bend right, "h"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

この図式から $u\colon x \to b$ が f から h への left homotopy であることが分かる． □

定義. C をモデル圏，$a, b \in C$ を対象とする．$\mathrm{Hom}_C(a,b)$ 上の同値関係 R を，$\overset{l}{\sim}$ で生成されるものとして，$\pi^l(a,b) := \mathrm{Hom}_C(a,b)/R$ と定める．

今示した様に，a が cofibrant ならば $\pi^l(a,b) = \mathrm{Hom}_C(a,b)/\overset{l}{\sim}$ である．

命題 11. $s\colon b \to c$ とする．このとき $f \overset{l}{\sim} g\colon a \to b$ ならば $s \circ f \overset{l}{\sim} s \circ g\colon a \to c$ である．(よって写像 $s_*\colon \pi^l(a,b) \ni [f] \mapsto [s \circ f] \in \pi^l(a,c)$ は well-defined である．) 更に a が cofibrant で $s\colon b \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} c$ が trivial fibration であるとする．このとき s_* は全単射である．

証明. $f \overset{l}{\sim} g\colon a \to b$ とする．f から g への left homotopy $h\colon a \wedge I \to b$ を取る．

$$\begin{tikzcd} a \wedge I \arrow[dr, "h"] & & \\ a \amalg a \arrow[u] \arrow[r, "\langle f, g\rangle"'] & b \arrow[r, "s"'] & c \end{tikzcd}$$

このとき $s \circ h$ は $s \circ f$ から $s \circ g$ への left homotopy である．よって $s \circ f \overset{l}{\sim} s \circ g\colon a \to c$ である．従って $[f] = [g]$ とすると $f \overset{l}{\sim} f_1 \overset{l}{\sim} \cdots \overset{l}{\sim} f_n \overset{l}{\sim} g$ とできるが，このとき $s \circ f \overset{l}{\sim} s \circ f_1 \overset{l}{\sim} \cdots \overset{l}{\sim} s \circ f_n \overset{l}{\sim} s \circ g$ となり $[s \circ f] = [s \circ g]$ である．よって s_* は well-defined である．

次に a が cofibrant で $s\colon b \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} c$ が trivial fibration であるとする．s_* の全射性を示すため，$f\colon a \to c$ を任意に取る．次の可換図式を考えれば，リフト $g\colon a \to b$ が得られる．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d, hook] & b \arrow[d, two heads, "\wr\, s"] \\ a \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

このとき $s_*([g]) = [s \circ g] = [f]$ である．

s_* の単射性を示すため，$f, g\colon a \to b$ が $s \circ f \overset{l}{\sim} s \circ g$ を満たすとする．命題 9 により good cylinder object $a \amalg a \underset{i}{\hookrightarrow} a \wedge I \overset{\sim}{\to} a$ と $h\colon a \wedge I \to c$ が存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd} a \wedge I \arrow[dr, "h"] & \\ a \amalg a \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\langle sf, sg\rangle"'] & c \end{tikzcd}$$

次の可換図式を考えれば，リフト $g\colon a\wedge I\to b$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
a\amalg a \arrow[r, "\langle f,g\rangle"] \arrow[d, hook, "i"] & b \arrow[d, two heads, "\wr\, s"] \\
a\wedge I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dashed, "g"] & c
\end{tikzcd}
$$

この g が f から g への left homotopy である． □

命題 12. $f\colon a\to b$ を射として，$c\in C$ が fibrant であるとする．このとき $s\overset{l}{\sim}t\colon b\to c$ ならば $s\circ f\overset{l}{\sim}t\circ f\colon a\to c$ である．（よって写像 $f^*\colon \pi^l(b,c)\ni[s]\longmapsto[s\circ f]\in\pi^l(a,c)$ は well-defined である．）

証明. $s\overset{l}{\sim}t\colon b\to c$ とする．命題 9 により，very good cylinder object $b\amalg b\underset{i}{\hookrightarrow}b\wedge I\underset{p}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}}b$ と $h\colon b\wedge I\to c$ が存在して次が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
b\wedge I \arrow[dr, "h"] & \\
b\amalg b \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\langle s,t\rangle"'] & c
\end{tikzcd}
$$

a の good cylinder object $a\amalg a\underset{j}{\hookrightarrow}a\wedge I\underset{q}{\overset{\sim}{\to}}a$ を取る．次の図式の実線部分は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & c \\
a\amalg a \arrow[r, "\langle f,f\rangle"] \arrow[d, hook, "j"] & b\amalg b \arrow[urr, "\langle s,t\rangle"] \arrow[rr, hook, "i"] & & b\wedge I \arrow[u, "h"'] \arrow[d, two heads, "p"', "\wr"] \\
a\wedge I \arrow[r, "\sim", "q"'] \arrow[urrr, dashed, "k"] & a \arrow[rr, "f"'] & & b
\end{tikzcd}
$$

よってリフト $k\colon a\wedge I\to b\wedge I$ が存在する．このとき $h\circ k$ が $s\circ f$ から $t\circ f$ への left homotopy である． □

命題 13. fibrant な $c\in C$ に対して $\pi^l(b,c)\times\pi^l(a,b)\ni([s],[f])\longmapsto[s\circ f]\in\pi^l(a,c)$ は well-defined である．

証明. $f\overset{l}{\sim}g\colon a\to b$，$s\overset{l}{\sim}t\colon b\to c$ に対して $[s\circ f]=[t\circ g]$ を示せばよい．c が fibrant

だから命題 12 により $s \circ f \overset{l}{\sim} t \circ f$ である．また命題 11 により $t \circ f \overset{l}{\sim} t \circ g$ である．よって $[s \circ f] = [t \circ g]$ である． $\square$

双対的に path object，right homotopic を定義する．

定義. $a \in C$ とする．普遍性により射 $\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle \colon a \to a \times a$ が得られる．この射が $\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle = (a \underset{i}{\xrightarrow{\sim}} x \xrightarrow{p} a \times a)$ と分解するとき，この x を a の path object と呼ぶ．更に

(1) p が fibration のとき good path object と呼ぶ．

(2) i が cofibration で p が fibration のとき very good path object と呼ぶ．

a の path object を a^I で表す．

定義. $f, g \colon a \to b$ が right homotopic (記号 $f \overset{r}{\sim} g$ で表す)
$\Longleftrightarrow$ ある path object $b \xrightarrow{\sim} b^I \xrightarrow{p} b \times b$ と射 $h \colon a \to b^I$ が存在して，次が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & b^I \arrow[d, "p"] \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b \times b
\end{tikzcd}$$

勿論，path object に対しても cylinder object と同様な命題が成り立つ (省略).

命題 14. $f, g \colon a \to b$ とする．a が cofibrant ならば「$f \overset{l}{\sim} g$ ならば $f \overset{r}{\sim} g$」である．同様にして，b が fibrant ならば「$f \overset{r}{\sim} g$ ならば $f \overset{l}{\sim} g$」である．

証明. a が cofibrant で，$f \overset{l}{\sim} g \colon a \to b$ とする．命題 9 より good cylinder object $a \amalg a \underset{i}{\hookrightarrow} a \wedge I \underset{p}{\xrightarrow{\sim}} a$ と left homotopy $h \colon a \wedge I \to b$ が取れる．b の good path object $b \underset{j}{\xrightarrow{\sim}} b^I \underset{q}{\twoheadrightarrow} b \times b$ を取る．次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[ddr, bend left, "f"] & & & \\
a \wedge I \arrow[u, "p", "\wr"'] \arrow[dr, "h"] & & & \\
a \amalg a \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b \arrow[r, "\sim", "j"'] \arrow[drr, bend right, "\mathrm{id}"'] & b^I \arrow[r, two heads, "q"] & b \times b \arrow[d] \\
a \arrow[u, "\mu_0"] \arrow[uu, bend left, "i_0"] \arrow[ur, bend right, "f"'] & & & b
\end{tikzcd}$$

