例: Mitchell の埋込定理

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2022 年 8 月 29 日

この PDF では豊穣圏の例としてアーベル圏を扱う．なおアーベル圏や完全列の定義のより詳しい話は「双積・弱完全圏」の PDF を参照.

目次

1 アーベル圏とは

まずアーベル圏とは何かを説明するために，単位的環 R に対して以下のようなものを考える.

定義. 右 R 加群の射 $f\colon X \to Y$ に対して，後の区別のため

$$K(f) := \{x \in X \mid f(x) = 0\}, \quad I(f) := \{f(x) \mid x \in X\}$$

と書く[*1]．$K(f) \subset X$ と $I(f) \subset Y$ は部分右 R 加群である.

定義. 右 R 加群の圏 R-**Mod** における鎖複体 (chain complex) とは，R-**Mod** における無限の長さの図式

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

[*1] 通常よく使う記号 $\ker(f), \mathrm{Im}(f)$ は後で圏論的な意味で使用する.

であって，任意の $n \in \mathbb{N}$，$x \in X_{n+1}$ に対して $d_n \circ d_{n+1}(x) = 0$ となるものをいう．

定義. R-**Mod** における鎖複体

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} X_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

の n 次ホモロジー群とは，剰余加群 $K(d_n)/I(d_{n+1})$ のことをいう．

このような特殊な図式を考えて何の意味があるのか，と思うかもしれない．実は数学では様々な場面でこのような鎖複体を得ることができる．例えば有名なところでは位相空間から得られる特異鎖複体がある．すると

$$\text{位相空間} \longmapsto \text{特異鎖複体} \longmapsto n \text{ 次ホモロジー群}$$

という操作が可能になるが，これは実は関手 **Top** → **Ab** になっているのである．このように鎖複体があれば関手を得ることができるから，そこでまず鎖複体について調べようというわけである．ところでこの PDF の読者であればこれを R-**Mod** という特殊な圏ではなく，より一般の圏で考えたいと思うであろう (実はこのような一般化をすると，層係数コホモロジーなどに応用することができる)．上の定義では 0 や ker，Im などを使っているからそれらを定義できる圏を考えなければならない．そのような圏は色々考えられており，そのうちの 1 つがアーベル圏である．アーベル圏の定義は同値なものがいくつかあるが，要するに「良い」**Ab**-豊穣圏のことである．

2 **Ab**-豊穣圏

アーベル圏を定義する前に，まず一般の **Ab**-豊穣圏 $\mathcal{A}$ について考える．豊穣圏の一般論より $U(\mathcal{A})$ において余極限が存在すれば，それは $\mathcal{A}$ における (豊穣圏の意味での) 余極限である．そこで以下では $U(\mathcal{A})$ における余極限を単に $\mathcal{A}$ の余極限と呼ぶ (始対象，余直積なども同様．また極限についても同様)．また以下では $\mathcal{A}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ を単に $f\colon a \to b$ で表す．

次に $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}(a,b)$ はアーベル群だから，その単位元を 0_{ab} と書く (もしくは添え字を省略して 0 と書く)．

命題 1. $\mathcal{A}$ の射 $f\colon a \to b$ に対して $0_{bc} \circ f = 0_{ac}$ かつ $f \circ 0_{ca} = 0_{cb}$ である．

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[dr, "0_{bc}"] & \\ a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "0_{ac}"'] & & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a \arrow[dr, "f"] & \\ c \arrow[ur, "0_{ca}"] \arrow[rr, "0_{cb}"'] & & b \end{tikzcd}$$

証明. $0_{bc} \in \mathcal{A}(b,c)$ が単位元だから

$$0_{bc} \circ f = (0_{bc} + 0_{bc}) \circ f = (0_{bc} \circ f) + (0_{bc} \circ f)$$

である．よって $0_{bc} \circ f = 0_{ac}$ が分かる．$f \circ 0_{ca} = 0_{cb}$ も同様である． □

定義. $f\colon a \to b$ と 0_{ab} の equalizer を核 (kernel) といい $\ker(f)$ で表す．即ち $\mathcal{A}$ の射 $\ker(f)\colon s \to a$ であって，次の条件を満たすものである．

(1) $f \circ \ker(f) = 0_{sb}$ である．
(2) $\mathcal{A}$ の射 $g\colon c \to a$ が $f \circ g = 0_{cb}$ を満たすならば，ある $h\colon c \to s$ が一意に存在して $\ker(f) \circ h = g$ となる．

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[r, "f"] & b \\ c \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "g"'] & & & \end{tikzcd}$$

同様に f と 0_{ab} の coequalizer を余核 (cokernel) といい $\mathrm{coker}(f)$ で表す．

equalizer はモノ射だったから，$\ker(f)$ はモノ射である．同様に $\mathrm{coker}(f)$ はエピ射である．

命題 2. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で f はエピ射とする．このとき

$$g \text{ の余核が存在する} \iff g \circ f \text{ の余核が存在する}$$

であり，これらは一致する．

証明. ($\Longrightarrow$) $\mathrm{coker}(g)\colon c \to s$ が存在するとして，これが $g \circ f$ の余核であることを示す．まず明らかに $\mathrm{coker}(g) \circ (g \circ f) = 0_{as}$ である．普遍性を示すため，$k\colon c \to d$ が $k \circ (g \circ f) = 0_{ad}$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "\mathrm{coker}(g)"] \arrow[dr, "k"'] & s \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & & d \end{tikzcd}$$

このとき $k \circ g \circ f = 0_{ad} = 0_{bd} \circ f$ で f がエピ射だから $k \circ g = 0_{bd}$ である．故に $\mathrm{coker}(g)$ の普遍性から $h\colon s \to d$ が存在して図式が可換となる．$\mathrm{coker}(g)$ はエピ射だから，このような h は明らかに一意である．故に $\mathrm{coker}(g)$ が $g \circ f$ の余核になることが分かった．

($\Longleftarrow$) $\mathrm{coker}(g\circ f)\colon c\to s$ が存在するとして，これが g の余核であることを示す．まず $\mathrm{coker}(g\circ f)\circ g=0_{bs}$ である．

$\because$) $\mathrm{coker}(g\circ f)\circ g\circ f=0_{as}=0_{bs}\circ f$ で f がエピ射だから $\mathrm{coker}(g\circ f)\circ g=0_{bs}$ となる．

普遍性を示すため，$k\colon c\to d$ が $k\circ g=0_{bd}$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \arrow[r, "\mathrm{coker}(g\circ f)"] \arrow[dr, "k"'] & s \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & & d \end{tikzcd}$$

すると $k\circ g\circ f=0_{ad}$ だから $\mathrm{coker}(g\circ f)$ の普遍性により $h\colon s\to d$ が存在して図式が可換となる．$\mathrm{coker}(g\circ f)$ はエピ射だから，このような h は明らかに一意である．故に $\mathrm{coker}(g\circ f)$ が g の余核になることが分かった． $\square$

命題 3. $f\colon a\to b$ の核 $\ker(f)\colon s\to a$ が存在するとき

$$f \text{ が } \ker(f) \text{ の余核になる} \iff f \text{ がある } g\colon c\to a \text{ の余核になる．}$$

証明．($\Longrightarrow$) 明らか．

($\Longleftarrow$) f が $g\colon c\to a$ の余核になるとする．$\ker(f)$ の普遍性により次の点線の射 h が取れる．

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dr, "\ker(f)"] & & \\ c \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "g"'] & & a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

f が $\ker(f)$ の余核であることを示すため，$k\colon a\to d$ が $k\circ\ker(f)=0_{sd}$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[dr, "\ker(f)"] & & \\ c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "g"'] & & a \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "k"'] & b \arrow[d, dashed, "h'"] \\ & & & d \end{tikzcd}$$

すると $k\circ g=k\circ\ker(f)\circ h=0_{cd}$ であり，f が g の余核だから普遍性により $h'\colon b\to d$ が存在して可換となる．普遍性からこのような h' は明らかに一意である． $\square$

