極限

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 11 日

第 0 章において「普遍性」の PDF で極限を,「双対」の PDF で余極限をいくつか紹介した．ここでは一般の場合の余極限について述べる．(極限については双対を考えればよい．)

目次

1　まずは特殊な場合

「双対」の PDF では余極限として余直積，始対象，pushout, coequalizer を定義した．これらの定義で登場した普遍性は，一見すると少しずつ違う条件のように見えるかもしれないが，実は圏をうまく定義するとどれも始対象として述べることができる．

1.1　余直積

まず余直積の場合を考えよう．C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．このとき圏 P_{ab} を次のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(P_{ab}) := \{\langle u, p_0, p_1\rangle \mid u \in C,\ p_0 \colon a \to u,\ p_1 \colon b \to u\}$.
- $\langle u, p_0, p_1\rangle$ から $\langle v, q_0, q_1\rangle$ への射は，C の射 $h \colon u \to v$ で次の図式を可換にするものとする．

$$\begin{tikzcd}
 & v & \\
 & u \arrow[u, "h"] & \\
a \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[uur, bend left, "q_0"] & & b \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uul, bend right, "q_1"']
\end{tikzcd}$$

このとき明らかに次が成り立つ．

命題 1. $a \xrightarrow{p_0} u \xleftarrow{p_1} b$ が a と b の余直積を与える
$\iff \langle u, p_0, p_1\rangle$ が P_{ab} の始対象．　□

1.2　pushout

pushout は次のようにすればよい．$a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$ とする．圏 Q_{fg} を次のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(Q_{fg}) := \{\langle u, p_0, p_1\rangle \mid u \in C,\ p_0 \colon a \to u,\ p_1 \colon b \to u,\ p_0 \circ f = p_1 \circ g\}$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "p_0"] & u \\
c \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] & b \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}$$

- $\langle u, p_0, p_1 \rangle$ から $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ への射は，C の射 $h\colon u \to v$ で次の図式を可換にするものとする．

$$\begin{tikzcd} & v & \\ & u \arrow[u, "h"] & \\ a \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[uur, bend left, "q_0"] & & b \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uul, bend right, "q_1"'] \end{tikzcd}$$

このとき

命題 2. $a \xrightarrow{p_0} u \xleftarrow{p_1} b$ が $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$ の pushout を与える
$\Longleftrightarrow \langle u, p_0, p_1 \rangle$ が Q_{fg} の始対象. □

1.3 coequalizer

$f, g\colon a \to b$ とする．圏 R_{fg} を次のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(R_{fg}) := \{\langle u, p \rangle \mid u \in C,\ p\colon b \to u,\ p \circ f = p \circ g\}$.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "p"] & u \end{tikzcd}$$

- $\langle u, p \rangle$ から $\langle v, q \rangle$ への射は，C の射 $h\colon u \to v$ で次の図式を可換にするものとする．

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "q"'] & u \arrow[d, "h"] \\ & v \end{tikzcd}$$

このとき

命題 3. $p\colon b \to u$ が $f, g\colon a \to b$ の coequalizer を与える
$\Longleftrightarrow \langle u, p \rangle$ が R_{fg} の始対象. □

2 コンマ圏を使う

余直積，pushout，coequalizer をそれぞれ圏 P_{ab}, Q_{fg}, R_{fg} を使って書けることを見た．実はこの P_{ab}, Q_{fg}, R_{fg} もコンマ圏を使うことで統一的に書くことができる．

2.1 pushout

まず pushout の場合を考える．圏 J を

$$j_0 \xleftarrow{k_0} i \xrightarrow{k_1} j_1$$

で定めると，圏 C における図式 $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$ に対して関手 $T\colon J \to C$ が

$$T(i) := c,\ T(j_0) := a,\ T(j_1) := b,\ T(k_0) := f,\ T(k_1) := g$$

で定まる．逆に関手 $T\colon J \to C$ が与えられれば，圏 C における図式

$$T(j_0) \xleftarrow{T(k_0)} T(i) \xrightarrow{T(k_1)} T(j_1)$$

が得られる．こうして圏 C における $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$ の形の図式は関手 $T\colon J \to C$ と同一視できる．

さて図式 $a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b$ を考える．この図式を関手 $T\colon J \to C$ と同一視して，更にこれを関手 $T\colon \mathbb{1} \to C^J$ と見なす．また $\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とする．このとき

命題 4. 圏同型 $T \downarrow \Delta \cong Q_{fg}$ が成り立つ．

証明. 圏 $T \downarrow \Delta$ の対象は $* \in \mathbb{1}$，$u \in C$，$\theta\colon T \Rightarrow \Delta u$ の 3 つ組である．ここで θ は 3 つの射 $\theta_i\colon c \to u$，$\theta_{j_0}\colon a \to u$，$\theta_{j_1}\colon b \to u$ であって図式

$$\begin{tikzcd}
u & u \arrow[l, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & u \\
a \arrow[u, "\theta_{j_0}"] & c \arrow[l, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, "\theta_i"'] & b \arrow[u, "\theta_{j_1}"']
\end{tikzcd}$$

を可換にするものと見なせる．よって

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ob}(T \downarrow \Delta) &\cong \{\langle u, \theta\rangle \mid u \in C,\ \theta\colon T \Rightarrow \Delta u\} \\
&\cong \{\langle u, \theta_{j_0}, \theta_{j_1}\rangle \mid u \in C,\ \theta_{j_0}\colon a \to u,\ \theta_{j_1}\colon b \to u,\ \theta_{j_0} \circ f = \theta_{j_1} \circ g\} \\
&= \mathrm{Ob}(Q_{fg})
\end{aligned}$$

により $T \downarrow \Delta$ の対象と Q_{fg} の対象は 1 対 1 に対応する．この対応は圏同型 $T \downarrow \Delta \cong Q_{fg}$ を与えることが射の定義から容易に分かる． □

2.2 coequalizer

次に coequalizer の場合．圏 J を

$$i \overset{k_0}{\underset{k_1}{\rightrightarrows}} j$$

とすれば，pushout のときと同様に，圏 C における図式

$$a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$$

と関手 $T\colon J \to C$ を同一視することができる．この T を $T\colon \mathbb{1} \to C^J$ と見なせば次が成り立つ．

命題 5. 圏同型 $T \downarrow \Delta \cong R_{fg}$ が成り立つ．

証明. 圏 $T \downarrow \Delta$ の対象は $* \in \mathbb{1}$，$u \in C$，$\theta\colon T \Rightarrow \Delta u$ の 3 つ組である．ここで θ は 2 つの射 $\theta_i\colon a \to u$，$\theta_j\colon b \to u$ であって図式

$$\begin{tikzcd} u \arrow[r, "\mathrm{id}"] & u \\ a \arrow[u, "\theta_i"] \arrow[r, "f"'] & b \arrow[u, "\theta_j"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} u \arrow[r, "\mathrm{id}"] & u \\ a \arrow[u, "\theta_i"] \arrow[r, "g"'] & b \arrow[u, "\theta_j"'] \end{tikzcd}$$

