lax yoneda

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2022 年 5 月 25 日

ここでは「lax バージョン」の米田の補題を証明する．

> ※ めんどくさくなったので一部書きかけです．

定理 1. $\mathcal{B}$ を bicategory，$P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ を lax 2-functor，$a \in \mathcal{B}$ を対象とするとき，随伴関手 $F \dashv G\colon Pa \to \mathrm{Fun}_\ell(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat})(y(a), P)$ が存在する．

証明. まず F を次により定義する．

- $u \in Pa$，$s \in \mathcal{B}$ に対して次のように定義する．
  - ⋆ $f\colon s \to a$ に対して $F(u)_s(f) := Pf(u)$.
  - ⋆ $\beta\colon f \Rightarrow g\colon s \to a$ に対して $F(u)_s(\beta) := (P\beta)_u$.

$$
\begin{tikzcd}
a & s \arrow[l, bend right, "f"'] \arrow[l, bend left, "g"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\beta"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u \in Pa \arrow[r, bend left, "Pf"] \arrow[r, bend right, "Pg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow P\beta"] & Ps
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Pf(u) \arrow[d, "(P\beta)_u"] \\
Pg(u)
\end{tikzcd}
$$

  これは関手 $F(u)_s\colon \mathcal{B}(s, a) \to Ps$ を与える．

  > $\because$) P が lax 2-functor だから $P\colon \mathcal{B}(s, a) \to \mathbf{Cat}(Fa, Fs)$ は関手である．故に $P(\gamma * \beta) = P\gamma * P\beta$，$P(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ となるので $F(u)_s(\gamma * \beta) = F(u)_s(\beta) \circ F(u)_s(\beta)$ と $F(u)_s(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$ が分かる．

- この $F(u)_s$ は lax natural transformation $F(u)\colon y(a) \Rightarrow P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ を与える．

  > $\because$) 1-morphism $f\colon s \to a$ と $p\colon t \to s$ に対して $(F(u)_p)_f := (\varphi_{pf})_u$ と定義

する．このとき $F(u)_p\colon Pp \circ F(u)_s \Rightarrow F(u)_t \circ (- \bullet p)$ は自然変換である．

∵) $\beta\colon f \Rightarrow g\colon s \to a$ に対して，圏 Pt の図式

$$
\begin{tikzcd}
Pp(F(u)_s(f)) \arrow[r, "(F(u)_p)_f"] \arrow[d, "Pp(F(u)_s(\beta))"'] & F(u)_t(f \circ p) \arrow[d, "P(u)_t(\beta \bullet p)"] \\
Pp(F(u)_s(g)) \arrow[r, "(F(u)_p)_g"'] & F(u)_t(g \circ p)
\end{tikzcd}
$$

が可換であることを示せばよい．そのためには定義より

$$
\begin{tikzcd}
Pp(Pf(u)) \arrow[r, "(\varphi_{pf})_u"] \arrow[d, "Pp((P\beta)_u)"'] & P(f \circ p)(u) \arrow[d, "P(\beta \bullet p)_u"] \\
Pp(Pg(u)) \arrow[r, "(\varphi_{pg})_u"'] & P(g \circ p)(u)
\end{tikzcd}
$$

の可換性，即ち

$$
\begin{tikzcd}
Pp \circ Pf \arrow[r, "\varphi_{pf}"] \arrow[d, "Pp \bullet P\beta"'] & P(f \circ p) \arrow[d, "P(\beta \bullet p)"] \\
Pp \circ Pg \arrow[r, "\varphi_{pg}"'] & P(g \circ p)
\end{tikzcd}
$$

の可換性を示せばよいが，これは φ が自然変換だから成り立つ．

$r \xrightarrow{q} t \xrightarrow{p} s$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "F(u)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{F(u)_p}{\Swarrow}"] \arrow[d, phantom, shift right=6ex, "\overset{\alpha_{-pq}}{\Leftarrow}"] & Ps \arrow[d, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "F(u)_t"] \arrow[d, "-\bullet q"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{F(u)_q}{\Swarrow}"] & Pt \arrow[d, "Pq"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[r, "F(u)_r"'] & Pr
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "F(u)_s"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dd, phantom, shift left=8ex, "\overset{F(u)_{p\circ q}}{\Swarrow}"] & Ps \arrow[d, "Pp"] \arrow[dd, bend right=60, "F(p\circ q)"'] \\
 & Pt \arrow[d, "Pq"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{qp}}{\Leftarrow}"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[r, "F(u)_r"'] & Pr
\end{tikzcd}
$$