ここから次の実線の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & b \arrow[r, "j"] & b^I \arrow[d, two heads, "q"] \\
a \wedge I \arrow[rru, dashed, "k"'] \arrow[rr, "(f\circ p)\times h"'] & & b \times b
\end{tikzcd}$$

a が cofibrant だから，命題 7 により i_0 は trivial cofibraton である．q は fibration だから，リフト $k\colon a \wedge I \to b^I$ が得られる．このとき $k \circ i_1$ が right homotopy である． □

従って a が cofibrant で b が fibrant ならば，$\overset{l}{\sim} = \overset{r}{\sim}$ かつ $\pi^l(a,b) = \pi^r(a,b)$ である．よってこの場合には，これらを単に $\sim$ や $\pi(a,b)$ と書く．

命題 15. a, b を cofibrant かつ fibrant として $f\colon a \to b$ を射とする．このとき
f が weak equivalence
$\iff$ ある射 $g\colon b \to a$ が存在して $g \circ f \sim \mathrm{id}_a$ かつ $f \circ g \sim \mathrm{id}_b$ となる．(このとき g を f の homotopy inverse という．)

証明. ($\Longrightarrow$) $f\colon a \to b$ を weak equivalence とする．$f = (a \underset{i}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} x \underset{p}{\twoheadrightarrow} b)$ と分解する．2-out-of-3 により p も weak equivalence である．

a が fibrant だから，次の図式を考えれば $g\colon x \to a$ で $g \circ i = \mathrm{id}_a$ となるものを得る．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "i"', "\wr"] & a \arrow[d, two heads] \\
x \arrow[r, two heads] \arrow[ru, dashed, "g"'] & 1
\end{tikzcd}$$

次に命題 11 の双対により $i^*\colon \pi(x,x) \to \pi(a,x)$ は全単射である．$i^*([i \circ g]) = [i \circ g \circ i] = [i]$，$i^*([\mathrm{id}_a]) = [i]$ だから $[i \circ g] = [\mathrm{id}_x]$ となり，即ち $i \circ g \sim \mathrm{id}_x$ である．故に g が i の homotopy inverse であることが分かった．同様にして p の homotopy inverse h が存在することも分かる．このとき $g \circ h$ が $f = p \circ i$ の homotopy inverse である．

($\Longleftarrow$) $g \circ f \sim \mathrm{id}_a$，$f \circ g \sim \mathrm{id}_b$ とする．$f = (a \underset{i}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} x \underset{p}{\twoheadrightarrow} b)$ と分解する．p が weak equivalence であることを示せばよい．$h\colon b \wedge I \to b$ を $f \circ g$ から id_b への good left homotopy とすると次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mu_0"'] & a \arrow[r, "\sim", "i"'] \arrow[ddr, "f"] & x \arrow[dd, two heads, "p"] \\
b \amalg b \arrow[d, hook] \arrow[drr, "\langle f\circ g, \mathrm{id}_b\rangle"'] & & \\
b \wedge I \arrow[rr, "h"'] & & b
\end{tikzcd}
$$

左の縦の射の合成 i_0 は命題 7 により trivial cofibration である．故にリフト $k\colon b\wedge I \to x$ が存在する．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i_0"', "\wr"] & a \arrow[r, "\sim", "i"'] & x \arrow[d, two heads, "p"] \\
b \wedge I \arrow[urr, dashed, "k"] \arrow[rr, "h"'] & & b
\end{tikzcd}
$$

$s := k \circ i_1$ とおけば $p \circ s = h \circ i_1 = \mathrm{id}_b$ である．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "s"] \arrow[d, hook, "i_1"', "\wr"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & x \arrow[d, two heads, "p"] \\
b \wedge I \arrow[ur, "k"] \arrow[r, "h"'] & b
\end{tikzcd}
$$

ここで，$i\colon a \overset{\sim}{\hookrightarrow} x$ は weak equivalence だから，homotopy inverse $r\colon x \to a$ を持つ．$f = p\circ i$ だから $f\circ r = p\circ i\circ r \sim p\circ \mathrm{id}_x = p$ となる．また k, s の取り方から k は $i\circ g$ から s への left homotopy であり，

$$
s\circ p \sim i\circ g\circ p \sim i\circ g\circ f\circ r \sim i\circ \mathrm{id}_a \circ r = i\circ r \sim \mathrm{id}_x
$$

となる．id は weak equivalence だから，命題 8 より $s\circ p$ も weak equivalence である．

また次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\mathrm{id}_x"] \arrow[d, "p"'] & x \arrow[r, "\mathrm{id}_x"] \arrow[d, "s\circ p"', "\wr"] & x \arrow[d, "p"] \\ b \arrow[r, "s"'] & x \arrow[r, "p"'] & b \end{tikzcd}$$

即ち p は weak equivalence $s \circ p$ の retract である．故にモデル圏の定義から p も weak equivalence である． □

3 ホモトピー圏の構成

定義. モデル圏 C に対して，充満部分圏 $C_c, C_f, C_{cf} \subset C$ を以下により定める．

(1) $\mathrm{Ob}(C_c) := \{a \in C \mid a$ は cofibrant$\}$.
(2) $\mathrm{Ob}(C_f) := \{a \in C \mid a$ は fibrant$\}$.
(3) $\mathrm{Ob}(C_{cf}) := \{a \in C \mid a$ は cofibrant かつ fibrant$\}$.

更に，圏 $\pi C_c, \pi C_f, \pi C_{cf}$ を以下により定める．(命題 13 に注意する．)

(1) $\mathrm{Ob}(\pi C_c) := \mathrm{Ob}(C_c)$ で，$\mathrm{Hom}_{\pi C_c}(a, b) := \pi^r(a, b)$.
(2) $\mathrm{Ob}(\pi C_f) := \mathrm{Ob}(C_f)$ で，$\mathrm{Hom}_{\pi C_f}(a, b) := \pi^l(a, b)$.
(3) $\mathrm{Ob}(\pi C_{cf}) := \mathrm{Ob}(C_{cf})$ で，$\mathrm{Hom}_{\pi C_{cf}}(a, b) := \pi(a, b)$.

各対象 $a \in C$ に対して，分解 $(0 \xrightarrow{!} a) = (0 \hookrightarrow Q(a) \underset{p_a}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} a)$ を考える．つまり $Q(a)$ は cofibrant である．但し，cofibrant な a に対しては $Q(a) := a$，$p_a := \mathrm{id}_a$ と取るようにしておく．

命題 16. この Q は関手 $Q\colon C \to \pi C_c$ を定める．

証明. まず C の射 $f\colon a \to b$ に対して $Q(f)$ を定義する．f, p_a, p_b と 0 から次の実線の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_b"', "\wr"] \\ Q(a) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a"'] \arrow[rru, dashed, "f'"] & a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

$0 \to Q(a)$ が cofibration で p_b が trivial fibration だから，リフト $f'\colon Q(a) \to Q(b)$ が存

在する．このような $f'\colon Q(a) \to Q(b)$ は right homotopic を除いて一意である．

$\because$) 今 $Q(a)$ が cofibrant だから，命題 14 より left homotopic を除いて一意であることを示せばよい．それは命題 11 から従う．

よって $Q(f) := [f'] \in \pi^r(a,b) = \mathrm{Hom}_{\pi C_c}(a,b)$ と定義することができる．後はこの Q が関手 $C \to \pi C_c$ となることを示せばよい．

まず $Q(\mathrm{id}_a) = [\mathrm{id}_{Q(a)}]$ は明らかである．

C の射 $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ を取る．次の可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & 0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_c"', "\wr"] \\
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_b"'] \arrow[urr, dashed, "g'"] \arrow[d, two heads, "p_b"', "\wr"] & b \arrow[r, "g"'] & c \arrow[d, "\mathrm{id}_c"] \\
Q(a) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a"'] \arrow[urr, dashed, "f'"] & a \arrow[r, "f"'] & b \arrow[rr, "g"'] & & c
\end{tikzcd}
$$