を可換にするものと見なせる．よって

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(T \downarrow \Delta) &\cong \{\langle u, \theta\rangle \mid u \in C,\ \theta\colon T \Rightarrow \Delta u\} \\ &\cong \{\langle u, \theta_j\rangle \mid u \in C,\ \theta_j\colon b \to u,\ \theta_j \circ f = \theta_j \circ g\} \\ &= \mathrm{Ob}(R_{fg}) \end{aligned}$$

により $T \downarrow \Delta$ の対象と R_{fg} の対象は 1 対 1 に対応する．この対応は圏同型 $T \downarrow \Delta \cong R_{fg}$ を与えることが射の定義から容易に分かる． □

2.3 余直積

最後に余直積の場合．今度は J を離散圏で $|J| = 2$ となるものとして，C の対象の組 $\langle a, b\rangle$ を関手 $T\colon \mathbb{1} \to C^J$ と同一視すれば次が成り立つ．

命題 6. 圏同型 $T \downarrow \Delta \cong P_{ab}$ が成り立つ.

証明. この場合自然変換 $\theta\colon T \Rightarrow \Delta u$ とは単に 2 つの射の組 $\langle p_0\colon a \to u, p_1\colon b \to u\rangle$ と見なせるから

$$\begin{aligned}\mathrm{Ob}(T \downarrow \Delta) &\cong \{\langle u, \theta\rangle \mid u \in C,\ \theta\colon T \Rightarrow \Delta u\}\\ &\cong \{\langle u, p_0, p_1\rangle \mid u \in C,\ p_0\colon a \to u,\ p_1\colon b \to u\}\\ &= \mathrm{Ob}(P_{ab})\end{aligned}$$

であり，このとき射の定義から $T \downarrow \Delta \cong P_{ab}$ となる. □

3　一般の余極限

余極限について今まで述べたことをまとめると次のようになる.

(1) 圏 C において「図式」が 1 つ与えられると，その余極限が定まる.
(2) この「図式」は，適当に圏 J を定義することで関手 $T\colon J \to C$ と同一視することができる.
(3) このとき余極限とは，コンマ圏 $T \downarrow \Delta$ の始対象のことである.

そこで，そもそも「図式」とは関手 $T\colon J \to C$ のことである，と定義してしまえば一般の「図式」の余極限を「コンマ圏 $T \downarrow \Delta$ の始対象」として定義することができる．そこで，まずは更に一般化した「普遍射」を定義する.

定義. C, D を圏，$c \in C$ を対象，$G\colon D \to C$ を関手とする．コンマ圏 $c \downarrow G$ の始対象を c から G への普遍射 (universal arrow) という．即ち，以下を満たす組 $\langle d, f\rangle$ のことである.

(1) d は D の対象である.
(2) f は C の射 $f\colon c \to Gd$ である.
(3) 組 $\langle d', f'\rangle$ が同じ条件 (即ち $d' \in D$ で $f'\colon c \to Gd'$ となる) を満たすならば，D の射 $h\colon d \to d'$ が一意に存在して $Gh \circ f = f'$ となる.

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Gd \arrow[d, dashed, "Gh"] & d \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Gd' & d' \end{tikzcd}$$

双対的に，コンマ圏 $G\downarrow c$ の終対象 $\langle d, f\rangle$ を G から c への普遍射という．

$$\begin{tikzcd}
d & Gd \arrow[r, "f"] & c \\
d' \arrow[u, dashed, "h"] & Gd' \arrow[u, dashed, "Gh"] \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

普遍射を使って，極限・余極限を次のように定義する．

定義． J, C を圏として $\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とする．

(1) 関手 $T\colon J \to C$ を図式 (diagram) という[*1]．また J を図式 T の添え字圏 (index category) という．
(2) Δ から $T \in C^J$ への普遍射 $\langle \lim T, \pi\rangle$ を図式 T の極限 (limit) という．
(3) $T \in C^J$ から Δ への普遍射 $\langle \operatorname{colim} T, \mu\rangle$ を図式 T の余極限 (colimit) という[*2]．

この余極限が余直積，pushout，coequializer などの一般化になっているのは先に説明した通りである．同様に極限は直積，pullback，equializer などの一般化になっている．

自然変換 $T \Rightarrow \Delta c$ を余錐 (cocone) と呼ぶ．従って余極限とは，普遍性を持つ余錐のことだと言える．同様に自然変換 $\Delta c \Rightarrow T$ を錐 (cone) といい，極限とは普遍性を持つ錐のことだと言える．また $\mu\colon T \Rightarrow \Delta c$ が余極限を与えるとき (即ち，$\langle c, \mu\rangle$ が T の余極限のとき)，μ を余極限余錐 (colimiting cocone) という．極限の場合も同様に極限錐 (limiting cone) という．[*3]

ここで，以降で使う言葉を定義しておく．

定義． (1) 圏 J が有限 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Mor}(J)$ が有限集合．
(2) 圏 J が小圏 (small category) $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Mor}(J)$ が集合．
(3) 添え字圏が有限な図式の極限を有限極限 (finite limit)，余極限を有限余極限 (finite colimit) という．
(4) 添え字圏が小圏となる図式の極限を小極限 (small limit)，余極限を小余極限 (small colimit) という．
(5) 添え字圏が集合 (小離散圏) となる図式の極限を小直積 (small product)，余極限を小余直積 (small coproduct) という．この場合，図式 $T\colon J \to C$ は Tj $(j \in J)$ で

*1 要は図式とは関手と同じ意味なのだが，図式として扱いたい気持ちのときは図式と呼ぶことが多い．
*2 数学でよく出てくる射影極限 (projective limit)・逆極限 (inverse limit) は極限で，帰納極限 (inductive limit)・直極限 (direct limit)・順極限は余極限である．
*3 但し，[1] では余錐と錐の区別をせずにどちらも錐と呼んでいるようだ．

決まる．そこで C の対象の族 $\{a_j\}_{j\in J}$ が与えられたとき，$Tj := a_j$ で定まる図式 T の極限を $\displaystyle\prod_{j\in J} a_j$，余極限を $\displaystyle\coprod_{j\in J} a_j$ と書くことが多い．

(6) 添え字圏が有限集合 (有限離散圏) となる図式の極限を有限直積 (finite product)，余極限を有限余直積 (finite coproduct) という．