を示す．即ち $g \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して，圏 Pr での等式

$$
F(u)_r(\alpha_{gpq}) \circ (F(u)_q)_{g\circ p} \circ Pq((F(u)_p)_g) = (F(u)_{p\circ q})_g \circ (\varphi_{qp})_{F(u)_s(g)}
$$

を示す．定義より

$$
\begin{aligned}
F(u)_r(\alpha_{gpq}) &= (P\alpha_{gpq})_u \\
(F(u)_q)_{g\circ p} &= (\varphi_{q,g\circ p})_u \\
Pq((F(u)_p)_g) &= Pq((\varphi_{pg})_u) \\
(F(u)_{p\circ q})_g &= (\varphi_{p\circ q,g})_u \\
(\varphi_{qp})_{F(u)_s(g)} &= (\varphi_{qp})_{Pg(u)}
\end{aligned}
$$

であるが，$P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ が lax 2-functor だから

$$P(\alpha_{gpq}) * \varphi_{q,g\circ p} * (Pq \bullet \varphi_{pg}) = \varphi_{p\circ q,g} * (\varphi_{qp} \bullet Pg)$$

となるので成り立つ．

最後に $s \in \mathcal{B}$ に対して次の自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "F(u)_s"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "F(u)_s"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"', ""{name=L}] & Ps \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "F(u)_s"'] \arrow[ur, phantom, "="] & Ps \arrow[ul, phantom, "=" near start]
\arrow[from=L, to=2-1, phantom, "\overset{\psi^s}{\Leftarrow}" near start]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "F(u)_s"] \arrow[d, bend right=40, "-\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{F(u)_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Ps \arrow[d, "\mathrm{id}_{Pa}"] \arrow[d, bend right=50, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\psi^s}{\Leftarrow}" near start] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "F(u)_s"'] & Ps
\end{tikzcd}
$$

を示す．即ち $f\colon s \to a$ に対して $F(u)_s(\rho_f^{-1}) = (F(u)_{\mathrm{id}_a})_f \circ \psi^s_{F(u)_s(f)}$ を示す．定義より

$$
\begin{aligned}
F(u)_s(\rho_f^{-1}) &= (P\rho_f^{-1})_u \\
(F(u)_{\mathrm{id}_a})_f &= (\varphi_{\mathrm{id}_a,f})_u \\
\psi^s_{F(u)_s(f)} &= \psi^s_{Pf(u)}
\end{aligned}
$$

であるが，P が lax 2-functor だから $P(\rho_f) * \varphi_{\mathrm{id},f} * (\psi^s \bullet Pf) = \mathrm{id}$ となり成り立つ．

- Pa の射 $k\colon u \to v$ と $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon s \to a$ に対して

$$(F(k)_s)_f := Pf(k)\colon F(u)_s(f) = Pf(u) \to Pf(v) = F(v)_s(f)$$

と定める．これは $f \in \mathcal{B}(s,a)$ について自然である．

∵) $\beta\colon f \Rightarrow g$ に対して次が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
F(u)_s(f) \arrow[r, "(F(k)_s)_f"] \arrow[d, "F(u)_s(\beta)"'] & F(v)_s(f) \arrow[d, "F(v)_s(\beta)"] \\
F(u)_s(g) \arrow[r, "(F(k)_s)_g"'] & F(v)_s(g)
\end{tikzcd}
$$

これは定義より

$$
\begin{tikzcd}
Pf(u) \arrow[r, "Pf(k)"] \arrow[d, "(P\beta)_u"'] & Pf(v) \arrow[d, "(P\beta)_v"] \\
Pg(u) \arrow[r, "Pg(k)"'] & Pg(v)
\end{tikzcd}
$$

となるから，$P\beta\colon Pf \Rightarrow Pg$ が自然変換であることより可換である．

よって $F(k)_s\colon F(u)_s \Rightarrow F(v)_s\colon \mathcal{B}(s,a) \to Ps$ は自然変換である．