図式から明らかに，$Q(g \circ f) = Q(g) \circ Q(f)$ である． $\square$

この Q を cofibrant replacement functor と呼ぶ．また $p_a\colon Q(a) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} a$ を a の cofibrant resolution という．

例 17. $\mathbf{Ch}_{\geq 0}(R)$ の場合，$X = \{X_n\} \in \mathbf{Ch}(R)$ が cofibrant であるとは各 X_n が射影的であることである．よって R-加群 M を鎖複体

$$\cdots \to 0 \to 0 \to M$$

と同一視して cofibrant resolution $0 \hookrightarrow Q(M) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} M$ を取れば，$Q(M)$ は M の射影分解である． $\square$

命題 18. $Q\colon C \to \pi C_c$ を C_f に制限することで，関手 $Q\colon \pi C_f \to \pi C_{cf}$ が得られる．

証明. $a \in C$ を fibrant とする．$0 \hookrightarrow Q(a) \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} a \twoheadrightarrow 1$ より，$Q(a)$ は fibrant かつ cofibrant である．よって関手 $Q|_{C_f}\colon C_f \to \pi C_{cf}$ が得られる．

後は，$a, b \in C$ が fibrant で，$f \overset{l}{\sim} g\colon a \to b$ のとき $Q(f) = Q(g)$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_b"', "\wr"] \\
Q(a) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a"'] \arrow[urr, dashed, "f'"] & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_b"', "\wr"] \\
Q(a) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a"'] \arrow[urr, dashed, "g'"] & a \arrow[r, "g"'] & b
\end{tikzcd}
$$

今 b が fibrant だから，命題 12 により $f\circ p_a \overset{l}{\sim} g\circ p_a$ である．即ち $[f\circ p_a]=[g\circ p_a]$ である．よって命題 11 により $Q(f)=Q(g)$ が分かる． □

双対的に，fibrant replacement functor $R\colon C\to\pi C_f$ が $a \underset{i_a}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} R(a)\twoheadrightarrow 1$ により定まる．これにより関手 $R\colon \pi C_c\to\pi C_{cf}$ が定義される．よって関手 $RQ\colon C\to\pi C_{cf}$ が得られる．

定義. モデル圏 C のホモトピー圏 $\mathrm{Ho}(C)$ を以下のように定める．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(C)) := \mathrm{Ob}(C)$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b) := \mathrm{Hom}_{\pi C_{cf}}(RQa, RQb)$.

また関手 $P\colon C\to\mathrm{Ho}(C)$ を以下のように定める．

- 対象 $a\in C$ に対して $P(a):=a$.
- $f\in\mathrm{Hom}_C(a,b)$ に対して $P(f):=RQ(f)$.

命題 19. $f\in C$ が weak equivalence $\Longleftrightarrow$ $P(f)$ が同型射．

証明. $f\colon a\to b$ を C の射とする．次の可換図式のリフト f' を取る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Qb \arrow[d, two heads, "p_b"', "\wr"] \\
Qa \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a"'] \arrow[rru, dashed, "f'"] & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

このとき $Q(f)=[f']$ である．さらに次の可換図式のリフト f'' を取る．

$$\begin{tikzcd}
Qa \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, hook, "i_{Qa}"', "\wr"] & Qb \arrow[r, hook, "\sim"', "i_{Qb}"] & RQb \arrow[d, two heads] \\
RQa \arrow[rr, two heads] \arrow[rru, dashed, "f''"] & & 1
\end{tikzcd}$$

このとき $P(f)=RQ(f)=[f'']$ である．RQa，RQb は cofibrant かつ fibrant だから，2-out-of-3 と命題 15 により

$$\begin{aligned}
f \text{ が weak equivalence} &\Longleftrightarrow f'' \text{が weak equivalence} \\
&\Longleftrightarrow f'' \text{が homotopy inverse を持つ} \\
&\Longleftrightarrow P(f) \text{ が同型}
\end{aligned}$$

となる. □

定義. C を圏, $W \subset \mathrm{Mor}(C)$ とする. C の W による局所化とは組 $\langle W^{-1}C, P\rangle$ であって以下を満たすものである.

(1) $W^{-1}C$ は圏, $P\colon C \to W^{-1}C$ は関手であり, $f \in W$ に対して $P(f)$ は同型射である.

(2) 関手 $S\colon C \to D$ が同じ条件 ($f \in W$ に対して $S(f)$ は同型射) を満たすならば, 関手 $F\colon W^{-1}C \to D$ が一意に存在して $F \circ P = S$ となる.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "S"'] & W^{-1}C \arrow[d, dashed, "F"] \\ & D \end{tikzcd}$$

定理 20. モデル圏 C に対して, $\langle \mathrm{Ho}(C), P\rangle$ は C の W による局所化である.

証明. まず命題 19 より, f が C の weak equivalence ならば $P(f)$ は同型である.

次に D を圏, $S\colon C \to D$ を関手で「$f \in W$ に対して $S(f)$ は同型射」を満たすとする.

※ 証明に入る前に次のことを確認しておく. $f\colon a \to b$ を C の射とする. 命題 19 の証明のように $f''\colon RQa \to RQb$ を取る.

$$\begin{tikzcd} RQa \arrow[r, "f''"] & RQb \\ Qa \arrow[u, "i_{Qa}", "\wr"'] \arrow[r, "f'"'] \arrow[d, two heads, "p_a"', "\wr"] & Qb \arrow[u, "i_{Qb}", "\wr"'] \arrow[d, two heads, "p_b"', "\wr"] \\ a \arrow[r, "f"'] & b \end{tikzcd}$$

「$f \in W$ に対して Sf は同型射」だから $Sf = Sp_b \circ Si_{Qb}^{-1} \circ Sf'' \circ Si_{Qa} \circ Sp_a^{-1}$ が成り立つ.

$k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b) = \mathrm{Hom}_{\pi C_{cf}}(RQa, RQb)$ とする. ある C の射 $h\colon RQa \to RQb$ を使って $k = [h]$ と書ける. この h を使って $Fk := Sp_b \circ Si_{Qb}^{-1} \circ Sh \circ Si_{Qa} \circ Sp_a^{-1}$ と定める. これは well-defined である.

$\because$) $f \overset{l}{\sim} g\colon a \to b$ に対して $Sf = Sg$ であることを示せばよい. good cylinder object $a \amalg a \underset{i}{\hookrightarrow} a \wedge I \underset{p}{\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}} b$ と $h\colon a \wedge I \to b$ が存在して次が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & a & \\
 & a \wedge I \arrow[u, two heads, "p", "\wr"'] \arrow[dr, "h"] & \\
a \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "i_0"] \arrow[r, "\mu_0"'] \arrow[rr, bend right, "f"'] & a \amalg a \arrow[u, hook, "i"] \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & b
\end{tikzcd}$$

$p \circ i_0 = \mathrm{id}_a = p \circ i_1$ だから $Sp \circ Si_0 = Sp \circ Si_1$ となる．今 p が weak equivalence だから Sp は同型射となり $Si_0 = Si_1$ が分かる．故に $Sf = Sh \circ Si_0 = Sh \circ Si_1 = Sg$ である．

対象 $a \in \mathrm{Ho}(C)$ に対して $F(a) := S(a)$ とすれば関手 $F\colon \mathrm{Ho}(C) \to D$ が定まる．このとき $f \in \mathrm{Hom}_C(a,b)$ に対して上のように $f''\colon RQa \to RQb$ を取れば

$$FP(f) = F[f''] = Sp_b \circ Si_{Qb}^{-1} \circ Sf'' \circ Si_{Qa} \circ Sp_a^{-1} = S(f)$$

となるから $FP = S$ である．

後はこのような F の一意性を示せばよい．$k = P(f)$ と書ける射 $k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b)$ に対しては，上から分かるように $F(P(f)) = S(f)$ でなければならない．従って，任意の射 $k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b)$ が $P(f)$ $(f \in \mathrm{Mor}(C))$ の合成で書けることを示せばよい．