(7) C が完備 (complete) $\iff$ 任意の小極限が存在する．

(8) C が余完備 (cocomplete) $\iff$ 任意の小余極限が存在する．

(9) C が有限完備 (finitely complete) $\iff$ 任意の有限極限が存在する．

(10) C が有限余完備 (finitely cocomplete) $\iff$ 任意の有限余極限が存在する．

(11) C が小直積を持つ $\iff$ 任意の小直積が存在する．

(12) C が小余直積を持つ $\iff$ 任意の小余直積が存在する．

(13) C が有限直積を持つ $\iff$ 任意の有限直積が存在する．

(14) C が有限余直積を持つ $\iff$ 任意の有限余直積が存在する．

例えば **Set** は完備かつ余完備である (命題 7, 8)．まずはそれを証明しよう．

命題 7. 小圏 J と図式 $T \in \mathbf{Set}^J$ に対して，T の極限 $\langle \lim T, \pi \rangle$ が存在する．即ち **Set** は完備である．更に $\lim T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ である．

証明. $j \in J$ とする．$\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ を取ると $\beta_j \colon 1 = \{*\} \to Tj$ が定まる．そこで $\pi_j(\beta) := \beta_j(*) \in Tj$ と置く．これにより自然変換 $\pi\colon \Delta(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)) \Rightarrow T$ が定まる．これが普遍射であることを示せばよい．そのために集合 x と自然変換 $\theta\colon \Delta x \Rightarrow T$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T) \\
x \arrow[u, dashed, "h"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\Delta(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)) \arrow[r, "\pi"] & T \\
\Delta x \arrow[u, dashed, "\Delta h"] \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}
$$

$a \in x$ に対して自然変換 $h(a)\colon \Delta 1 \Rightarrow T$ を $h(a)_j \colon 1 \ni * \mapsto \theta_j(a) \in Tj$ で定める．これにより写像 $h\colon x \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ が定まる．このとき $\pi \circ \Delta h = \theta$ である．

$\because$) $j \in J$，$a \in x$ に対して

$$(\pi \circ \Delta h)_j(a) = \pi_j \circ h(a) = \pi_j(h(a)) = h(a)_j(*) = \theta_j(a).$$

逆に $\pi \circ \Delta h = \theta$ となるような h が一意であることも容易にわかる．故に π が普遍射であり，$\lim T \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(\Delta 1, T)$ となる．$\square$

命題 8. $\mathbf{Set}$ は余完備である．

証明. まず $\mathbf{Set}$ が小余直積を持つことは容易に分かる (非交和を取ればよい)．そこで J を小圏，$T \in \mathbf{Set}^J$ を図式とすると余直積 $x := \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj$ が存在する．$a \in Tj$，$b \in Tk$ に対して

$$aRb \iff \text{ある } f \in \mathrm{Hom}_J(j,k) \text{ が存在して } (Tf)(a) = b \text{ となる}$$

と定めれば，この R は x 上の 2 項関係を定める．R を含む最小の同値関係を $\sim$ とする．このとき $x/{\sim}$ が T の余極限になっていることを示す．

そのために任意の集合 u と自然変換 $\theta \colon T \Rightarrow \Delta u$ を取る．$x = \displaystyle\coprod_{j \in J} Tj$ の普遍性により射 $h \colon x \to u$ が一意に延びる．

$$\begin{tikzcd}
Tj \arrow[dr] \arrow[dd, "Tf"'] \arrow[drr, bend left, "\theta_j"] & & \\
& x \arrow[r, dashed, "h"] & u \\
Tk \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "\theta_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき定義から明らかに，$a, b \in x$ に対して「$a \sim b$ ならば $h(a) = h(b)$」である．故に射 $x/{\sim} \to u$ が自然に定まる． $\square$

命題 8 の証明は次のように一般化される．

定理 9. 小余直積と coequalizer を持つ圏 C は余完備である．

証明. J を小圏として，$T \colon J \to C$ を図式とする．$\mathrm{Ob}(J)$ と $\mathrm{Mor}(J)$ が集合だから，仮定より余直積 $\left\langle \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj, \mu \right\rangle$ と $\left\langle \displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f), \nu \right\rangle$ が存在する．各 $f \in \mathrm{Mor}(J)$ に対して $\mathrm{dom}\, f = j$ となる $j \in \mathrm{Ob}(J)$ が一意に定まるから，$\mathrm{id} \colon T(\mathrm{dom}\, f) \to Tj$ を考えると射 $p \colon \displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \to \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj$ が余直積の普遍性により定まる．

$$\begin{tikzcd}
\displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, dashed, "p"'] & \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj \\
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[u, "\nu_f"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & Tj \arrow[u, "\mu_j"']
\end{tikzcd}$$

一方，各 $f \in \mathrm{Mor}(J)$ に対して $\operatorname{cod} f = k$ となる $k \in \mathrm{Ob}(J)$ が一意に定まるから，射 $Tf\colon T(\operatorname{dom} f) \to Tk$ を考えると射 $q\colon \displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f) \to \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj$ が余直積の普遍性により定まる．

$$\begin{tikzcd}
T(\operatorname{dom} f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\nu_f"'] & Tk \arrow[d, "\mu_k"] \\
\displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f) \arrow[r, dashed, "q"] & \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj
\end{tikzcd}$$

仮定より p, q の coequalizer $e\colon \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj \to c$ が存在する．$\eta_j := (Tj \xrightarrow{\mu_j} \coprod Tj \xrightarrow{e} c)$ と定める．

$$\begin{tikzcd}
T(\operatorname{dom} f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\nu_f"'] & Tk \arrow[d, "\mu_k"'] \arrow[dr, "\eta_k"] & \\
\displaystyle\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\operatorname{dom} f) \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "p"'] & \displaystyle\coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj \arrow[r, "e"] & c \\
T(\operatorname{dom} f) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\nu_f"] & Tj \arrow[u, "\mu_j"'] \arrow[ur, "\eta_j"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき η は自然変換 $\eta\colon T \Rightarrow \Delta c$ である．

$\because)$ $f\colon j \to k$ を T の射とする．$\eta_k \circ Tf = \eta_j$ を示せばよい．まず上の図式の上半分，下半分の可換性から $\eta_k \circ Tf = e \circ q \circ \nu_f$，$\eta_j = \eta_j \circ \mathrm{id}_{Tj} = e \circ p \circ \nu_f$ が分かる．一方 e は p, q の coequalizer だったから $e \circ p = e \circ q$ である．従って $\eta_j = \eta_k \circ Tf$ が分かる．