- この $F(k)_s$ は modification $F(k)\colon F(u) \Rrightarrow F(v)$ となる．

∵) $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "F(u)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow F(u)_p"] & Ps \arrow[d, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "F(u)_t"] \arrow[r, bend right, "F(v)_t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F(k)_t"] & Pt
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "F(u)_s"] \arrow[r, bend right, "F(v)_s"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F(k)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow F(v)_p"] & Ps \arrow[d, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "F(v)_t"'] & Pt
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $f\colon s \to a$ に対して，圏 Pt での等式

$$
(F(k)_t)_{f\circ p} \circ (F(u)_p)_f = (F(v)_p)_f \circ Pp((F(k)_s)_f)
$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
(F(k)_t)_{f\circ p} &= P(f\circ p)(k) \\
(F(u)_p)_f &= (\varphi_{pf})_u \\
(F(v)_p)_f &= (\varphi_{pf})_v \\
Pp((F(k)_s)_f) &= Pp(Pf(k))
\end{aligned}
$$

だから $P(f\circ p)(k)\circ(\varphi_{pf})_u=(\varphi_{pf})_v\circ(Pp(Pf(k)))$ を示せばよいが，これは P が lax 2-functor だからよい．

- 以上により F は関手 $F\colon Pa\to \mathrm{Fun}_\ell(\mathcal{B}^{\mathrm{op}},\mathbf{Cat})(y(a),P)$ となる

$\because)$

次に G を次により定義する．

- lax natural transformation $\sigma\colon y(a)\Rightarrow P$ に対して $G(\sigma):=\sigma_a(\mathrm{id}_a)$.
- modification $\Gamma\colon \sigma\Rrightarrow\tau\colon y(a)\Rightarrow P$ に対して $G(\Gamma):=(\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a}$.

この G は明らかに関手 $G\colon \mathrm{Fun}_\ell(\mathcal{B}^{\mathrm{op}},\mathbf{Cat})(y(a),P)\to Pa$ となる．

$u\in Pa$ に対して $GF(u)=F(u)_a(\mathrm{id}_a)=P\mathrm{id}_a(u)$ である．そこで $\eta:=\psi\colon \mathrm{id}_{Pa}\Rightarrow P(\mathrm{id}_a)$ と定める．即ち $\eta\colon \mathrm{id}_{Pa}\Rightarrow GF$ は自然変換である．

次に ε を，$s\in\mathcal{B}$，$f\colon s\to a$，$\sigma\colon y(a)\Rightarrow P$ に対して

$$((\varepsilon_\sigma)_s)_f:=\left(F(G(\sigma))_s(f)=Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a))\xrightarrow{(\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}}\sigma_s(\mathrm{id}\circ f)\xrightarrow{\sigma_s(\lambda_f)}\sigma_s(f)\right)$$

と定義する．これは $f\in\mathcal{B}(s,a)$ について自然である．

$\because)$ $\beta\colon f\Rightarrow g\colon s\to a$ に対して，圏 Ps の図式

$$\begin{tikzcd}
Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "(P\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}\circ f) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_f)"] \arrow[d, "\sigma_s(\mathrm{id}\bullet\beta)"] & \sigma_s(f) \arrow[d, "\sigma_s(\beta)"] \\
Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}\circ g) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_g)"'] & \sigma_s(g)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，これは σ_g と λ_g が g について自然だから明らか．

よって自然変換 $(\varepsilon_\sigma)_s\colon FG(\sigma)_s\Rightarrow\sigma_s$ が得られる．これは modification $\varepsilon_\sigma\colon FG(\sigma)\Rrightarrow\sigma$ を与える．

∵) $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, bend left, "(FG(\sigma))_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[drr, phantom, "(FG(\sigma))_p \Swarrow"] & & Ps \arrow[d, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, bend left, "(FG(\sigma))_t"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_t"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow(\varepsilon_\sigma)_t"] & & Pt
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, bend left, "(FG(\sigma))_s"] \arrow[rr, bend right, "\sigma_s"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow(\varepsilon_\sigma)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[drr, phantom, "\sigma_p \Swarrow"] & & Ps \arrow[d, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, bend right, "\sigma_t"'] & & Pt
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．即ち $f \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して，圏 Pt での等式

$$((\varepsilon_\sigma)_t)_{f\circ p} \circ (FG(\sigma)_p)_f = (\sigma_p)_f \circ Pp(((\varepsilon_\sigma)_s)_f)$$

