各点 Kan 拡張概論

alg-d　講演動画: https://www.youtube.com/watch?v=kEGdYXyW2u4

2020-02-29

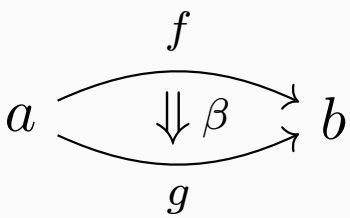
notation

notation

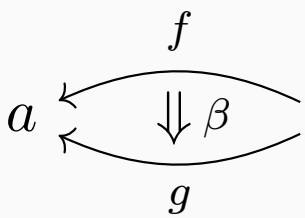
$\mathcal{B}$ を bicategory とするとき，

- 1-morphism を逆向きにした bicategory を $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$
- 2-morphism を逆向きにした bicategory を $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}$
- $\mathcal{B}^{\mathrm{coop}} := (\mathcal{B}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{co}}$

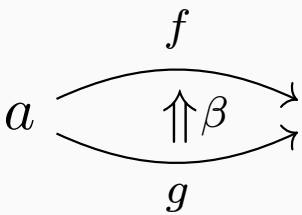
と書く．



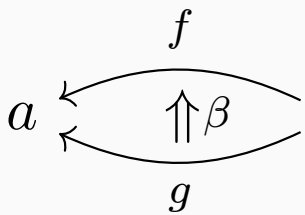
in $\mathcal{B}$



in $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$

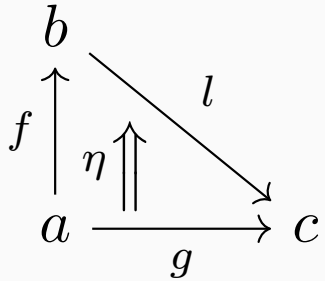


in $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}$



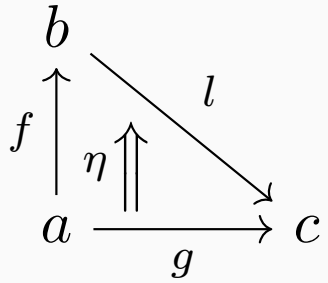
in $\mathcal{B}^{\mathrm{coop}}$

notation

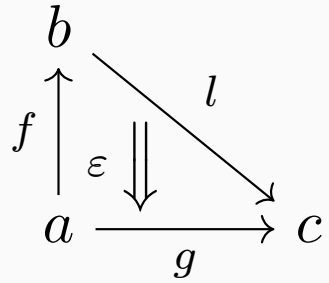


$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の左 Kan 拡張のとき $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ と書く．
もしくは η を省略して単に $l = f^\dagger g$ と書く．

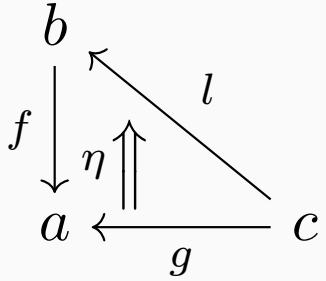
notation



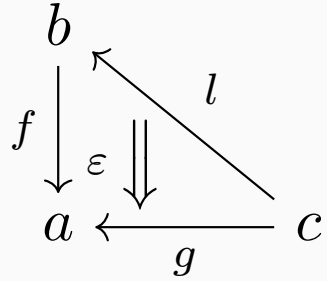
左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$



右 Kan 拡張 $f^{\ddagger}g = \langle l, \varepsilon \rangle$



左 Kan リフト $f_{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$

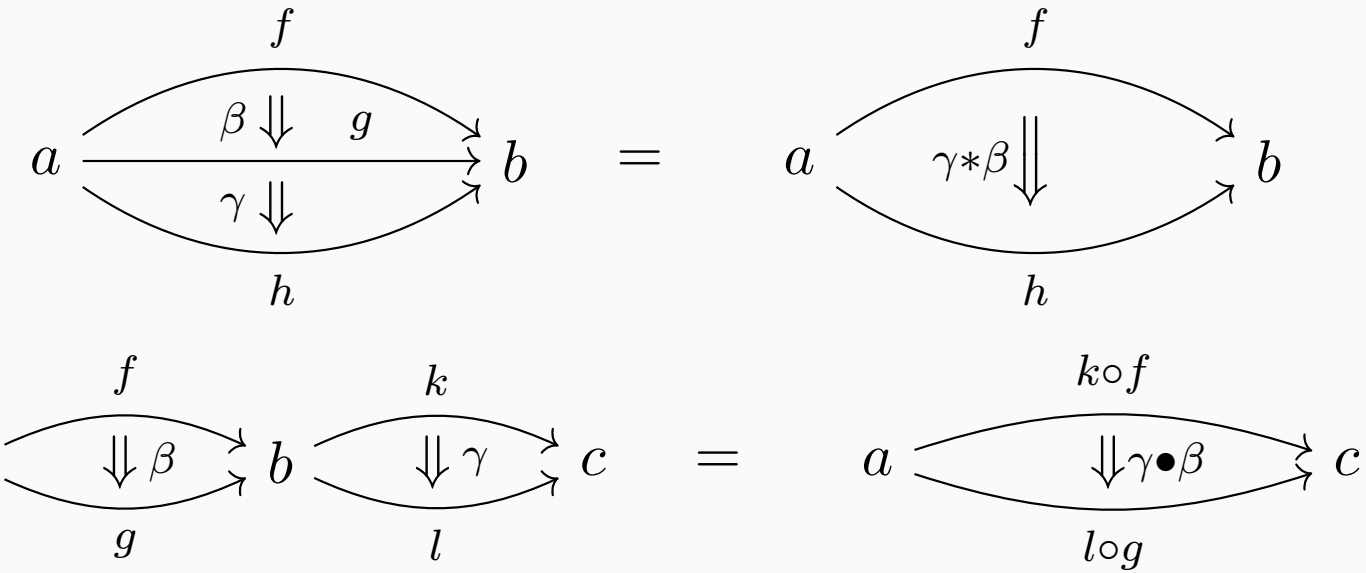


右 Kan リフト $f_{\ddagger}g = \langle l, \varepsilon \rangle$

notation

bicategory $\mathcal{B}$ の中において以下の記号を使う。

$\circ$: 1-morphism の合成　　$\bullet$: 水平合成　　$*$: 垂直合成



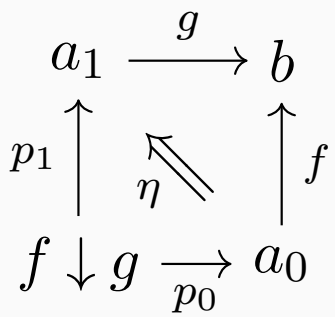
また $\gamma \bullet \mathrm{id}_f$ を単に $\gamma \bullet f$ と書き，$\mathrm{id}_k \bullet \beta$ を単に $k \bullet \beta$ と書く．

右から f を合成する関手を $- \bullet f \colon \mathcal{B}(b,x) \to \mathcal{B}(a,x)$ と書く．

左から f を合成する関手を $f \bullet - \colon \mathcal{B}(x,a) \to \mathcal{B}(x,b)$ と書く．

notation

$a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ のコンマ対象とは，図式



であって「普遍性」を満たすものである．(2_limit.pdf を参照)

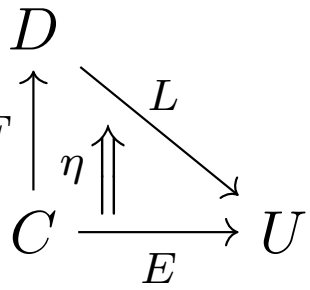
簡単のため、この講演では bicategory は常にコンマ対象を持つものとする．

圏 C から圏 D への profunctor とは関手 $C \to \widehat{D}$ のこと．

復習

復習 (圏論)

【定義】

図式 

において $\langle L, \eta \rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張とは，任意の $d \in D$ に対して合成

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{1} & \xrightarrow{d} & D & & \\ \uparrow & \swarrow_{F} & \uparrow & \overset{L}{\searrow} & \\ F\downarrow d & \longrightarrow & C & \xrightarrow[E]{\Uparrow \eta} & U \end{array}$$

が左 Kan 拡張になることである．

$\Longleftrightarrow$ 任意の $d \in D$，$u \in U$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_U(Ld, u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が成り立つ．(これについては先日 Youtube に動画 up 済)

復習 (圏論)

【定理】 (A)

各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張.

□

【定理】

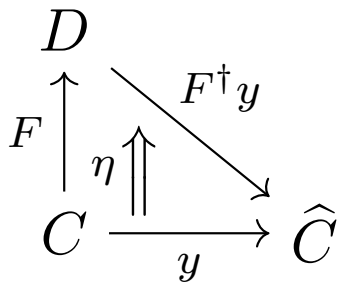
$F^\dagger y$ は各点左 Kan 拡張であり $F^\dagger y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ となる.
特に $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$.

□

【定理】 (B)

$\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張で F が忠実充満 $\Longrightarrow$ η は同型.

逆に $\langle F^\dagger y, \eta \rangle$ が各点左 Kan 拡張で η が同型 $\Longrightarrow$ F は忠実充満.



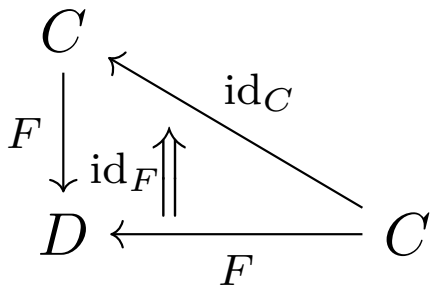
□

復習 (圏論)

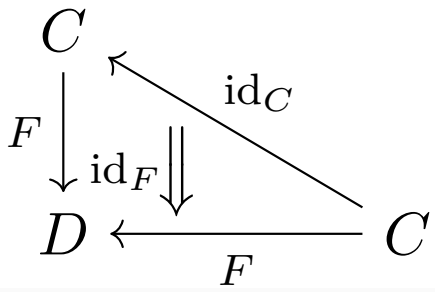
【命題】

関手 $F\colon C \to D$ が忠実充満

$\iff \langle \mathrm{id}_C, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の絶対左 Kan リフトになる.



$\iff \langle \mathrm{id}_C, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の絶対右 Kan リフトになる.



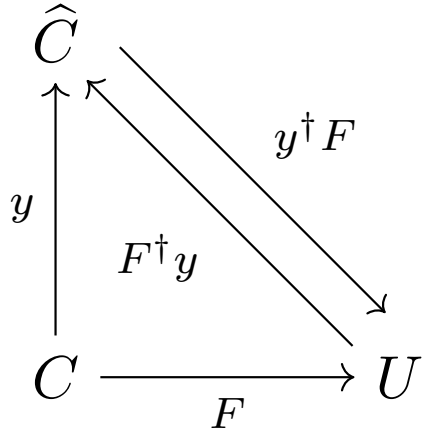
□

(これは PDF「明日使える? Kan リフトの話」を参照)

復習 (圏論)

【定理】 (普遍随伴)

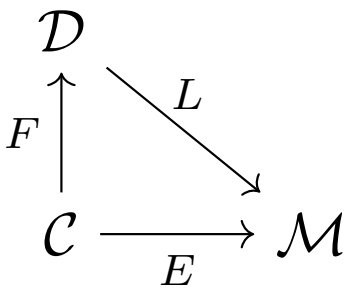
C, U を圏とする．$\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ とする．



1. $F\colon C \to U$ を関手とする．各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するならば $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{C} \to U$ である．
2. 逆に $L \dashv K\colon \widehat{C} \to U$ ならば，ある $F\colon C \to U$ が存在して $L \cong y^\dagger F$，$K \cong F^\dagger y$ と書ける． □

復習 (豊穣圏論)

【定義】

図式 

において L が F に沿った E の各点左 Kan 拡張とは，任意の $d \in \mathcal{D}$，$u \in \mathcal{M}$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Ld, u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F-, d), \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(E-, u))$$

が成り立つことである．

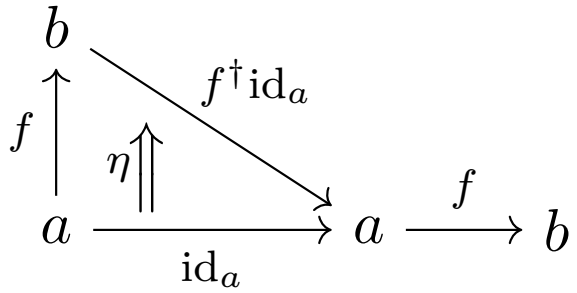
豊穣圏論においても圏論と同様の定理が成り立つ．
(第 12 回関西すうがく徒のつどい「#豊穣圏は射が取れないからクソ」を参照 https://www.youtube.com/watch?v=h06EtxSbcl8)

復習 (formal category theory)

【定理】

$f : a \to b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値．

1. f が右随伴を持つ．
2. 絶対左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger \mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在する．
3. 左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger \mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在し，f が $f^\dagger \mathrm{id}_a$ と交換する．



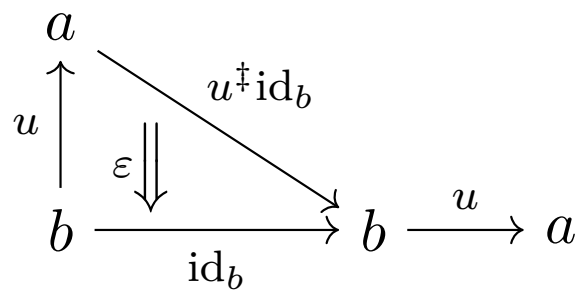
またこのとき $f \dashv f^\dagger \mathrm{id}_a$ であり η がその unit である． □

復習 (formal category theory)

【定理】

$u\colon b \to a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値．

1. u が左随伴を持つ．
2. 絶対右 Kan 拡張 $\langle u^{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在する．
3. 右 Kan 拡張 $\langle u^{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在し，u が $u^{\ddagger}\mathrm{id}_b$ と交換する．



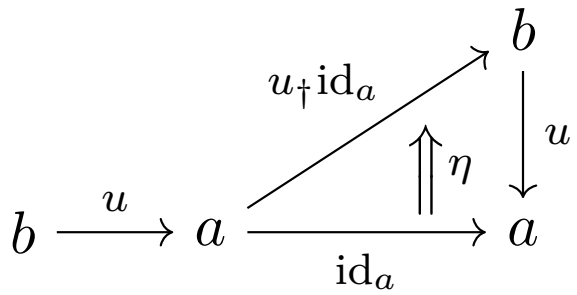
またこのとき $u^{\ddagger}\mathrm{id}_b \dashv u$ であり ε がその counit である． □

復習 (formal category theory)

【定理】

$u\colon b \to a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値．

1. u が左随伴を持つ．
2. 絶対左 Kan リフト $\langle u_\dagger \mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在する．
3. 左 Kan リフト $\langle u_\dagger \mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在し，u が $u_\dagger \mathrm{id}_a$ と交換する．



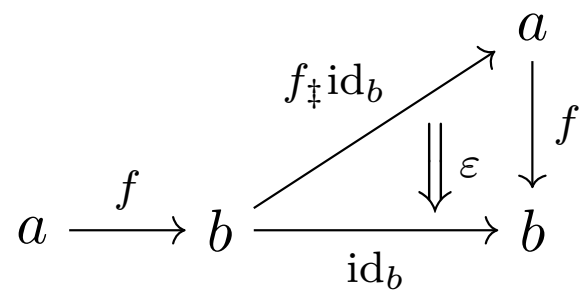
またこのとき $u_\dagger \mathrm{id}_a \dashv u$ であり η がその unit である． □

復習 (formal category theory)

【定理】

$f : a \to b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値．

1. f が右随伴を持つ．
2. 絶対右 Kan リフト $\langle f_\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在する．
3. 右 Kan リフト $\langle f_\ddagger \mathrm{id}_b, \varepsilon \rangle$ が存在し，f が $f_\ddagger \mathrm{id}_b$ と交換する．



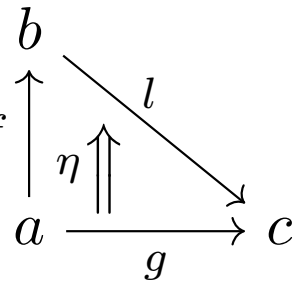
またこのとき $f \dashv f_\ddagger \mathrm{id}_b$ であり ε がその counit である． □

今日のモチベーション

今日のモチベーション

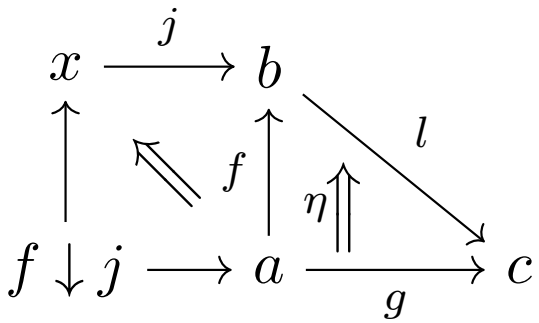
ここでは $\mathcal{B}$ は strict 2-category とする．

【定義】

$\mathcal{B}$ の図式 

において $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の c-各点

左 Kan 拡張とは，任意の 1-morphism $j\colon x \to b$ に対して，コンマ対象 $f \downarrow j$ を考えたとき合成



が左 Kan 拡張になることである．

今日のモチベーション

【命題】 (A)

c-各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である.

証明.

j として id を取ることで示せる. (結構難しい) □

今日のモチベーション

【定義】

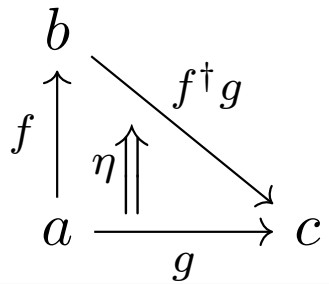
1-morphism $f\colon a \to b$ が忠実充満
$\iff$ 任意の x に対して $f \bullet -\colon \mathcal{B}(x,a) \to \mathcal{B}(x,b)$ が忠実充満関手

【命題】

1-morphism $f\colon a \to b$ が忠実充満
$\iff \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_f \rangle$ が f に沿った f の絶対左 Kan リフトになる．　□

【命題】 (B)

$f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ として c-各点左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在するとする．f が忠実充満ならば η は同型である．



□

今日のモチベーション

以上のようにコンマ対象を使って議論をすることはできるが，c-各点左 Kan 拡張の条件は一般には強すぎる (?) と考えられている．

【例】

Cat-豊穣圏 (即ち 2-category) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ を次の図式で定義する．

$$\mathcal{A} := \quad i \underset{l}{\overset{k}{\Downarrow}} j \ , \qquad \mathcal{B} := \quad a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b \ .$$

今日のモチベーション

【例】

Cat-関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ は次の 4 つである.

$$G_a\colon\ i \underset{l}{\overset{k}{\Downarrow}} j \quad \longmapsto \quad a \underset{\mathrm{id}_a}{\overset{\mathrm{id}_a}{\Downarrow \mathrm{id}}} a$$

$$G_b\colon\ i \underset{l}{\overset{k}{\Downarrow}} j \quad \longmapsto \quad b \underset{\mathrm{id}_b}{\overset{\mathrm{id}_b}{\Downarrow \mathrm{id}}} b$$

$$G_f\colon\ i \underset{l}{\overset{k}{\Downarrow}} j \quad \longmapsto \quad a \underset{f}{\overset{f}{\Downarrow \mathrm{id}}} b$$

$$G_g\colon\ i \underset{l}{\overset{k}{\Downarrow}} j \quad \longmapsto \quad a \underset{g}{\overset{g}{\Downarrow \mathrm{id}}} b$$

今日のモチベーション

【例】

これらの間の **Cat**-自然変換は，$G_a \Rightarrow G_f, G_g$ と $G_f, G_g \Rightarrow G_b$ の 4 つと，その合成である．$\mathbf{1} := \{*\}$ として **Cat**-関手 $F\colon \mathbf{1} \to \mathcal{A}$，$E\colon \mathbf{1} \to \mathcal{B}$ を $F(*) := i$，$E(*) := a$ で定める．このとき左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し $F^\dagger E = G_a$ である．また

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,i), \mathcal{B}(a,a)) &= \mathbf{Cat}(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = \mathbf{1} \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,i), \mathcal{B}(a,b)) &= \mathbf{Cat}(\mathbf{1}, \{f,g\}) = \{f,g\} \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,j), \mathcal{B}(a,a)) &= \mathbf{Cat}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \mathbf{1} \\
\mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,j), \mathcal{B}(a,b)) &= \mathbf{Cat}(\mathbf{2}, \{f,g\}) = \{f,g\}
\end{aligned}$$

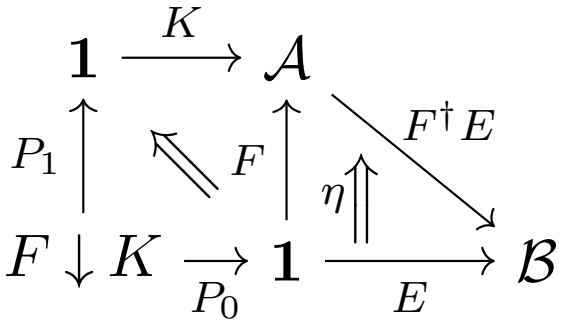
だから
$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{1}}(\mathcal{A}(F-,d), \mathcal{B}(E-,u)) &= \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i,d), \mathcal{B}(a,u)) \\
&= \mathcal{B}(a,u) = \mathcal{B}(F^\dagger E(d), u)
\end{aligned}$$

となり $F^\dagger E$ は (**Cat**-関手の意味で) 各点左 Kan 拡張である．

今日のモチベーション

【例】

一方，$K\colon \mathbf{1} \to \mathcal{A}$ を $K(*) := b$ で定める．



ここで $F \downarrow K$ は

- $\mathrm{Ob}(F \downarrow K) = \{k, l\}$．
- 1-morphism は $k \Rightarrow l$ と id のみ．
- 2-morphism は id のみ．

である．$S\colon \mathbf{1} \to \mathcal{B}$ を $S(*) := b$ で定める．**Cat**-自然変換 $\theta\colon E \circ P_0 \Rightarrow S \circ P_1$ を $\theta_k := f$，$\theta_l := g$ で定めれば，この図式が左 Kan 拡張でないことが分かる．即ち $F^\dagger E$ は c-各点左 Kan 拡張ではない． □

今日のモチベーション

【 まとめ 】

- コンマ対象を使うことで (ある程度) 一般の 2-category において各点 Kan 拡張を定義することができる
- そこそこ良い一般論が展開できる
- V-**Cat** における c-各点 Kan 拡張は V-豊穣圏論における各点 Kan 拡張と一致しない
  $\Longrightarrow$ c-各点 Kan 拡張は良い定義とは言いにくい

詳しい証明は: 2_kan_extension.pdf
c-各点 Kan 拡張に関する証明は↓を参考にした
Ross Street, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, LNM 420, Springer-Verlag (1974), 104–133

今日のモチベーション

この問題を解決するための方法はいくつか考案されている.
ここでは以下の 3 つを扱う.