系 4. $f\colon a\to b$ の余核 $\mathrm{coker}(f)\colon b\to s$ が存在して，更に $\ker(\mathrm{coker}(f))\colon t\to b$ も存在するとき，$\mathrm{coker}(f)$ が $\ker(\mathrm{coker}(f))$ の余核である．

証明. $\mathrm{coker}(f)$ は f の余核になるから，命題 3 より $\mathrm{coker}(f)$ は $\ker(\mathrm{coker}(f))$ の余核である． □

命題 5. 始対象 $0 \in \mathcal{A}$ が存在するとする．このとき 0 は終対象である．

証明. まず 0 が始対象だから $\mathcal{A}(0,0) = \{\mathrm{id}_0\}$ である．よって $0_{00} = \mathrm{id}_0$ が分かる．

任意の $a \in \mathcal{A}$ を取る．まず射 $0_{a0} \colon a \to 0$ は存在する．よって任意の $f \colon a \to 0$ に対して $f = 0_{a0}$ を示せばよい．これは命題 1 より $f = \mathrm{id}_0 \circ f = 0_{00} \circ f = 0_{a0}$ である． □

逆に終対象 $1 \in \mathcal{A}$ が存在すれば，1 は始対象になることも分かる．つまり **Ab**-豊穣圏においては始対象と終対象は一致する．

命題 6. 始対象 $0 \in \mathcal{A}$ が存在するとき，$a, b \in \mathcal{A}$ に対して $0_{0b} \circ 0_{a0} = 0_{ab}$ である．

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[dr, "0_{0b}"] & \\ a \arrow[ur, "0_{a0}"] \arrow[rr, "0_{ab}"'] & & b \end{tikzcd}$$

証明. 命題 1 から明らか． □

命題 7. $f \colon a \to b$ の核 $\ker(f) \colon s \to a$ が存在するとする．このとき

$$f \text{ はモノ射} \iff s \text{ は始対象}.$$

証明. ($\Longrightarrow$) 命題 1 より $(0 \to a \xrightarrow{f} b) = 0_{0b}$ である．よって核の普遍性により射 $h \colon 0 \to s$ が存在して $\ker(f) \circ h = 0_{0a}$ となる．これにより次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} s \arrow[rr, "\mathrm{id}_s"] \arrow[dr, "0_{s0}"'] & & s \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[r, "f"] & b \\ & 0 \arrow[ur, "h"] \arrow[urr, "0_{0a}"'] & & & \end{tikzcd}$$

このとき命題 6 と核の定義より

$$(s \xrightarrow{\mathrm{id}} s \xrightarrow{\ker(f)} a \xrightarrow{f} b) = 0_{sb} = (s \xrightarrow{0_{s0}} 0 \xrightarrow{0_{0a}} a \xrightarrow{f} b)$$

である．f がモノ射だから $\ker(f) = 0_{0a} \circ 0_{s0}$ が分かる．すると h の取り方から $\ker(f) = \ker(f) \circ h \circ 0_{s0}$ である．$\ker(f)$ はモノ射だから $h \circ 0_{s0} = \mathrm{id}_s$ が分かる．一方 0 が始対象だから $0_{s0} \circ h = \mathrm{id}_0$ となり，$s \cong 0$ である．よって s は始対象である．

($\Longleftarrow$) $g, k \colon c \to a$ が $f \circ g = f \circ k$ を満たすとする．このとき

$$f \circ (g - k) = (f \circ g) - (f \circ k) = 0$$

である．よって核の普遍性から次の点線の射 $h \colon c \to s$ が得られる．

$$\begin{tikzcd} & s \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[r, "f"] & b \\ c \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "g-k"'] & & & \end{tikzcd}$$

今 s が始対象だから命題 6 より $g - k = \ker(f) \circ h = 0_{ca}$ である．従って $g = k$ となる． □

命題 8. $a, b \in \mathcal{A}$ に対して余直積 $\langle a \amalg b, i_0, i_1 \rangle$ が存在するとする．射 p_0, p_1 を余直積の普遍性により次のように定める．

$$\begin{tikzcd} & a & \\ & a \amalg b \arrow[u, dashed, "p_0"] & \\ a \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[uur, bend left, "\mathrm{id}_a"] & & b \arrow[ul, "i_1"] \arrow[uul, bend right, "0_{ba}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & b & \\ & a \amalg b \arrow[u, dashed, "p_1"] & \\ a \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[uur, bend left, "0_{ab}"] & & b \arrow[ul, "i_1"] \arrow[uul, bend right, "\mathrm{id}_b"'] \end{tikzcd}$$

このとき $\langle a \amalg b, p_0, p_1 \rangle$ は a と b の直積である．

証明． まずこのように p_0, p_1 を取ると $i_0 \circ p_0, i_1 \circ p_1 \colon a \amalg b \to a \amalg b$ となるが，このとき $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \mathrm{id}_{a \amalg b}$ である．

$\because$) p_0, p_1 の定義より

$$\begin{aligned} ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_0 &= (i_0 \circ p_0 \circ i_0) + (i_1 \circ p_1 \circ i_0) = i_0 + 0 = i_0 \\ ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ i_1 &= (i_0 \circ p_0 \circ i_1) + (i_1 \circ p_1 \circ i_1) = 0 + i_1 = i_1 \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} & a \amalg b & \\ & a \arrow[u, "i_0"] & \\ & a \amalg b \arrow[u, "p_0"] & \\ a \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[uur, "\mathrm{id}_a"] \arrow[uuur, bend left, "i_0"] & & b \arrow[ul, "i_1"] \arrow[uul, "0_{ba}"'] \arrow[uuul, bend right, "0_{b,a \amalg b}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a \amalg b & \\ & b \arrow[u, "i_1"] & \\ & a \amalg b \arrow[u, "p_1"] & \\ a \arrow[ur, "i_0"'] \arrow[uur, "0_{ab}"] \arrow[uuur, bend left, "0_{a,a \amalg b}"] & & b \arrow[ul, "i_1"] \arrow[uul, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[uuul, bend right, "i_1"'] \end{tikzcd}$$

である．故に余直積 $a \amalg b$ の普遍性から $(i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1) = \mathrm{id}_{a \amalg b}$ である．

直積であることを示すため $q_0 \colon s \to a$，$q_1 \colon s \to b$ とする．$h := (i_0 \circ q_0) + (i_1 \circ q_1)$ と定める．

$$
\begin{tikzcd}
 & & s \arrow[dl, "q_0"] \arrow[dr, "q_1"] \arrow[dddll, bend right, "q_0"'] \arrow[dddrr, bend left, "q_1"] & & \\
 & a \arrow[dr, "i_0"] & & b \arrow[dl, "i_1"'] & \\
 & & a \amalg b \arrow[dll, "p_0"'] \arrow[drr, "p_1"] & & \\
a & & & & b
\end{tikzcd}
$$

このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & s \arrow[d, "h"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
 & a \amalg b \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

∵) p_0, p_1 の定義より

$$
\begin{aligned}
p_0 \circ h &= (p_0 \circ i_0 \circ q_0) + (p_0 \circ i_1 \circ q_1) = q_0 + 0 = q_0 \\
p_1 \circ h &= (p_1 \circ i_0 \circ q_0) + (p_1 \circ i_1 \circ q_1) = 0 + q_1 = q_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & s \arrow[d, "q_0"] \arrow[dddl, bend right, "q_0"'] \arrow[dddr, bend left, "0_{sb}"] & \\
 & a \arrow[d, "i_0"] \arrow[ddl, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ddr, "0_{ab}"] & \\
 & a \amalg b \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & s \arrow[d, "q_1"] \arrow[dddl, bend right, "0_{sa}"'] \arrow[dddr, bend left, "q_1"] & \\
 & b \arrow[d, "i_1"] \arrow[ddl, "0_{ba}"'] \arrow[ddr, "\mathrm{id}_b"] & \\
 & a \amalg b \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

である．

故に後は h の一意性を示せばよい．そこで $h'\colon s \to a \amalg b$ が

$$
\begin{tikzcd}
 & s \arrow[d, "h'"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
 & a \amalg b \arrow[dl, "p_0"'] \arrow[dr, "p_1"] & \\
a & & b
\end{tikzcd}
$$

