

# 圏の「対数」

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2024年1月14日

圏  $C$  に対して、 $C \simeq \mathbf{Set}^D$  となるような圏  $D$  を  $C$  の「対数」ということにすれば、このような「対数」がいつ存在するかは既に分かっている（「Kan 拡張」の PDF を参照）。ここではそれとは違った観点から「対数」を考える\*<sup>1</sup>。

まず実数の場合について復習しておく。実数の和と積は可換であり、分配法則

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

を満たすのであった。同様に積と冪も分配法則

$$(a \times b)^c = a^c \times b^c$$

を満たす。しかし積とは違って冪  $a^b$  は非可換である。ところが実は、「冪」の定義を少し変えると、分配法則と可換性両方が成り立つようにすることができる。それには演算  $a * b$  を  $a * b := a^{\log b}$  と定義すればよい。これは容易に分かるように

$$(a \times b) * c = (a * c) \times (b * c), \quad a * b = b * a$$

を満たす。

さて、圏の直和を和、直積を積と思えば、圏の場合もこれらは可換であり、分配法則

$$(A \amalg B) \times C = (A \times C) \amalg (B \times C)$$

が成り立つが、上記の演算  $*$  についても、圏バージョンを考えることができる。

**命題 1.**  $C, D$  を圏、 $F \dashv G: C \rightarrow D$ ,  $F' \dashv G': C \rightarrow D$  を随伴関手とする。このとき自然変換  $F \Rightarrow F'$  と  $G' \Rightarrow G$  は一対一に対応する。

---

\*<sup>1</sup> これは、以前 S さんに教えてもらった内容 [1] を文書化したものです。S さん、ありがとうございます。

証明. 随伴  $F \dashv G, F' \dashv G'$  の unit をそれぞれ  $\eta, \eta'$  とする. このとき  $G \dashv \text{id}_C \cong F, F' \dashv \text{id}_C \cong G'$  である. よって左 Kan 拡張, 左 Kan リフトの普遍性から, 等式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & D & \\
 F' \nearrow & & \searrow G \\
 & \varphi \nearrow & \\
 C & \xrightarrow{F} & C \\
 & \text{id}_C & \\
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & D & \\
 F' \nearrow & & \searrow G \\
 & \eta' \nearrow & \searrow \psi \\
 C & \xrightarrow{G'} & C \\
 & \text{id}_C & \\
 \end{array}
 \end{array}$$

により  $\varphi: F \Rightarrow F'$  と  $\psi: G' \Rightarrow G$  が一対一に対応する. (即ち, 任意の  $\varphi$  に対して, 一意に  $\psi$  が存在して等式が成立し, また任意の  $\psi$  に対して一意に  $\varphi$  が存在して等式が成り立つ.)  $\square$

そこで, 随伴の圏  $\text{Adj}(C, D)$  を次のように定義することができる.

定義. 圏  $C, D$  に対して, 圏  $\text{Adj}(C, D)$  を

- $\text{Ob}(\text{Adj}(C, D)) := \{F \dashv G: C \rightarrow D\}$ .
- $\text{Hom}_{\text{Adj}(C, D)}(F \dashv G, F' \dashv G') := \text{Hom}_{D^C}(F, F') \cong \text{Hom}_{C^D}(G', G)$ .

により定める.

これを使うことで圏バージョンの  $*$  を定義することができる.

定義. 圏  $C, D$  に対して  $C * D := \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}}$ .

命題 2.  $C * D = D * C$  である.

証明.  $\text{Adj}(C, D) = \text{Adj}(D^{\text{op}}, C^{\text{op}})$  だから

$$C * D = \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}} = \text{Adj}(D, C^{\text{op}})^{\text{op}} = D * C$$

である.  $\square$

命題 3.  $A, B, C$  を圏として,  $A, B$  は始対象  $0$  を持ち,  $C$  は二項余直積を持つとする. このとき  $(A \times B) * C \simeq (A * C) \times (B * C)$  である.