1. 米田構造 (yoneda structure)
2. proarrow equipment
3. pseudo double category

米田構造

米田構造

ここでは $\mathcal{B}$ を strict 2-category とする．更に 1-morphism からなる集まり A で，次の条件を満たすものを取り固定する:

$$(f\colon a \to b,\ g\colon b \to c,\ g \in A) \Longrightarrow g \circ f \in A.$$

【定義】

- 1-morphism f が admissible $\Longleftrightarrow f \in A$.
- 対象 a が admissible $\Longleftrightarrow \mathrm{id}_a \in A$.

以下では，x が admissible であることを強調するために x のように赤字で表す場合がある．

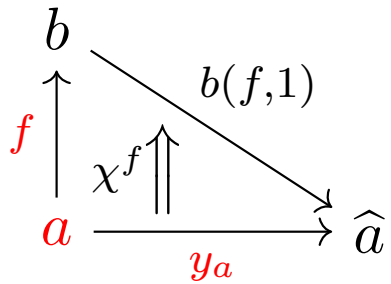
b が admissible で $f\colon a \to b$ ならば $f = \mathrm{id}_b \circ f$ も admissible である．

米田構造

【定義】

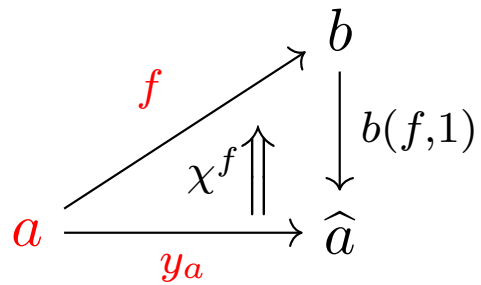
admissible な対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して，対象 $\widehat{a} \in \mathcal{B}$ と admissible な $y_a : a \to \widehat{a}$ が与えられ，以下の条件 1〜4 を満たすとき，これを米田構造という．

1. $f : a \to b$ を 1-morphism として，a, f が admissible とするとき，$f^\dagger y_a$ が存在する．$f^\dagger y_a = \langle b(f,1), \chi^f \rangle$ と書く．

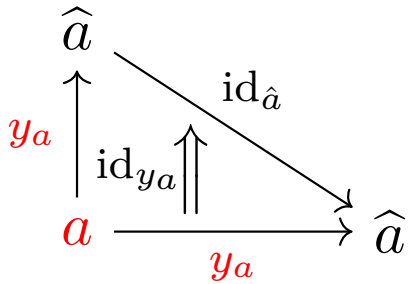


【定義】

2. 条件 1 で得られた $\langle b(f,1), \chi^f \rangle$ に対して $b(f,1)_\dagger y_a = \langle f, \chi^f \rangle$ であり，更にこれは絶対左 Kan リフトである．



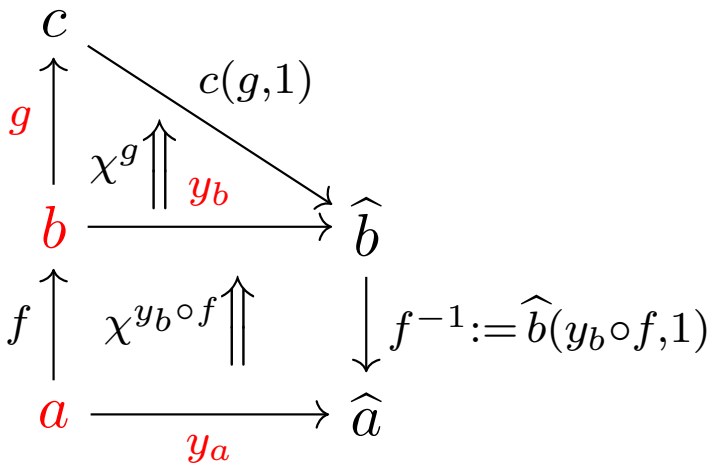
3. admissible な対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \mathrm{id}_{\hat{a}}, \mathrm{id}_{y_a} \rangle$ である．

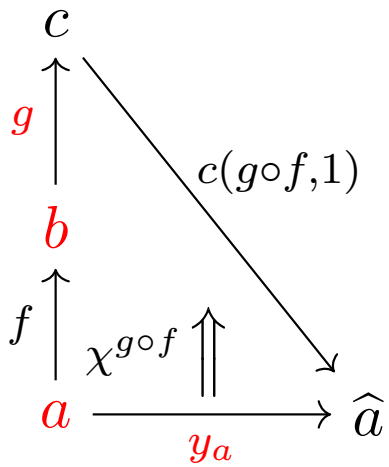


米田構造

【定義】

4. $f\colon a \to b$，$g\colon b \to c$ を 1-morphism として，a, b, g が admissible とする．y_b が admissible だから $y_b \circ f$ も admissible であり，よって $f^{-1} := \widehat{b}(y_b \circ f, 1)$ が定まる．このとき，次の左の図式が $(g \circ f)^{\dagger} y_a$ を定める．





(よって $c(g \circ f, 1) \cong f^{-1} \circ c(g, 1)$ である．)

米田構造

【例】

locally small とは限らない圏がなす strit 2-category において

- $F\colon C \to D$ が admissible $\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in C$，$d \in D$ に対して $\mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ が small
- admissible (即ち locally small) な圏 C に対して $\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$.
- $y_C\colon C \to \widehat{C}$ を米田埋込とする.

と定めれば米田構造となる．この場合 admissible な関手 $F\colon C \to D$ に対して関手 $D(F,1)\colon D \to \widehat{C}$ は $D(F,1)(d) = \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ で与えられる.
また $F^{-1}\colon \widehat{D} \to \widehat{C}$ は $F^{-1}(P) = P \circ F$ である. □

米田構造

【例】

V-豊穣圏がなす strit 2-category V-**Cat** についても同様に米田構造が入る. □

【例】

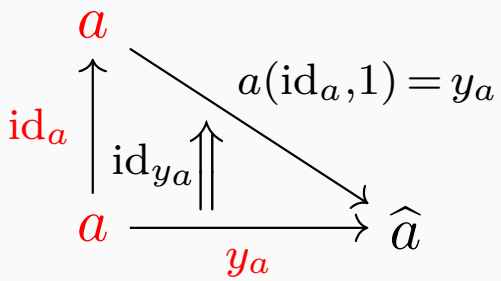
圏 C での internal category がなす strit 2-category $\mathbf{Cat}(C)$ についても米田構造が入る. □

【例】

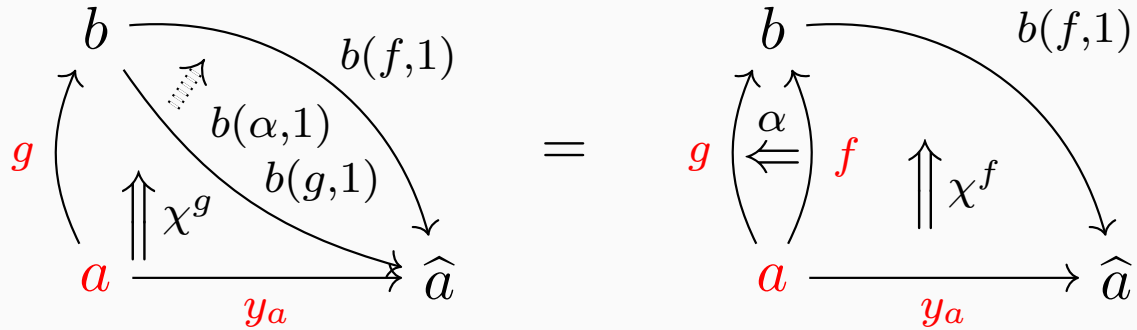
bicategory $\mathcal{A}$ に対して $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{A}^{\mathrm{op}}, \mathbf{Cat})$ に米田構造が入るという話があるらしい.
R. STREET, CONSPECTUS OF VARIABLE CATEGORIES, Journal of Pure and Applied Algebra 21 (1981) 307–338 □

米田構造

$\mathrm{id}_a^\dagger y_a \cong y_a$ だから $a(\mathrm{id}_a, 1) = y_a$，$\chi^{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_{y_a}$ としてよい．

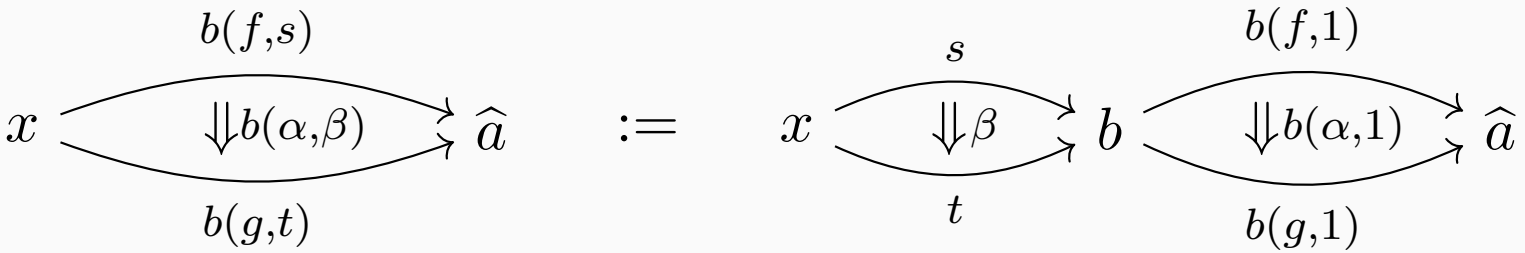


$f, g \colon a \to b$ で a, f, g を admissible とする．$\alpha \colon f \Rightarrow g$ とするとき左 Kan 拡張の普遍性から $b(\alpha, 1) \colon b(g, 1) \Rightarrow b(f, 1)$ が一意に定まる．



米田構造

任意の $\beta\colon s \Rightarrow t\colon x \to b$ に対して $b(f,s) := b(f,1) \circ s$，$b(\alpha,\beta) := b(\alpha,1) \bullet \beta$ と定義する．



このとき $b(f,\mathrm{id}_b) = b(f,1)$，$b(\alpha,\mathrm{id}_{\mathrm{id}_b}) = b(\alpha,1)$ だから，この記号に現れる「1」は id のことだと思ってよい．

また条件 3 より $\hat{a}(y_a,1) \cong \mathrm{id}_{\hat{a}}$ となるから $f\colon c \to \hat{a}$ に対して $\hat{a}(y_a,f) = \hat{a}(y_a,1) \circ f \cong f$ となり「米田の補題」が成り立つことが分かる．

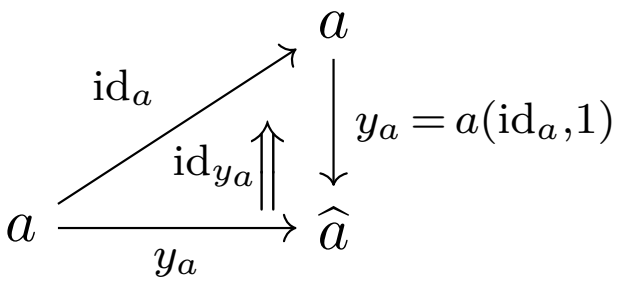
米田構造

【命題】

$a \in \mathcal{C}$ を admissible とするとき，$y_a \colon a \to \widehat{a}$ は忠実充満である．

証明.

$a(\mathrm{id}_a, 1) = y_a$，$\chi^{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_{y_a}$ だから，米田構造の条件 2 より
$(y_a)_! y_a = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{y_a} \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．

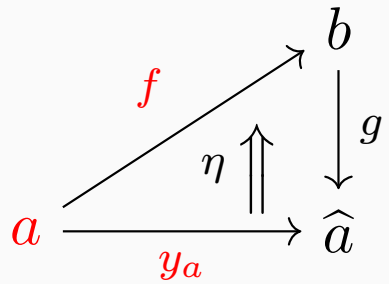


よって y_a は忠実充満である． □

米田構造

米田構造について，次の条件を「条件 5」と呼ぶことにする．

5. $a \in \mathcal{B}$ と $f : a \to b$ が admissible で，図式

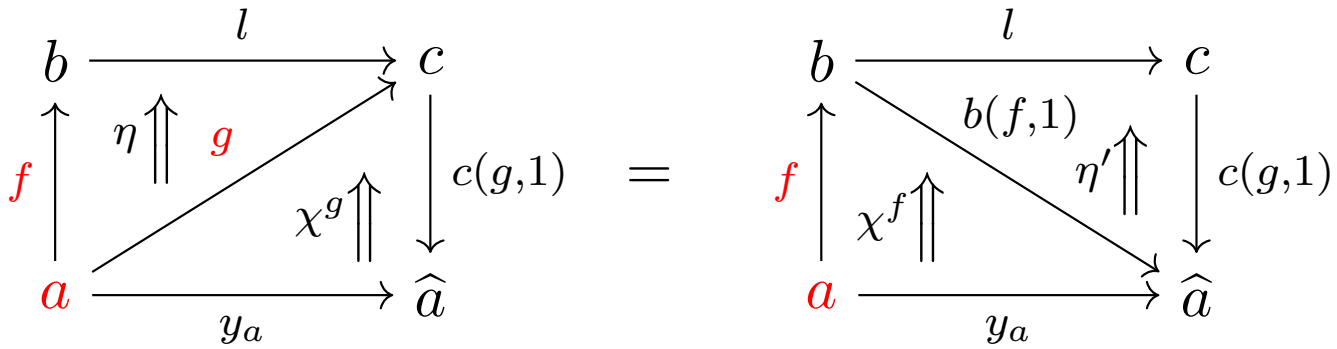


が絶対左 Kan リフトであるとする．このとき $\langle g, \eta \rangle$ は f に沿った y_a の c-各点左 Kan 拡張である．
(特に $\langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ は c-各点左 Kan 拡張である．)

米田構造

【命題】

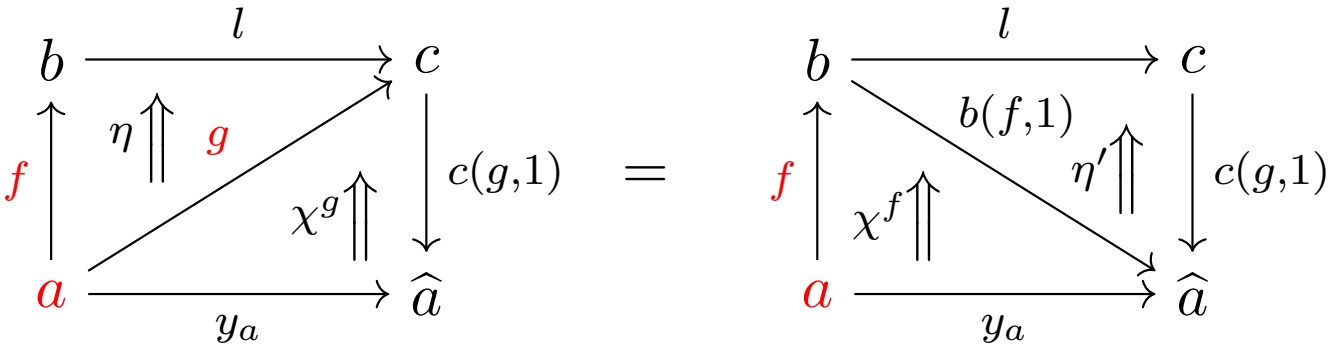
$f : a \to b$，$g : a \to c$，$l : b \to c$ で，a, f, g が admissible であるとする．等式



により，η と η' が一対一に対応する．(即ち，任意の η に対して，一意に η' が存在して等式が成立し，また任意の η' に対して一意に η が存在して等式が成り立つ．) ここではこのとき記号で $\eta \multimap \eta'$ と表すことにする．[続く]

米田構造

【命題】



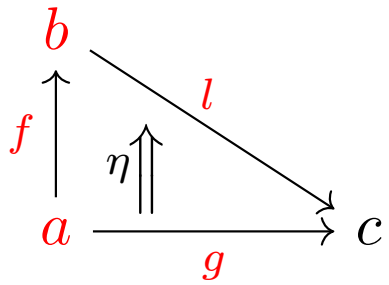
また $\eta \multimap \eta'$ のとき以下が成り立つ．

1. η' が同型ならば $l_!g = \langle f, \eta \rangle$ であり，これは絶対左 Kan リフトとなる．
2. 条件 5 が成り立つならば 1 の逆も成り立つ．即ち $\langle f, \eta \rangle$ が l に沿った g の絶対左 Kan リフトならば，η' は同型である．
3. $f^!g = \langle l, \eta \rangle \iff c(g,1)_!b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle$ □

米田構造

【定義】

次の図式で，$a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする．

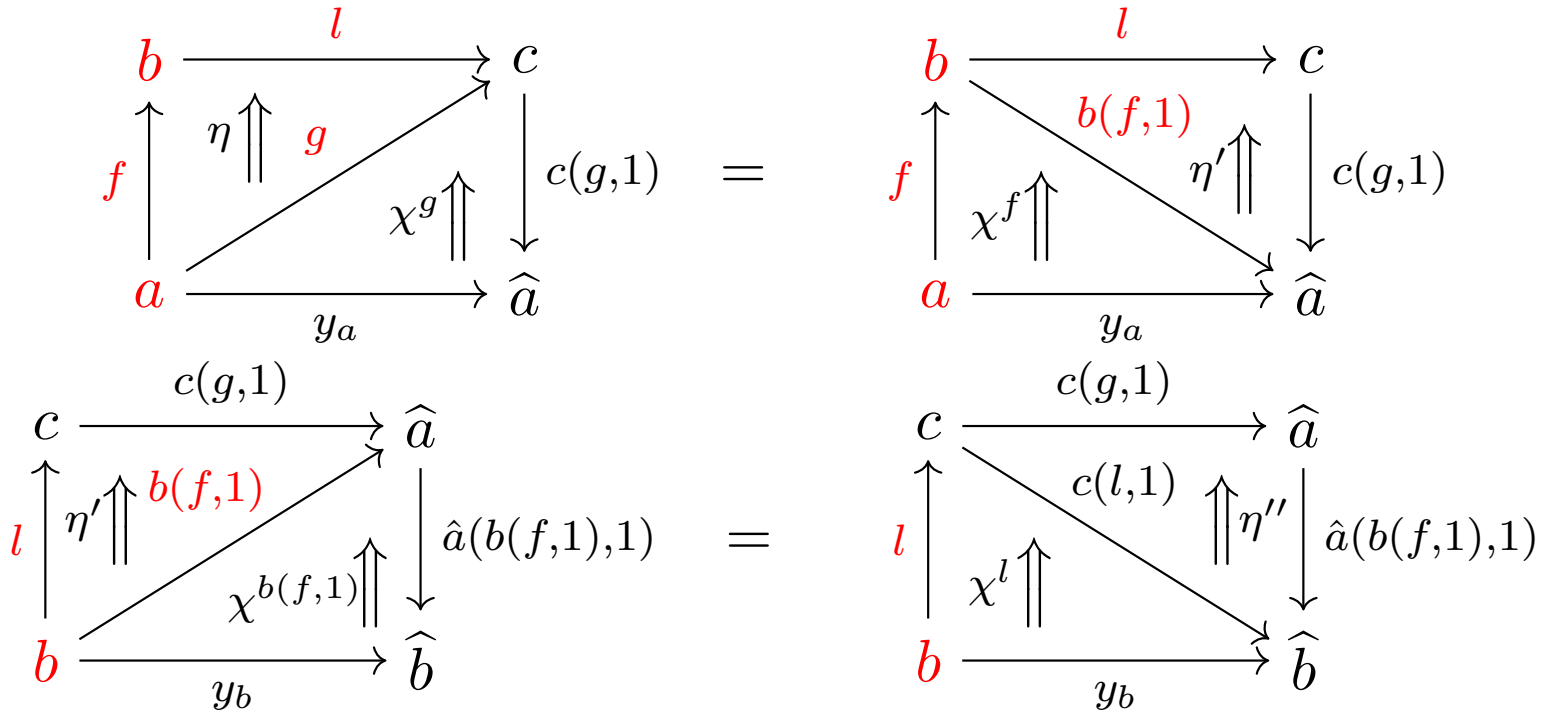


(これから $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の y-各点左 Kan 拡張であることを定義する．)

米田構造

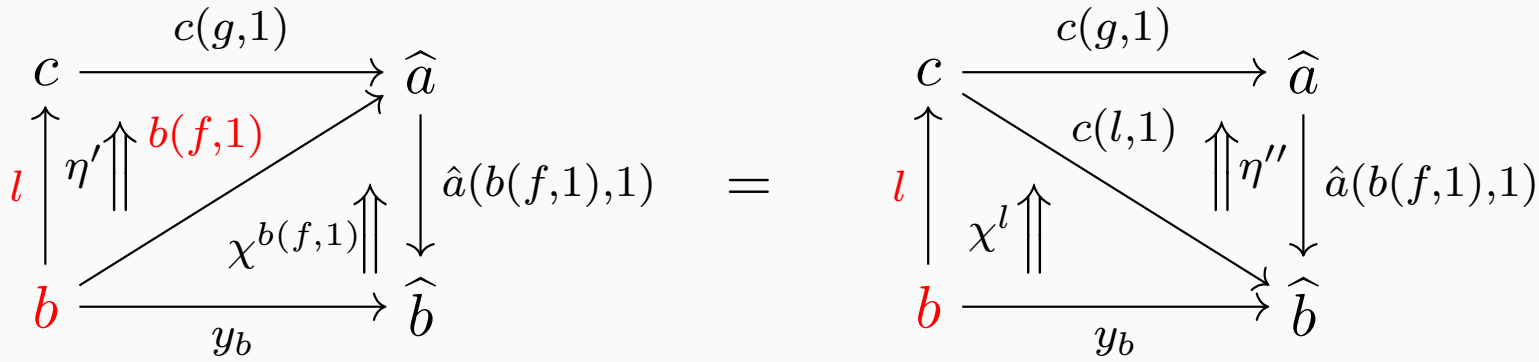
【定義】

$\eta \multimap \eta' \multimap \eta''$ となるように η', η'' を取る．



$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の y-各点左 Kan 拡張とは，η'' が同型になることをいう．

米田構造



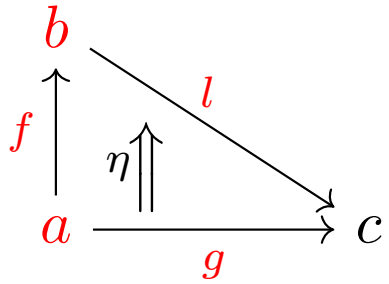
つまり y-各点 Kan 拡張とは

$c(l,1) \cong \widehat{a}(b(f,1),1) \circ c(g,1) = \widehat{a}(b(f,1), c(g,1))$ ということだから **Cat** の例で言えば

$\mathrm{Hom}(Ld, u) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(F-, d), \mathrm{Hom}(G-, u))$ である.