を可換にするとする．このとき最初に示したことを使えば

$$
\begin{aligned}
h' &= ((i_0 \circ p_0) + (i_1 \circ p_1)) \circ h' = (i_0 \circ p_0 \circ h') + (i_1 \circ p_1 \circ h') \\
&= (i_0 \circ q_0) + (i_1 \circ q_1) = h
\end{aligned}
$$

である． □

$\mathrm{Im}(f)$ は次のように定義できる．

定義. $f\colon a \to b$ の余核 $\mathrm{coker}(f)$ が存在して，更にその核 $\ker(\mathrm{coker}(f))$ も存在するとき，$\mathrm{Im}(f) := \ker(\mathrm{coker}(f))$ と書く．同様に $\mathrm{Coim}(f) := \mathrm{coker}(\ker(f))$ と書く．

例 9. 単位的環 R は 1 点 $\mathbf{Ab}$-豊穣圏と同一視できた (「豊穣圏」の PDF を参照)．このとき右 R 加群とは $\mathbf{Ab}$-関手 $R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ のことである．よって $\widehat{R} := [R^{\mathrm{op}}, \mathbf{Ab}]$ が右 R 加群のなす $\mathbf{Ab}$-豊穣圏である．

$X, Y \in \widehat{R}$ とする．このとき $0_{XY}\colon X \to Y$ は

$$x \in X \text{ に対して } 0_{XY}(x) = 0$$

で定まる射である．

$f\colon X \to Y$ を $\widehat{R}$ の射とする．このとき包含写像 $i\colon K(f) \to X$ は f の核である．また標準射影 $p\colon Y \to Y/I(f)$ は f の余核である．このとき $K(p) = I(f)$ だから，この場合 $\mathrm{Im}(f)\colon I(f) \to Y$ である．

同様にして $\mathrm{Coim}(f)\colon X \to X/K(f)$ である． □

最後に後で使うことを述べておく．

定義. C を (通常の) 圏とする．

(1) $a \in C$ が射影的 (projective) $\iff$ $\mathrm{Hom}_C(a, -)$ がエピ射を保つ．

(2) $a \in C$ が入射的 (injective) $\iff$ a が C^{op} の対象として射影的である．

命題 10. $a \in C$ が射影的 $\Longleftrightarrow$ 任意のエピ射 $f\colon b \to c$ に対して次の条件が成り立つ.

任意の $g\colon a \to c$ に対して，射 $h\colon a \to b$ が存在して $f \circ h = g$ となる.

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d, "f"] \\ a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $a \in C$ を射影的，$f\colon b \to c$ をエピ射とする．このとき $\mathrm{Hom}_C(a, -)$ がエピ射を保つから写像 $\mathrm{Hom}_C(a, f)\colon \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(a, c)$ はエピ射，即ち全射である．故に上記の条件が成り立つ.

($\Longleftarrow$) 同様に明らか. $\square$

命題 11. I を集合，$\{a_i\}_{i \in I}$ を C の射影的対象の族とするとき，余直積 $p := \coprod_{i \in I} a_i$ が存在するならば p は射影的である.

証明. 余直積の標準的な射を $\mu_i\colon a_i \to p$ とする．$f\colon b \to c$ を C のエピ射，$g\colon p \to c$ を射とする．a_i が射影的だから，ある $\nu_i\colon a_i \to b$ が存在して

$$\begin{tikzcd} a_i \arrow[r, "\nu_i"] \arrow[d, "\mu_i"'] & b \arrow[d, "f"] \\ p \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

の実戦部が可換となる．このとき余極限の普遍性により点線の h が存在して可換となることが分かる. $\square$

定義. C, D を有限余完備な圏とする．このとき

$F\colon C \to D$ が右完全 (right exact) $\Longleftrightarrow$ F が有限余極限と交換する.

定義. C, D を有限完備な圏とする．このとき

$F\colon C \to D$ が左完全 (left exact) $\Longleftrightarrow$ F が有限極限と交換する.

定義. C, D を有限余完備かつ有限完備な圏とする．このとき

$F\colon C \to D$ が完全 (exact) $\Longleftrightarrow$ F が左完全かつ右完全である.

豊穣圏の一般論より以下の命題が成り立つ．

命題 12. $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を $\mathbf{Ab}$-豊穣圏，$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を $\mathbf{Ab}$-関手として GF が稠密，G が $\mathbf{Ab}$-忠実充満とする．このとき F と G も稠密である． □

命題 13. $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ が充満部分 $\mathbf{Ab}$-豊穣圏であって，$\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ は稠密とする．$U(\mathcal{B})$ において，任意の $b \in \mathcal{B}$ がある $a \in \mathcal{A}$ のレトラクトになるならば，$\mathcal{A} \subset \mathcal{C}$ は稠密である． □

3　アーベル圏

以上を踏まえてアーベル圏を定義しよう．そのためにまず前アーベル圏を定義する．

定義. 前アーベル圏 (pre-abelian category) とは $\mathbf{Ab}$-豊穣圏 $\mathcal{A}$ であって以下の条件を満たすものをいう．

(1) 始対象を持つ．
(2) 任意の $a, b \in \mathcal{A}$ に対して余直積 $a \amalg b$ が存在する．
(3) 任意の $f\colon a \to b$ の核と余核が存在する．

命題 14. 前アーベル圏は有限完備かつ有限余完備である．

証明. 命題 5, 8 により前アーベル圏は有限直積と有限余直積を持つ．故に $f, g\colon a \to b$ に対して f と g の equalizer と coequalizer が存在することを示せばよい．それは $\ker(f-g)$ が f と g の equalizer になり，$\mathrm{coker}(f-g)$ が f と g の coequalizer になることから分かる． □

系 15. 前アーベル圏 $\mathcal{A}$ が $\mathbf{Ab}$-余完備 $\Longleftrightarrow$ $U(\mathcal{A})$ が小余直積を持つ． □

$f\colon a \to b$ を前アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射とする．前アーベル圏においては核と余核が存在するから $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f))$ を考えることができる．$f \circ \ker(f) = 0$ だから余核の普遍性により，次の点線の射 $h\colon s \to b$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & s \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
c \arrow[r, "\ker(f)"'] & a \arrow[u, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

更に $\mathrm{coker}(f)$ を考える．このとき $\mathrm{coker}(f) \circ h = 0$ である．

$$\begin{tikzcd} & & s \arrow[dr, "h"] & & \\ c \arrow[r, "\ker(f)"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & d \end{tikzcd}$$

$\because$) まず定義より $\mathrm{coker}(f) \circ h \circ \mathrm{Coim}(f) = \mathrm{coker}(f) \circ f = 0$ である．一方で命題 1 より $0 \circ \mathrm{Coim}(f) = 0$ である．よって余核 $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f))$ の普遍性により $\mathrm{coker}(f) \circ h = 0$ が分かる．

従って $\mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{coker}(f))$ を考えると，核の普遍性から次の点線の射 $\bar{f}$ を得る．

$$\begin{tikzcd} & & s \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[dr, "h"] & t \arrow[d, "\mathrm{Im}(f)"] & \\ c \arrow[r, "\ker(f)"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & d \end{tikzcd}$$

これは右 R 加群の場合，例 9 の記号を使うと次のようになる．

$$\begin{tikzcd} & & X/K(f) \arrow[r, dashed, "\bar{f}"] \arrow[dr, "h"] & I(f) \arrow[d, "\mathrm{Im}(f)"] & \\ K(f) \arrow[r, "i"'] & X \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \arrow[r, "p"'] & Y/I(f) \end{tikzcd}$$

よってこの場合は準同型定理により $\bar{f}$ は同型になる．

一般の前アーベル圏の場合，この $\bar{f}$ は同型になるとは限らない．そこでアーベル圏を次のように定義する．

定義. 前アーベル圏 $\mathcal{A}$ がアーベル圏 (abelian category)
$\iff$ 任意の射 f に対して，上記の方法で得られる射 $\bar{f}$ が同型になる．

例 16. 上で述べた通り，準同型定理により $\widehat{R}$ はアーベル圏である． $\square$

命題 17. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $f\colon a \to b$ がモノ射かつエピ射ならば，同型射である．

証明. 上記の $\bar{f}$ を考える．$f\colon a \to b$ がモノ射だから，命題 7 より $\ker(f)$ のドメインは始対象である．よって $\mathrm{Coim}(f)$ は同型射にある．また f がエピ射だから，同様にして

$\mathrm{Im}(f)$ も同型射になる.

$$\begin{tikzcd}
& & s \arrow[r, dashed, "\bar{f}", "\sim"'] & t \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)", "\wr"'] & & \\
0 \arrow[r, "\ker(f)"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)", "\wr"'] \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & 0
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{A}$ がアーベル圏だから $\bar{f}$ は同型であり，よって f も同型である. □

命題 18. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $f\colon a \to b$ がエピ射 $\iff$ $\mathrm{Im}(f)$ がエピ射.