$a, b \in C$ に対して RQa, RQb は cofibrant かつ fibrant だから，$f\colon RQa \to RQb$ に対して上のように f'' を取れば $f'' = f$ となる．

$$\begin{tikzcd}
RQRQa \arrow[r, "f"] & RQRQb \\
QRQa \arrow[u, "\mathrm{id} = i_{QRQa}"] \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\mathrm{id} = p_{RQa}"'] & QRQb \arrow[u, "i_{QRQb} = \mathrm{id}"'] \arrow[d, "p_{RQb} = \mathrm{id}"] \\
RQa \arrow[r, "f"'] & RQb
\end{tikzcd}$$

故に $P\colon \mathrm{Hom}_C(RQa, RQb) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(RQa, RQb)$ は全射であることが分かる．一方 $a \underset{p_a}{\overset{\sim}{\twoheadleftarrow}} Qa \underset{i_{Qa}}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} RQa$，$b \underset{p_b}{\overset{\sim}{\twoheadleftarrow}} Qb \underset{i_{Qb}}{\overset{\sim}{\hookrightarrow}} RQb$ から $\mathrm{Ho}(C)$ の同型 $P(i_{Qa}) \circ P(p_a)^{-1}$，$P(p_b) \circ$

$P(i_{Qb})^{-1}$ が得られる．これにより全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(RQa, RQb) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b)$ が $f \mapsto P(p_b) \circ P(i_{Qb})^{-1} \circ f \circ P(i_{Qa}) \circ P(p_a)^{-1}$ により得られる．以上により全射 $\mathrm{Hom}_C(RQa, RQb) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b)$ が得られる．即ち，任意の $k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(C)}(a,b)$ はある $f \in \mathrm{Hom}_C(RQa, RQb)$ により $k = P(p_b) \circ P(i_{Qb})^{-1} \circ P(f) \circ P(i_{Qa}) \circ P(p_a)^{-1}$ と表される． □

4 導来関手

定義. C をモデル圏，D を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．局所化 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$ に沿った F の右 Kan 拡張 $\mathbf{L}F := P^{\ddagger}F$ を F の左導来関手という．局所化 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$ に沿った F の左 Kan 拡張 $\mathbf{R}F := P^{\dagger}F$ を F の右導来関手という．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[dr, "\mathbf{L}F"] & \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[dr, "\mathbf{R}F"] & \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & D
\end{tikzcd}$$

補題 21. $F\colon C_c \to D$ を関手とし，$f \in C_c$ が trivial cofibration ならば Ff は同型射であるとする．このとき C_c の射 $f, g\colon a \to b$ が right homotopic ならば $Ff = Fg$ である．

証明. b が cofibrant だから，命題 9 の双対により very good path object $b \overset{\sim}{\underset{i}{\hookrightarrow}} b^I \underset{p}{\twoheadrightarrow} b \times b$ と right homotopy $h\colon a \to b^I$ が取れる．$\mu_0, \mu_1\colon b \times b \to b$ を標準射影とすれば次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & b^I \arrow[d, "p"] & b \arrow[l, hook', "\sim", "i"'] \arrow[dl, "{\langle \mathrm{id},\mathrm{id}\rangle}"] & 0 \arrow[l, hook'] \\
a \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "{\langle f,g\rangle}"'] \arrow[dr, "f"'] & b \times b \arrow[d, "\mu_0"] & & \\
 & b & &
\end{tikzcd}$$

b が cofibrant だから b^I も cofibrant となる．よって仮定から Fi は同型射である．$\langle \mathrm{id}, \mathrm{id}\rangle = p \circ i$ だから $F\langle \mathrm{id}, \mathrm{id}\rangle = Fp \circ Fi$ となり，よって $Fp = F\langle \mathrm{id}, \mathrm{id}\rangle \circ Fi^{-1}$ であ

る．$f = \mu_0 \circ p \circ h$，$g = \mu_1 \circ p \circ h$ だから

$$\begin{aligned} Ff &= F\mu_0 \circ Fp \circ Fh \\ &= F\mu_0 \circ F\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle \circ Fi^{-1} \circ Fh \\ &= F(\mathrm{id}) \circ Fi^{-1} \circ Fh \\ &= F\mu_1 \circ F\langle \mathrm{id}, \mathrm{id} \rangle \circ Fi^{-1} \circ Fh \\ &= F\mu_1 \circ Fp \circ Fh \\ &= Fg \end{aligned}$$

である． □

定理 22. C をモデル圏，D を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．$a, b \in C$ が cofibrant で $f\colon a \to b$ が weak equivalence ならば，Ff は同型射であるとする．このとき右 Kan 拡張 $P^{\ddagger}F$，即ち F の左導来関手が存在する．

証明. F の C_c への制限 $F|_{C_c}$ に補題 21 を適用して, 関手 $\overline{F}\colon \pi C_c \to D$ を得る．$f \in C$ を weak equivalence とすれば $\overline{F}Q(f) \in D$ は同型射である．よって局所化 $P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$ の普遍性により，関手 $L\colon\ \mathrm{Ho}(C) \to D$ が一意に存在して $LP = \overline{F}Q$ となる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[drr, dashed, "L"] & & \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "Q"'] & \pi C_c \arrow[r, "\overline{F}"'] & D \end{tikzcd}$$

$a \in C$ に対して $\varepsilon_a := F(p_a)\colon \overline{F}Qa \to Fa$ と定める．これにより自然変換 $\varepsilon\colon LP = \overline{F}Q \Rightarrow F$ が定まる．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ho}(C) \arrow[drr, "L"] & & \\ C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "Q"] \arrow[rr, bend right, "F"'] & \pi C_c \arrow[r, "\overline{F}"'] \arrow[u, phantom, "||"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon"] & D \\ & & \end{tikzcd}$$

∵) C の射 $f\colon a \to b$ に対して，次を可換とするような C の射 f' を取る．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Q(b) \arrow[d, two heads, "p_b", "\wr"'] \\
Q(a) \arrow[r, two heads, "\sim", "p_a"'] \arrow[urr, dashed, "f'"] & a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}
$$

これに関手 F を適用して次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
FQa \arrow[r, "F(p_a)"] \arrow[d, "F(f')"'] & Fa \arrow[d, "F(f)"] \\
FQb \arrow[r, "F(p_b)"'] & Fb
\end{tikzcd}
$$

今 Q の定義より $Q(f) = [f']$ であり，よって $\overline{F}Q(f) = F(f')$ となる．よって上の図式を書きかえることで次の可換図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\overline{F}Qa \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "\overline{F}Q(f)"'] & Fa \arrow[d, "F(f)"] \\
\overline{F}Qb \arrow[r, "\varepsilon_b"'] & Fb
\end{tikzcd}
$$

即ち $\varepsilon\colon \overline{F}Q \Rightarrow F$ は自然変換である．

$\langle L, \varepsilon\rangle$ が P に沿った F の右 Kan 拡張であることを示す．その為に $S\colon \mathrm{Ho}(C) \to D$ を関手，$\theta\colon SP \Rightarrow F$ を自然変換とする．次の等式を満たす τ が一意に存在することを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, bend left=50, "S"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] \arrow[r, "L"'] & D \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] \arrow[ur, "F"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[dr, bend left=50, "S"] \arrow[dr, phantom, "\theta\Downarrow"] & \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & D
\end{tikzcd}
$$

まず一意性を示すため，$\tau\colon S \Rightarrow L$ が $\varepsilon \circ \tau_P = \theta$ を満たすとする．$a \in C$ に対して次の図

式が可換となる.

$$\begin{tikzcd}
SPQa \arrow[r, "\tau_{PQa}"] \arrow[d, "SPp_a"'] \arrow[rr, bend left, "\theta_{Qa}"] & LPQa \arrow[r, "\varepsilon_{Qa}"] \arrow[d, "LPp_a"] & FQa \arrow[d, "Fp_a"] \\
SPa \arrow[r, "\tau_{Pa}"'] \arrow[rr, bend right, "\theta_a"'] & LPa \arrow[r, "\varepsilon_a"'] & Fa
\end{tikzcd}$$