【命題】 (A)

次の図式で，$a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする．



$\langle l, \eta \rangle$ が y-各点左 Kan 拡張ならば左 Kan 拡張である．

証明.

$\eta \multimap \eta' \multimap \eta''$ とするとき

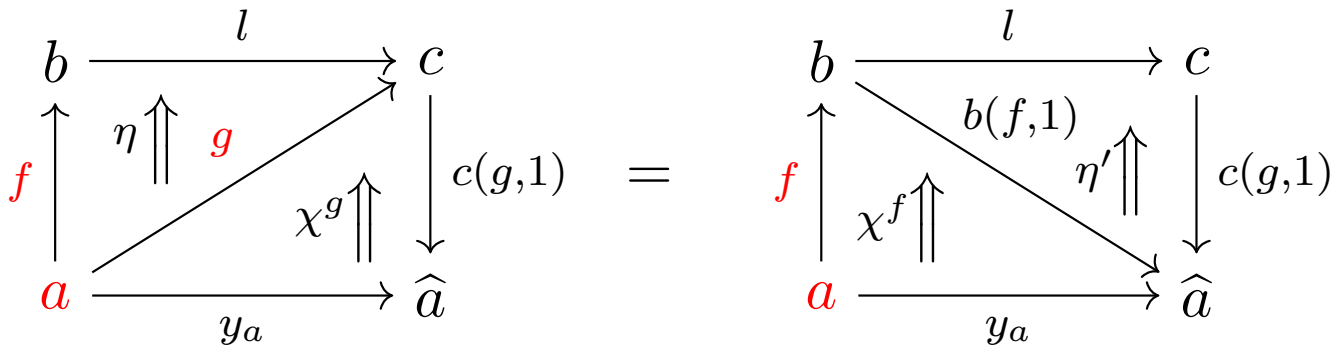
$$\eta'' \text{ が同型} \xRightarrow{(1)} \eta' \text{ が左 Kan リフト}$$

$$\xLeftrightarrow{(3)} \eta \text{ が左 Kan 拡張}$$

□

米田構造

【命題】 (再掲)



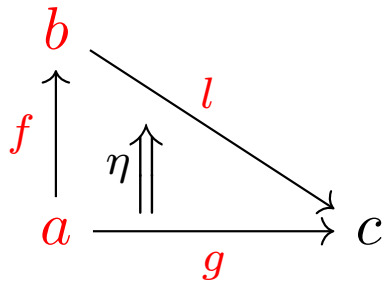
また $\eta \multimap \eta'$ のとき以下が成り立つ．

1. η' が同型ならば $l_\dagger g = \langle f, \eta \rangle$ であり，これは絶対左 Kan リフトとなる．
2. 条件 5 が成り立つならば 1 の逆も成り立つ．即ち $\langle f, \eta \rangle$ が l に沿った g の絶対左 Kan リフトならば，η' は同型である．
3. $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle \iff c(g,1)_\dagger b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle$ □

米田構造

【命題】

米田構造の条件 5 を仮定する．次の図式で，$a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする．

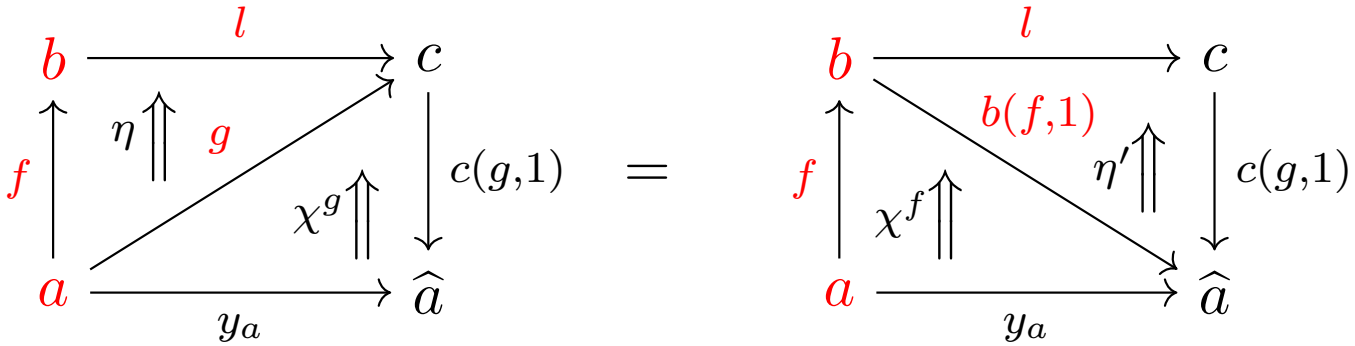


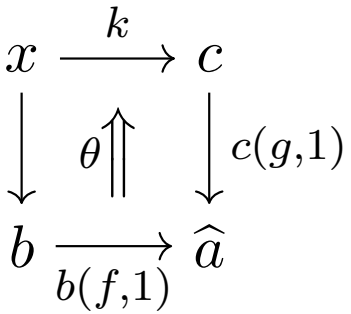
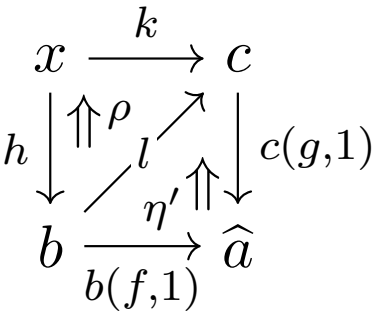
このとき $\langle l, \eta \rangle$ が c-各点左 Kan 拡張

$\Longleftrightarrow \langle l, \eta \rangle$ が y-各点左 Kan 拡張である．

証明.

(c-各点 $\Longrightarrow$ y-各点) さっきの (2) より，y-各点左 Kan 拡張であることを示すには等式

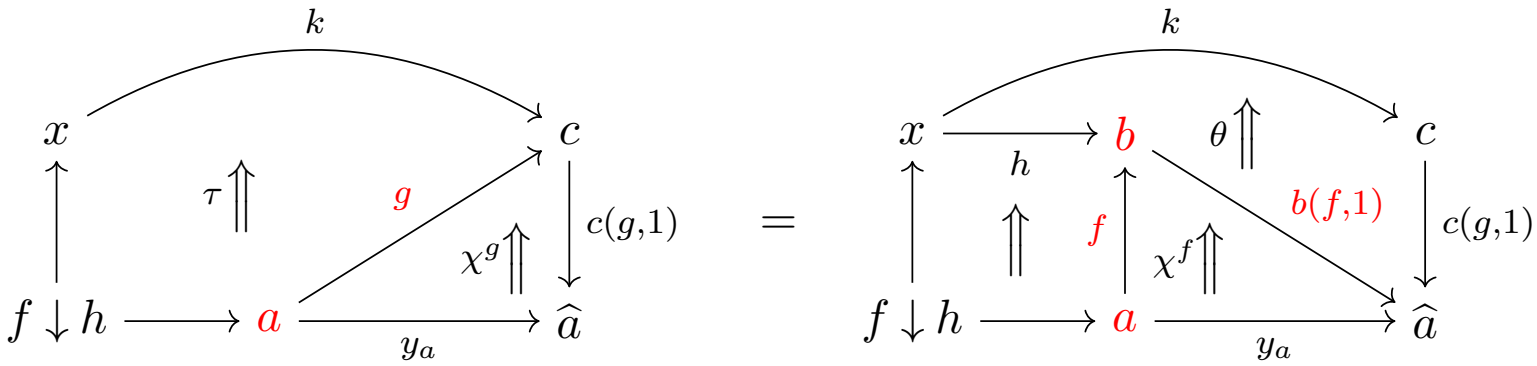


において η' が絶対左 Kan リフトであることを示せばよい．そのために任意の図式  を取る．$\theta =$  となる ρ の存在を示す．

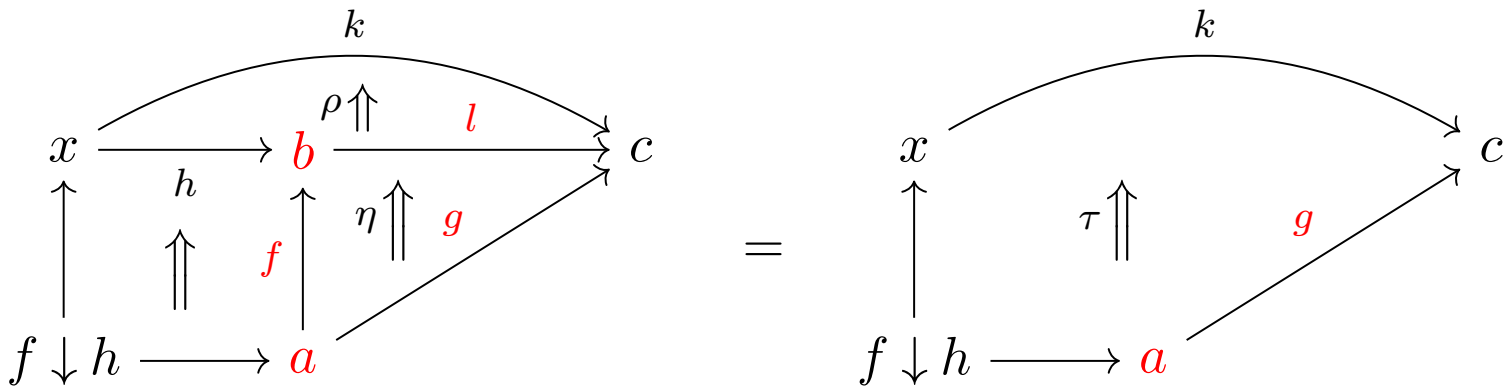
米田構造

証明.

コンマ対象 $f \downarrow h$ を考える．$\langle g, \chi^g \rangle$ が絶対左 Kan リフトより τ が存在して次が成立．

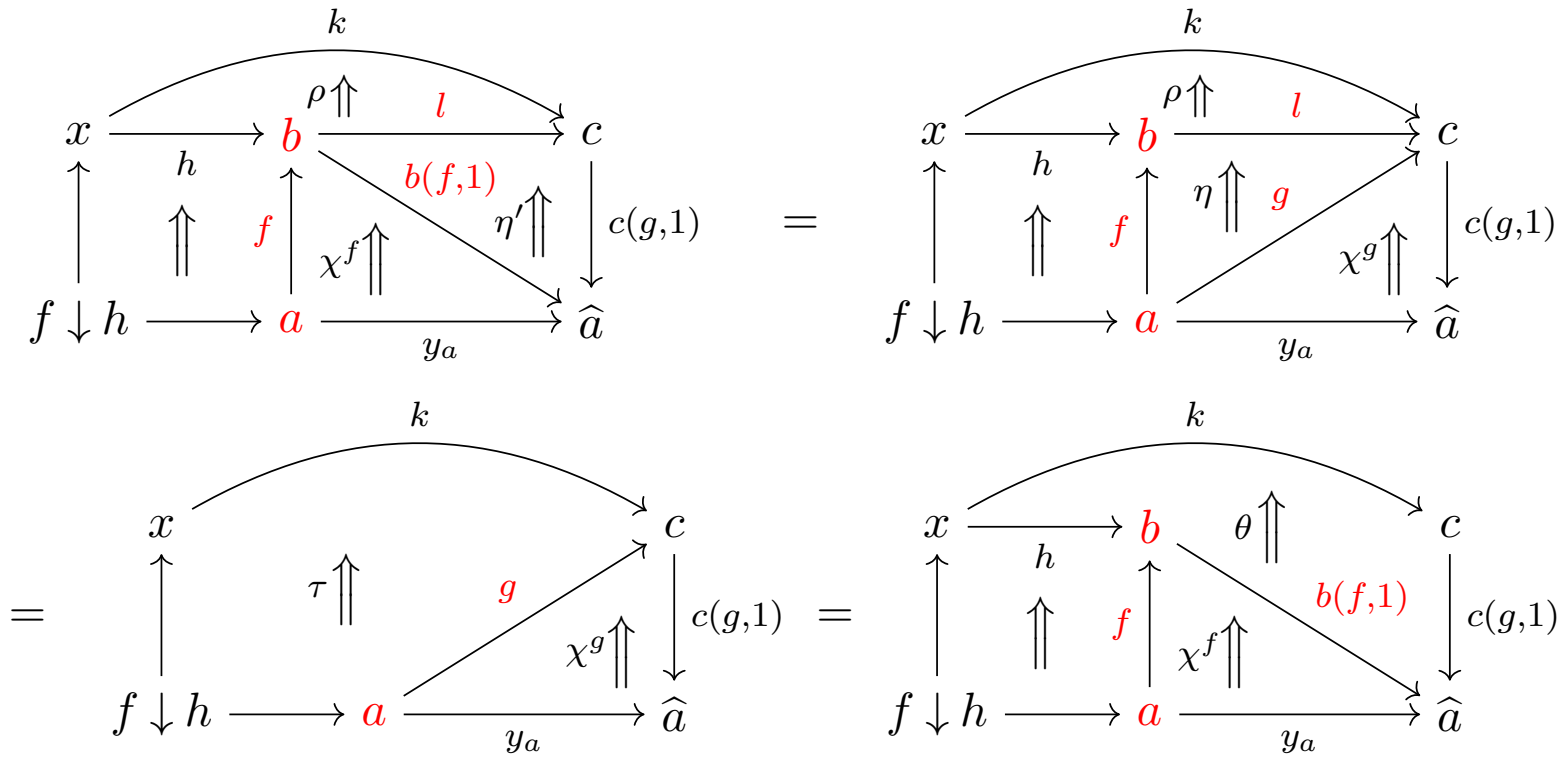


$\langle l, \eta \rangle$ が c-各点 Kan 拡張より ρ が存在して次が成立



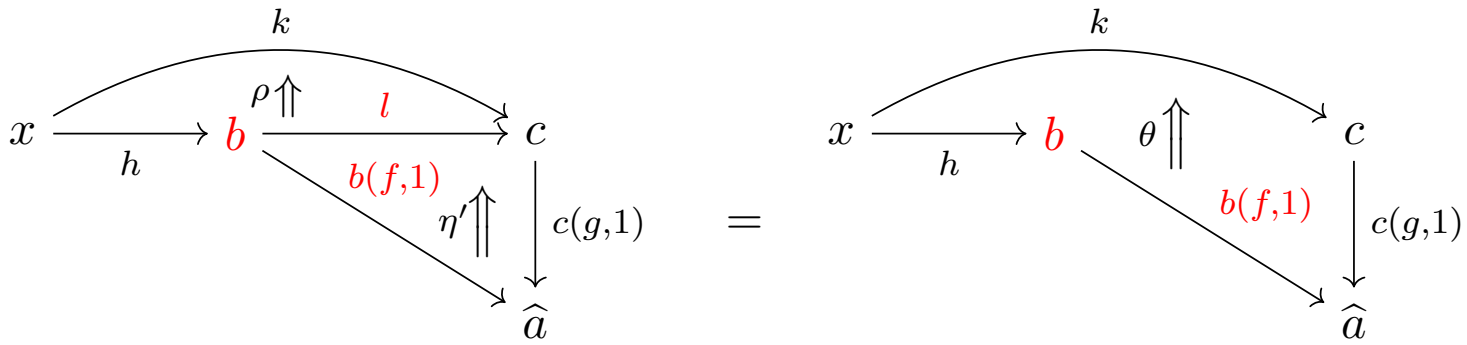
証明.

このとき



で $\langle b(f,1), \chi^f \rangle$ が c-各点 Kan 拡張 (条件 5) だから

証明.

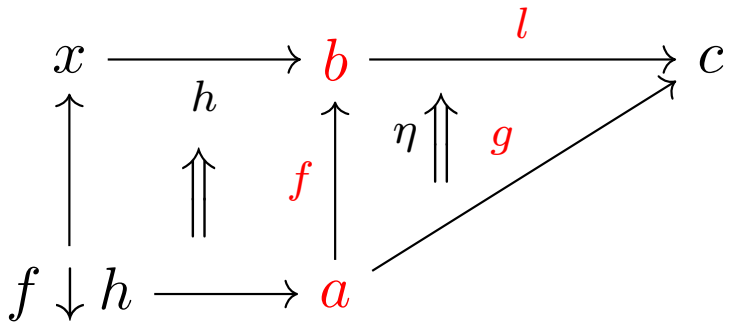


が分かる．この ρ の一意性も容易に分かるから，η' が絶対左 Kan リフトであることが分かった．

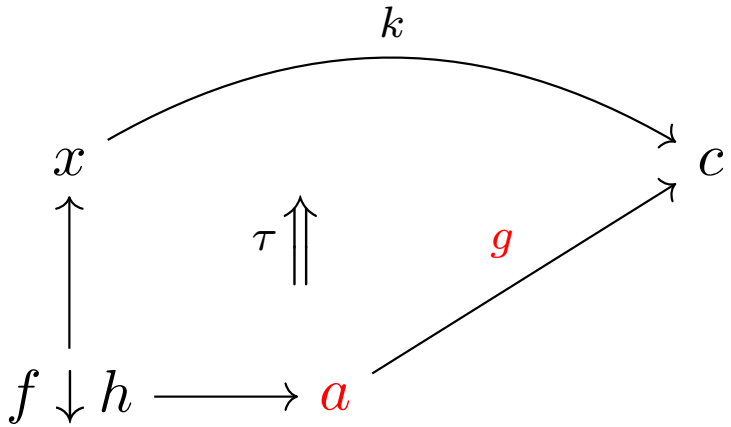
米田構造

証明.