η が T から Δ への普遍射であることを示せばよい．そのために任意の $\theta\colon T \Rightarrow \Delta a$ を

取る．このとき $\theta_j\colon Tj \to a$ と coproduct の普遍性から $g\colon \coprod Tj \to a$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, "Tf"] \arrow[d, "\nu_f"'] & Tk \arrow[d, "\mu_k"'] \arrow[dr, "\eta_k"] \arrow[drr, bend left, "\theta_k"] & & \\
\coprod_{f \in \mathrm{Mor}(J)} T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "p"'] & \coprod_{j \in \mathrm{Ob}(J)} Tj \arrow[r, "e"] \arrow[rr, dashed, bend right, "g"'] & c & a \\
T(\mathrm{dom}\, f) \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\nu_f"] & Tj \arrow[u, "\mu_j"] \arrow[ur, "\eta_j"] \arrow[urr, bend right, "\theta_j"'] & &
\end{tikzcd}
$$

$g \circ p = g \circ q$ である．

∵) $f\colon j \to k$ を取る．g の取り方から $\theta_j = g \circ p \circ \nu_f$，$\theta_k \circ Tf = g \circ q \circ \nu_f$ となる．今 θ が自然変換だから $\theta_j = \theta_k \circ Tf$ である。故に $g \circ p \circ \nu_f = g \circ q \circ \nu_f$ が成り立つ．よって $\coprod T(\mathrm{dom}\, f)$ の普遍性から $g \circ p = g \circ q$ である．

よって coequalizer の普遍性から $h\colon c \to a$ が存在して $h \circ e = g$ となる．このとき

$$(\Delta h \circ \eta)_j = h \circ \eta_j = h \circ e \circ \mu_j = g \circ \mu_j = \theta_j$$

である．よって $\Delta h \circ \eta = \theta$ である．h の一意性も容易に分かるので，$\langle c, \eta \rangle$ が T の余極限であることが分かった． □

双対を考えれば次も分かる．

定理 10. 小直積と equalizer を持つ圏は完備である． □

同様にして

定理 11. 有限直積と equalizer を持つ圏は有限完備であり，有限余直積と coequalizer を持つ圏は有限余完備である． □

4 2 変数関手と余極限

$T\colon I \times J \to C$ を関手とする．$j \in J$ とすれば $T(-, j)\colon I \to C$ は関手である．よってこの関手の余極限 $\langle \mathrm{colim}\, T(-, j), \mu_j \rangle$ を考えることができる．念のため確認しておくとこの μ_j は自然変換 $T(-, j) \Rightarrow \Delta(\mathrm{colim}\, T(-, j))$ であり，各 $i \in I$ に対して $(\mu_j)_i$ は C の射 $T(i, j) \to \mathrm{colim}\, T(-, j)$ となる．

定理 12. 各 $j \in J$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim} T(-,j), \mu_j \rangle$ が存在するとき，関手 $F\colon J \to C$ が一意に存在して，以下の条件を満たす．

(1) $j \in J$ に対して $F(j) = \operatorname{colim} T(-,j)$ となる．
(2) $i \in I$ とするとき，$(\mu_j)_i\colon T(i,j) \to F(j)$ は $j \in J$ について自然である．

証明．まず対象 $j \in J$ に対して $F(j) := \operatorname{colim} T(-,j)$ とする．次に $i_0, i_1 \in I$, $j_0, j_1 \in J$, $f\colon i_0 \to i_1$，$g\colon j_0 \to j_1$ とする．このとき次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
T(i_0,j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}_{i_0},g)"] \arrow[d, "T(f,\mathrm{id}_{j_0})"'] & T(i_0,j_1) \arrow[d, "T(f,\mathrm{id}_{j_1})"] \\
T(i_1,j_0) \arrow[r, "T(\mathrm{id}_{i_1},g)"'] & T(i_1,j_1)
\end{tikzcd}$$

一方で次の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd}
T(i_0,j_0) \arrow[rr, "T(f,\mathrm{id}_{j_0})"] \arrow[dr, "(\mu_{j_0})_{i_0}"'] & & T(i_1,j_0) \arrow[dl, "(\mu_{j_0})_{i_1}"] \\
& \operatorname{colim} T(-,j_0) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T(i_0,j_1) \arrow[rr, "T(f,\mathrm{id}_{j_1})"] \arrow[dr, "(\mu_{j_1})_{i_0}"'] & & T(i_1,j_1) \arrow[dl, "(\mu_{j_1})_{i_1}"] \\
& \operatorname{colim} T(-,j_1) &
\end{tikzcd}$$

これらを組み合わせて次の図式の実線部を得る．

$$\begin{tikzcd}
F(j_0) = \operatorname{colim} T(-,j_0) \arrow[rr, dashed, "F(g)"] & & \operatorname{colim} T(-,j_1) = F(j_1) \\
& T(i_1,j_0) \arrow[ul, "(\mu_{j_0})_{i_1}"'] \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"] & & T(i_1,j_1) \arrow[ul, "(\mu_{j_1})_{i_1}"'] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uu, "(\mu_{j_0})_{i_0}"] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & T(i_0,j_1) \arrow[uu, "(\mu_{j_1})_{i_0}"] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"']
\end{tikzcd}$$

実線部は全て可換だから，余極限の普遍性により点線の射が得られる．これを $F(g)$ と定める．すると $F\colon J \to C$ は関手である．

$\because$) $F(g_1 \circ g_0) = Fg_1 \circ Fg_0$ と $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ を示せばよい．
　まず $g_0\colon j_0 \to j_1$，$g_1\colon j_1 \to j_2$ を J の射とする．$F(g_0)$，$F(g_1)$，$F(g_1 \circ g_0)$ は次

の図式により定義されるのであった．

$$
\begin{tikzcd}
 & F(j_0) \arrow[rrr, dashed, "F(g_0)"'] \arrow[rrrrrr, dashed, bend left, "F(g_1\circ g_0)"] & & & F(j_1) \arrow[rrr, dashed, "F(g_1)"'] & & & F(j_2) & \\
 & & T(i_1,j_0) \arrow[ul] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g_0)"] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g_1)"] & & & T(i_1,j_2) \arrow[ul] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uur] \arrow[urr] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g_0)"'] & & & T(i_0,j_1) \arrow[uur] \arrow[urr] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g_1)"'] & & & T(i_0,j_2) \arrow[uur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}
$$

よって余極限の普遍性により $F(g_1)\circ F(g_0) = F(g_1\circ g_0)$ である．同様に余極限の普遍性により $F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ も分かる．

F の定義の仕方から，$(\mu_j)_i\colon T(i,j) \Rightarrow F(j)$ は $j\in J$ について自然である．また余極限の普遍性から，このような F は一意であることも分かる． $\square$