$p_a\colon Qa \to a$ は weak equivalence だから，$SPp_a\colon SPQa \to SPa$ は同型射である．また Qa は cofibrant だから $p_{Qa} = \mathrm{id}_{Qa}$ であり，よって $\varepsilon_{Qa} = Fp_{Qa} = \mathrm{id}$ である．$LP = \overline{F}Q$ もあわせて次の図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
SPQa \arrow[r, "\tau_{PQa}"] \arrow[d, "SPp_a"'] \arrow[rr, bend left, "\theta_{Qa}"] & \overline{F}QQa \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\overline{F}Qp_a"] & FQa \arrow[d, "Fp_a"] \\
SPa \arrow[r, "\tau_{Pa}"'] \arrow[rr, bend right, "\theta_a"'] & \overline{F}Qa \arrow[r, "\varepsilon_a"'] & Fa
\end{tikzcd}$$

ここで Q の定義から，$Qp_a = [\mathrm{id}]$ である.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, hook] \arrow[d, hook] & & Qa \arrow[d, two heads, "p_a"', "\wr"] \\
Qa \arrow[r, two heads, "\sim", "\mathrm{id}"'] \arrow[rru, dashed, "\mathrm{id}"] & Qa \arrow[r, "p_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

よって $\overline{F}Qp_a = \mathrm{id}$ が分かる．故に τ は，任意の $a \in C$ に対して

$$\tau_a = \tau_{Pa} = \left(SPa \xrightarrow{SPp_a^{-1}} SPQa \xrightarrow{\theta_{Qa}} \overline{F}Qa = LPa\right)$$

を満たさなければならない．従って τ はもし存在すれば一意である.

逆に τ をこの合成で定義すれば，$\tau\colon S \Rightarrow L$ は自然変換である.

$\because$) 先ほどと同様にして次が可換である．

$$\begin{array}{ccc} SPQa & \xrightarrow{SPp_a} & SPa \\ {\scriptstyle SP\widetilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle SPf} \\ SPQb & \xrightarrow[SPp_b]{} & SPb \end{array}$$

また θ が自然変換だから次が可換となる．

$$\begin{array}{ccc} SP(Qa) & \xrightarrow{\theta_{Qa}} & F(Qa) \\ {\scriptstyle SP\widetilde{f}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F\widetilde{f}=FQf} \\ SP(Qb) & \xrightarrow[\theta_{Qb}]{} & F(Qb) \end{array}$$

故に τ も自然変換である．

以上により $\langle L, \varepsilon \rangle$ が P に沿った F の右 Kan 拡張であることが分かった． □

定理 23. 定理 22 の条件の下で存在する右 Kan 拡張は絶対右 Kan 拡張である．

証明. $G\colon D \to X$ を関手とする．このとき $GF\colon C \to X$ は前定理の条件 ($a, b \in C$ が cofibrant で $f\colon a \to b$ が weak equivalence ならば，GFf は同型射である) を満たす．故に右 Kan 拡張 $\langle P^{\ddagger}(GF), \varepsilon' \rangle$ が存在するが，定理 22 の証明での構成法からこれは $P^{\ddagger}(GF) = G(P^{\ddagger}F)$，$\varepsilon' = G\varepsilon$ を満たすことが分かる．即ち任意の関手 $G\colon D \to X$ と交換するから $P^{\ddagger}F$ は絶対右 Kan 拡張である． □

双対的に

定理 24. C をモデル圏，D を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．$a, b \in C$ が fibrant で $f\colon a \to b$ が weak equivalence ならば，Ff は同型射であるとする．このとき左 Kan 拡張 $P^{\dagger}F$，即ち F の右導来関手が存在する．この $P^{\dagger}F$ は絶対左 Kan 拡張である． □

定義. C, D をモデル圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．$P\colon C \to \mathrm{Ho}(C)$，$P\colon D \to \mathrm{Ho}(D)$

を局所化とする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, dashed, shift left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[r, dashed, shift right, "\underline{\mathbf{R}}F"'] & \mathrm{Ho}(D) \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

このとき $PF\colon C \to \mathrm{Ho}(D)$ の左導来関手を F の total left derived functor といい $\underline{\mathbf{L}}F$ で表す．また PF の右導来関手を F の total right derived functor といい $\underline{\mathbf{R}}F$ で表す．

補題 25. $C, \widetilde{C}, D, \widetilde{D}$ を圏，$S\colon C \to \widetilde{C}$，$T\colon D \to \widetilde{D}$ を関手，$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手とする．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[r, dashed, shift left=1.5, "S^{\ddagger}(TF)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widetilde{D} \arrow[l, dashed, shift left=1.5, "T^{\dagger}(SG)"] \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[r, shift left=1.5, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[u, "T"'] \arrow[l, shift left=1.5, "G"]
\end{tikzcd}
$$

絶対右 Kan 拡張 $S^{\ddagger}(TF)$，絶対左 Kan 拡張 $T^{\dagger}(SG)$ が存在するとする．このとき $S^{\ddagger}(TF) \dashv T^{\dagger}(SG)\colon \widetilde{C} \to \widetilde{D}$ である．

証明. 随伴 $F \dashv G$ の unit，counit を $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow GF$，$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ とする．また絶対右 Kan 拡張 $X := S^{\ddagger}(TF)$，絶対左 Kan 拡張 $Y := T^{\dagger}(SG)$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[r, "X"] & \widetilde{D} \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] & D \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} & \widetilde{D} \arrow[l, "Y"'] \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\beta"] & D \arrow[u, "T"'] \arrow[l, "G"]
\end{tikzcd}
$$

次の合成で自然変換 $S \Rightarrow YTF$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rrr, "\mathrm{id}"] & & & \widetilde{C} \\
& \arrow[r, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & C \arrow[ur, "S"] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[urr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Downarrow"] & D \arrow[ur, "G"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uur, "Y"'] &
\end{tikzcd}
$$

今 X は絶対右 Kan 拡張だから，$S^{\ddagger}(YTF)=YX$ である．よって $S^{\ddagger}(YTF)$ の普遍性から自然変換 $\widetilde{\eta}\colon \mathrm{id}\Rightarrow YX$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & \widetilde{C} \\
 & C \arrow[ur, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Downarrow", shift left=3] & D \arrow[u, "G"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uu, "Y"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[ddrr, "X"] \arrow[ddr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \widetilde{C} \arrow[d, phantom, "\widetilde{\eta}\Downarrow"] \\
 & & {} \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uu, "Y"']
\end{tikzcd}
$$

同様にして $T^{\dagger}(XSG)$ の普遍性から自然変換 $\widetilde{\varepsilon}\colon XY\Rightarrow \mathrm{id}$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] & \\
 & C \arrow[ur, "S"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\beta"] & & \\
D \arrow[ur, "G"] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uur, "Y"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\widetilde{\varepsilon}"] & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
 & C \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"] & D \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \\
D \arrow[ur, "G"] \arrow[urr, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon", shift left=4] & \widetilde{D} \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & {} & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

このとき $\widetilde{\varepsilon}_X\circ X\widetilde{\eta}=\mathrm{id}_X$，$Y\widetilde{\varepsilon}\circ\widetilde{\eta}_Y=\mathrm{id}_Y$ を示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[drr, "X"] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \widetilde{C} \arrow[dr, "X"] \arrow[d, phantom, "\widetilde{\eta}\Downarrow"'] & \\
C \arrow[u, "S"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[u, "Y"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\widetilde{\varepsilon}"] & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] & \\
 & C \arrow[ur, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Downarrow", shift left=3] & D \arrow[u, "G"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[uu, "Y"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\widetilde{\varepsilon}"] & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
 & C \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"] & D \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Downarrow", shift left=3] & D \arrow[u, "G"] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon", shift left=4] & \widetilde{D} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\widetilde{C} \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & & \widetilde{C} \arrow[ddr, "X"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
 & C \arrow[ur, "S"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & D \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & \\
C \arrow[uu, "S"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "T"'] & \widetilde{D} \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
 & & \widetilde{C} \arrow[dd, "X"] \\
C \arrow[urr, "S"] \arrow[r, "F"] & D \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\alpha"] \arrow[dr, "T"'] & \\
 & & \widetilde{D}
\end{tikzcd}
$$