を示せばよい．定義より

$$
\begin{aligned}
((\varepsilon_\sigma)_t)_{f\circ p} &= \sigma_t(\lambda_{f\circ p}) \circ (\sigma_{f\circ p})_{\mathrm{id}_a} \\
(FG(\sigma)_p)_f &= ((P(\sigma_a(\mathrm{id}_a)))_p)_g = (\varphi_{pf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} \\
Pp(((\varepsilon_\sigma)_s)_f) &= Pp(\sigma_s(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}
$$

だから，圏 Pt での等式

$$\sigma_t(\lambda_{f\circ p}) \circ (\sigma_{f\circ p})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{pf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} = (\sigma_p)_f \circ Pp(\sigma_s(\lambda_f)) \circ Pp((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})$$

を示せばよい．まず $\sigma_p\colon Pp \circ \sigma_s \Rightarrow \sigma_t \circ (- \bullet p)$ が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
Pp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a \circ f}"] \arrow[d, "Pp(\sigma_s(\lambda_f))"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ f) \circ p) \arrow[d, "\sigma_t(\lambda_f \bullet p)"] \\
Pp(\sigma_s(f)) \arrow[r, "(\sigma_p)_f"'] & \sigma_t(f \circ p)
\end{tikzcd}
$$

が可換である．次に $\sigma\colon y(a) \Rightarrow F$ が lax natural transformation だから自然変換の

等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet f"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ p)"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \sigma_f"] & Pa \arrow[d, "Pf"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\sigma_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \sigma_p"] \arrow[l, phantom, "\overset{\alpha_{-fp}}{\Longleftarrow}"] & Ps \arrow[d, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] & Pt
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ p)"'] \arrow[ddr, phantom, "\Swarrow \sigma_{f\circ p}"] & Pa \arrow[d, "Pf"] \arrow[dd, bend right=60, "F(f\circ p)"'] \\
& Ps \arrow[d, "Pp"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{pf}}{\Longleftarrow}"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] & Pt
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．よって $\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば

$$
\begin{tikzcd}
Fp(Ff(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[r, "(\varphi_{pf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fp((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & F(f\circ p)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ p})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& \sigma_t(\mathrm{id}_a \circ (f\circ p)) \\
Fp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ f)\circ p) \arrow[u, "\sigma_t(\alpha_{\mathrm{id}_a,f,p})"']
\end{tikzcd}
$$

が可換となる．これらを組み合わせて可換図式

$$
\begin{tikzcd}
Pp(Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[rr, "(\varphi_{pf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Fp((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & & P(f\circ p)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ p})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& & \sigma_t(\mathrm{id}_a \circ (f\circ p)) \arrow[dd, "\sigma_t(\lambda_{f\circ p})"] \\
Pp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ f)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a\circ f}"] \arrow[d, "Pf(\sigma_s(\lambda_f))"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ f)\circ p) \arrow[ur, "\sigma_t(\alpha_{\mathrm{id}_a,f,p})"] \arrow[dr, "\sigma_t(\lambda_f\circ p)"'] & \\
Pf(\sigma_s(f)) \arrow[rr, "(\sigma_p)_f"'] & & \sigma_t(g\circ p)
\end{tikzcd}
$$

を得る．一番外側が今示したかった可換性である．

この $\varepsilon_\sigma \colon FG(\sigma) \Rrightarrow \sigma$ は σ について自然である．

$\because$) $\Phi\colon \sigma \Rrightarrow \tau\colon y(a) \Rightarrow P$ を modification とする．次の可換図式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
FG(\sigma) \arrow[r, "\varepsilon_\sigma"] \arrow[d, "FG(\Phi)"'] & \sigma \arrow[d, "\Phi"] \\
FG(\tau) \arrow[r, "\varepsilon_\tau"'] & \tau
\end{tikzcd}$$