証明. $\mathrm{coker}(f)\colon b \to s$ とする.

($\Longrightarrow$) f がエピ射だから命題 7 (の双対) より s は始対象である．よって $\mathrm{Im}(f)$ は同型であり，従ってエピ射である.

($\Longleftarrow$) 系 4 より $\mathrm{coker}(f)$ は $\mathrm{Im}(f) = \ker(\mathrm{coker}(f))$ の余核である．故に $\mathrm{Im}(f)$ がエピ射と命題 7 (の双対) から s は始対象である．従って再び命題 7 (の双対) より f はエピ射である. □

命題 19. 前アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して以下の条件は同値である.

(1) $\mathcal{A}$ はアーベル圏である.

(2) 次の 2 条件が成り立つ.
- $\mathcal{A}$ のモノ射 f は $\mathrm{coker}(f)$ の核である.
- $\mathcal{A}$ のエピ射 f は $\ker(f)$ の余核である.

(3) 次の 2 条件が成り立つ.
- $\mathcal{A}$ のモノ射 f に対して，ある g が存在して，f は g の核である.
- $\mathcal{A}$ のエピ射 f に対して，ある g が存在して，f は g の余核である.

証明. ($2 \iff 3$) 命題 3 により明らか.

($1 \Longrightarrow 2$) f をモノ射とすると，命題 17 の証明と同様にして次の可換図式を得る.

$$\begin{tikzcd}
& & s \arrow[r, dashed, "\bar{f}", "\sim"'] & t \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & & \\
0 \arrow[r, "\ker(f)"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)", "\wr"'] \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & 0
\end{tikzcd}$$

故に f は $\mathrm{coker}(f)$ の核である．エピ射についても同様.

(2 $\Longrightarrow$ 1) $f\colon a \to b$ を $\mathcal{A}$ の射とする．$\overline{f}$ が同型であることを示す．$h := \overline{f} \circ \mathrm{Coim}(f)$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
& & s \arrow[rr, "\overline{f}"] & & t \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & & \\
c \arrow[r, "\ker(f)"'] & a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[urrr, dashed, "h"] \arrow[rrrr, "f"'] & & & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & d
\end{tikzcd}
$$

$\overline{h}$ を考えて $k := \overline{h} \circ \mathrm{Coim}(h)$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
& s' \arrow[r, "\overline{h}"] & t' \arrow[dr, "\mathrm{Im}(h)"] & \\
a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(h)"] \arrow[urr, dashed, "k"] \arrow[rrr, "h"'] & & & t
\end{tikzcd}
$$

$i := \mathrm{Im}(f) \circ \mathrm{Im}(h)$ とすると，$\mathrm{coker}(i) \circ f = \mathrm{coker}(i) \circ i \circ k = 0$ だから，$\mathrm{coker}(f)$ の普遍性により次の点線の射 l が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
& t' \arrow[dr, "\mathrm{Im}(h)"] \arrow[ddrr, bend right, "i"] & & & & \\
& & t \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & & & \\
a \arrow[uur, "k"] \arrow[urr, "h"] \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[rr, "\mathrm{coker}(f)"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(i)"'] & & d \arrow[dl, dashed, "l"] \\
& & & & e &
\end{tikzcd}
$$

このとき $\mathrm{coker}(i) \circ \mathrm{Im}(f) = l \circ \mathrm{coker}(f) \circ \mathrm{Im}(f) = 0$ である．更に i はモノ射だから，仮定 (2) より i は $\mathrm{coker}(i)$ の核である．よって核 i の普遍性により次の点線の射 m が存在して $i \circ m = \mathrm{Im}(f)$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
t' \arrow[r, "i"] & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(i)"] & e \\
t \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[ur, "\mathrm{Im}(f)"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& t' \arrow[dr, "\mathrm{Im}(h)"] & & & & \\
& & t \arrow[ul, dashed, "m"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & & & \\
a \arrow[uur, "k"] \arrow[urr, "h"] \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[rr, "\mathrm{coker}(f)"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(i)"'] & & d \arrow[dl, "l"] \\
& & & & e &
\end{tikzcd}
$$

これは i の定義より $\mathrm{Im}(f) \circ \mathrm{Im}(h) \circ m = \mathrm{Im}(f)$ となるから，$\mathrm{Im}(f)$ がモノ射であることより $\mathrm{Im}(h) \circ m = \mathrm{id}$ が分かる．即ち $\mathrm{Im}(h)$ はエピ射である．従って命題 18 より h もエピ射である．故に仮定 (2) から h は $\ker(h)$ の余核である．

ここで $\mathrm{Im}(f)\circ h = f$ であり $\mathrm{Im}(f)$ がモノ射だったから，命題 2 (の双対) により $\ker(f)$ と $\ker(h)$ は一致する．従って $\mathrm{Coim}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f))$ と $\mathrm{coker}(\ker(h))$ (即ち h) も一致する．つまり同型 $h'\colon s \to t$ が存在して可換となる．

$$\begin{tikzcd}
 & & s \arrow[r, dashed, "h'"] & t \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & & \\
c \arrow[r, "\ker(f)"] & a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[urr, "h"] \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "\mathrm{coker}(f)"'] & d \\
c' \arrow[ur, "\ker(h)"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Coim}(f)$ の普遍性から $h' = \bar{f}$ である．故に $\bar{f}$ は同型である． $\square$

いよいよアーベル圏において鎖複体やホモロジーを定義しよう．まず鎖複体は次のように定義する．

定義. アーベル圏 $\mathcal{A}$ における鎖複体 (chain complex) とは，無限の長さの図式

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+2}} a_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} a_n \xrightarrow{d_n} a_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \cdots$$

であって，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $d_n \circ d_{n+1} = 0_{a_{n+1}a_{n-1}}$ となるものをいう．

次にアーベル圏においてホモロジーを定義するにはどうすれば良いか考えよう．アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が $g \circ f = 0$ を満たすとする．このとき $\ker(g), \mathrm{coker}(f)$ の普遍性から次の点線の射 h, h' を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[d, "\ker(g)"] & \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
 & e \arrow[ur, dashed, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき $g \circ \mathrm{Im}(f) = 0$ である．

∵) $g \circ \mathrm{Im}(f) = h' \circ \mathrm{coker}(f) \circ \mathrm{Im}(f) = 0$ である．

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[drr, "\ker(\mathrm{coker}(f)) = \mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[dr, "\ker(g)"] & & \\
a \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
 & & & & e \arrow[u, "h'"']
\end{tikzcd}
$$

よって $\ker(g)$ の普遍性から次の点線の射 m_{fg} が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, dashed, "m_{fg}"] \arrow[drr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[dr, "\ker(g)"] & & \\
a \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
 & & & & e
\end{tikzcd}
$$

このとき $\mathrm{coker}(m_{fg})\colon t \to e$ とすると，この e がホモロジー群 $K(g)/I(f)$ に相当する対象である．そこで次のように定義する．

定義． アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が $g \circ f = 0$ を満たすとする．このとき $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ のホモロジー (homology) とは，対象 $H_{fg} := \mathrm{cod}(\mathrm{coker}(m_{fg}))$ のことをいう．