証明. 示すべき圏同値は  $\text{Adj}(A \times B, C^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq \text{Adj}(A, C^{\text{op}})^{\text{op}} \times \text{Adj}(B, C^{\text{op}})^{\text{op}}$  だから  $\text{Adj}(A \times B, C) \simeq \text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)$  を示せばよい.

$P_0: A \times B \rightarrow A, P_1: A \times B \rightarrow B$  を射影とする.  $P_0, P_1$  は左随伴  $L_0, L_1$  を持つ.

∴)  $0 \dashv! : \mathbb{1} \rightarrow B$  だから  $A = A \times \mathbb{1} \xrightarrow{\text{id}_A \times 0} A \times B$  を  $L_0$  とすれば  $L_0 \dashv P_0$  である。  
 $L_1$  についても同様.

よって関数

$$\begin{array}{ccc}
 X: \text{Ob}(\text{Adj}(A \times B, C)) & \longrightarrow & \text{Ob}(\text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 (L \dashv R) & \longmapsto & \langle LL_0 \dashv P_0 R, LL_1 \dashv P_1 R \rangle
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & C & \\
 & \uparrow \dashv \downarrow & \\
 & L \dashv R & \\
 L_0 \nearrow & A \times B & \searrow P_1 \\
 \perp \swarrow & & \swarrow \top \\
 A & \dashv P_0 & L_1 \dashv B
 \end{array}$$

が得られる。これは関手になる。逆向きの関数

$$\begin{array}{ccc}
 Y: \text{Ob}(\text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)) & \longrightarrow & \text{Ob}(\text{Adj}(A \times B, C)) \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle & \longmapsto & (\amalg \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta) \\
 A \times B & \xleftrightarrow[\leftarrow]{\begin{array}{c} L_0 \times L_1 \\ \perp \\ R_0 \times R_1 \end{array}} & C \times C \xleftrightarrow[\leftarrow]{\begin{array}{c} \amalg \\ \perp \\ \Delta \end{array}} C
 \end{array}$$

も得られる。これも関手になる。これらは互いに逆の関手を与える。

∴)  $L \dashv R: A \times B \rightarrow C$  とすると

$$\begin{aligned}
 YX(L \dashv R) &= Y(LL_0 \dashv P_0 R, LL_1 \dashv P_1 R) \\
 &= (\amalg \circ (LL_0 \times LL_1) \dashv (P_0 R \times P_1 R) \circ \Delta)
 \end{aligned}$$

である。  $a \in A, b \in B$  に対して

$$\begin{aligned}
 \amalg \circ (LL_0 \times LL_1)(a, b) &= LL_0(a) \amalg LL_1(b) \\
 &= L(a, 0) \amalg L(0, b) \\
 &\cong L(a, b)
 \end{aligned}$$

であり,  $c \in C$  に対して

$$(P_0 R \times P_1 R) \circ \Delta(c) = \langle P_0 R(c), P_1 R(c) \rangle = R(c)$$

だから  $YX(L \dashv R) \cong (L \dashv R)$  である. 一方

$$\begin{aligned} XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) &= X(\Pi \circ (L_0 \times L_1) \dashv (R_0 \times R_1) \circ \Delta) \\ &= \langle \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0 \dashv P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta, \\ &\quad \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1 \dashv P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta \rangle \end{aligned}$$

であり,  $a \in A, b \in B, c \in C$  に対して

$$\begin{aligned} \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_0(a) &= L_0(a) \amalg L_1(0) \\ &\cong L_0(a) \amalg 0 \\ &\cong L_0(a) \\ P_0 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_0(R_0(c), R_1(c)) \\ &= R_0(c) \\ \Pi \circ (L_0 \times L_1) \circ L_1(b) &= L_0(0) \amalg L_1(b) \\ &\cong 0 \amalg L_1(b) \\ &\cong L_1(b) \\ P_1 \circ (R_0 \times R_1) \circ \Delta(c) &= P_1(R_0(c), R_1(c)) \\ &= R_1(c) \end{aligned}$$

より  $XY(L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1) \cong \langle L_0 \dashv R_0, L_1 \dashv R_1 \rangle$  である.