即ち $s \in \mathcal{B}$，$f\colon s \to a$ に対して，圏 Ps の図式

$$\begin{tikzcd}
FG(\sigma)_s(f) \arrow[r, "((\varepsilon_\sigma)_s)_f"] \arrow[d, "(FG(\Phi)_s)_f"'] & \sigma_s(f) \arrow[d, "(\Phi_s)_f"] \\
FG(\tau)_s(f) \arrow[r, "((\varepsilon_\tau)_s)_f"'] & \tau_s(f)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}
((\varepsilon_\sigma)_s)_f &= \sigma_s(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a} \\
((\varepsilon_\tau)_s)_f &= \tau_s(\lambda_f) \circ (\tau_f)_{\mathrm{id}_a} \\
(FG(\Phi)_s)_f &= (F((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})_s)_f = Pf((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{tikzcd}
Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "Pf((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})"'] & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_f)"] \arrow[d, "(\Phi_s)_{\mathrm{id}_a \circ f}"'] & \sigma_s(f) \arrow[d, "(\Phi_s)_f"] \\
Pf(\tau_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\tau_f)_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "\tau_s(\lambda_f)"'] & \tau_s(f)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．左の四角は $\Phi\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ が modification だから

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_f \Swarrow"] & Pa \arrow[d, "Pf"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_s"] \arrow[r, bend right, "\tau_s"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi_s"] & Ps
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Phi_a"] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dr, phantom, "\tau_f \Swarrow"] & Pa \arrow[d, "Pf"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend right, "\tau_s"'] & Ps
\end{tikzcd}$$

となり成り立つ．右の四角は $\Phi_s\colon \sigma_s \Rightarrow \tau_s$ が自然変換だから成り立つ．

よって $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ は自然変換である．

この η, ε により $F \dashv G$ となることを示せばよい．即ち

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "G"'] & & X \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
& Pa \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & Pa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "G"'] & & X \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & \\
& Pa \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & Pa
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "G"'] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & & X \\
Pa \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & Pa \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& X \arrow[rr, "\mathrm{id}"] & & X \\
Pa \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}"'] & & Pa \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] &
\end{tikzcd}
$$

を示せばよい．（ここで $X := \mathrm{Fun}_\ell(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat})(y(a), P)$ と書いた．）

まず 1 つ目の等式については，$\sigma \in X$ に対して $G\varepsilon_\sigma \circ \eta_{G(\sigma)} = \mathrm{id}_{G(\sigma)}$ を示せばよい．定義より

$$G\varepsilon_\sigma = ((\varepsilon_\sigma)_a)_{\mathrm{id}_a}, \quad \eta_{G(\sigma)} = \psi_{G(\sigma)} = \psi_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}$$

だから $G\varepsilon_\sigma \circ \eta_{G(\sigma)}$ は合成

$$\sigma_a(\mathrm{id}_a) \xrightarrow{\psi_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}} P\mathrm{id}_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \xrightarrow{(\sigma_{\mathrm{id}_a})_{\mathrm{id}_a}} \sigma_a(\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \xrightarrow{\sigma_a(\lambda_{\mathrm{id}_a})} \sigma_a(\mathrm{id}_a)$$

と一致する．

2 つ目の等式については $u \in Pa$ に対して $\varepsilon_{F(u)} \circ F(\eta_u) = \mathrm{id}_{F(u)}$ を示せばよい．定義より $f\colon s \to a$ に対して

$$
\begin{aligned}
((\varepsilon_{F(u)})_s)_f &= \left(Pf(F(u)_a(\mathrm{id}_a)) \xrightarrow{(F(u)_f)_{\mathrm{id}_a}} F(u)_s(\mathrm{id}_a \circ f) \xrightarrow{F(u)_s(\lambda_f)} F(u)_s(f)\right) \\
&= \left(Pf(P\mathrm{id}_a(u)) \xrightarrow{(\varphi_{\mathrm{id}_a f})_u} P(\mathrm{id}_a \circ f)(u) \xrightarrow{(P\lambda_f)_u} Pf(u)\right) \\
(F(\eta_u)_s)_f &= Pf(\psi_u)
\end{aligned}
$$

だから $((\varepsilon_{F(u)} \circ F(\eta_u))_s)_f$ は

$$Pf(u) \xrightarrow{Pf(\psi_u)} Pf(P\mathrm{id}_a(u)) \xrightarrow{(\varphi_{\mathrm{id}_a f})_u} P(\mathrm{id}_a \circ f)(u) \xrightarrow{(P\lambda_f)_u} Pf(u)$$

と一致する． $\square$

参考文献

[1] nLab, lax natural transformation `https://ncatlab.org/nlab/show/lax+natural+transformation`