定理 12 によって得られる関手 F は $\operatorname{colim} T(-,\square)\colon J\to C$ とでも書くべき関手となるが，このように書いてしまうと何が何なのか分からなくなってしまう．そこで，関手 $G\colon I\to C$ に対して $\operatorname{colim}_i G(i) := \operatorname{colim} G$ のように「動かす変数」を colim の添え字で表すことにすると，定理 12 で得られた関手 F は $\operatorname{colim}_i T(i,-)$ で表すことができる．(なお，変数 i の動く範囲 (添え字圏) も明示したい場合には $\operatorname*{colim}_{i\in I} G(i)$ のように書くことにする．)

さて，更にこの関手の余極限 $\operatorname{colim}(\operatorname{colim}_i T(i,-)) = \operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ も考えられるが，一方で「i と j を同時に動かした」ときの余極限 $\operatorname*{colim}_{\langle i,j\rangle\in I\times J} T(i,j)$ $(= \operatorname{colim} T)$ も考えることもできる．

定理 13. $T\colon I\times J\to C$ を関手として各 $j\in J$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim}_i T(i,j), \mu_j\rangle$ が存在するとする．このとき $\operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ と $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ のうちどちらか一方が存在すればもう一方も存在し，$\operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j)) \cong \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が成り立つ．

証明. まずは $\operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ が存在したとする．これが T の余極限となっている

ことを示そう．そのために任意の自然変換 $\theta\colon T \Rightarrow \Delta x$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
 & & x & & \\
 & & \operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j)) \arrow[u, dashed, "h"] & & \\
 & \operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[uur, dashed, bend left, "\psi_{j_0}"] & & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[ul] \arrow[uul, dashed, bend right, "\psi_{j_1}"'] & \\
 & & T(i_1,j_0) \arrow[ul] \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"] & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uuuull, bend right, "\theta_{i_1j_1}"'] \\
 & T(i_0,j_0) \arrow[uu] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"'] \arrow[uuuur, bend left, "\theta_{i_0j_0}"] & & T(i_0,j_1) \arrow[uu] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\operatorname{colim}_i T(i,j)$ の普遍性から，射 $\psi_j\colon \operatorname{colim}_i T(i,j) \to x$ が存在して図式が可換となる．故に $\operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ の普遍性から射 $h\colon \operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j)) \to x$ が存在して図式が可換となる．普遍性から，このような h が一意であることは容易に分かる．従って $\operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j))$ が T の余極限であることが分かった．

逆に $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が存在したとする．

$$
\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) & & \\
 & \operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[rr] \arrow[ur, dashed, "\nu_{j_0}"] & & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[ul, dashed, "\nu_{j_1}"'] & \\
 & & T(i_1,j_0) \arrow[ul] \arrow[uu] \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"] & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uull] \\
 & T(i_0,j_0) \arrow[uu] \arrow[uuur] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & T(i_0,j_1) \arrow[uu] \arrow[uuul] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] &
\end{tikzcd}
$$

余極限 $\operatorname{colim}_i T(i,j)$ の普遍性から，射 $\nu_j\colon \operatorname{colim}_i T(i,j) \to \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が存在して可換となる．$\langle \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j), \nu\rangle$ が $\operatorname{colim}_i T(i,-)$ の余極限になることを示そう．その

ために任意の自然変換 $\theta\colon \operatorname{colim}_i T(i,-) \Rightarrow \Delta x$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
 & & x & & \\
 & & \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) \arrow[u, dashed, "h"] & & \\
\operatorname{colim}_i T(i,j_0) \arrow[uurr, bend left, "\theta_{j_0}"] \arrow[urr, "\nu_{j_0}"] \arrow[rrr] & & & \operatorname{colim}_i T(i,j_1) \arrow[uul, bend right, "\theta_{j_1}"'] \arrow[ul, "\nu_{j_1}"'] & \\
 & T(i_1,j_0) \arrow[ul] \arrow[uur] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"] & & & T(i_1,j_1) \arrow[ul] \arrow[uull] \\
T(i_0,j_0) \arrow[uu] \arrow[uuurr] \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & & T(i_0,j_1) \arrow[ur, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[uu] \arrow[uuul] &
\end{tikzcd}$$

この実線部は可換だから $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ の普遍性により $h\colon \operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j) \to x$ が存在して可換となる．この h は明らかに一意だから $\operatorname{colim}_{\langle i,j\rangle} T(i,j)$ が $\operatorname{colim}_i T(i,-)$ の余極限であることが分かった． $\square$

よって，(各余極限が存在すれば) $\operatorname{colim}_j(\operatorname{colim}_i T(i,j)) \cong \operatorname{colim}_i(\operatorname{colim}_j T(i,j))$ となることが分かる．即ち，余極限の順序は交換可能である．双対を考えれば，同様のことが極限についても成り立つことが分かる[*4]．

さて，再び $T\colon I \times J \to C$ を関手とする．このとき関手 $\widetilde{T}\colon I \to C^J$ が得られるのであった (「自然変換・関手圏」の PDF を参照)．よってこの関手の余極限 $\operatorname{colim} \widetilde{T} \in C^J$ も考えることができる．

定理 14. $T\colon I \times J \to C$ を関手として，$j \in J$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim}_i T(i,j), \mu_j \rangle$ が存在するとする．このとき定理 12 により定まる関手を F とすれば F は $\widetilde{T}$ の余極限を与える．即ちこの場合，$\widetilde{T}$ の余極限は各点ごとに計算すれば得られる．

証明. 定理 12 により $(\nu_i)_j := (\mu_j)_i\colon T(i,j) \to F(j)$ は $j \in J$ について自然である．即ち $\nu_i\colon \widetilde{T}(i) = T(i,-) \Rightarrow F$ は自然変換である．更に $\nu\colon \widetilde{T} \Rightarrow \Delta F$ は自然変換である．

[*4] 一方，極限と余極限の交換については，一般には成り立たない．これについては「フィルター圏」の PDF を参照.