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, "m_{fg}"] \arrow[drr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[r, "\mathrm{coker}(m_{fg})"] \arrow[dr, "\ker(g)"] & H_{fg} & \\
a \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
 & & & & e
\end{tikzcd}
$$

ここで核 $\ker(g), \mathrm{Im}(f)$ の普遍性により，次の点線の射 h, k が存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, "m_{fg}"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[r, "\mathrm{coker}(m_{fg})"] \arrow[d, "\ker(g)"] & H_{fg} \\
a \arrow[ur, dashed, "k"'] \arrow[rr, "f"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "h"] & & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
 & & e &
\end{tikzcd}
$$

よって $h = m_{fg} \circ k$ であり，またこの k はエピ射である．

$\because$) $\overline{f}$ を考えると次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
 & s \arrow[r, "\overline{f}"] & t \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"] & \\
a \arrow[ur, "\mathrm{Coim}(f)"] \arrow[urr, "k"'] \arrow[rrr, "f"'] & & & b
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Coim}(f), \overline{f}$ は共にエピ射だから，$k = \overline{f} \circ \mathrm{Coim}(f)$ もエピ射である．

故に命題 2 からホモロジーはこの h を使って $H_{fg} := \mathrm{cod}(\mathrm{coker}(h))$ と定義してもよい．

定義. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の図式

$$a_n \xrightarrow{d_n} a_{n-1} \to \cdots \to a_1 \xrightarrow{d_1} a_0$$

が完全列 (exact sequence) とは，任意の $2 \leq i \leq n$ に対して

$$d_{i-1} \circ d_i = 0, \quad H_{d_i d_{i-1}} \cong 0$$

が成り立つことをいう．特に $0 \to a \to b \to c \to 0$ の形の完全列を短完全列 (short exact sequence) という．

命題 20. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が $g \circ f = 0$ を満たすとき

$$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \text{ が完全列} \iff m_{fg} \text{ が同型}^{*2}.$$

*2 これは要するに $\ker(g) \cong \mathrm{Im}(f)$ ということである．

証明. $\mathrm{Im}(f)$ がモノ射だから m_{fg} もモノ射である.

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, "m_{fg}"] \arrow[drr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[rr, "\mathrm{coker}(m_{fg})"] \arrow[dr, "\ker(g)"] & & H_{fg} \\
a \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & & c \\
 & & & & e &
\end{tikzcd}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \text{ が完全列} &\iff H_{fg} \cong 0 \\
&\iff m_{fg} \text{ がエピ射} \quad (\text{命題 7 の双対}) \\
&\iff m_{fg} \text{ が同型} \quad (\text{命題 17})
\end{aligned}
$$

となる. □

命題 21. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $f\colon a \to b$ に対して

$$0 \to a \xrightarrow{f} b \text{ が完全列} \iff f \text{ がモノ射.}$$

証明. この場合の m_{fg} は次のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, "m_{0f}"] \arrow[drr, "0"'] & d \arrow[rr, "\mathrm{coker}(m_{0f})"] \arrow[dr, "\ker(f)"] & & H_{0f} \\
0 \arrow[rrr, "0"'] & & & a \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_b"'] & & b \\
 & & & & b &
\end{tikzcd}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
0 \to a \xrightarrow{f} b \text{ が完全列} &\iff m_{0f} \text{ が同型} \quad (\text{命題 20}) \\
&\iff d \text{ が始対象} \\
&\iff f \text{ がモノ射} \quad (\text{命題 7})
\end{aligned}
$$

となる. □

命題 22. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の射 $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して

$$f \text{ が } g \text{ の核} \iff 0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \text{ が完全列.}$$

証明. ($\Longrightarrow$) 次の (1)(2)(3) を示せばよい.

(1) f はモノ射.

核はモノ射だから明らか.

(2) $g \circ f = 0$.

核の定義より明らか.

(3) $H_{fg} \cong 0$.

$\ker(g)$ の普遍性から次の点線の射 h を取る.

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dr, "\ker(g)"] & & \\ a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

仮定より f が g の核だから，この h は同型である．即ち h はエピ射だから命題 7 (の双対) より $H_{fg} \cong 0$ である．

($\Longleftarrow$) $\ker(g)$ の普遍性から次の点線の射 h を取る.

$$\begin{tikzcd} & d \arrow[dr, "\ker(g)"] & & \\ a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "g"'] & c \end{tikzcd}$$

このとき完全性から $\mathrm{coker}(h)\colon d \to 0$ としてよい．すると命題 7 (の双対) から h はエピ射である．一方，命題 21 より f はモノ射だから h もモノ射である．よって命題 17 から h は同型であり，従って f は g の核である． □

アーベル圏の間の **Ab**-関手に対して次のように定義する．以下，特に断らない限り $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ はアーベル圏を表すものとする．

定義. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ をアーベル圏，$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を **Ab**-関手とする．

(1) F が右完全 $\iff$ $U(F)$ が右完全である．

(2) F が左完全 $\iff$ $U(F)$ が左完全である．

(3) F が完全 $\iff$ F が左完全かつ右完全である

命題 23. $a \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{A}(a, -)\colon \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ は左完全である． □

命題 24. $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を **Ab**-関手とする．このとき以下の条件は同値である．

(1) F が右完全

(2) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が完全列ならば $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \to 0$ も完全列.

(3) $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が完全列ならば $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \to 0$ も完全列.

証明. ($1 \Longrightarrow 2$) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ を完全列とする．命題 21 (の双対) により g は f の余核である．よって F が右完全だから Fg は Ff の余核である．従って再び命題 21 (の双対) から $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \to 0$ は完全列である．

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか.

($3 \Longrightarrow 1$) 省略. □

命題 25. $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を **Ab**-関手とする．このとき以下の条件は同値である．

(1) F が完全

(2) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が完全列ならば $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ も完全列.

(3) $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が完全列ならば $0 \to Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc \to 0$ も完全列.

証明. ($1 \Longleftrightarrow 3$) 命題 24 とその双対を組み合わせれば分かる.

($2 \Longrightarrow 3$) 明らか.

($1, 3 \Longrightarrow 2$) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ を完全列とする．$\ker(g), \mathrm{coker}(f)$ の普遍性により次の点線の射を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & d \arrow[dr, "\ker(g)"] & & & \\
a \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & & c \\
 & & & e \arrow[ur, dashed, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき $0 \to d \xrightarrow{\ker(g)} b \xrightarrow{\mathrm{coker}(f)} e \to 0$ は完全列である.

∵) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ が完全列だから，命題 20 より m_{fg} は同型である.

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, "m_{fg}"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[r, "\mathrm{coker}(m_{fg})"] \arrow[d, "\ker(g)"] & H_{fg} \\
a \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
 & & & e
\end{tikzcd}$$

即ち $\ker(g)$ は $\mathrm{coker}(f)$ の核である．双対を考えれば $\mathrm{coker}(f)$ が $\ker(g)$ の余核であ

ることも分かる．故に命題 22 (とその双対) により $0 \to s \xrightarrow{\ker(g)} b \xrightarrow{\mathrm{coker}(f)} t \to 0$ は完全列である．

よって条件 (3) より

$$0 \to Fd \xrightarrow{F(\ker(g))} Fb \xrightarrow{F(\mathrm{coker}(f))} Fe \to 0$$

は完全列である．F が完全，即ち核や余核と交換するから

$$0 \to d' \xrightarrow{\ker(Fg)} Fb \xrightarrow{\mathrm{coker}(Ff)} e' \to 0$$

も完全列である．特に $\ker(Fg)$ は $\mathrm{coker}(Ff)$ の核である．故に m_{FfFg} は同型である．

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, "m_{FfFg}"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(Ff)"'] & d' \arrow[r, "\mathrm{coker}(m_{FfFg})"] \arrow[d, "\ker(Fg)"] & H_{FfFg} \\
Fa \arrow[rr, "Ff"'] & & Fb \arrow[r, "Fg"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(Ff)"'] & Fc \\
 & & & e'
\end{tikzcd}$$

故に命題 20 より $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ は完全列である． □

命題 26. $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を $\mathbf{Ab}$-関手とする．このとき $U(F)$ が忠実 $\iff$ $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ とする．$Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ が完全列ならば $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ も完全列．

