MacLane の余米田の補題

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 31 日

この PDF では『圏論の基礎』[1] に載っている形[*1]の「余米田の補題」を証明する．

定理 1. C を圏，$F\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手として，$P\colon y\downarrow F \to C$ をコンマ圏から得られる関手とする．このとき $a \in C$ に対して全単射

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F, y(a)) \cong \mathrm{Hom}_{C^{y\downarrow F}}(P, \Delta a)$$

が存在する．

証明.「fibration」の PDF より圏同型 $\mathrm{DFib}(C) \cong \widehat{C}$ が成り立つ．この同型で $F, y(a) \in \widehat{C}$ に対応する discrete fibration を P, Q とすれば全単射

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F, y(a)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{DFib}(C)}(P, Q)$$

が得られる．「fibration」の PDF によれば，P, Q はそれぞれコンマ圏から得られる関手

$$P\colon y\downarrow F \to C, \quad Q\colon y\downarrow (y(a)) \to C$$

である．このときコンマ圏の普遍性により，$\mathrm{DFib}(C)$ の射 $P \to Q$ は自然変換 $y \circ P \Rightarrow$

*1 余米田の補題と言ったら「余米田の補題」の PDF で証明した形の定理を指すことが多いため，この形の余米田の補題は nLab[2] では MacLane's co-Yoneda lemma という名前で載っている．[1] によればこれは Kan の定理らしい．

$\Delta(y(a))$ と 1 対 1 に対応する.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[r, "y(a)"] & \widehat{C} \\
 & y\downarrow(y(a)) \arrow[u] \arrow[r, "Q"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \sigma"] & C \arrow[u, "y"'] \\
y\downarrow F \arrow[uur, bend left] \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "P"'] \arrow[uur, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[r, "y(a)"] & \widehat{C} \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & C \arrow[u, "y"'] \\
y\downarrow F \arrow[uur, bend left] \arrow[urr, bend right, "P"'] & &
\end{tikzcd}
$$

従って

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F, y(a)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{DFib}(C)}(P, Q) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{(\widehat{C})^{y\downarrow F}}(y \circ P, \Delta(y(a))) \\
&\cong \int_{x \in y\downarrow F} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y \circ P(x), \Delta(y(a))(x)) \\
&= \int_{x \in y\downarrow F} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(Px), y(a)) \\
&\cong \int_{x \in y\downarrow F} \mathrm{Hom}_{C}(Px, a) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{C^{y\downarrow F}}(P, \Delta a)
\end{aligned}
$$

となる. □

参考文献

[1] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] nLab, co-Yoneda lemma, `https://ncatlab.org/nlab/show/co-Yoneda+lemma`