$\because$) I の射 $f\colon i_0 \to i_1$ に対して図式

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{T}(i_0) \arrow[r, "\nu_{i_0}"] \arrow[d, "\widetilde{T}(f)"'] & F \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\widetilde{T}(i_1) \arrow[r, "\nu_{i_1}"'] & F
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．即ち，$j \in J$ に対して

$$\begin{tikzcd}
T(i_0, j) \arrow[r, "(\mu_j)_{i_0}"] \arrow[d, "T(f,j)"'] & Fj \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
T(i_1, j) \arrow[r, "(\mu_j)_{i_1}"'] & Fj
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは $\mu_j\colon T(-, j) \Rightarrow \Delta(Fj)$ が自然変換であるから明らか．

$\langle F, \nu \rangle$ が $\widetilde{T}$ の余極限を与えることを示せばよい．そのために任意の $G \in C^J$ と自然変換 $\theta\colon \widetilde{T} \Rightarrow \Delta G$ を取る．$i \in I$ に対して $\theta_i\colon \widetilde{T}(i) \Rightarrow G$ も自然変換である．よって $j \in J$ に対して $(\theta_i)_j\colon T(i, j) \to Gj$ となるから，次の実線の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
& Gj_0 \arrow[rrr, "Gg"] & & & Gj_1 & \\
& Fj_0 \arrow[u, dashed, "\kappa_{j_0}"] \arrow[rrr, "Fg"'] & & & Fj_1 \arrow[u, dashed, "\kappa_{j_1}"] & \\
& & T(i_1, j_0) \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "(\theta_{i_1})_{j_0}"'] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & & T(i_1, j_1) \arrow[ul] \arrow[uul, bend right, "(\theta_{i_1})_{j_1}"'] \\
T(i_0, j_0) \arrow[uur, "(\mu_{j_0})_{i_0}"] \arrow[uuur, bend left, "(\theta_{i_0})_{j_0}"] \arrow[urr, "T(f,\mathrm{id})"'] \arrow[rrr, "T(\mathrm{id},g)"'] & & & T(i_0, j_1) \arrow[uur, "(\mu_{j_1})_{i_0}"] \arrow[uuur, bend left, "(\theta_{i_0})_{j_1}"] \arrow[urr, "T(f,\mathrm{id})"'] & &
\end{tikzcd}$$

余極限 $\langle Fj, \mu_j \rangle$ の普遍性により，$j \in J$ に対して射 $\kappa_j\colon Fj \to Gj$ を得る．これで得られ

た四角

$$\begin{tikzcd}
Gj_0 \arrow[r, "Gg"] & Gj_1 \\
Fj_0 \arrow[u, "\kappa_{j_0}"] \arrow[r, "Fg"'] & Fj_1 \arrow[u, "\kappa_{j_1}"']
\end{tikzcd}$$

は，余極限 $\langle Fj_0, \mu_{j_0} \rangle$ の普遍性により可換である．従って $\kappa \colon F \Rightarrow G$ は自然変換である．このような自然変換 κ は，余極限 $\langle Fj, \mu_j \rangle$ の普遍性から一意的であることが分かる．故に $\nu \colon \widetilde{T} \Rightarrow \Delta F$ は普遍射である． $\square$

系 15. J が小圏で C が余完備ならば C^J も余完備である．双対的に，C が完備ならば C^J も完備である． $\square$

例 16. 圏 C に対して $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ は完備かつ余完備である． $\square$

例 17. $\widetilde{T} \colon I \to C^J$ の余極限が存在したとしても，$\operatorname{colim}_i T(i,j)$ が存在するとは限らない．例えば $J = \mathbb{2}$ として，圏 C を

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] & b \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & c
\end{tikzcd}$$

で $f \circ h = g \circ h$ を満たすものとする．$C^J = C^{\mathbb{2}}$ は C の arrow category である．$C^{\mathbb{2}}$ の次の図式を考える．(縦向きの射が $C^{\mathbb{2}}$ の対象である．)

$$\begin{tikzcd}
 & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] & & c \\
b \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "f"'] & & c \arrow[ur, "\mathrm{id}_c"'] & \\
 & b \arrow[uu, "g"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & & b \arrow[uu, "g"'] \\
a \arrow[uu, "h"] \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "h"'] & & b \arrow[uu, "g"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_b"'] &
\end{tikzcd}$$

この図式は pushout を与えていることが分かる．この図式で，底面の四角が $0 \in \mathbb{2}$ 成分であるが，圏 C において $b \xleftarrow{h} a \xrightarrow{h} b$ の pushout は存在しない． $\square$

5　表現可能関手

定義. 関手 $F\colon C \to \mathbf{Set}$ が表現可能関手 (representable functor)
$\iff$ ある対象 $a \in C$ と自然同型 $F \cong \mathrm{Hom}_C(a,-)$ が存在する．
また，このとき a は F を表現するという．

※ 反変関手の場合，つまり関手 $F\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が表現可能とは $F \cong \mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(a,-)$ と書けることであるが，$\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(a,-) = \mathrm{Hom}_C(-,a)$ だから，この場合は表現可能関手とは $F \cong \mathrm{Hom}_C(-,a)$ と書けることだと思ってよい．

命題 18. 表現可能関手 F を表現する対象は同型を除いて一意である．

証明. $F \cong \mathrm{Hom}_C(a,-)$ かつ $F \cong \mathrm{Hom}_C(b,-)$ とすると，$\mathrm{Hom}_C(a,-) \cong \mathrm{Hom}_C(b,-)$ だから米田の補題により $a \cong b$ である． □

$F\colon C \to \mathbf{Set}$ を表現可能関手として $\beta\colon \mathrm{Hom}_C(a,-) \Rightarrow F$ を自然同型とする．このとき米田の補題により $x \in Fa$ が得られる．逆に $a \in C$ と $x \in Fa$ を任意に取れば，米田の補題により自然変換 $\beta\colon \mathrm{Hom}_C(a,-) \Rightarrow F$ が得られるが，勿論これは同型とは限らない．そこで，どのような a, x を取ったら β が同型になるかという問題が考えられる．これは次のように普遍性で述べることができる．

定理 19. $\beta\colon \mathrm{Hom}_C(a,-) \Rightarrow F$ を自然変換として米田の補題で β に対応する $x \in Fa$ を取る．このとき

$$\beta \text{ が同型} \iff \begin{array}{l} \text{任意の } b \in C,\ u \in Fb \text{ に対して,} \\ \text{ある射 } h\colon a \to b \text{ が一意に存在して } Fh(x) = u \text{ となる.} \end{array}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $b \in C$，$u \in Fb$ とする．β が自然同型だから $\beta_b\colon \mathrm{Hom}_C(a,b) \to Fb$ は全単射である．よって $\beta_b(h) = u$ となる $h\colon a \to b$ が存在する．このとき β の自然性により

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[r, "\beta_a"] \arrow[d, "h\circ-"'] & Fa \arrow[d, "Fh"] \\
\mathrm{Hom}_C(a,b) \arrow[r, "\beta_b"'] & Fb
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \arrow[r, mapsto, "\beta_a"] \arrow[dd, mapsto, "h\circ-"'] & x \arrow[d, mapsto, "Fh"] \\
 & Fh(x) \\
h \arrow[r, mapsto, "\beta_b"'] & u
\end{tikzcd}$$