(y-各点 $\Longrightarrow$ c-各点) 任意の $h\colon x \to b$ に対して



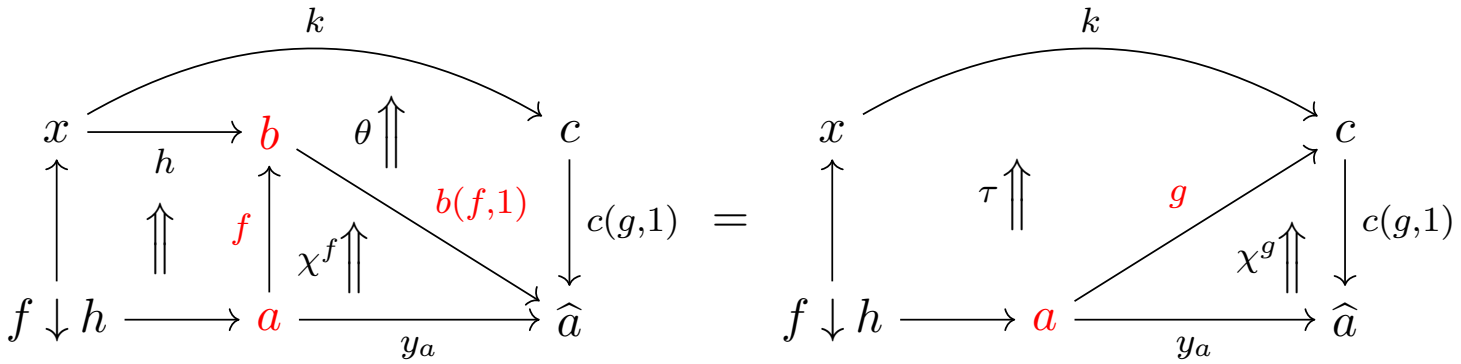
が左 Kan 拡張であることを示す．そのために任意の



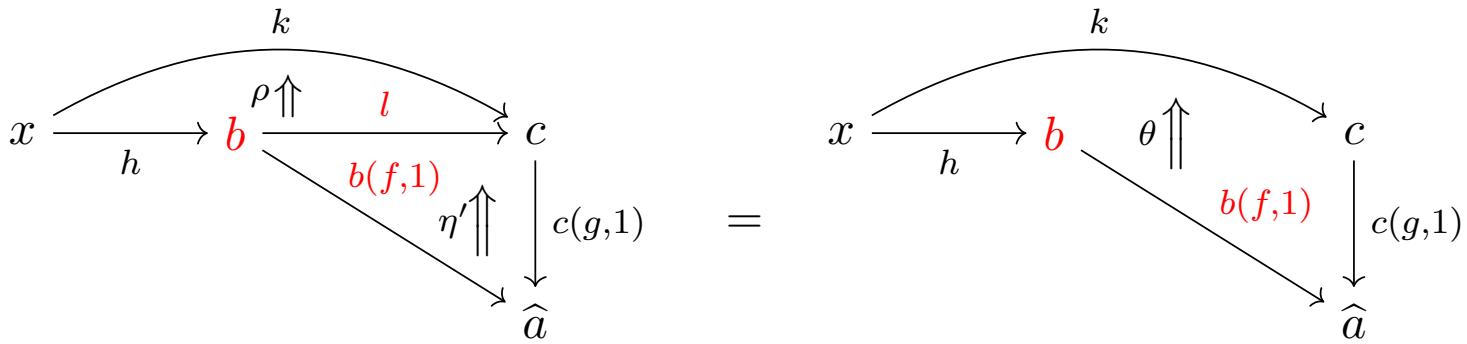
を取る．

証明.

$\langle b(f,1), \chi^f \rangle$ が c-各点 Kan 拡張 (条件 5) だから次の θ が存在.

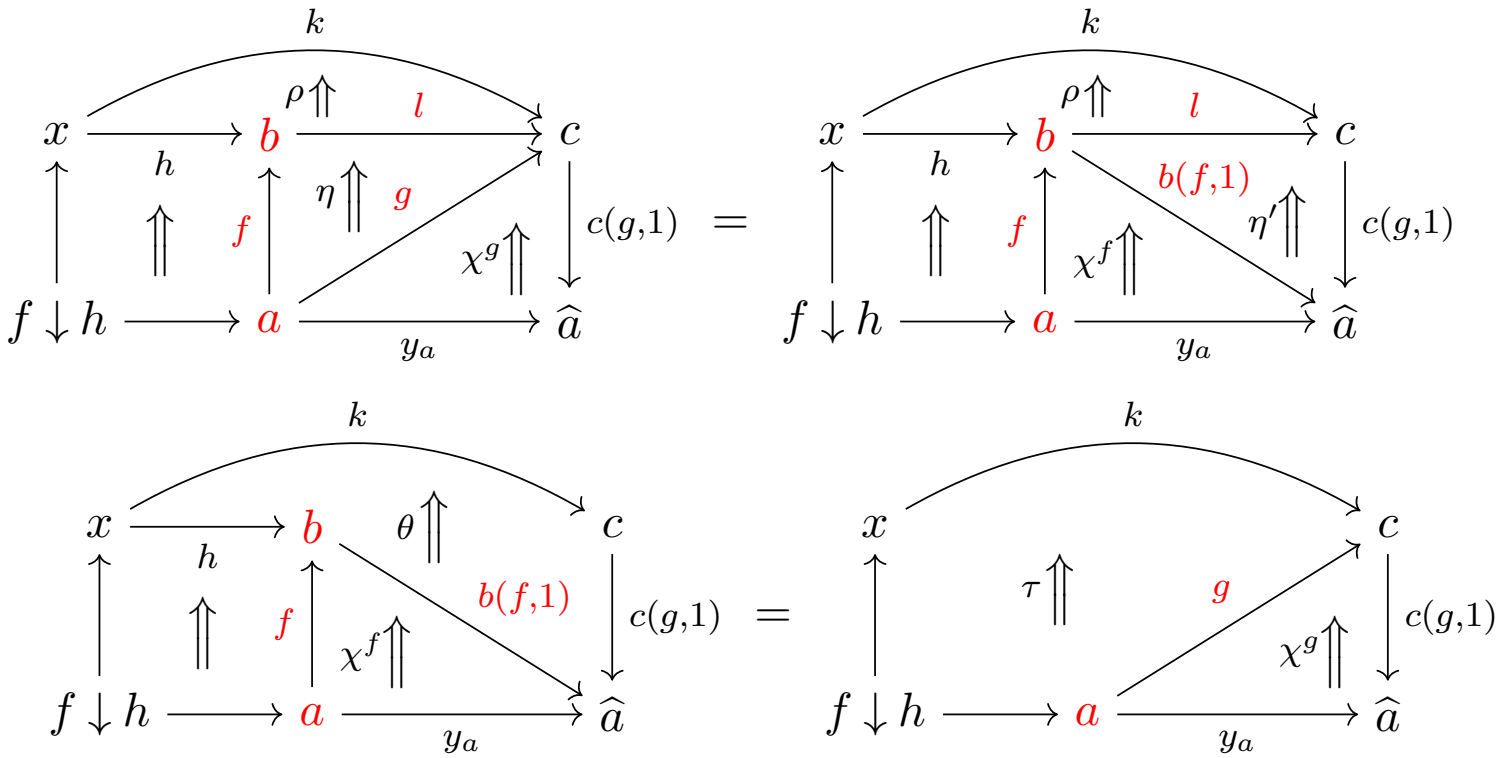


更に $\langle l, \eta' \rangle$ が絶対左 Kan リフトだから次の ρ が存在する.



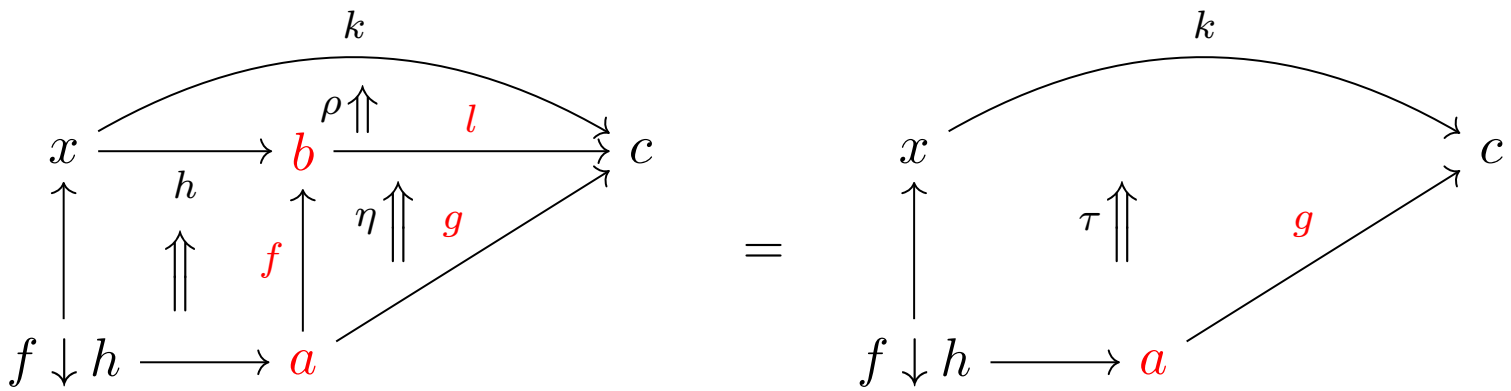
証明.

このとき



で $\langle g, \chi^g \rangle$ が絶対左 Kan リフトだから

証明.



である.

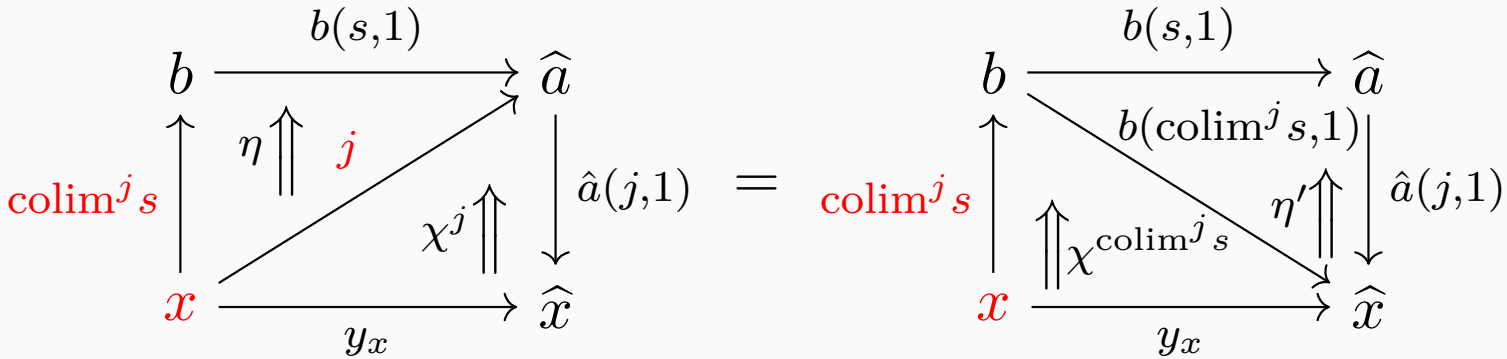
□

米田構造

【定義】

$s\colon a \to b$，$j\colon x \to \widehat{a}$ として a, x, s, j が admissible とする．s の j-weighted colimit $\mathrm{colim}^j s$ とは admissible な $\mathrm{colim}^j s\colon x \to b$ であって，同型 $\eta'\colon b(\mathrm{colim}^j s, 1) \Rightarrow \widehat{a}(j, b(s,1))$ が存在するものをいう (下記図式参照)．

$\mathrm{colim}^j s$ が存在するとして，$\eta \multimap \eta'$ とすれば
$b(s,1)_\dagger j = \langle \mathrm{colim}^j s, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．

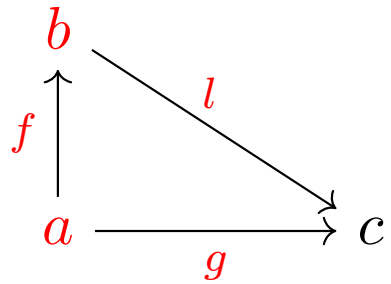


故に $\mathrm{colim}^j s$ は同型を除いて一意である．

米田構造

【命題】

下の図式で $a, b, g, l, b(f,1)$ が admissible のとき
l が f に沿った g の y-各点左 Kan 拡張 $\Longleftrightarrow l \cong \mathrm{colim}^{b(f,1)} g$



証明.

l が f に沿った g の y-各点左 Kan 拡張
$\Longleftrightarrow c(l,1) \cong \widehat{a}(b(f,1), c(g,1))$ だから明らか. □

米田構造

【定義】

$s\colon a \to b$，$j\colon x \to \widehat{a}$ で a, x, s, j が admissible として
$\mathrm{colim}^j s\colon x \to b$ が存在するとする．更に $f\colon b \to c$ として，$f \circ s$ と $f \circ \mathrm{colim}^j s$ が admissible とする．

このとき f が $\mathrm{colim}^j s$ と交換する
$\iff f \circ \mathrm{colim}^j s$ が $f \circ s$ の j-weighted colimit となる．
(つまり $f \circ \mathrm{colim}^j s \cong \mathrm{colim}^j (f \circ s)$)

【定義】

$f\colon b \to c$ が余連続
$\iff a$ が small ならば，上記の条件を満たす任意の $s\colon a \to b$，
$j\colon x \to \widehat{a}$ に対して f が $\mathrm{colim}^j s$ と交換する．

米田構造

【定理】

左随伴は weighted colimit と交換する. □

米田構造

【定義】

$a \in \mathcal{B}$ が small $\Longleftrightarrow$ a と $\widehat{a}$ が admissible.

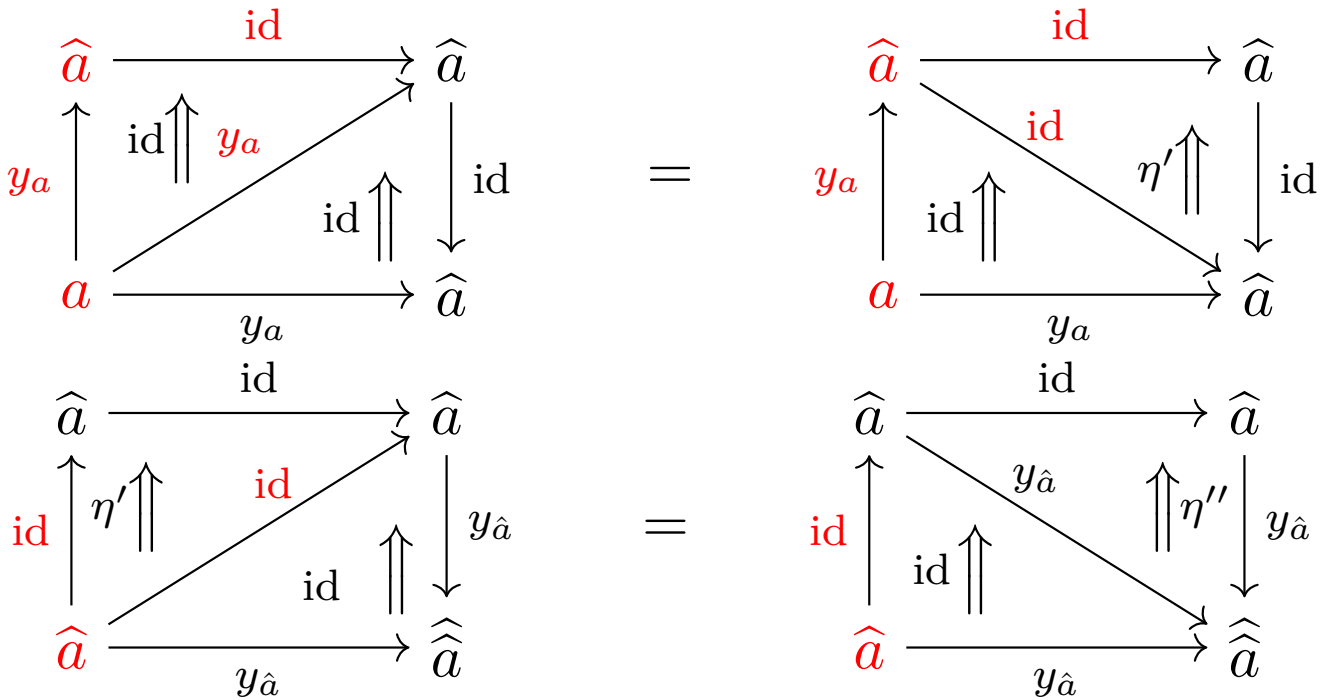
【定理】

small な a に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \mathrm{id}_{\hat{a}}, \mathrm{id}_{y_a} \rangle$ は y-各点左 Kan 拡張である．従って $\mathrm{colim}^{\mathrm{id}_{\hat{a}}} y_a = \mathrm{id}_{\hat{a}}$ である.

米田構造

証明.

$\mathrm{id}_{y_a} \multimap \eta' \multimap \eta''$ とする．



図式より明らかに $\eta' = \mathrm{id}$，$\eta'' = \mathrm{id}$ であり，故に y-各点左 Kan 拡張である． □

米田構造

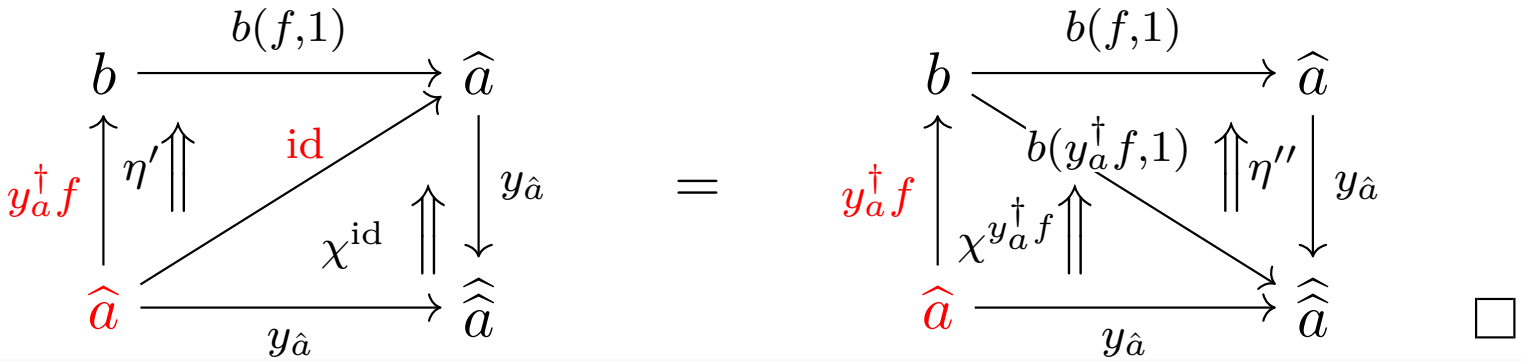
米田構造においても普遍随伴が成り立つ．

【定理】

$f : a \to b$ で a を small，f を admissible だとする．y-各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在するならば $y_a^\dagger f \dashv b(f,1) : \widehat{a} \to b$ である．

証明.

$y_a^\dagger f = \langle y_a^\dagger f, \eta \rangle$ で $\eta \multimap \eta' \multimap \eta''$ とする．η'' が同型だから η' は絶対左 Kan リフト．従って $y_a^\dagger f \dashv b(f,1)$ である．



□

米田構造

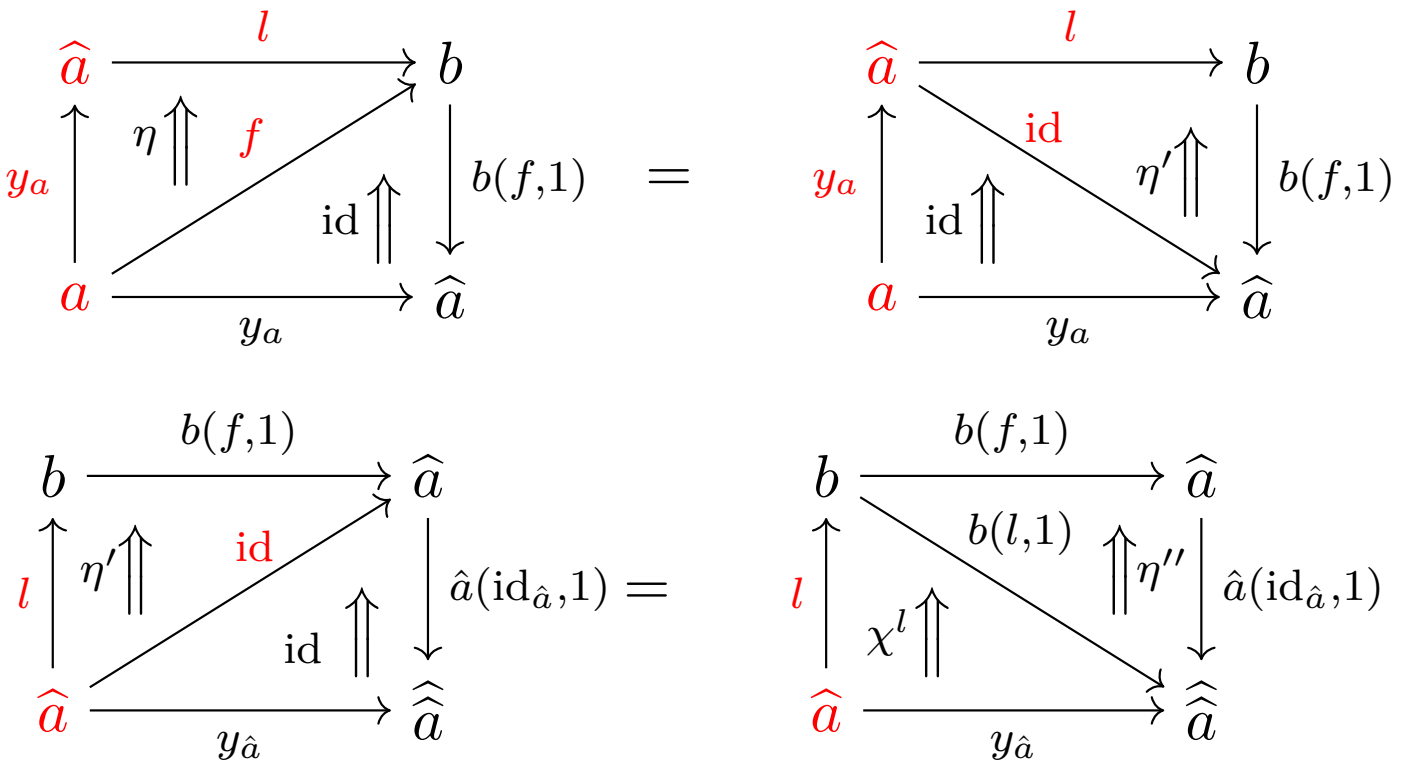
【定理】

a が small で $l\colon \widehat{a} \to b$ が admissible かつ余連続であるとする．このとき $f := l \circ y_a$ とすると y-各点 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在して $l \cong y_a^\dagger f$ となる．

証明.

l が $\mathrm{colim}^{\mathrm{id}_{\hat{a}}} y_a\ (= \mathrm{id}_{\hat{a}})$ と交換するから同型 $\eta''\colon (l, 1) \Rightarrow \widehat{a}(\mathrm{id}_{\hat{a}}, b(f, 1))$ が存在する．$\eta \multimap \eta' \multimap \eta''$ となるように η', η を取る．

証明.