従って  $\text{Adj}(A \times B, C) \simeq \text{Adj}(A, C) \times \text{Adj}(B, C)$  が分かる.  $\square$

つまり今定義した  $C * D$  という演算は可換でかつ (ある程度の条件の下で) 積に対して分配法則が成り立つ. よってこれは実数の場合の  $*$  の圏バージョンであると考えられる. そこで, 実数の場合に倣って  $C^{\log(D)} := C * D = \text{Adj}(C, D^{\text{op}})^{\text{op}}$  と書くことにする\*2.

**命題 4.**  $A, B, C$  を圏として,  $A$  は二項余直積を持ち  $B, C$  は始対象  $0$  を持つとする. このとき  $A^{\log(B \times C)} \simeq A^{\log(B)} \times A^{\log(C)}$  である. (この意味で  $\log(B \times C) = \log(B) + \log(C)$  と思うことができる.)

**証明.** 命題 3 から明らか.  $\square$

**命題 5.** 圏  $A$  が終対象を持つとき  $A^{\log(\mathbb{1})} \simeq \mathbb{1}$  である. (この意味で  $\log(\mathbb{1}) = 0$  と思うことができる.)

\*2  $C^{\log(D)}$  で一つの記号であり,  $\log(D)$  が定義されるわけではない.

証明.  $A$  が終対象  $1$  を持つから  $\text{Adj}(A, 1) \simeq \{! \dashv 1: A \rightarrow 1\} = 1$  となる. 従ってこの場合  $A^{\log(1)} = \text{Adj}(A, 1^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq 1$  である.  $\square$

命題 6.  $A \neq 0$  のとき  $A^{\log(0)} = 0$  である.

証明.  $A(\neq 0)$  から  $0$  への関手は存在しないから  $A^{\log(0)} = \text{Adj}(A, 0^{\text{op}})^{\text{op}} = 0$ .  $\square$

命題 7.  $U$  が余完備のとき,  $U^{\log(\mathbf{Set}^C)} \simeq U^C$  である. (この意味で  $\log(\mathbf{Set}^C) = C$  と思うことができる.)

証明. 示すべき圏同値は  $\text{Adj}(\mathbf{Set}^C, U^{\text{op}})^{\text{op}} \simeq U^C$  だから  $\text{Adj}(\mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}, U^{\text{op}}) \simeq (U^{\text{op}})^{C^{\text{op}}}$  を示せばよい. 即ち  $\text{Adj}(\widehat{C}, U) \simeq U^C$  を示せばよい.

米田埋込  $y: C \rightarrow \widehat{C}$  により関手  $y^\dagger: U^C \rightarrow U^{\widehat{C}}$  が得られる.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & & \\
 \uparrow y & \swarrow y^\dagger F & \\
 C & \xrightarrow{F} & U
 \end{array}$$

普遍随伴により  $y^\dagger: U^C \rightarrow \text{Adj}(\widehat{C}, U)$  であり, これは本質的全射である.  $y$  が忠実充満だから  $y^\dagger$  も忠実充満で, 故に  $y^\dagger$  は圏同値である.  $\square$

命題 8. 圏  $U$  が余完備のとき  $\mathbf{Set}^{\log(U)} \simeq U$  である. (これは  $e^{\log x} = x$  に対応する.)

証明. 命題 7 により  $\mathbf{Set}^{\log(U)} = U^{\log(\mathbf{Set})} \simeq U$  である.  $\square$

## 参考文献

[1] ft\_math さんによる圏論祭, 2012年12月8日, [http://alg-d.com/math/ft\\_math/](http://alg-d.com/math/ft_math/)