が可換となるから $Fh(x) = u$ である．よって後はこのような h が一意であることを示

せばよい．そこで $h'\colon a\to b$ が $Fh'(x)=u$ を満たすとすると，再び β の自然性により $\beta_b(h')=u$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(a,a) \arrow[r, "\beta_a"] \arrow[d, "h'\circ-"'] & Fa \arrow[d, "Fh'"] \\
\mathrm{Hom}_C(a,b) \arrow[r, "\beta_b"'] & Fb
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \arrow[r, mapsto, "\beta_a"] \arrow[dd, mapsto, "h'\circ-"'] & x \arrow[d, mapsto, "Fh'"] \\
 & u \\
h' \arrow[r, mapsto, "\beta_b"'] & \beta_b(h')
\end{tikzcd}$$

故に β_b が全単射であることから $h=h'$ となる．

($\Longleftarrow$) 任意の $b\in C$ に対して $\beta_b\colon \mathrm{Hom}_C(a,b)\to Fb$ が全単射であることを示す．米田の補題の証明により，β_b は $f\colon a\to b$ に対して $\beta_b(f)=Ff(x)$ で与えられる．故に仮定の条件は β_b が全単射であることを意味している． $\square$

定理 19 の条件は「コンマ圏 $1\downarrow F$ において $\langle a,x\rangle$ が始対象となる」と言い換えることができる (1 は関手 $\mathbb{1}\ni *\mapsto 1\in\mathbf{Set}$)．従って次の系を得る．

系 20. 関手 $F\colon C\to\mathbf{Set}$ が表現可能 $\Longleftrightarrow$ $1\downarrow F$ が始対象を持つ． $\square$

系 21. $G\colon D\to C$ を関手として，$c\in C$ を取る．このとき

$$c \text{ から } G \text{ への普遍射が存在する} \Longleftrightarrow \mathrm{Hom}_C(c,G(-)) \text{ が表現可能関手.}$$

証明. $F:=\mathrm{Hom}_C(c,G(-))$ とする．このときコンマ圏 $1\downarrow F$ とは次のような圏である．

- 対象は $d\in D$ と射 $f\colon c\to Gd$ の組 $\langle d,f\rangle$ である．
- $\langle d,f\rangle$ から $\langle d',f'\rangle$ への射とは D の射 $k\colon d\to d'$ であって $Gk\circ f=f'$ を満たすものである．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & Gd \arrow[d, "Gk"] & d \arrow[d, "k"] \\
 & Gd' & d'
\end{tikzcd}$$

従って $1\downarrow F\cong c\downarrow G$ である．故に

$$\begin{aligned}
F \text{ が表現可能} &\Longleftrightarrow 1\downarrow F \text{ が始対象を持つ} && (\text{系 } 20)\\
&\Longleftrightarrow c\downarrow G \text{ が始対象を持つ} \\
&\Longleftrightarrow c \text{ から } G \text{ への普遍射が存在する} && (\text{普遍射の定義})
\end{aligned}$$

である． $\square$

双対を考えれば

定理 22. $F\colon C \to D$ を関手として，$d \in D$ を取る．このとき

$$F \text{ から } d \text{ への普遍射が存在する} \iff \mathrm{Hom}_D(F(-), d) \text{ が表現可能関手.}$$

$\square$

例 23. C を圏，$\Delta\colon C \to C \times C$ を対角関手とすると，Δ から $\langle a, b\rangle \in C \times C$ への普遍射が直積であった．よって直積 $a \times b$ が存在すれば $\mathrm{Hom}_{C\times C}(\Delta(-), \langle a, b\rangle)$ は表現可能関手であり，これは系 21 の証明から

$$\mathrm{Hom}_{C\times C}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}_C(-, a \times b)$$

となることが分かる．特に $x \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_{C\times C}(\langle x, x\rangle, \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}_C(x, a \times b)$ である．ここで圏の直積の定義から、左辺の集合は $\mathrm{Hom}_C(x, a) \times \mathrm{Hom}_C(x, b)$ となるから

$$\mathrm{Hom}_C(x, a) \times \mathrm{Hom}_C(x, b) \cong \mathrm{Hom}_C(x, a \times b)$$

である．(故に，直積を取る操作と $\mathrm{Hom}_C(x, -)$ を適用する操作は「可換」と言える)

逆に $\mathrm{Hom}_{C\times C}(\Delta(-), \langle a, b\rangle)$ が表現可能関手であるとする．即ち

$$\mathrm{Hom}_{C\times C}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}_C(-, r)$$

となるような $r \in C$ が取れたとすると，系 21 の証明より $r \cong a \times b$ が分かる．つまり直積 $a \times b$ とは関手 $\mathrm{Hom}_{C\times C}(\Delta(-), \langle a, b\rangle)$ を表現する対象のことである．また圏の直積の定義から自然同型

$$\mathrm{Hom}_{C\times C}(\Delta(-), \langle a, b\rangle) \cong \mathrm{Hom}_C(-, a) \times \mathrm{Hom}_C(-, b)$$

が分かるから，直積 $a \times b$ とは関手 $\mathrm{Hom}_C(-, a) \times \mathrm{Hom}_C(-, b)$ を表現する対象のことであると言うこともできる． $\square$

例 23 で，直積と $\mathrm{Hom}(x, -)$ が交換できることは次のように一般化できる．

定義. J, C, D を圏，$T\colon J \to C$，$F\colon C \to D$ を関手として T の余極限 $\langle \operatorname{colim} T, \mu\rangle$ が存在するとする．このとき F が $\operatorname{colim} T$ と交換する[*5]
$\iff$ $\langle F(\operatorname{colim} T), F\mu\rangle$ が FT の余極限となる．

[*5] F が $\operatorname{colim} T$ を保存する，とも言う．

定義. 関手 $F\colon C \to D$ が余連続
$\iff$ J が小圏で $T\colon J \to C$ の余極限 $\operatorname{colim} T$ が存在するならば，F が $\operatorname{colim} T$ と交換する．

極限と交換する，連続も同様に定義する．

命題 24. $c \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(c,-)\colon C \to \mathbf{Set}$ は任意の極限と交換する．

証明. J を圏，$T\colon J \to C$ を関手として，T の極限 $\langle \lim T, \pi \rangle$ が存在するとする．次の図式が関手 $\mathrm{Hom}(c, T-)\colon J \to \mathbf{Set}$ の極限を与えることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) &
\end{tikzcd}
$$

そのために任意の $x \in \mathbf{Set}$ と自然変換 $\theta\colon \Delta x \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(c, T-)$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] & x \arrow[ull, bend right, "\theta_j"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) & &
\end{tikzcd}
$$

可換性から，任意の $a \in x$ に対して $Tf \circ (\theta_j(a)) = \theta_k(a)$ である．即ち次の図式の外側の三角形が可換であり，よって $\lim T$ の普遍性から $h(a)\colon c \to \lim T$ が一意に存在して可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
Tj \arrow[dd, "Tf"'] & & \\
& \lim T \arrow[ul, "\pi_j"'] \arrow[dl, "\pi_k"] & c \arrow[l, dashed, "h(a)"] \arrow[ull, bend right, "\theta_j(a)"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k(a)"] \\
Tk & &
\end{tikzcd}
$$