よって y-各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f = \langle l, \eta \rangle$ を得る. □

米田構造

【定理】

a が small で $l \dashv r \colon \widehat{a} \to b$ かつ l が admissible ならば，ある $f \colon a \to b$ が存在して $l \cong y_a^\dagger f$，$r \cong b(f, 1)$ となる．

証明.

$l \dashv r \colon \widehat{a} \to b$ とすると l は余連続だから前定理より，$f := l \circ y_a$ とすれば $l \cong y_a^\dagger f \dashv b(f, 1)$ となる．右随伴の一意性から $r \cong b(f, 1)$ である． □

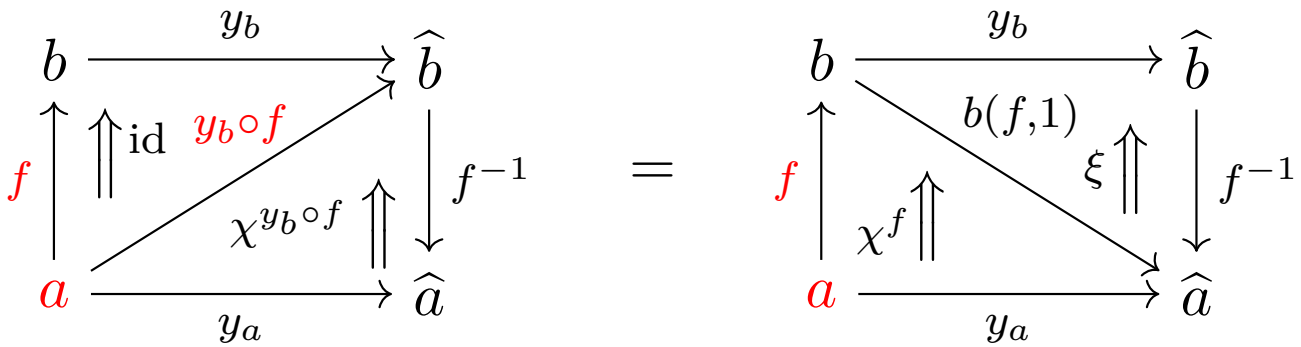
米田構造

【定理】

$f : a \to b$ で $a, b, b(f, 1)$ が admissible とするとき，$f^{-1} : \widehat{b} \to \widehat{a}$ は右随伴 $\forall f : \widehat{a} \to \widehat{b}$ を持つ．

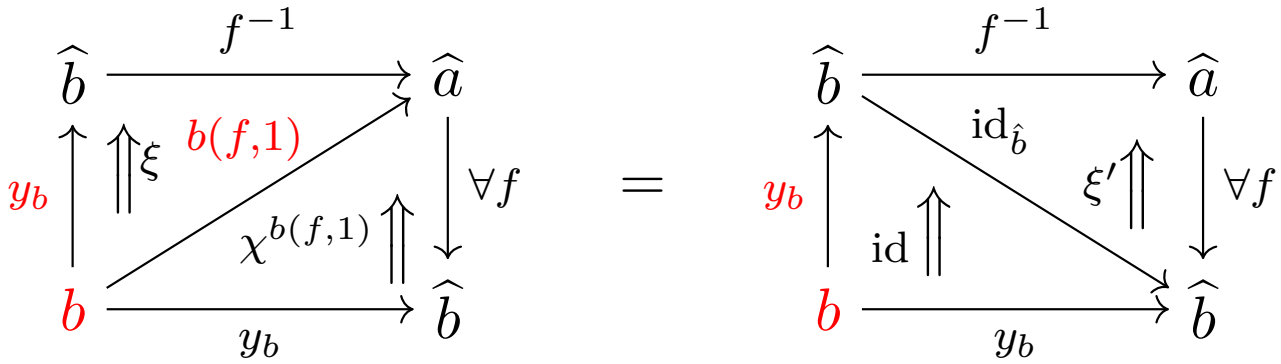
証明.

まず $\mathrm{id} \multimap \xi$ となるように取る．



証明.

$\forall f := \widehat{a}(b(f,1),1)$ とおき，$\xi \multimap \xi'$ となるように取る．



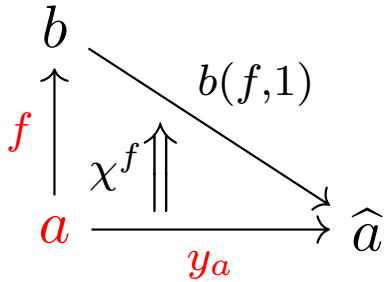
この ξ' が $f^{-1} \dashv \forall f$ の unit を与えることが分かる． □

注: この ξ, ξ' は後で使います

米田構造

【定義】

$f : a \to b$ で a, f が admissible とするとき f が y-忠実充満
$\iff \chi^f$ が同型.



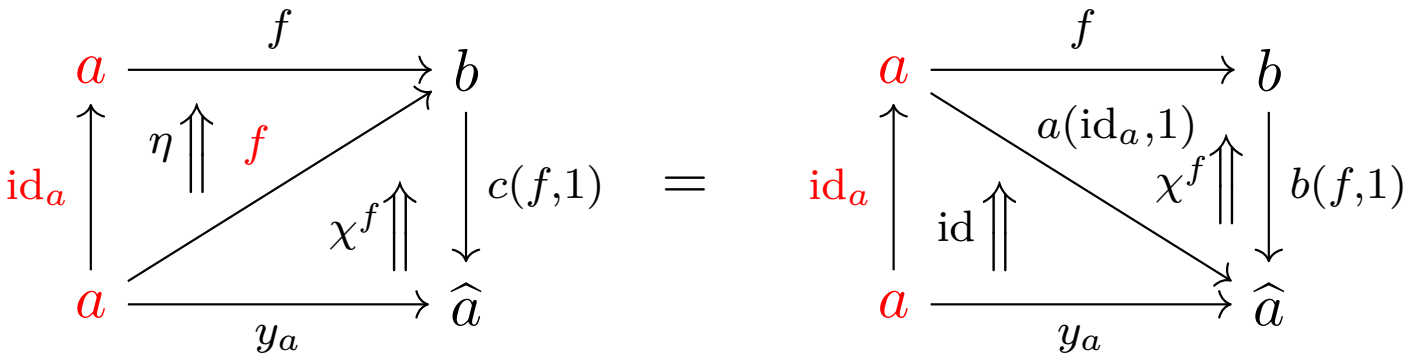
$a(\mathrm{id}_a, 1) = y_a$ だったから，f が y-忠実充満ならば
$a(\mathrm{id}_a, 1) \cong b(f, 1) \circ f = b(f, f)$ である.

米田構造

【命題】

$f : a \to b$ が y-忠実充満ならば忠実充満である．米田構造の条件 5 が成り立つならば逆も成り立つ．

証明.

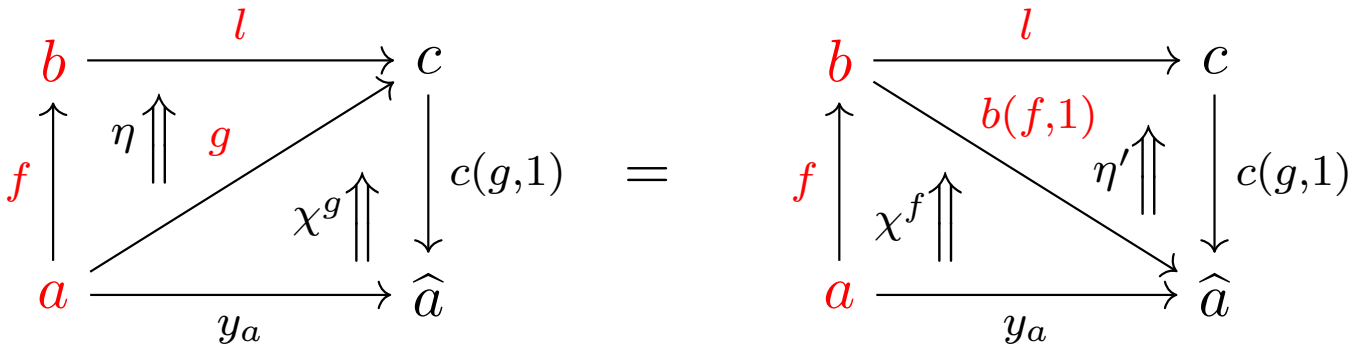


から分かる．□

【命題】 (B)

$\langle l, \eta \rangle$ が y-各点左 Kan 拡張で f が y-忠実充満ならば η は同型．

証明.



としたとき，$\langle l, \eta' \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．今 f が y-忠実充満だから χ^f は同型であり，よって右の四角全体は絶対左 Kan リフトとなる．一方で左の $\langle g, \chi^g \rangle$ は絶対左 Kan リフトであるから η が同型となる． □

米田構造

【 米田構造　まとめ 】

- 米田埋込を公理化したもの
- 普遍随伴も成り立つ最強の理論
- 忠実充満についても OK
- 定義が複雑すぎる (個人の感想です)

詳しい証明は: 2_kan_extension.pdf
米田構造の証明については以下を参考にした
R. Street and R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, 1978
2-topos に応用するという次のような論文もある
Mark Weber, Yoneda structures from 2-toposes, 2007

proarrow equipment

proarrow equipment

ここでは $\mathcal{B}$ を bicategory とする．(実用上は strict 2-category だが bicategory でもよい (?))

【定義】

$\mathcal{B}$ の proarrow equipment とは，bicategory $\mathcal{M}$ と pseudofunctor $(-)_* \colon \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{M}$ が与えられ，以下の条件を満たすことをいう．

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{M})$ であり $(-)_*$ は対象について恒等写像．
2. $(-)_*$ は局所忠実充満である．
3. 任意の 1-morphism $f \in \mathcal{B}$ に対して，$f_* \in \mathcal{M}$ は右随伴 f^* を持つ．今日は $f_* \dashv f^*$ の unit, counit を η_f, ε_f で表す．

$\mathcal{B}$ の 1-morphism を map，$\mathcal{M}$ の 1-morphism を proarrow と呼ぶ．

proarrow equipment

【例】

$(-)_* : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Prof}$ は $\mathbf{Cat}$ の proarrow equipment である.
(ここで関手 F に対して $F_* := y \circ F = \mathrm{Hom}(-, F\square)$ である.
$F^* = F^\dagger y = \mathrm{Hom}(F-, \square)$ となる.) $\square$

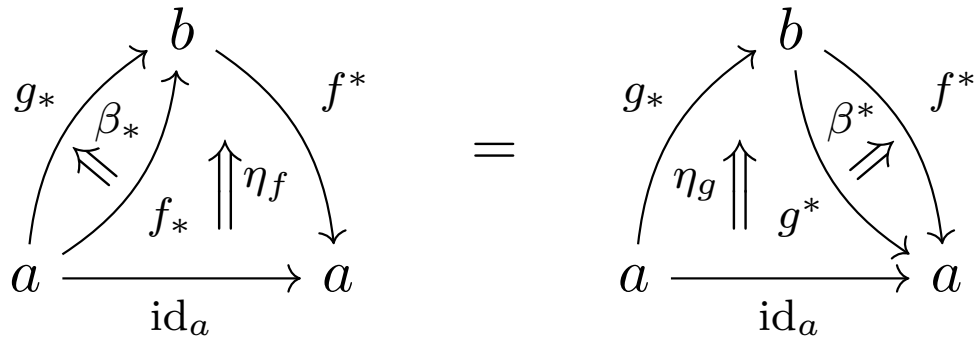
他の"例"については後で"わかる"

【命題】

$f \mapsto f^*$ は pseudofunctor $(-)^* \colon \mathcal{B}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$ を与える．

証明.

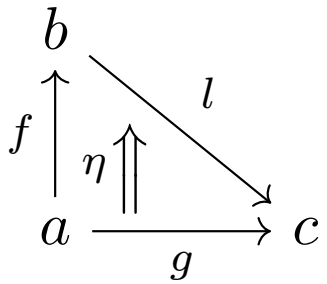
$\beta \colon f \Rightarrow g \colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ の 2-morphism とすると，次の等式を満たす $\beta^* \colon g^* \Rightarrow f^*$ が一意に存在する．



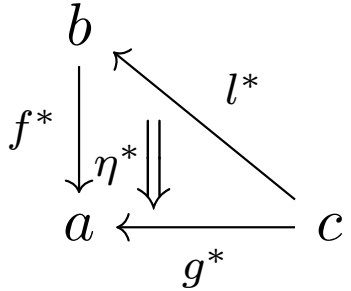
これにより $(-)^*$ が pseudofunctor になる． □

【定義】

$\mathcal{B}$ の図式



を考える．$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の p-各点左 Kan 拡張とは，
$(-)^*$ を適用して得られる $\mathcal{M}$ の図式



が右 Kan リフトを与えることをいう．

【定理】 (A)

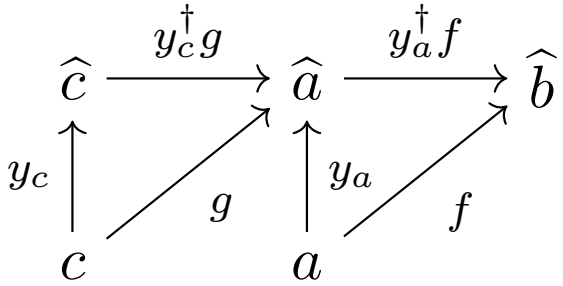
p-各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である. □

米田構造と proarrow equipment

【定義】

$\mathcal{K}$ を strict 2-category として $\mathcal{K}$ に米田構造が入っているとする．この米田構造が余完備であるとは，admissible な対象 $a \in \mathcal{K}$ と admissible な 1-morphism $f\colon a \to \widehat{b}$ に対して以下の条件が成り立つことをいう．

1. $y_a^\dagger f$ が存在する．
2. 随伴 $y_a^\dagger f \dashv \widehat{b}(f, 1)$ が成り立つ．
3. 任意の $g\colon c \to \widehat{a}$ に対して，$y_a^\dagger f$ は $y_c^\dagger g$ と交換する．



米田構造と proarrow equipment

※ 復習 (圏の場合)

1. $T\colon C \to C$ をモナドとする.
2. モナド T は Kleisli 圏 C_T を定める.
3. Kleisli 圏 C_T は随伴 $F^T \dashv G^T$ を定める.
4. ここで $F^T\colon C \to C_T$ である.

米田構造と proarrow equipment

strict 2-category $\mathcal{K}$ に余完備米田構造が入っているとする．
admissible な対象全体がなす充満部分 2-category を $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ として，また包含を与える strict 2-functor を $J\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ とする．

※ これから以下のような議論をする．

1. $P\colon \mathcal{A} \ni a \longmapsto \widehat{a} \in \mathcal{K}$ は J-relative pseudomonad になる．
2. J-relative pseudomonad P は Kleisli bicategory $\mathcal{K}\ell(P)$ を定める．
3. Kleisli bicategory $\mathcal{K}\ell(P)$ は J-relative pseudoadjoint $F^P \ {}_J\dashv G^P$ を定める．
4. $F^P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}\ell(P)$ は proarrow equipment である．

以下では今回の場合に限った記述をする．

【命題】

以下のように定めると pseudofunctor $P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}$ となる.

- $a \in \mathcal{A}$ に対して $Pa := \widehat{a}$.
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して関手 $P\colon \mathcal{A}(a,b) \to \mathcal{K}(\widehat{a}, \widehat{b})$ を次の合成で定める.

$$\mathcal{A}(a,b) \xrightarrow{y_b \circ -} \mathcal{K}(a, \widehat{b}) \xrightarrow{y_a^\dagger} \mathcal{K}(\widehat{a}, \widehat{b})$$

$$\begin{array}{ccc} \widehat{a} & \xrightarrow{Pf = y_a^\dagger(y_b \circ f)} & \widehat{b} \\ {\scriptstyle y_a}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle y_b} \\ a & \xrightarrow[f]{} & b \end{array}$$

□

米田構造と proarrow equipment

Kleisli bicategory $\mathcal{K}\ell(P)$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{K}\ell(P)) := \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$.
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $\mathcal{K}\ell(P)(a,b) := \mathcal{K}(a, \widehat{b})$.
- $a, b, c \in \mathcal{A}$ に対して関手
  $M^{abc} \colon \mathcal{K}\ell(P)(b,c) \times \mathcal{K}\ell(P)(a,b) \to \mathcal{K}\ell(P)(a,c)$ を合成

$$\mathcal{K}(b, \widehat{c}) \times \mathcal{K}(a, \widehat{b}) \xrightarrow{y_b^\dagger \times \mathrm{id}} \mathcal{K}(\widehat{b}, \widehat{c}) \times \mathcal{K}(a, \widehat{b}) \xrightarrow{\text{合成}} \mathcal{K}(a, \widehat{c})$$

  で定義する.

- $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathrm{id}_a := y_a \colon a \to \widehat{a}$ とする.

と定義する. (これは名前の通り bicategory になる)

米田構造と proarrow equipment

pseudofunctor $F^P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}\ell(P)$ が，$a \in \mathcal{A}$ に対して

- $a, \in \mathcal{A}$ に対して $F^P(a) := a \in \mathcal{K}\ell(P)$.
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $F^P\colon \mathcal{A}(a,b) \to \mathcal{K}\ell(P)(a,b)$ を

$$\mathcal{A}(a,b) \xrightarrow{\subset} \mathcal{K}(a,b) \xrightarrow{y_b \circ -} \mathcal{K}(a,\widehat{b}) = \mathcal{K}\ell(P)(a,b)$$

により定めることができる．このとき

【定理】

$F^P\colon \mathcal{A} \to \mathcal{K}\ell(P)$ は proarrow equipment である．

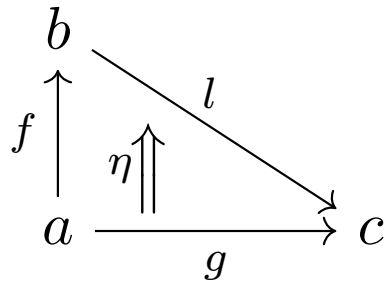
証明.