であるが，右 Kan 拡張 $\langle X, \alpha \rangle$ の普遍性から $\widetilde{\varepsilon}_X \circ X\widetilde{\eta} = \mathrm{id}_X$ が分かる．同様にして $Y\widetilde{\varepsilon} \circ \widetilde{\eta}_Y = \mathrm{id}_Y$ も分かる． □

定理 26. C, D をモデル圏，$F \dashv G \colon C \to D$ を随伴関手とする．F は C の cofibrant object の間の weak equivalence を D の weak equivalence に送り，G は D の fibrant object の間の weak equivalence を C の weak equivalence に送るとする．このとき $\underline{\mathbf{L}}F, \underline{\mathbf{R}}G$ が存在し $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G \colon \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ は随伴である．

証明. $P \colon D \to \mathrm{Ho}(D)$ を局所化とすれば $PF \colon C \to \mathrm{Ho}(D)$ は cofibrant object の間の weak equivalence を同型に送る．よって定理 22 により左導来関手 $\underline{\mathbf{L}}F$ が存在する．同様にして右導来関手 $\underline{\mathbf{R}}G$ も存在する．定理 23 により，これらは絶対 Kan 拡張である．故に補題 25 により $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G$ である． □

命題 27. モデル圏 C, D の間の随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ に対して次が成り立つ．

(1) F が cofibration を保つ $\Longleftrightarrow$ G が trivial fibration を保つ．
(2) F が trivial cofibration を保つ $\Longleftrightarrow$ G が fibration を保つ．

証明. 全て同様なので，1 の $\Longrightarrow$ のみ示す．

F が cofibration を保つとして，D の射 $f \colon a \to b$ を trivial fibration とする．Gf が cofibration に対して RLP を持つ事を示せばよい．そこで $g \colon c_0 \to c_1$ を cofibration としてして，次の図式が可換であるとする．

$$
\begin{tikzcd}
c_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "g"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
c_1 \arrow[r] & Gb
\end{tikzcd}
$$

随伴 $F \dashv G$ により，次の実線の可換図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
Fc_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "Fg"'] & a \arrow[d, two heads, "f", "\wr"'] \\
Fc_1 \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & b
\end{tikzcd}
$$

Fg が cofibration で，f が trivial fibration だから，点線の射が存在して可換となる．このとき再び随伴により

$$
\begin{tikzcd}
c_0 \arrow[r] \arrow[d, hook, "g"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
c_1 \arrow[r] \arrow[ur] & Gb
\end{tikzcd}
$$

が可換となる． □

定義． モデル圏 C, D の間の随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ に対して，以下の条件が同値であることが命題 27 により分かる．

- F が cofibration と trivial cofibration を保つ．
- G が fibration と trivial fibration を保つ．
- F が cofibration を保ち，G が fibration を保つ．
- F が trivial cofibration を保ち，G が trivial fibration を保つ．

これらの条件を満たす随伴 $F \dashv G$ を Quillen 随伴と呼ぶ．また F を左 Quillen 関手，G を右 Quillen 関手という．

命題 28. $F \dashv G \colon C \to D$ を Quillen 随伴とするとき

(1) F は cofibrant を保つ．
(2) F は cofibrant な対象の間の weak equivalence を保つ．
(3) G は fibrant を保つ．
(4) G は fibrant な対称の間の weak equivalence を保つ．

証明． 同様なので 1, 2 のみ示す．

(1) a を cofibrant とする．即ち $! \colon 0 \to a$ が cofibration である．F が左 Quillen 関手だから $F(!) \colon F(0) \to F(a)$ も cofibration である．従って，左随伴は始対象と交換するので，$0 \to F(a)$ が cofibration となり $F(a)$ は cofibrant である．

(2) $a, b \in C$ を cofibrant として $f\colon a \to b$ を weak equivalence とする．pushout

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & a \arrow[d, hook, "i_a"] \\
b \arrow[r, "i_b"'] & a \amalg b
\end{tikzcd}$$

を考える．cofibration の pushout は cofibration (命題 5) だから，i_a, i_b は cofibration である．$f\colon a \to b$, $\mathrm{id}_b\colon b \to b$ から普遍性により得られる射 $h\colon a \amalg b \to b$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & a \arrow[d, hook, "i_a"] \arrow[ddr, bend left, "\sim", "f"'] & \\
b \arrow[r, hook, "i_b"'] \arrow[drr, bend right, "\sim", "\mathrm{id}_b"'] & a \amalg b \arrow[dr, dashed, "h"'] & \\
 & & b
\end{tikzcd}$$

$h = (a \amalg b \underset{i}{\hookrightarrow} x \overset{\sim}{\underset{p}{\twoheadrightarrow}} b)$ と分解する．

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & a \arrow[d, hook, "i_a"] \arrow[ddrr, bend left, "\sim", "f"'] & & \\
b \arrow[r, hook, "i_b"'] \arrow[ddrr, bend right, "\sim", "\mathrm{id}_b"'] & a \amalg b \arrow[dr, hook, "i"'] & & \\
 & & x \arrow[dr, two heads, "\sim", "p"'] & \\
 & & & b
\end{tikzcd}$$

p, f, id_b が weak equivalence だから，2-out-of-3 により $i \circ i_a$ と $i \circ i_b$ も weak equivalence である．よって $i \circ i_a$ と $i \circ i_b$ は trivial cofibration となる．F は cofibrant object の間の weak equivalence を保つから，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & Fa \arrow[d, hook, "\wr", "F(i \circ i_a)"'] \arrow[ddr, bend left, "Ff"] & \\
Fb \arrow[r, hook, "\sim", "F(i \circ i_b)"'] \arrow[drr, bend right, "\sim", "\mathrm{id}_{Fb}"'] & Fx \arrow[dr, "Fp"'] & \\
 & & Fb
\end{tikzcd}$$

$F(i \circ i_b)$ と id_{Fb} が weak equivalence だから, 2-out-of-3 により $F(p)$ も weak equivalence である．従って $F(f) = F(p) \circ F(i \circ i_a)$ も weak equivalence となる． $\square$

従って定理 26 より次の定理を得る．

定理 29. C, D をモデル圏として，$F \dashv G \colon C \to D$ を Quillen 随伴関手とする．このとき $\underline{\mathbf{L}}F, \underline{\mathbf{R}}G$ が存在して $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G \colon \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ は随伴である． $\square$

定義. Quillen 随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ が Quillen 同値
$\iff \underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G \colon \mathrm{Ho}(C) \to \mathrm{Ho}(D)$ が圏同値を与える．

定理 30. Quillen 随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ に対して次は同値である．

(1) $F \dashv G$ が Quillen 同値.
(2) $c \in C$ が cofibrant ならば合成 $c \xrightarrow{\eta_c} GFc \xrightarrow{Gi_{Fc}} GRFc$ が weak equivalence であり，$d \in D$ が fibrant ならば合成 $FQGd \xrightarrow{Fp_{Gd}} FGd \xrightarrow{\varepsilon_d} d$ が weak equivalence である．
(3) $c \in C$ が cofibrant で $d \in D$ が fibrant ならば，$f \colon Fc \to d$ が weak equivalence $\iff f$ の随伴射 $\widetilde{f} \colon c \to Gd$ が weak equivalence

証明. ($1 \iff 2$) $\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G$ の unit を $\widetilde{\eta}$ とする．定理 22 の証明と補題 25 の証明を見れば，$c \in C$ に対して $\widetilde{\eta}_c = PG(i_{Fc}) \circ P(\eta_c) \circ (Pp_c)^{-1}$ と書けることが分かる．よって

$$\begin{aligned} \widetilde{\eta}_c \text{が同型} &\iff P(G(i_{Fc}) \circ \eta_c) \text{ が同型} \\ &\iff G(i_{Fc}) \circ \eta_c \text{が weak equivalence (命題 19)} \end{aligned}$$

が分かる．ε についても同様である．故に $1 \iff 2$ が分かる．

($2 \implies 3$) $c \in C$ を cofibrant，$d \in D$ を fibrant，$f \colon Fc \to d$ を weak equivalence とする．fibrant resolution により次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\sim", "f"'] \arrow[d, hook, "i_{Fc}"', "\wr"] & d \arrow[d, hook, "i_d"', "\wr"] \\ RFc \arrow[r, "f'"'] & Rd \end{tikzcd}$$

2-out-of-3 より f' も weak equivalence である．これに G を作用させて次の可換図式を

得る (G は fibrant object の間の weak equivalence を保つことと仮定 2 に気をつける).