証明． ($\Longrightarrow$) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ で $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ が完全列とする．$F(g \circ f) = Fg \circ Ff = 0$ だから忠実性より $g \circ f = 0$ である．$F(\mathrm{coker}(f)) \circ F(\ker(g)) = 0$ である．

$\because$) $g \circ \ker(g) = 0$，$\mathrm{coker}(f) \circ f = 0$ だから，$\ker(Fg)$，$\mathrm{coker}(Ff)$ の普遍性により次の点線の射 h, h' が存在する．

$$\begin{tikzcd}
Ft \arrow[rr, "F(\ker(g))"] \arrow[dr, dashed, "h"'] & & Fb \arrow[r, "Fg"] & Fc \\
 & s \arrow[ur, "\ker(Fg)"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "Ff"] & Fb \arrow[rr, "F(\mathrm{coker}(f))"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(Ff)"'] & & Ft' \\
 & & s' \arrow[ur, dashed, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

仮定より $Fa \xrightarrow{Ff} Fb \xrightarrow{Fg} Fc$ が完全列だから $\mathrm{coker}(Ff) \circ \ker(Fg) = 0$ である．従っ

て次の可換図式を考えれば $F(\mathrm{coker}(f)) \circ F(\ker(g)) = 0$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
Ft \arrow[rr, "F(\ker(g))"] \arrow[dr, "h"'] & & Fb \arrow[rr, "F(\mathrm{coker}(f))"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(Ff)"'] & & Ft' \\
& s \arrow[ur, "\ker(Fg)"'] & & s' \arrow[ur, "h'"'] &
\end{tikzcd}$$

故に忠実性から $\mathrm{coker}(f) \circ \ker(g) = 0$ が分かる．よって $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{coker}(\ker(f))$ の普遍性により次の点線の射 l が得られる．

$$\begin{tikzcd}
& t \arrow[r, shift left, "m_{fg}"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[l, dashed, shift left, "l"] \arrow[r, "\mathrm{coker}(m_{fg})"] \arrow[d, "\ker(g)"] & H_{fg} \\
a \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \\
& & & e
\end{tikzcd}$$

普遍性から m_{fg} が同型であることが分かる．よって命題 20 より $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ は完全列である．

($\Longleftarrow$) $f \colon a \to b$ が $Ff = 0$ を満たすとき $f = 0$ を示せばよい．まず $Ff = 0$ だから $Fa \xrightarrow{\mathrm{id}} Fa \xrightarrow{Ff} Fb$ は完全列である．よって仮定より $a \xrightarrow{\mathrm{id}} a \xrightarrow{f} b$ も完全列となり $f = 0$ が分かる． $\square$

定義. $\mathcal{A}$ をアーベル圏とする．

(1) $s \in \mathcal{A}$ が射影的 $\Longleftrightarrow$ s が $U(\mathcal{A})$ の対象として射影的である．
(2) $s \in \mathcal{A}$ が入射的 $\Longleftrightarrow$ s が $U(\mathcal{A})$ の対象として入射的である．

命題 27. $s \in \mathcal{A}$ が射影的 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{A}(s, -) \colon \mathcal{A} \to \mathbf{Ab}$ が右完全である．

証明. ($\Longrightarrow$) 命題 24 の条件 (2) を示す．そのために $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ を完全列とする．$\mathbf{Ab}$ における図式

$$\mathcal{A}(s,a) \xrightarrow{f\circ -} \mathcal{A}(s,b) \xrightarrow{g\circ -} \mathcal{A}(s,c) \longrightarrow 0$$

が完全列であることを示せばよい．まず $g \circ -$ が全射であることは仮定より明らか．次に $(g \circ -) \circ (f \circ -) = 0$ は $g \circ f = 0$ より明らか．よって $K(g \circ -) \subset I(f \circ -)$ を示せばよ

い．そこで $k \in \mathcal{A}(s,b)$ が $g \circ k = 0$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \\ s \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "k"'] & & & \end{tikzcd}$$

このとき $f \cong \ker(g)$ の普遍性より，ある $h \in \mathcal{A}(s,a)$ が存在して $f \circ h = k$ となる．

($\Longleftarrow$) $f\colon b \to c$ をエピ射とすると

$$0 \longrightarrow a \xrightarrow{\ker(f)} b \xrightarrow{f} c \longrightarrow 0$$

は完全列である．今 $\mathcal{A}(s,-)$ が右完全だから

$$\mathcal{A}(s,a) \xrightarrow{\ker(f)\circ -} \mathcal{A}(s,b) \xrightarrow{f \circ -} \mathcal{A}(s,c) \longrightarrow 0$$

も完全列である．故に $f \circ -\colon \mathcal{A}(s,b) \to \mathcal{A}(s,c)$ は全射である． □

命題 28. $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ とする．任意の $s \in \mathcal{A}$ に対して

$$\mathcal{A}(c,s) \xrightarrow{-\circ g} \mathcal{A}(b,s) \xrightarrow{-\circ f} \mathcal{A}(a,s)$$

が完全列ならば，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ も完全列である．

証明. まず仮定において $s := c$ とすると $\mathcal{A}(c,c) \xrightarrow{-\circ g} \mathcal{A}(b,c) \xrightarrow{-\circ f} \mathcal{A}(a,c)$ が完全列になる．よって $\mathrm{id}_c \in \mathcal{A}(c,c)$ を考えれば $g \circ f = 0$ が分かる．このとき

$$\mathcal{A}(c,t') \xrightarrow{-\circ g} \mathcal{A}(b,t') \xrightarrow{-\circ f} \mathcal{A}(a,t')$$

が完全列で $\mathrm{coker}(f) \circ f = 0$ だから，ある $h \in \mathcal{A}(c,u)$ が存在して $h \circ g = \mathrm{coker}(f)$ となる．

$$\begin{tikzcd} & t \arrow[r, "m_{fg}"] \arrow[dr, "\mathrm{Im}(f)"'] & d \arrow[r, "\mathrm{coker}(m_{fg})"] \arrow[d, "\ker(g)"] & H_{fg} \\ a \arrow[rr, "f"'] & & b \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\mathrm{coker}(f)"'] & c \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & & e & \end{tikzcd}$$

故に $\operatorname{coker}(f) \circ \ker(g) = h \circ g \circ \ker(g) = 0$ である．従って $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{coker}(\ker(f))$ の普遍性から次の点線の射 l が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[r, shift left, "m_{fg}"] \arrow[drr, "\operatorname{Im}(f)"'] & d \arrow[l, dashed, shift left, "l"] \arrow[rr, "\operatorname{coker}(m_{fg})"] \arrow[dr, "\ker(g)"] & & H_{fg} \\
a \arrow[rrr, "f"'] & & & b \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\operatorname{coker}(f)"'] & c \arrow[d, "h"] \\
 & & & & e
\end{tikzcd}$$

よって普遍性により m_{fg} が同型となるから $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ は完全列である． $\square$

命題 29. $\mathcal{A}$ を小 **Ab**-豊穣圏，$\mathcal{B}$ をアーベル圏とする．このとき **Ab**-豊穣圏 $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ はアーベル圏である．

証明. $\mathcal{B}$ が有限完備かつ有限余完備であるから $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ もそうである．即ち $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ は前アーベル圏である．

アーベル圏の条件を示すため $\theta\colon F \Rightarrow G$ を $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ の射とする．$\bar{\theta}$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[r, dashed, "\bar{\theta}"] & T \arrow[dr, "\operatorname{Im}(\theta)"] & \\
F \arrow[ur, "\operatorname{Coim}(\theta)"] \arrow[rrr, "\theta"'] & & & G
\end{tikzcd}$$

$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ の極限，余極限は各点ごとに考えればよいから，$a \in \mathcal{A}$ に対して次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & Sa \arrow[r, dashed, "\left(\bar{\theta}\right)_a"] & Ta \arrow[dr, "\operatorname{Im}(\theta_a)"] & \\
Fa \arrow[ur, "\operatorname{Coim}(\theta_a)"] \arrow[rrr, "\theta_a"'] & & & Ga
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{B}$ がアーベル圏だから $\left(\bar{\theta}\right)_a$ は同型である．よって $\bar{\theta}$ も同型であり，$[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ がアーベル圏と分かった． $\square$