対象について $F^P = \mathrm{id}$ であり，先ほど示した米田構造の性質より $F^P = (y_b \circ -)$ は忠実充満関手である．また $F^P(f)$ は右随伴 $b(f,1)$ を持つ． □

米田構造と proarrow equipment

【定理】

$\mathcal{K}$ に余完備米田構造が入っているとして，既に述べた通り proarrow equipment を得る．このとき $\mathcal{A}$ の図式

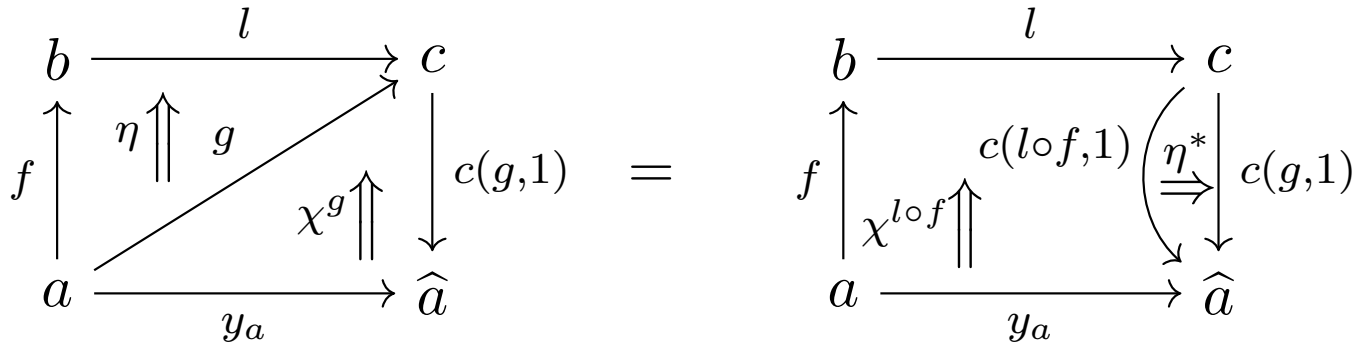


が y-各点左 Kan 拡張であることと p-各点 Kan 拡張であることは同値である．

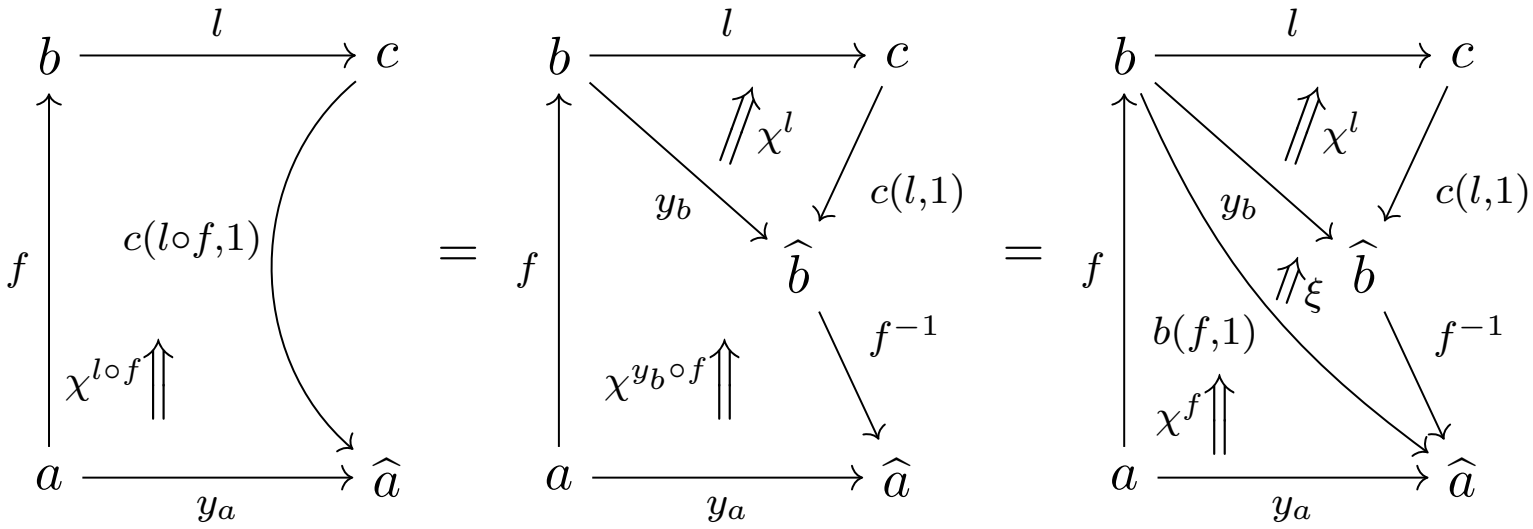
※ 先の構成により，この proarrow equipment においては $f_* = y_b \circ f$，$f^* = b(f, 1)$ である．

証明.

$\eta \multimap \eta' \multimap \eta''$ とする．$\eta^* = c(\eta, 1)$ の定義は次の図式．

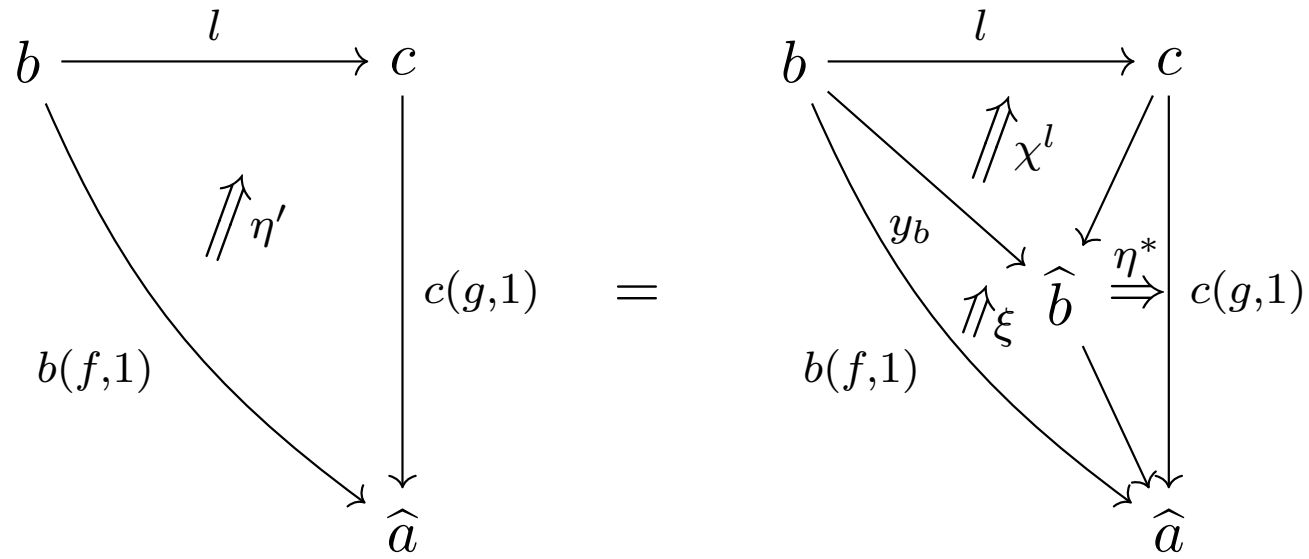


ここで次が成り立つ．



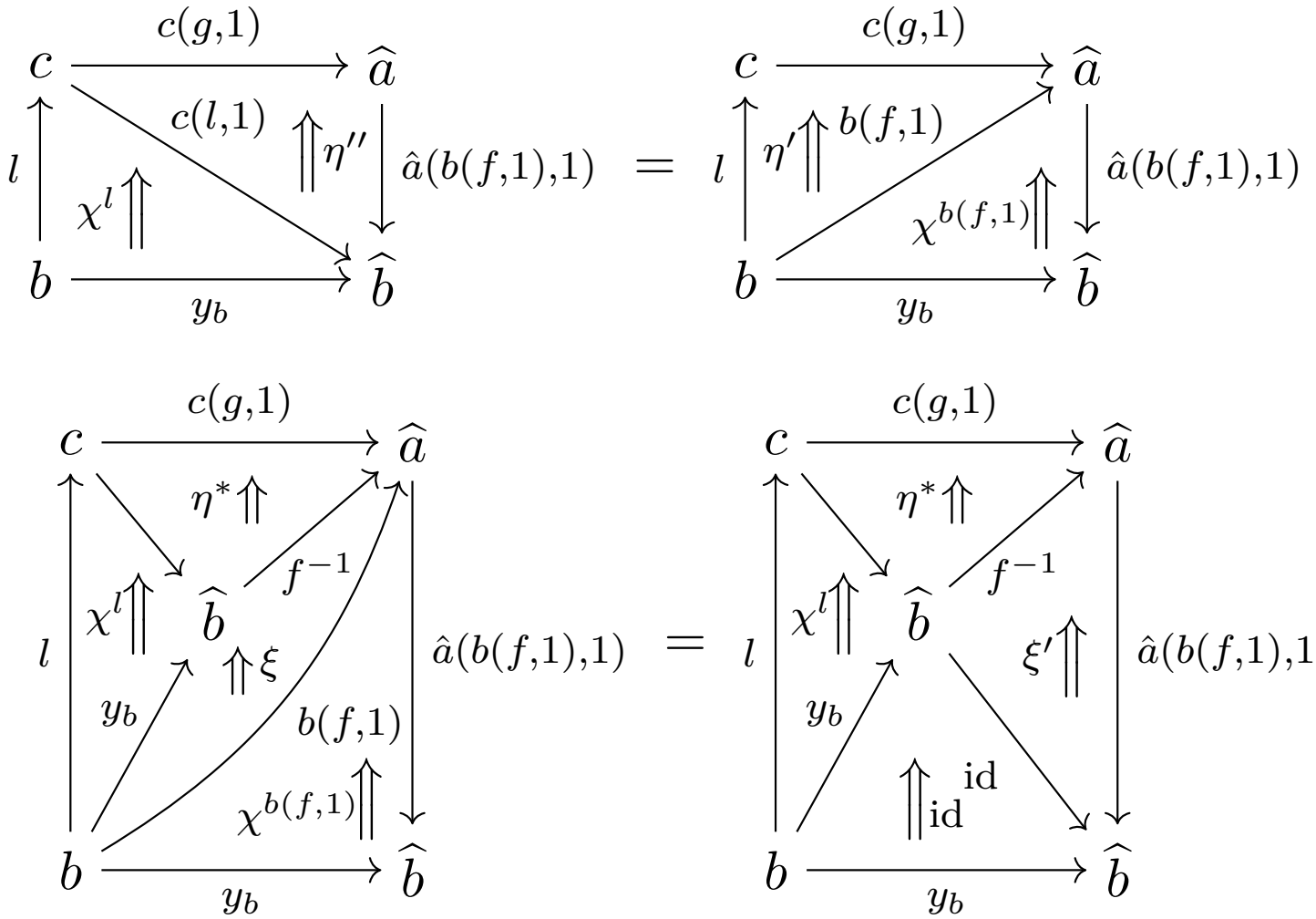
証明.

$\langle b(f,1), \chi^f \rangle$ の普遍性により



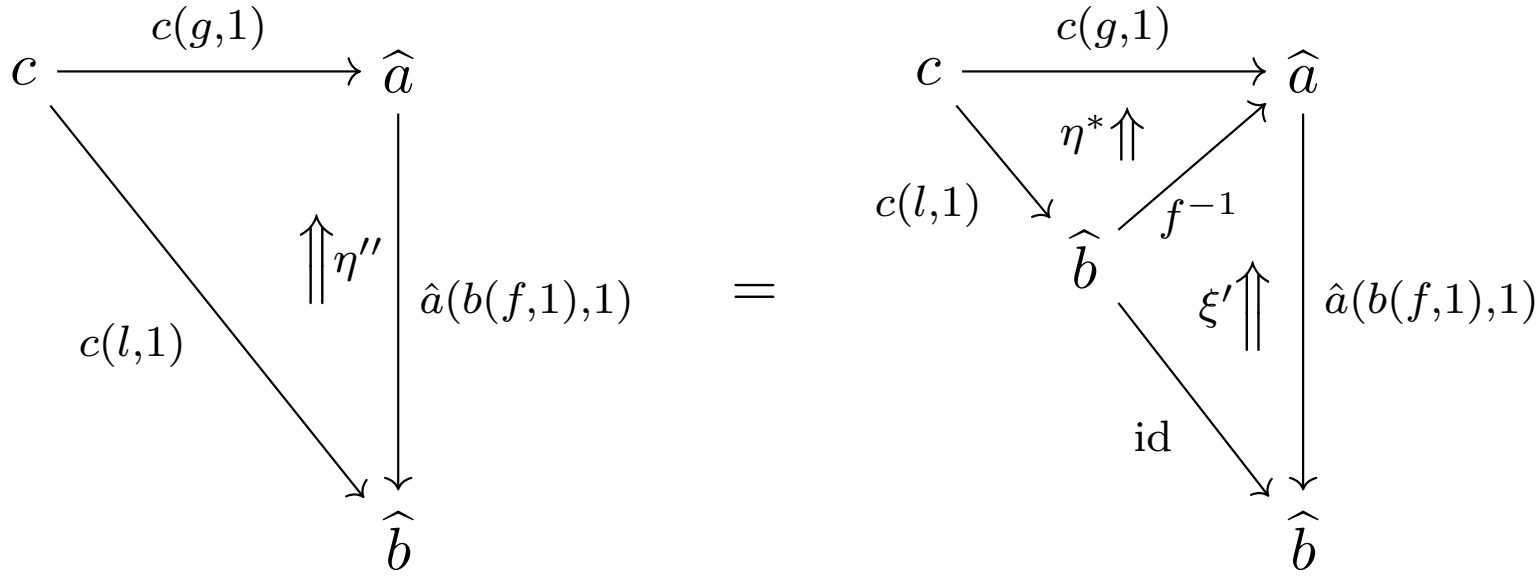
が分かる．従って

証明.


c
$\widehat{a}$
b
$\widehat{b}$
$c(g,1)$
$c(l,1)$
l
χ^l
η''
$\hat{a}(b(f,1),1)$
y_b
$=$
η'
$b(f,1)$
$\chi^{b(f,1)}$
$=$
η^*
f^{-1}
$\widehat{b}$
ξ
ξ'
id

証明.

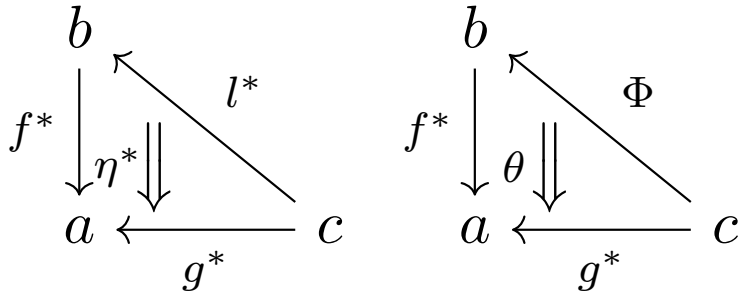
χ^l の普遍性により



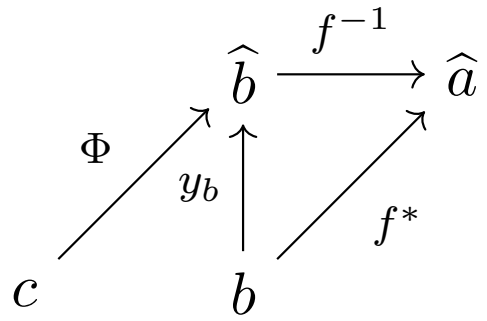
となる．即ち，この場合 $\eta \multimap \eta' \multimap \eta''$ となる η'' は η^* を使って書ける．

証明.

(y-各点 Kan 拡張 $\Longrightarrow$ p-各点 Kan 拡張) η'' が同型であるとする. $\mathcal{K}\ell(P)$ において，左の図式が右 Kan リフトであることを示すため，右の図式を考える.



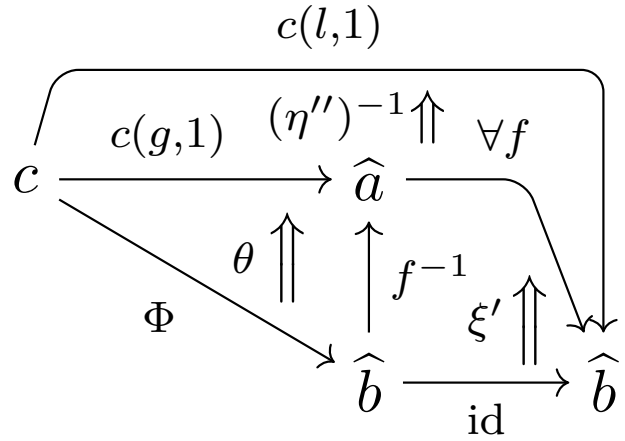
$\mathcal{K}\ell(P)$ における合成 $f^* \circ \Phi$ とは $\mathcal{K}$ における合成 $(y_b^\dagger f^*) \circ \Phi$ であるが，ここで $y_b^\dagger f^* \cong f^{-1}$ が分かる.



証明.

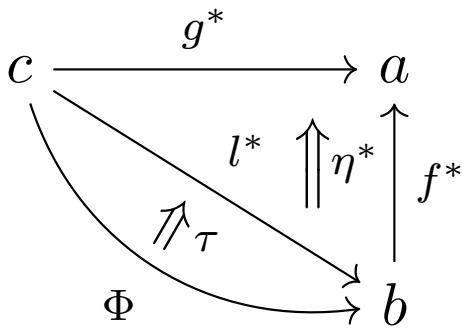
従って $\mathcal{K}\ell(P)$ の 2-morphism θ とは $\mathcal{K}$ の 2-morphism $\theta\colon f^{-1}\circ\Phi \Rightarrow g^*$ のことである．そこで $\mathcal{K}$ の 2-morphism τ を

$\tau \quad :=$

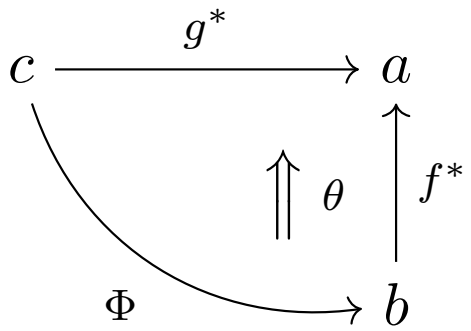


と定義する．

即ち $\tau\colon \Phi \Rightarrow l^*$ in $\mathcal{K}\ell(P)$ である．このとき $\mathcal{K}\ell(P)$ において



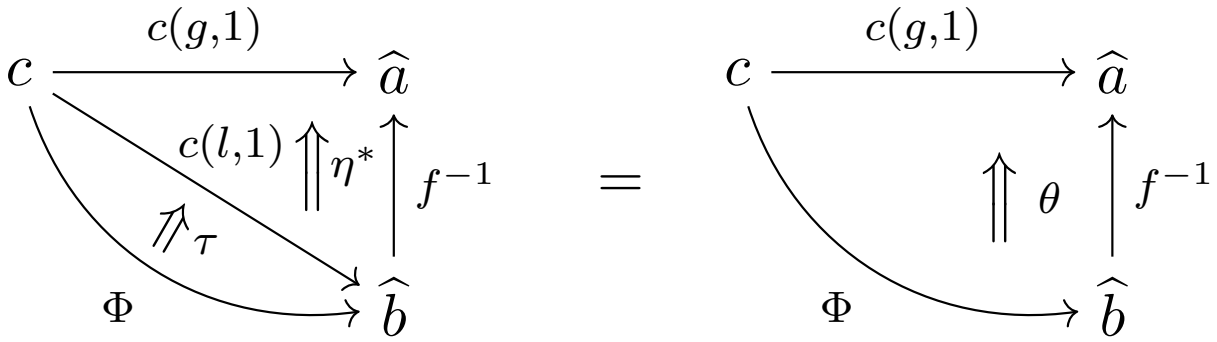
$=$



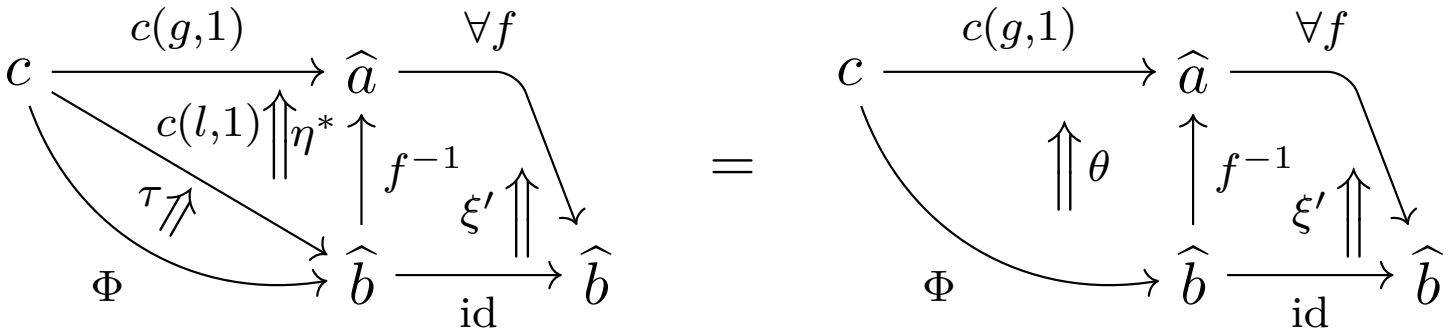
を示す．

証明.