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\sim"] & GFc \arrow[r, "Gf"] \arrow[d, hook, "Gi_{Fc}"] & Gd \arrow[d, hook, "Gi_d"', "\wr"] \\
& GRFc \arrow[r, "\sim", "GRf"'] & GRd
\end{tikzcd}
$$

よって 2-out-of-3 により $\widetilde{f} = Gf \circ \eta_c$ も weak equivalence である.

逆も同様にして次の図式から分かる.

$$
\begin{tikzcd}
Qc \arrow[r] \arrow[d, two heads, "p_c"', "\wr"] & QGd \arrow[d, two heads, "p_{Gd}"', "\wr"] \\
c \arrow[r, "\sim", "\widetilde{f}"'] & Gd
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
GFc \arrow[r, "\sim", "FQ\widetilde{f}"'] \arrow[d, two heads, "Fp_c"', "\wr"] & Gd \arrow[d, two heads, "Fp_{Gd}"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\
GRFc \arrow[r, "F\widetilde{f}"'] & GRd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

(3 $\Longrightarrow$ 2) $c \in C$ を cofibrant とする．RFc が fibrant だから，仮定 3 を使えば Fc の fibrant resolution $i_{Fc} \colon Fc \overset{\sim}{\hookrightarrow} RFc$ の随伴射 $c \xrightarrow{\eta_c} GFc \xrightarrow{Gi_{Fc}} GRFc$ も weak equivalence であることが分かる．同様にして $FQGd \xrightarrow{Fp_{Gd}} FGd \xrightarrow{\varepsilon_d} d$ も weak equivalence である． $\square$

以下では，右 Kan 拡張 $\underline{\mathbf{L}}F$ の counit を ε^F で表すことにする．即ち

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(D) \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^F"] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

が右 Kan 拡張となる.

定義. $F, F' \colon C \to D$ を左 Quillen 関手とする．このとき自然変換 $\theta \colon F \Rightarrow F'$ に対して $\underline{\mathbf{L}}\theta \colon \underline{\mathbf{L}}F \Rightarrow \underline{\mathbf{L}}F'$ を，右 Kan 拡張の普遍性により得られる次の自然変換とする.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \underline{\mathbf{L}}\theta"] & \mathrm{Ho}(D) \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^{F'}"] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(D) \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^F"] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

命題 31. $F, F' \colon C \to D$ を左 Quillen 関手，$\theta \colon F \Rightarrow F'$ を自然変換とする．このとき $\underline{\mathbf{L}}\theta$ が自然同型 $\Longleftrightarrow$ cofibrant な $c \in C$ に対して θ_c が weak equivalence.

証明. 定理 22 の証明と命題 19 より

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{L}}\theta \text{ が自然同型} &\Longleftrightarrow \text{任意の } a \in C \text{ に対して } P\theta_{Qa} \text{ が同型} \\ &\Longleftrightarrow \text{任意の } a \in C \text{ に対して } \theta_{Qa} \text{ が weak equivalence} \end{aligned}$$

である．故に示したい主張の $\Longleftarrow$ は成り立つことが分かる．

逆に $\Longrightarrow$ は，任意の cofibrant な $c \in C$ に対して $Qc = c$ となることから分かる． □

補題 32. $F \dashv G \colon A \to B$，$S \dashv T \colon B \to C$ を Quillen 随伴とする．このとき随伴の合成 $SF \dashv GT \colon A \to C$ も Quillen 随伴である．

証明. $a \in A$ が cofibrant で $c \in C$ が fibant のとき

$$\begin{aligned} SFa \to c \text{ が weak equivalence} &\Longleftrightarrow \text{その随伴射 } Fa \to Tc \text{ が weak equivalence} \\ &\Longleftrightarrow \text{更にその随伴射 } a \to GTc \text{ が weak equivalence} \end{aligned}$$

となるので，定理 30 より $SF \dashv GT$ は Quillen 随伴である． □

定理 33. 以下のように定めると strict 2-category になる．これを **Model** で表す．

- モデル圏を対象とする．
- Quillen 随伴 $F \dashv G \colon A \to B$ を A から B への 1-morphism とする．
- 自然変換 $F \Rightarrow F'$ を，$F \dashv G$ から $F' \dashv G'$ への 2-morphism とする．

証明. まず明らかに，モデル圏 A, B に対して $\mathbf{Model}(A, B)$ は圏である．

次に Quillen 随伴の合成を補題 32 により定める．自然変換の合成は水平合成とすれば，これは明らかに関手 $\mathbf{Model}(B, C) \times \mathbf{Model}(A, B) \to \mathbf{Model}(A, C)$ となり，結合律を満たす．

またモデル圏 A に対して，unit も counit も id となる随伴 $\mathrm{id} \dashv \mathrm{id} \colon A \to A$ を考えれば，これが恒等射の条件を満たす．よって **Model** は strict 2-category である． □

定理 34. ホモトピー圏を与える対応は pseudofunctor $\mathrm{Ho} \colon \mathbf{Model} \to \mathrm{Adj}$ を与える．即ち

- Quillen 随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ に対して $\mathrm{Ho}(F \dashv G) := (\underline{\mathbf{L}}F \dashv \underline{\mathbf{R}}G)$.

- $F \dashv G,\ F' \dashv G' \colon C \to D$ を Quillen 随伴とする．このとき自然変換 $\theta\colon F \Rightarrow F'$ に対して $\mathrm{Ho}(\theta) := \underline{\mathbf{L}}\theta\colon \underline{\mathbf{L}}F \Rightarrow \underline{\mathbf{L}}F'$ と定める．

証明. まずモデル圏 A, B, C に対して自然同型

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbf{Model}(B,C) \times \mathbf{Model}(A,B) \arrow[dl, "\mathrm{Ho}\times\mathrm{Ho}"'] \arrow[dr, "C"] & \\
\mathrm{Adj}(\mathrm{Ho}(B),\mathrm{Ho}(C)) \times \mathrm{Adj}(\mathrm{Ho}(A),\mathrm{Ho}(B)) \arrow[dr, "C"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi}{\Longrightarrow}} & \mathbf{Model}(A,C) \arrow[dl, "\mathrm{Ho}"] \\
& \mathrm{Adj}(\mathrm{Ho}(A),\mathrm{Ho}(C)) &
\end{tikzcd}
$$

を定義する．その為に左 Quillen 関手 $F\colon A \to B,\ K\colon B \to C$ に対して自然変換 φ_{KF} を，右 Kan 拡張の普遍性により得られる次の自然変換とする．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rr, bend right=50, "\underline{\mathbf{L}}(KF)"'] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{KF}"] & \mathrm{Ho}(C) \\
& {} \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{KF}"] & \\
A \arrow[r, "F"'] \arrow[uu, "P"] & B \arrow[r, "K"'] & C \arrow[uu, "P"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] & \mathrm{Ho}(C) \\
A \arrow[r, "F"'] \arrow[u, "P"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{F}"] & B \arrow[r, "K"'] \arrow[u, "P"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{K}"] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