命題 30. $\mathcal{A}$ がアーベル圏で，充満部分 **Ab**-豊穣圏 $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ が次の条件を満たすとする．

(1) $\mathcal{A}$ の始対象 0 に対して $0 \in \mathcal{B}$ である．

(2) $a, b \in \mathcal{B}$ に対して ($\mathcal{A}$ における) 余直積 $a \amalg b$ を取ると $a \amalg b \in \mathcal{B}$ である．

(3) $\mathcal{B}$ の射 $f\colon a \to b$ に対して ($\mathcal{A}$ における) 核，余核 $\ker(f), \operatorname{coker}(f)$ を取ると $\ker(f), \operatorname{coker}(f) \in \mathcal{B}$ である．

このとき $\mathcal{B}$ もアーベル圏である．

証明. アーベル圏の定義から明らか． $\square$

4 Mitchell の埋込定理

$\widehat{R}$ においては，完全列について様々なことが知られている．例えば次の命題である[*3]．

命題 31． $\widehat{R}$ における可換図式

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "p_0"'] & Y_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "q_0"] & Z_0 \arrow[d, "r_0"] \\
0 \arrow[r] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_1"'] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "q_1"] & Z_1 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d] & Y_2 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

で，一番上の横列以外は全て完全列であるとする．このとき一番上の横列は完全列である．

証明. 次の (1)(2)(3) を示せばよい．

(1) f_0 は単射である．

可換性から $q_0 \circ f_0 = f_1 \circ p_0$ であり，完全性から f_1, p_0 は単射である．よって $q_0 \circ f_0$ が単射だから f_0 も単射である．

(2) $g_0 \circ f_0 = 0$.

[*3] 後の都合でこの命題を出したが，より有名なものとしては「5 項補題」「蛇の補題」がある．

可換図式

$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "p_0"'] & Y_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "q_0"] & Z_0 \arrow[d, "r_0"] \\
X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y_1 \arrow[r, "g_1"] & Z_1
\end{tikzcd}
$$

において $g_1 \circ f_1 = 0$ だから $r_0 \circ g_0 \circ f_0 = 0$ である．完全性から r_0 が単射なので $g_0 \circ f_0 = 0$ が分かる．

(3) $g_0(a) = 0$ ならば，ある $b \in X_0$ が存在して $f_0(b) = a$.

$g_0(a) = 0$ とする．このとき $g_1 \circ q_0(a) = r_0 \circ g_0(a) = 0$ である．よって完全性から，ある $c \in X_1$ が存在して $f_1(c) = q_0(a)$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[rr, mapsto, "g_0"] \arrow[d, mapsto, "q_0"] & & 0 \arrow[d, mapsto, "r_0"] \\
c \arrow[r, mapsto, "f_1"] & q_0(a) \arrow[r, mapsto, "g_1"] & g_1 \circ q_0(a) = & 0
\end{tikzcd}
$$

このとき $f_2 \circ p_1(c) = q_1 \circ f_1(c) = q_1 \circ q_0(a) = 0$ であり，f_2 が単射だから $p_1(c) = 0$ である．

$$
\begin{tikzcd}
 & a \arrow[d, mapsto, "q_0"] \\
c \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "p_1"] & q_0(a) \arrow[d, mapsto, "q_1"] \\
p_1(c) \arrow[r, mapsto, "f_2"'] & f_2 \circ p_1(c) = 0
\end{tikzcd}
$$

よって再び完全性から，ある $b \in X_0$ が存在して $p_0(b) = c$ となる．このとき $q_0 \circ f_0(b) = f_1 \circ p_0(b) = f_1(c) = q_0(a)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, mapsto, "f_0"] \arrow[d, mapsto, "p_0"'] & f_0(b) \arrow[d, mapsto, "q_0"] \\
c \arrow[r, mapsto, "f_1"] \arrow[d, mapsto, "p_1"'] & q_0(a) = q_0 \circ f_0(b) \\
0 &
\end{tikzcd}
$$

完全性より q_0 が単射だから $f_0(b)=a$ である．[*4] $\square$

今 $\widehat{R}$ で証明したが，もちろん一般のアーベル圏においても同様の命題を証明したい．ところが今の証明では完全性を「元を取って」示してしまったから，同じ証明を直ちにアーベル圏へ一般化することはできない．

そこでどうするかというと，方法はいくつか知られているが，そのうちの 1 つが「Mitchell の埋込定理」(定理 42) を使う方法である[*5]．この定理は小アーベル圏 $\mathcal{A}$ に対して，単位的環 R と $\mathbf{Ab}$-忠実充満な完全関手 $F\colon \mathcal{A}\to\widehat{R}$ が存在することを主張する．このような F があれば，$\mathcal{A}$ の射 $a\xrightarrow{f} b\xrightarrow{g} c$ に対して

$$a\xrightarrow{f} b\xrightarrow{g} c \text{ が完全} \iff Fa\xrightarrow{Ff} Fb\xrightarrow{Fg} Fc \text{ が完全}$$

が成り立つ．よって $\mathcal{A}$ における完全性を $\widehat{R}$ における完全性に帰着できる (そして後者は元を取ることで容易に確かめることができる)．例えば命題 31 の一般化は次のように証明できる．

命題 32. アーベル圏 $\mathcal{A}$ における可換図式

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & a_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "p_0"'] & b_0 \arrow[r, "g_0"] \arrow[d, "q_0"] & c_0 \arrow[d, "r_0"] \\
0 \arrow[r] & a_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "p_1"'] & b_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "q_1"] & c_1 \\
0 \arrow[r] & a_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d] & b_2 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

で，一番上の横列以外は全て完全列であるとする．このとき一番上の横列は完全列である．

証明． まず，この図式を含むような小さい充満部分アーベル圏 $\mathcal{A}_0\subset\mathcal{A}$ を取る．Mitchell の埋込定理により $\mathbf{Ab}$-忠実充満な完全関手 $F\colon\mathcal{A}_0\to\widehat{R}$ が得られる．この F で写すこと

[*4] この証明のように，元を取ってそれを写していく証明を diagram chasing という．

[*5] 他には「一般のアーベル圏においても元を取ることを正当化する」「ker などの普遍性を駆使して示す」などがある．

で，次の $\widehat{R}$ の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Fa_0 \arrow[r, "Ff_0"] \arrow[d, "Fp_0"'] & Fb_0 \arrow[r, "Fg_0"] \arrow[d, "Fq_0"] & Fc_0 \arrow[d, "Fr_0"] \\
0 \arrow[r] & Fa_1 \arrow[r, "Ff_1"] \arrow[d, "Fp_1"'] & Fb_1 \arrow[r, "Fg_1"] \arrow[d, "Fq_1"] & Fc_1 \\
0 \arrow[r] & Fa_2 \arrow[r, "Ff_2"'] \arrow[d] & Fb_2 \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

F が完全だから，この図式は一番上の横列以外は全て完全列である．よって命題 31 により

$$0 \to Fa_0 \xrightarrow{Ff_0} Fb_0 \xrightarrow{Fg_0} Fc_0$$

は完全である．F が **Ab**-忠実充満だから命題 26 より

$$0 \to a_0 \xrightarrow{f_0} b_0 \xrightarrow{g_0} c_0$$

も完全である． □

以下 Mitchell の埋込定理の証明を行う．

まず $\mathcal{A}$ を小アーベル圏として $y\colon \mathcal{A} \to \widehat{\mathcal{A}}$ を米田埋込とする．左完全関手全体がなす充満部分 **Ab**-豊穣圏を $\overline{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ とする．$a \in \mathcal{A}$ に対して $y(a)\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ は連続だから左完全であり，よって $y\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ と見なしてよい．