つまり，$\mathcal{K}$ における等式



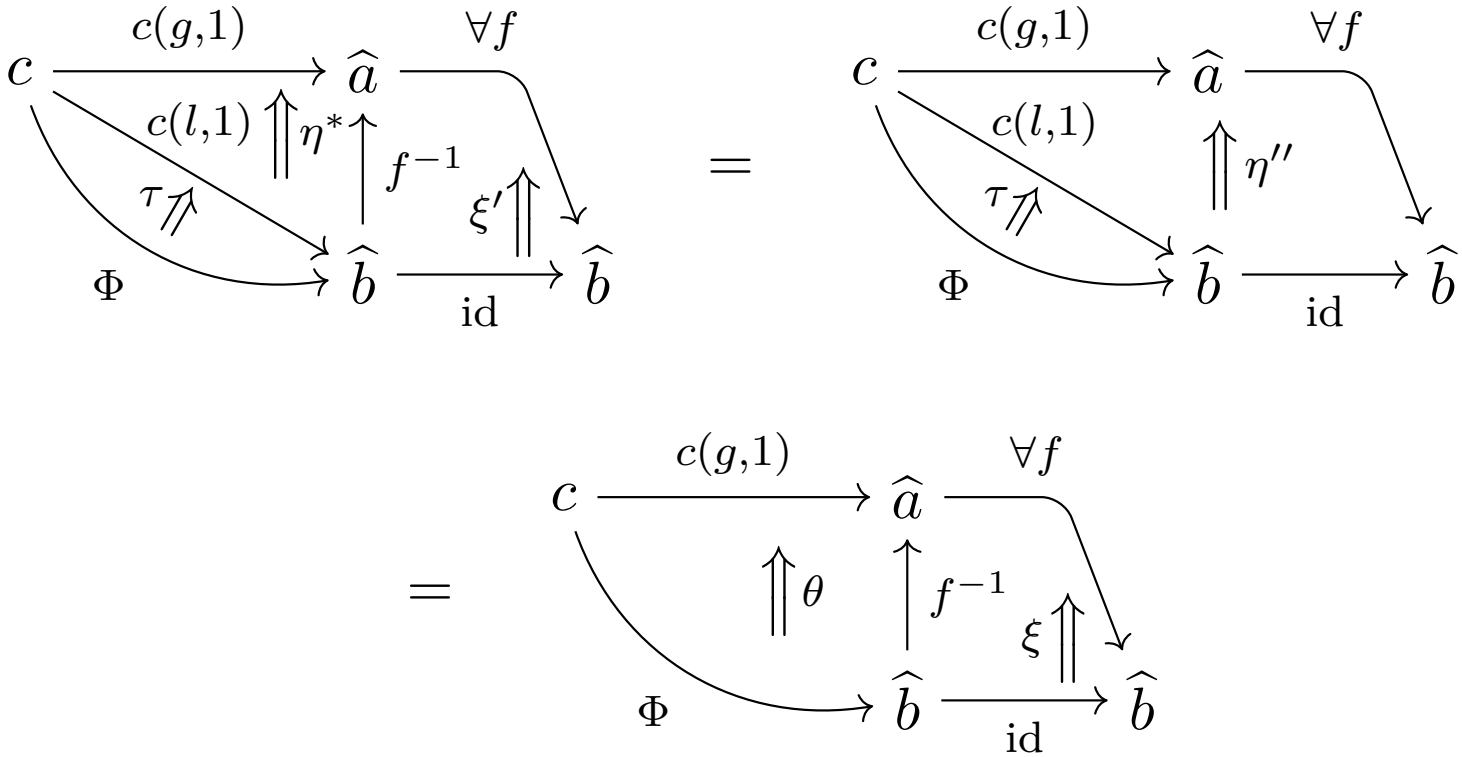
を示す．そのためには絶対左 Kan リフト $\langle f^{-1}, \xi' \rangle$ 普遍性より



を示せばよい．

証明.

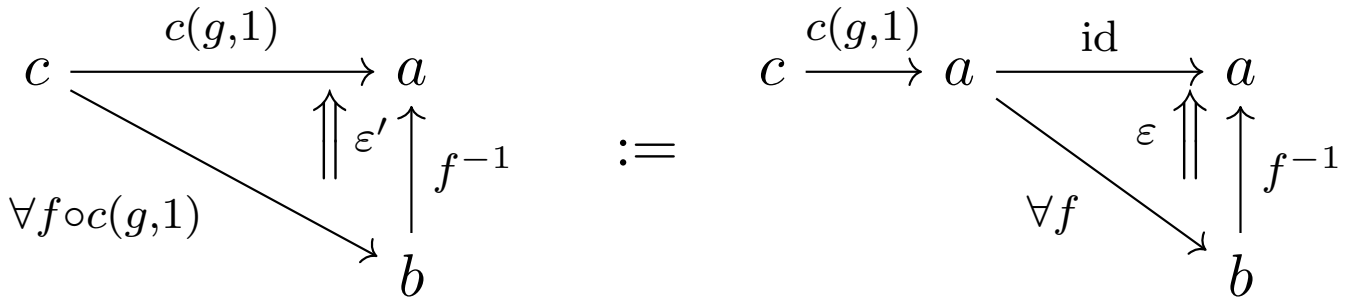
それは


c
$c(g,1)$
$\widehat{a}$
$\forall f$
$c(l,1)$
η^*
f^{-1}
τ
ξ'
Φ
$\widehat{b}$
id
$\widehat{b}$
=
c
$c(g,1)$
$\widehat{a}$
$\forall f$
$c(l,1)$
η''
τ
Φ
$\widehat{b}$
id
$\widehat{b}$
=
c
$c(g,1)$
$\widehat{a}$
$\forall f$
θ
f^{-1}
ξ
Φ
$\widehat{b}$
id
$\widehat{b}$

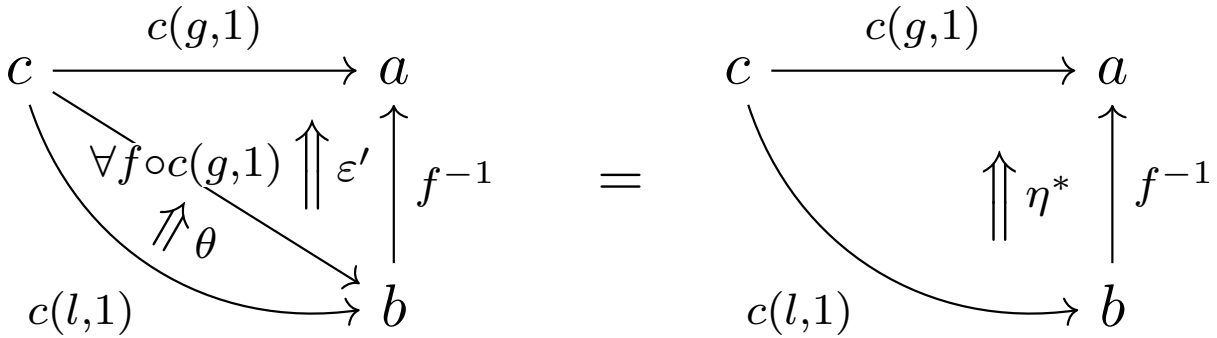
である.

証明.

(p-各点 Kan 拡張 $\Longrightarrow$ y-各点 Kan 拡張) $f^{-1} \dashv \forall f$ だから，これの counit を ε として



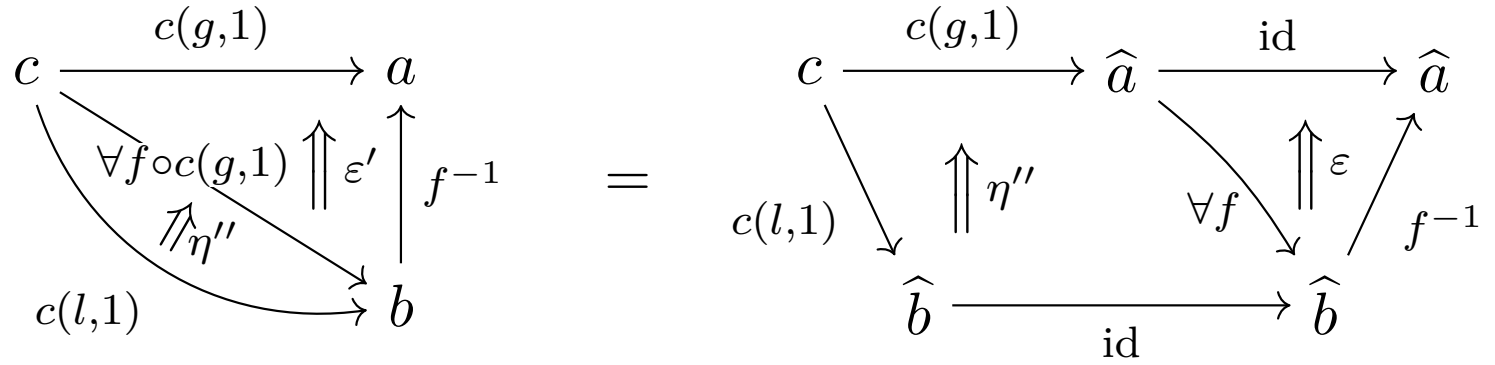
は右 Kan リフトである．故に普遍性からある θ が存在して

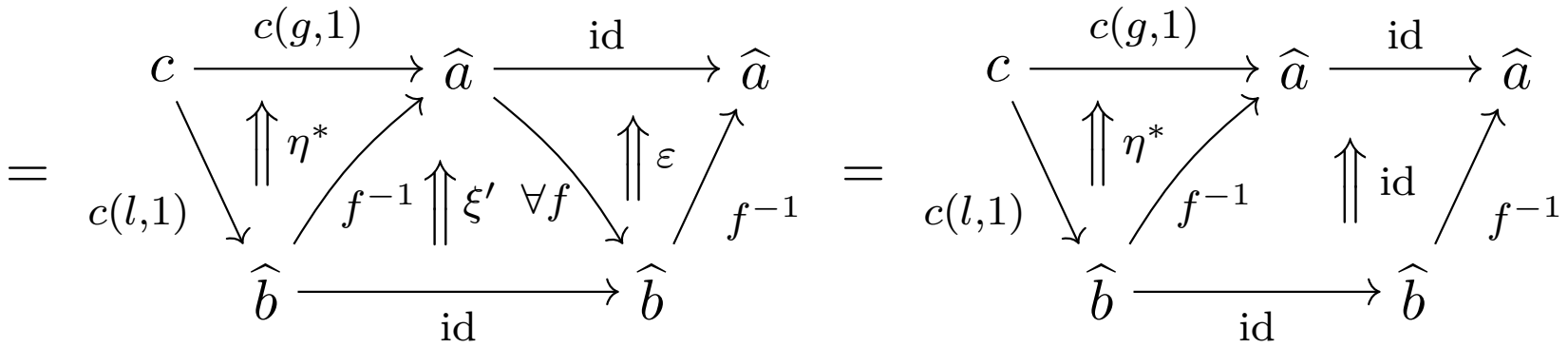


仮定より $(f^{-1})_{\ddagger} c(g,1) = \langle c(l,1), \eta^* \rangle$ だから θ は同型である．

証明.

一方で





となるから普遍性より $\theta = \eta''$ であり，故に η'' は同型． □

米田構造と proarrow equipment

まとめると

$\mathcal{K}$ の余完備米田構造があれば，
そこから proarrow equipment $\mathcal{A} \to \mathcal{K}\ell(P)$ が得られて，
$\mathcal{A}$ において y-各点左 Kan 拡張と p-各点左 Kan 拡張は一致する．

逆に，(良い)proarrow equipment から米田構造を作ることができるか? $\Longrightarrow \downarrow$ はできると言っている
I. D. Liberti and F. Loregian, On the unicity of formal category theories

【定義】

map $f\colon a \to b$ が p-忠実充満 $\iff$ η_f が同型.

【命題】

map $f\colon a \to b$ が p-忠実充満 $\iff$ $(f^*)^\ddagger f^* = \langle \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_{f^*} \rangle$. □

【命題】

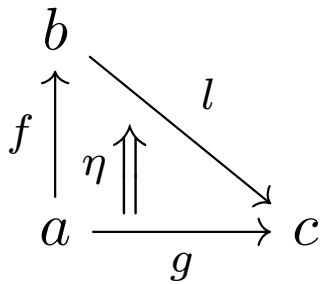
map $f\colon a \to b$ が p-忠実充満ならば f は忠実充満である. □

【命題】

$f \dashv u\colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ における随伴とする. このとき, f が忠実充満ならば f は p-忠実充満である. □

【命題】 (B)

$\mathcal{B}$ の図式



が p-各点左 Kan 拡張で，f が p-忠実充満ならば，η は同型である．□

proarrow equipment

proarrow equipment に対して，次の条件を考える．

4. $\mathcal{B}$ は有限 bicoproduct をもち $(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ はそれと交換する．更に $(-)^* \colon \mathcal{B}^{\mathrm{coop}} \to \mathcal{M}$ は有限 biproduct と交換する．
5. $\mathcal{M}$ の任意のモナド $\langle a, t \rangle$ に対して，対象 $a_t \in \mathcal{B}$ と map $k \colon a \to a_t$ が存在して，$k_* \colon a \to a_t$ が $\langle a, t \rangle$ の Kleisli 対象となる．更に $k^* \colon a_t \to a$ は Eilenberg-Moore 対象になる．

proarrow equipment

【定義】

$a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathrm{Cospan}_{\mathcal{B}}(a,b) := \mathrm{Span}_{\mathcal{B}^{\mathrm{op}}}(a,b)$ を a から b への cospan がなす bicategory という．

【定義】

a から b への cofibration がなす局所充満部分 bicategory を $\mathrm{Cof}_{\mathcal{B}}(a,b) \subset \mathrm{Cospan}_{\mathcal{B}}(a,b)$ と書く．

【定義】

a から b への codiscrete cofibration がなす充満部分 bicategory を $\mathrm{CodCof}_{\mathcal{B}}(a,b) \subset \mathrm{Cof}_{\mathcal{B}}(a,b)$ と書く．この bicategory は局所離散だから $\mathrm{CodCof}_{\mathcal{B}}(a,b)$ は圏とみなす．

proarrow equipment

【定理】

$(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ を条件 1 から 5 を満たす proarrow equipment とするとき，対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して圏同値 $\mathrm{CodCof}_{\mathcal{B}}(a, b) \cong \mathcal{M}(a, b)$ が成り立つ．□

より強く biequivalence $\mathrm{CodCof}_{\mathcal{B}} \cong \mathcal{M}$ が言える．

【例】

Topos をトポスと geometric morphism がなす bicategory，**TopLex** をトポスと左完全関手がなす bicategory とする．このとき $(-)_* \colon \mathbf{Topos} \to \mathbf{TopLex}^{\mathrm{co}}$ は条件 1 から 5 を満たす proarrow equipment である．故に $\mathbf{TopLex}^{\mathrm{co}} \cong \mathrm{CodCof}_{\mathbf{Topos}}$ となる．□

proarrow equipment

【 proarrow equipment　まとめ 】

- proarrow equipment により各点 Kan 拡張を考えることができる
- (ある程度の条件の下で) y-各点 Kan 拡張と同等のものである
- (ある程度の条件の下で) proarrow とは codiscrete cofibration のことである
- 構造が $\mathcal{B}$ と $\mathcal{M}$ という 2 つの bicategory に分かれている
- (p-各点 Kan 拡張と y-各点 Kan 拡張は) c-各点 Kan 拡張とは別の概念になってしまう
- 普遍随伴は?

proarrow equipment

PDF はまだありません。
proarrow equipment については Wood の一連の論文を参考にした.

- R. J. Wood, Abstract proarrow I, 1982
- R. J. Wood, Proarrows II, 1985
- R. Rosebrugh and R. J. Wood, Proarrows and cofibrations, 1988

米田構造との関係については↓を参考にした.
I. D. Liberti and F. Loregian, On the unicity of formal category theories

pseudo double category

pseudo double category

【定義】

pseudo double category $\mathbb{D}$ とは

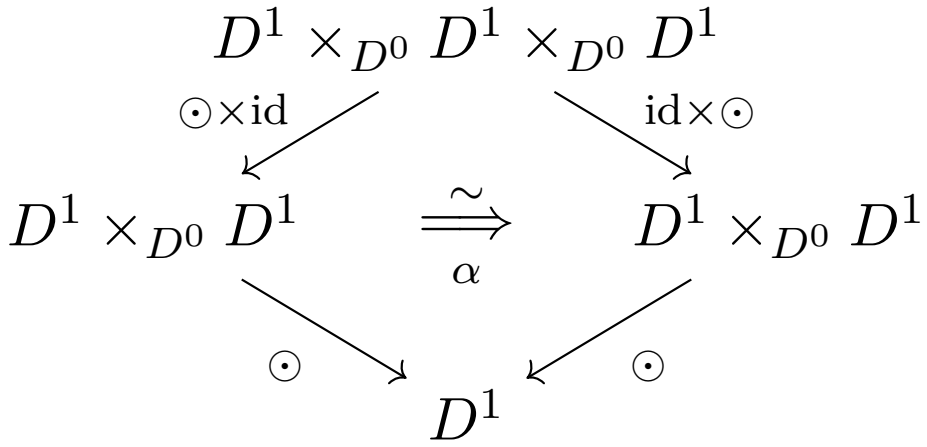
1. 圏 D^0, D^1 が与えられている．
2. 関手 $L, R\colon D^1 \to D^0$，$U\colon D^0 \to D^1$ が与えられている．
3. 関手 $\odot\colon D^1 \times_{D^0} D^1 \longrightarrow D^1$ が与えられている．但し $D^1 \times_{D^0} D^1$ は次の pullback である．

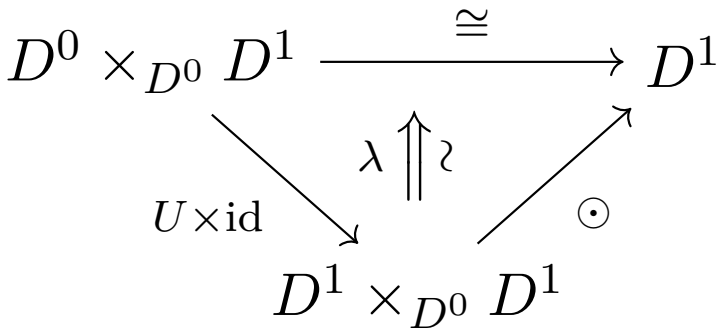
$$\begin{array}{ccc} D^1 \times_{D^0} D^1 & \xrightarrow{P_L} & D^1 \\ {\scriptstyle P_R}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L} \\ D^1 & \xrightarrow[R]{} & D^0 \end{array}$$

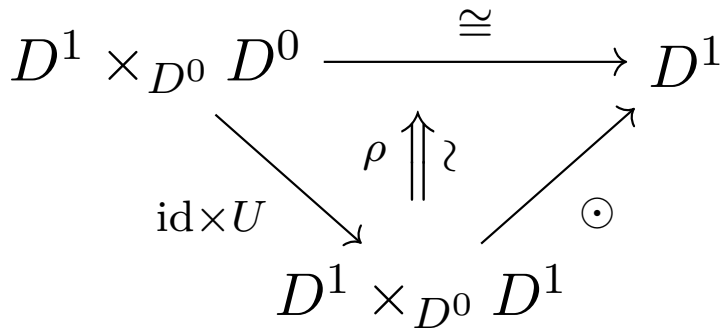
4. $L \circ U = \mathrm{id}$，$R \circ U = \mathrm{id}$，$L \circ \odot = L \circ P_L$，$R \circ \odot = R \circ P_R$．

【定義】

5. 次の自然同型 α, λ, ρ が与えられている．

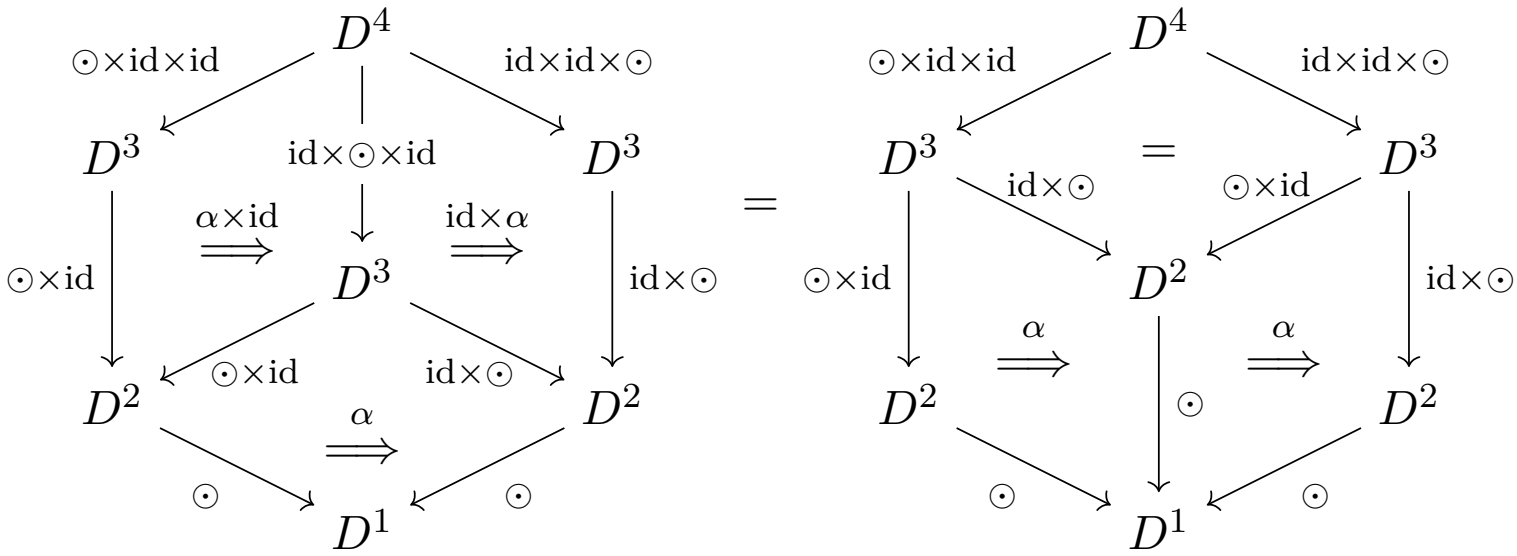






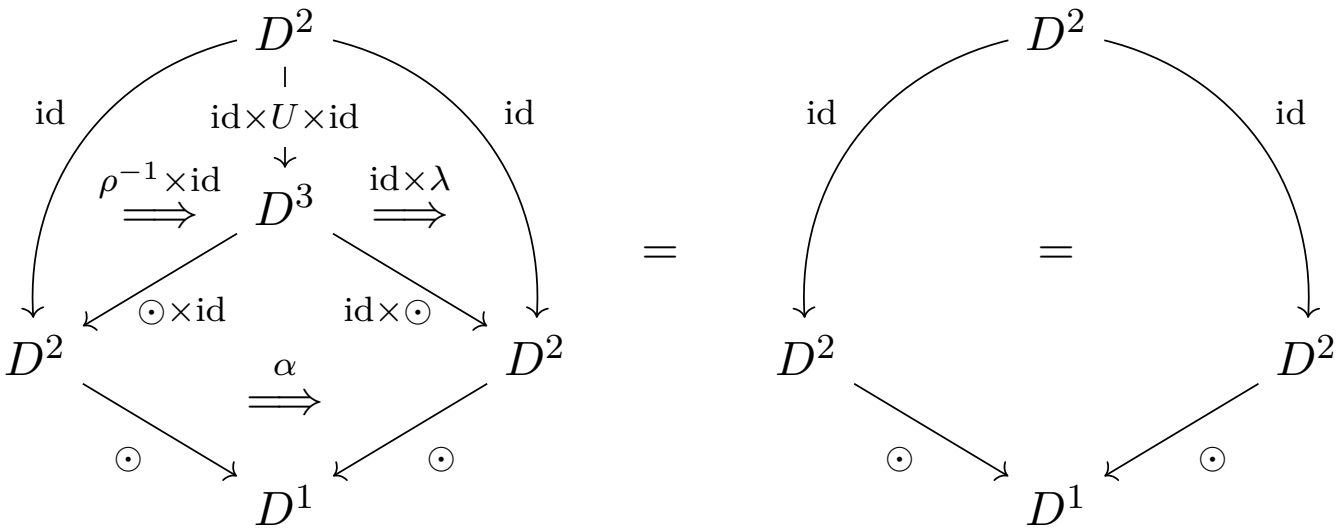
【定義】

6. 次の自然変換の等式が成り立つ．($D^2 := D^1 \times_{D^0} D^1$，$D^3 := D^1 \times_{D^0} D^1 \times_{D^0} D^1$ などと書いた．)



【定義】

7. 次の自然変換の等式が成り立つ.