このとき φ は上記の自然変換となる．

$\because$) 自然変換 $\beta\colon F \Rightarrow F',\ \gamma\colon K \Rightarrow K'$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{L}}K \circ \underline{\mathbf{L}}F \arrow[r, "\varphi_{KF}"] \arrow[d, "\underline{\mathbf{L}}\gamma\bullet\underline{\mathbf{L}}\beta"'] & \underline{\mathbf{L}}(KF) \arrow[d, "\mathrm{Ho}(\gamma\bullet\beta)"] \\
\underline{\mathbf{L}}K' \circ \underline{\mathbf{L}}F' \arrow[r, "\varphi_{K'F'}"'] & \underline{\mathbf{L}}(K'F')
\end{tikzcd}
$$

それは

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\underline{\mathbf{L}}\beta"] \arrow[rr, bend right=50, "\underline{\mathbf{L}}(K'F')"'] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}K'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\underline{\mathbf{L}}\gamma"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{K'F'}"] & \mathrm{Ho}(C) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{K'F'}"] & B \arrow[r, bend right, "K'"'] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\underline{\mathbf{L}}\beta"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}K'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\underline{\mathbf{L}}\gamma"] & \mathrm{Ho}(C) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{F'}"] & B \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend right, "K'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{K'}"] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}K"] & \mathrm{Ho}(C) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{F}"] & B \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "K'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{K}"] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rr, bend right=40, "\underline{\mathbf{L}}(KF)"'] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{KF}"] & \mathrm{Ho}(C) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{KF}"] & B \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "K'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rr, bend right=30, "\underline{\mathbf{L}}(KF)"'] \arrow[rr, bend right=60, "\underline{\mathbf{L}}(K'F')"'] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, bend left, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{KF}\quad\Downarrow\underline{\mathbf{L}}(\gamma\bullet\beta)"] & \mathrm{Ho}(C) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, bend right, "F'"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{K'F'}"] & B \arrow[r, bend right, "K'"'] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

となるから，右 Kan 拡張 $\underline{\mathbf{L}}(K'F')$ の普遍性により分かる．

この φ は自然同型である．

$\because$) φ_{KF} が自然同型であることを示せばよいが，それは定理 22 の証明より，任意の

$a \in C$ に対して $(\varphi_{KF})_a = \underline{\mathbf{L}}K \circ \underline{\mathbf{L}}F \circ P(p_a)^{-1}$ となることから分かる.

次にモデル圏 C に対して自然変換 $\psi\colon \mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(C)} \Rightarrow \underline{\mathbf{L}}\,\mathrm{id}_C$ を

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(C)}"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}\,\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\psi"] & \mathrm{Ho}(C) \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{\mathrm{id}_C}"] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(C)}"] & \mathrm{Ho}(C) \\
C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & C \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

により定義する．この ψ は自然同型である.

$\because$) 定理 22 の証明より，任意の $a \in C$ に対して $\psi_a = P(p_a)^{-1}$ となることから分かる.

以上の φ, ψ が Ho を pseudofunctor とすることを示そう.

まず左 Quillen 関手 $F\colon A \to B$，$K\colon B \to C$，$M\colon C \to D$ に対して，次の図式が可換であることを示す.

$$
\begin{tikzcd}
(\underline{\mathbf{L}}M \circ \underline{\mathbf{L}}K) \circ \underline{\mathbf{L}}F \arrow[r, "\varphi_{MK} \bullet \underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[d, equal] & \underline{\mathbf{L}}(MK) \circ \underline{\mathbf{L}}F \arrow[r, "\varphi_{MK,F}"] & \underline{\mathbf{L}}((MK)F) \arrow[d, equal] \\
\underline{\mathbf{L}}M \circ (\underline{\mathbf{L}}K \circ \underline{\mathbf{L}}F) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}M \bullet \varphi_{KF}"'] & \underline{\mathbf{L}}M \circ \underline{\mathbf{L}}(KF) \arrow[r, "\varphi_{M,KF}"'] & \underline{\mathbf{L}}(M(KF))
\end{tikzcd}
$$

それは

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rr, bend right, "\underline{\mathbf{L}}(KF)"'] \arrow[rrr, bend right=60, "\underline{\mathbf{L}}(MKF)"'] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{KF}"] & \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}M"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{M,KF}"] & \mathrm{Ho}(D) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & B \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{MKF}"] \arrow[r, "K"'] & C \arrow[r, "M"'] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rr, bend right, "\underline{\mathbf{L}}(KF)"'] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\varphi_{KF}"] & \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}M"] & \mathrm{Ho}(D) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & B \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{KF}"] \arrow[r, "K"'] & C \arrow[u, "P"] \arrow[r, "M"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^{M}"] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] & \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}M"] & \mathrm{Ho}(D) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^F"] & B \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^K"] & C \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "M"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^M"] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[rr, bend right, "\underline{\mathbf{L}}(MK)"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \varphi_{MK}"] & \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}M"] & \mathrm{Ho}(D) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^F"] & B \arrow[u, "P"'] \arrow[r, "K"'] \arrow[urr, phantom, "\Downarrow \varepsilon^{MK}"] & C \arrow[r, "M"'] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rrr, bend right, "\underline{\mathbf{L}}(MKF)"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \varphi_{MK,F}"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}K"] \arrow[rr, bend right, "\underline{\mathbf{L}}(MK)"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \varphi_{MK}"] & \mathrm{Ho}(C) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}M"] & \mathrm{Ho}(D) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[urrr, phantom, "\Downarrow \varepsilon^{MKF}"] & B \arrow[r, "K"'] & C \arrow[r, "M"'] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

となるから右 Kan 拡張 $\underline{\mathbf{L}}(MKF)$ の普遍性により分かる．

後は，左 Quillen 関手 $F\colon A \to B$ に対して次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(B)} \circ \underline{\mathbf{L}}F \arrow[r, equal] \arrow[d, "\psi \bullet \underline{\mathbf{L}}F"'] & \underline{\mathbf{L}}F \arrow[d, equal] \\
\underline{\mathbf{L}}(\mathrm{id}_B) \circ \underline{\mathbf{L}}F \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{id}_B, F}"'] & \underline{\mathbf{L}}(\mathrm{id}_B \circ F)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\underline{\mathbf{L}}F \circ \mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(A)} \arrow[r, equal] \arrow[d, "\underline{\mathbf{L}}F \bullet \psi"'] & \underline{\mathbf{L}}F \arrow[d, equal] \\
\underline{\mathbf{L}}F \circ \underline{\mathbf{L}}(\mathrm{id}_A) \arrow[r, "\varphi_{F, \mathrm{id}_A}"'] & \underline{\mathbf{L}}(F \circ \mathrm{id}_A)
\end{tikzcd}
$$

どちらも同様であるから，左の図式の可換性について示す．それは

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] \arrow[rr, bend right, "\underline{\mathbf{L}}F"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \varphi_{\mathrm{id}, F}"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(B)}"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}\,\mathrm{id}_B"'] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow \psi"] & \mathrm{Ho}(B) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] & B \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^F"] & B \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(B)}"] \arrow[r, bend right, "\underline{\mathbf{L}}\,\mathrm{id}_B"'] \arrow[r, phantom, shift right=2, "\Downarrow \psi"] & \mathrm{Ho}(B) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^F"] & B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow \varepsilon^{\mathrm{id}_B}"] & B \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

$$
= \begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\mathrm{Ho}(B)}"] & \mathrm{Ho}(B) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^F"] & B \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\mathrm{id}"] & B \arrow[u, "P"]
\end{tikzcd}
= \begin{tikzcd}
\mathrm{Ho}(A) \arrow[r, "\underline{\mathbf{L}}F"] & \mathrm{Ho}(B) \\
A \arrow[u, "P"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon^F"] & B \arrow[u, "P"]
\end{tikzcd}
$$

となるから $\underline{\mathbf{L}}F$ の普遍性により分かる. □

参考文献

[1] W. G. Dwyer and J. Spalinski, Homotopy theories and model categories, HANDBOOK OF ALGEBRAIC TOPOLOGY, 1995

[2] M. Hovey, Model Categories, volume 63 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.