補題 33. $\overline{\mathcal{A}}$ は小直積を持つ．

証明. I を集合, $\{P_i\}_{i\in I}$ を $\overline{\mathcal{A}}$ の対象の族とする．$\widehat{\mathcal{A}}$ は **Ab**-完備だから直積 $Q := \prod_{i\in I} P_i \in \widehat{\mathcal{A}}$ は存在する．$Q \in \overline{\mathcal{A}}$ であること，つまり $Q\colon \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ が左完全であることを示せばよい．そのために $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ を $\mathcal{A}$ の完全列として，これに Q を適用して得られる **Ab** の図式

$$0 \to Qc \xrightarrow{Qg} Qb \xrightarrow{Qf} Qa$$

を考える．Q の定義よりこれは

$$0 \to \prod_{i\in I} P_i(c) \xrightarrow{\prod_{i\in I} P_i(g)} \prod_{i\in I} P_i(b) \xrightarrow{\prod_{i\in I} P_i(f)} \prod_{i\in I} P_i(a) \tag{34}$$

で与えられる．各 P_i が左完全だから $\mathbf{Ab}$ における図式

$$0 \to P_i(c) \xrightarrow{P_i(g)} P_i(b) \xrightarrow{P_i(f)} P_i(a)$$

は完全列である．よって (34) も完全である．故に K が左完全であることが分かった． □

補題 35. $\overline{\mathcal{A}}$ は核を持つ．

証明. $\theta\colon P \Rightarrow Q$ を $\overline{\mathcal{A}}$ の射とする．$\widehat{\mathcal{A}}$ は核を持つから，$\widehat{\mathcal{A}}$ における θ の核を $\kappa\colon K \Rightarrow P$ とする．$K \in \overline{\mathcal{A}}$ を示せばよい．そこで $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ を完全列とする．まず P, Q が左完全だから $\mathbf{Ab}$ における図式

$$0 \to Pc \xrightarrow{Pg} Pb \xrightarrow{Pf} Pa$$
$$0 \to Qc \xrightarrow{Qg} Qb \xrightarrow{Qf} Qa$$

は完全列である．また $\mathrm{ev}_a\colon \widehat{\mathcal{A}} \to \mathbf{Ab}$ は極限・余極限と交換するから完全関手である．よって

$$0 \to Ka \xrightarrow{\kappa_a} Pa \xrightarrow{\theta_a} Qa \to 0$$

$$0 \to Kb \xrightarrow{\kappa_b} Pb \xrightarrow{\theta_b} Qb \to 0$$

$$0 \to Kc \xrightarrow{\kappa_c} Pc \xrightarrow{\theta_c} Qc \to 0$$

も完全列である．これらを組み合わせて次の可換図式を得る．(一番上の横列以外は完全である．)

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & Kc \arrow[r, "Kg"] \arrow[d, "\kappa_c"'] & Kb \arrow[r, "Kf"] \arrow[d, "\kappa_b"] & Ka \arrow[d, "\kappa_a"] \\
0 \arrow[r] & Pc \arrow[r, "Pg"] \arrow[d, "\theta_c"'] & Pb \arrow[r, "Pf"] \arrow[d, "\theta_b"] & Pa \\
0 \arrow[r] & Qc \arrow[r, "Qg"'] \arrow[d] & Qb \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

よって命題 31 より一番上の横列は完全である. □

補題 36. $\overline{\mathcal{A}}$ は小余直積を持つ.

証明. 補題 33 と同様. □

補題 37. $\overline{\mathcal{A}}$ は余核を持つ.

証明. 省略. □

補題 38. $\overline{\mathcal{A}}$ はアーベル圏である.

証明. 命題 29 より $\widehat{\mathcal{A}}$ はアーベル圏である. よって命題 30 と補題 33, 35, 36, 37 より $\overline{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ もアーベル圏である. □

補題 39. $\overline{\mathcal{A}}$ は **Ab**-完備である.

証明. 系 15 と補題 33, 38 より分かる. □

補題 40. $\overline{\mathcal{A}}$ は **Ab**-余完備である.

証明. 補題 39 と同様. □

補題 41. $y\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ は完全関手である.

証明. y は連続だから左完全である. 故に右完全性, 即ち $0 \to a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \to 0$ が $\mathcal{A}$ の完全列のときに $y(a) \xrightarrow{y(f)} y(b) \xrightarrow{y(g)} y(c) \to 0$ が完全列となることを示せばよい. そのためには命題 28 により, 任意の $P \in \overline{\mathcal{A}}$ に対して

$$0 \to \overline{\mathcal{A}}(y(c), P) \xrightarrow{-\circ y(g)} \overline{\mathcal{A}}(y(b), P) \xrightarrow{-\circ y(f)} \overline{\mathcal{A}}(y(a), P)$$

が完全列であることを示せばよい. これは米田の補題により $0 \to Pc \xrightarrow{Pg} Pb \xrightarrow{Pf} Pa$ が完全列であることと同値であるが, P が左完全だからこれは完全列である. □

定理 42 (Mitchell の埋込定理)**.** $\mathcal{A}$ を小アーベル圏とするとき, 環 R と **Ab**-忠実充満な完全関手 $\mathcal{A} \to \widehat{R}$ が存在する.

証明. 米田埋込 $y\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ により $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ とみなす. $\overline{\mathcal{A}}$ において $p := \coprod_{a \in \mathcal{A}} a$ として $q := \displaystyle\coprod_{a \in \mathcal{A}, f \in \overline{\mathcal{A}}(p,a)} p$ とする. $\{q\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ が定める充満部分 **Ab**-豊穣圏を R とする. $R \subset \overline{\mathcal{A}}$ は稠密である.

∵) 充満部分圏 $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ で $\mathcal{A} \subset \widehat{\mathcal{A}}$ が稠密だから，命題 12 を適用すれば $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ も稠密である．よって充満部分圏 $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \cup \{q\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ に命題 12 を適用すれば $\mathcal{A} \cup \{q\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ も稠密である．もし充満部分圏 $R \subset \mathcal{A} \cup \{q\} \subset \overline{\mathcal{A}}$ に命題 13 を適用できれば，$R \subset \overline{\mathcal{A}}$ が稠密と分かる．そのためには任意の $a \in \mathcal{A}$ が q のレトラクトであることを示せばよい．それは q の普遍性から得られる次の図式により分かる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "i_{\langle a,\mathrm{id}_a,a\rangle}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \displaystyle\coprod_{b\in\mathcal{A},f\in\overline{\mathcal{A}}(p,b)} \coprod_{c\in\mathcal{A}} c \arrow[d, dashed, "h"] & c \arrow[l, "i_{\langle b,f,c\rangle}"'] \arrow[dl, bend left, "0"] \\
& a &
\end{tikzcd}$$

$F\colon R \to \overline{\mathcal{A}}$ を包含 **Ab**-関手として R の米田埋込を $z\colon R \to \widehat{R}$ と書けば普遍随伴 $F^{\dagger}z \dashv z^{\dagger}F\colon \widehat{R} \to \overline{\mathcal{A}}$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{R} \arrow[dr, shift left, "z^{\dagger}F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
R \arrow[u, "z"] \arrow[r, "F"'] & \overline{\mathcal{A}} \arrow[ul, shift left, "F^{\dagger}z"] \\
& \mathcal{A} \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

$F^{\dagger}z$ は完全関手である．

∵) $F^{\dagger}z \cong \overline{\mathcal{A}}(q,-)$ であるから q が射影的であることを示せばよい．まず $a \in \mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ を考えると $\overline{\mathcal{A}}(a,-) = \mathrm{ev}_a$ だから a は射影的である．よって命題 11 より q も射影的である．

F が稠密だから $F^{\dagger}z$ は **Ab**-忠実充満である．$y\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathcal{A}}$ も **Ab**-忠実充満な完全関手だから合成 $F^{\dagger}z \circ y\colon \mathcal{A} \to \widehat{R}$ もそうである． □

参考文献

[1] G. Aly, Abelian Categories and the Freyd-Mitchell Embedding Theorem, `http://www.u.arizona.edu/~geillan/research/`

[2] G. M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html

[3] A. T. Junhan, The Freyd-Mitchell Embedding Theorem, https://arxiv.org/abs/1901.08591

[4] 中岡 宏行, 圏論の技法, 日本評論社 (2015)