この $h(a)$ は写像 $h\colon x \to \mathrm{Hom}_C(c, \lim T)$ を与える．次の図式が可換になることを示せば

よい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] & x \arrow[l, dashed, "h"] \arrow[ull, bend right, "\theta_j"'] \arrow[dll, bend left, "\theta_k"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) & &
\end{tikzcd}$$

即ち，任意の $a \in x$ に対して $\pi_j \circ (h(a)) = \theta_j$ を示せばよいが，それは $h(a)$ の定義から明らか．逆に，このような h の一意性も $h(a)$ の一意性から分かる． □

定理 25. 米田埋込 $y\colon C \to \widehat{C}$ は極限と交換する[*6]．

証明. 関手 $T\colon J \to C$ の極限 $\langle \lim T, \pi\rangle$ が存在するとする．$\langle y(\lim T), y\pi\rangle$ が $yT\colon J \to \widehat{C}$ の極限であることを示せばよい．$\widehat{C}$ の極限は各点ごとに計算すればよいから (定理 14)，$c \in C$ に対して $\langle \mathrm{Hom}_C(c, \lim T), (y\pi)_c\rangle$ が $\mathrm{Hom}_C(c, T-)\colon I \to \mathbf{Set}$ の極限であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Tj \arrow[dd, "Tf"'] & \\
& \lim T \arrow[ul, "\pi_j"'] \arrow[dl, "\pi_k"] \\
Tk &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y(Tj) \arrow[dd, "y(Tf)"'] & \\
& y(\lim T) \arrow[ul, "y(\pi_j)"'] \arrow[dl, "y(\pi_k)"] \\
y(Tk) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,Tj) \arrow[dd, "Tf\circ-"'] & \\
& \mathrm{Hom}_C(c,\lim T) \arrow[ul, "\pi_j\circ-"'] \arrow[dl, "\pi_k\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_C(c,Tk) &
\end{tikzcd}$$

ところがこれは $\mathrm{Hom}_C(c, -)$ が任意の極限と交換する (定理 24) から明らか． □

命題 26. J が小圏で C が余完備ならば $\mathrm{ev}_j\colon C^J \to C$ は小余極限と交換する．

証明. I を小圏，$\widetilde{T}\colon I \to C^J$ を関手として，$\langle \mathrm{colim}\, \widetilde{T}, \eta\rangle$ を $\widetilde{T}$ の余極限とする．$\widetilde{T}$ に対応する関手 $T\colon I \times J \to C$ をとれば，C が余完備だから定理 14 の証明における $\langle F, \nu\rangle$ も $\widetilde{T}$ の余極限を与える．故に余極限の普遍性により自然同型 $\sigma\colon \mathrm{colim}\, \widetilde{T} \Rightarrow F$ が存在して，$i \in I$，$j \in J$ に対して次の図式が可換となる．

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{colim}\, \widetilde{T})(j) \arrow[rr, "\sigma_j"] & & Fj \\
& T(i,j) \arrow[ul, "(\eta_i)_j"] \arrow[ur, "(\nu_i)_j"'] &
\end{tikzcd}$$

[*6] 一方で余極限とは交換するとは限らない．

今 $\langle Fj, (\nu_-)_j \rangle$ が $T(-,j)$ の余極限だから，明らかに $\langle (\operatorname{colim} \widetilde{T})(j), (\eta_-)_j \rangle$ も $T(-,j)$ の余極限である．$\mathrm{ev}_j \circ \widetilde{T} = T(-,j)$，$\mathrm{ev}_j(\operatorname{colim} \widetilde{T}) = (\operatorname{colim} \widetilde{T})(j)$，$\mathrm{ev}_j \eta = (\eta_-)_j$ だから ev_j が $\operatorname{colim} \widetilde{T}$ と交換することが分かった． □

同様にして C が完備ならば $\mathrm{ev}_j \colon C^J \to C$ は小極限と交換する．

例 27. $\theta \colon F \Rightarrow G \colon C \to D$ を自然変換として D は余完備であるとする．このとき

$$\theta \text{ が } (D^C \text{ の射として}) \text{ エピ射} \iff \text{各 } a \in C \text{ に対して } \theta_a \text{ がエピ射}^{*7}.$$

∵) 一般に，射 $f \colon a \to b$ がエピ射であることは

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\ b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] & b \end{tikzcd}$$

が pushout になることと同値であった (「双対」の PDF を参照)．故に定理 14，26 より

$$\theta \text{ がエピ射} \iff \begin{tikzcd} F \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\theta"'] & G \arrow[d, "\mathrm{id}_G"] \\ G \arrow[r, "\mathrm{id}_G"'] & G \end{tikzcd} \text{ が pushout}$$

$$\iff \text{各 } a \in C \text{ に対して } \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "\theta_a"'] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \\ Ga \arrow[r, "\mathrm{id}_{Ga}"'] & Ga \end{tikzcd} \text{ が pushout}$$

$$\iff \text{各 } a \in C \text{ に対して } \theta_a \text{ がエピ射}.$$

特に，$\widehat{C}$ の射がエピ射であるかどうかは，全ての成分が全射かどうかで決まる．

双対を考えれば，モノ射についても同様であることが分かる． □

$F \colon C \to D$ を関手として $T \colon J \to C$ の余極限 $\langle \operatorname{colim} T, \mu \rangle$ が存在するとする．このとき $F\mu \colon FT \Rightarrow \Delta(F(\operatorname{colim} T))$ は自然変換である．よって FT の余極限 $\langle \operatorname{colim} FT, \nu \rangle$ が

*7 $\Longleftarrow$ は D が余完備でなくても成り立つ．$\Longrightarrow$ については例 17 も参照.

存在したとすれば，$\operatorname{colim} FT$ の普遍性により C の射 $h\colon \operatorname{colim} FT \to F(\operatorname{colim} T)$ が存在して $(\Delta h) \circ \nu = F\mu$ となる．

$$\begin{tikzcd}
Tj \arrow[d, "Tf"'] \arrow[dr, "\nu_j"] \arrow[drr, bend left, "F\mu_j"] & & \\
 & \operatorname{colim} FT \arrow[r, dashed, "h"] & F(\operatorname{colim} T) \\
Tk \arrow[ur, "\nu_k"'] \arrow[urr, bend right, "F\mu_k"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき普遍性から明らかに

$$F \text{ が } \operatorname{colim} T \text{ と交換する} \iff h\colon \operatorname{colim} FT \to F(\operatorname{colim} T) \text{ が同型になる．}$$

である．

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), section 3.3, `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`