8. $L\bullet\alpha, L\bullet\lambda, L\bullet\rho, R\bullet\alpha, R\bullet\lambda, R\bullet\rho$ は全て恒等変換である.

pseudo double category

- $\mathbb{D}$ の対象: 圏 D^0 の対象のこと.
- $\mathbb{D}$ の垂直射: D^0 の射のこと. $f\colon a \to b$ で表す.
- 垂直射の合成とは D^0 での合成のことであり $\circ$ で表す.
- $\mathbb{D}$ の水平射: 圏 D^1 の対象のこと.
- J を水平射とするとき
  J の domain: $L(J) \in \mathrm{Ob}(D^0)$ のこと.
  J の codomain: $R(J) \in \mathrm{Ob}(D^0)$ のこと.
  $L(J) = a$, $R(J) = b$ のとき $J\colon a \nrightarrow b$ で表す.

【例】

対象を小圏，垂直射を関手，水平射を profunctor とすると pseudo double category になる. □

pseudo double category

- $\mathbb{D}$ の cell: D^1 の射のこと.
- β を cell とするとき

  β の horizontal source: D^1 の射としての domain のこと.

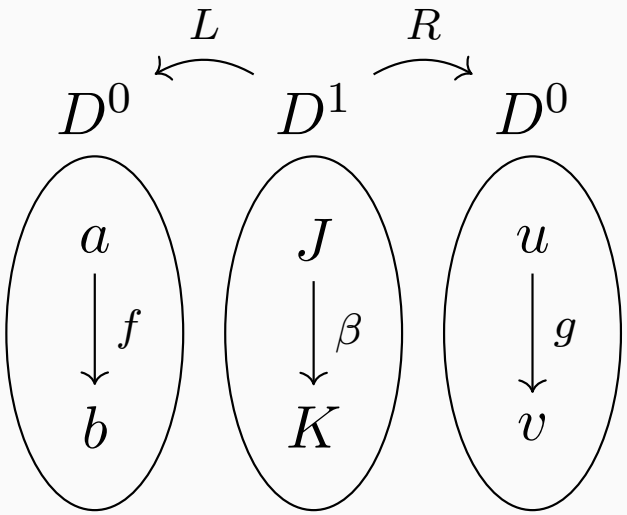
  β の horizontal target: D^1 の射としての codomain のこと.

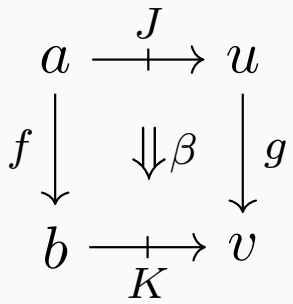
  β の vertical source: $L(\beta) \in \mathrm{Mor}(D^0)$ のこと.

  β の vertical target: $R(\beta) \in \mathrm{Mor}(D^0)$ のこと.

pseudo double category

cell β の horizontal source, horizontal target が $J\colon a \nrightarrow u$，
$K\colon b \nrightarrow v$ で vertical source, vertical target が f, g であるとする．
即ち $L(\beta) = f$，$R(\beta) = g$ である．すると L, R が関手だから
$f\colon a \to b$，$g\colon u \to v$ となる (左下の図参照)．そこでこのような状
況のときは右下のような「図式」で表す．





pseudo double category

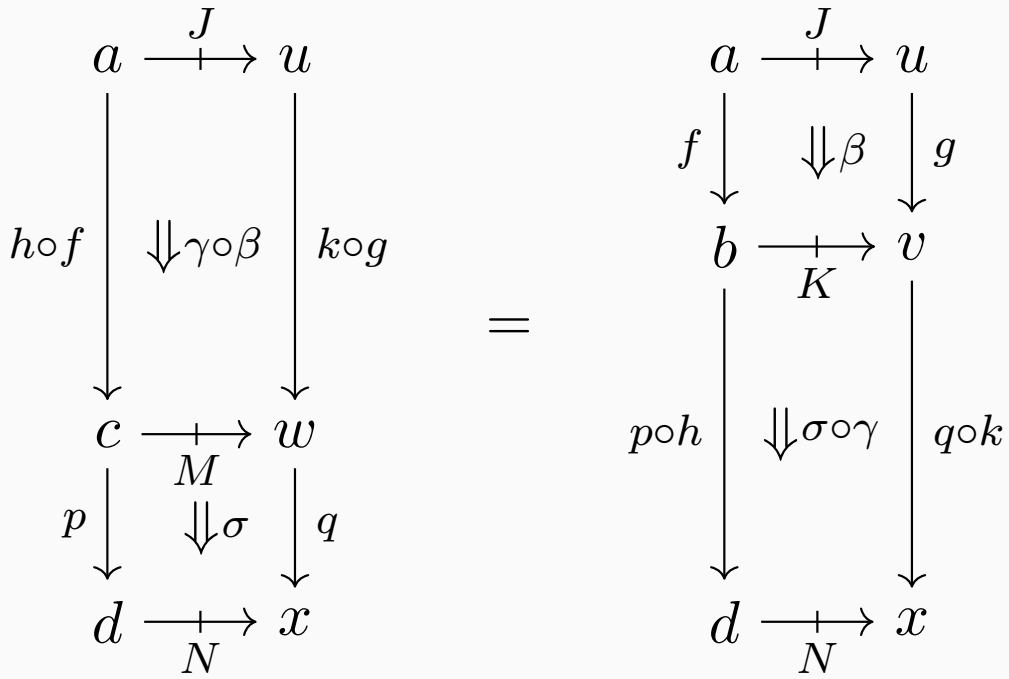
2 つの cell $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$, $\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{K} & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\gamma & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & \xrightarrow[M]{} & w \end{array}$ を考える．

このとき D^1 の合成により定まる cell $\gamma \circ \beta$ を垂直合成という．

(L が関手なので $L(\gamma \circ \beta) = L(\gamma) \circ L(\beta)$ である．R も同様．)

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & u \\ {\scriptstyle h\circ f}\downarrow & \Downarrow\gamma\circ\beta & \downarrow{\scriptstyle k\circ g} \\ c & \xrightarrow[M]{} & w \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\varphi & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\psi & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & \xrightarrow[M]{} & w \end{array}$$

D^0, D^1 は圏だから結合律が成り立ち，次の等式が成り立つ．



水平射 $J\colon a \nrightarrow u$，即ち対象 $J \in D^1$ に対して D^1 の恒等射 id_J を考える．L, R は関手だから $L(\mathrm{id}_J) = \mathrm{id}$，$R(\mathrm{id}_J) = \mathrm{id}$ である．

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longrightarrow} & u \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_a}\downarrow & \Downarrow \mathrm{id}_J & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_u} \\ a & \underset{J}{\longrightarrow} & u \end{array}$$

id_J は D^1 の恒等射だから次の等式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow \beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \underset{K}{\longrightarrow} & v \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_b}\downarrow & \Downarrow \mathrm{id}_K & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_v} \\ b & \underset{K}{\longrightarrow} & v \end{array} = \begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & \Downarrow \beta & \\ b & \underset{K}{\longrightarrow} & v \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longrightarrow} & u \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_a}\downarrow & \Downarrow \mathrm{id}_J & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_u} \\ a & \underset{J}{\longrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow \beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \underset{K}{\longrightarrow} & v \end{array} = \begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ & \Downarrow \beta & \\ b & \underset{K}{\longrightarrow} & v \end{array}$$

pseudo double category

2 つの cell $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$, $\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{M} & s \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\gamma & \downarrow{\scriptstyle h} \\ v & \xrightarrow[N]{} & t \end{array}$ を考える.

関手 $\odot$ により定まる cell $\beta \odot \gamma$ を水平合成という.

$L \circ \odot = L \circ P_L$, $R \circ \odot = R \circ P_R$ だから $L(\beta \odot \gamma) = L(\beta)$,

$R(\beta \odot \gamma) = R(\gamma)$ となる.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J\odot M} & s \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta\odot\gamma & \downarrow{\scriptstyle h} \\ b & \xrightarrow[K\odot N]{} & t \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{J} & u & \xrightarrow{M} & s \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} & \Downarrow\gamma & \downarrow{\scriptstyle h} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v & \xrightarrow[N]{} & t \end{array}$$

pseudo double category

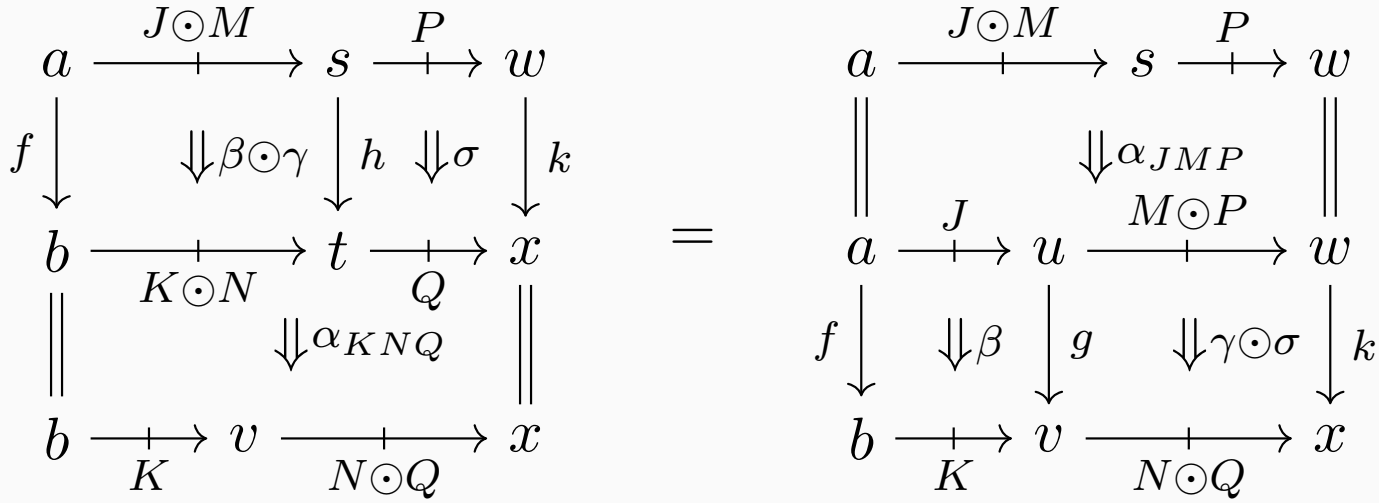
今度は 3 つの cell $\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \underset{K}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & v \end{array}$, $\begin{array}{ccc} u & \overset{M}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & s \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\gamma & \downarrow{\scriptstyle h} \\ v & \underset{N}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & t \end{array}$, $\begin{array}{ccc} s & \overset{P}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & w \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\sigma & \downarrow{\scriptstyle k} \\ t & \underset{Q}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & x \end{array}$ を考える．二通りの水平合成 $(\beta \odot \gamma) \odot \sigma$ と $\beta \odot (\gamma \odot \sigma)$ を考えることができる．この合成の「結合律」を与えるのが α である．まず水平射について $\langle J, M, P\rangle \in D^1 \times_{D^0} D^1 \times_{D^0} D^1$ であるから，α_{JMP} は D^1 の射，即ち cell である．また $L \bullet \alpha = \mathrm{id}$，$R \bullet \alpha = \mathrm{id}$ だから $L(\alpha_{JMP}) = \mathrm{id}_a$，$R(\alpha_{JMP}) = \mathrm{id}_d$ となる．図式で書くと次のようになる．(id は等号で表した．)

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{(J\odot M)\odot P}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & d \\ \| & \Downarrow\alpha_{JMP} & \| \\ a & \underset{J\odot(M\odot P)}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & d \end{array}$$

また α が自然変換であることから

$$\begin{array}{ccc} (J \odot M) \odot P & \xrightarrow{\alpha_{JMP}} & J \odot (M \odot P) \\ {\scriptstyle (\beta \odot \gamma) \odot \sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta \odot (\gamma \odot \sigma)} \\ (K \odot N) \odot Q & \xrightarrow[\alpha_{KNQ}]{} & K \odot (N \odot Q) \end{array}$$

が可換である．これは $\mathbb{D}$ の図式で書けば



$a \in \mathbb{D}$ を対象とする．$U\colon D^0 \to D^1$ が関手だから Ua は水平射である．$LU = \mathrm{id}$，$RU = \mathrm{id}$ だから $Ua\colon a \nrightarrow a$ となる．

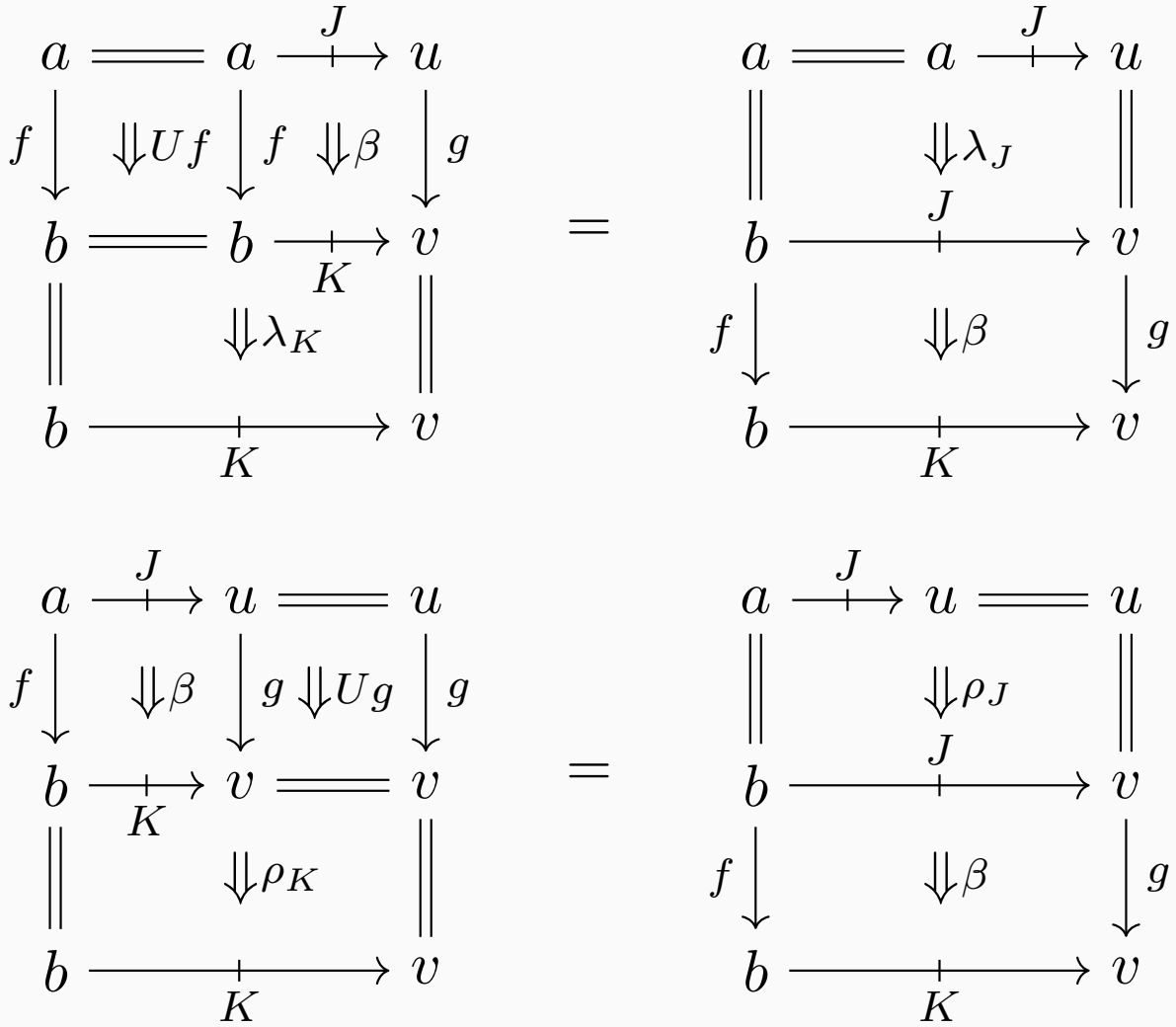
更に $f\colon a \to b$ を垂直射とすると Uf は $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{Ua} & a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow Uf & \downarrow{\scriptstyle f} \\ b & \xrightarrow[Ub]{} & b \end{array}$ の形の cell．

$J\colon a \nrightarrow b$ とすると，α と同様，λ_J, ρ_J は次のような同型な cell．

$$\begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{Ua} & a & \xrightarrow{J} & b \\ \| & & \Downarrow\lambda_J & & \| \\ a & & \xrightarrow[J]{} & & b \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a & \xrightarrow{J} & b & \xrightarrow{Ub} & b \\ \| & & \Downarrow\rho_J & & \| \\ a & & \xrightarrow[J]{} & & b \end{array}$$

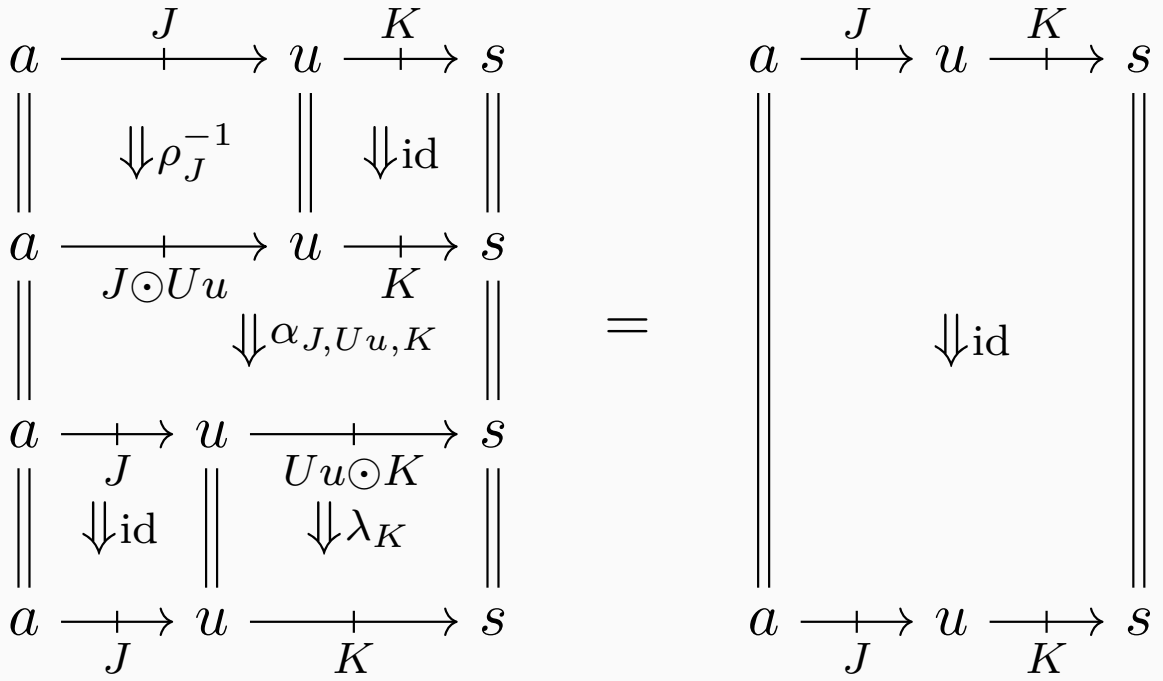
故に Ua は id の役割を持つ水平射である．そこで以降では，Ua も単に等号で表す．

λ, ρ が自然変換だから，cell β に対して



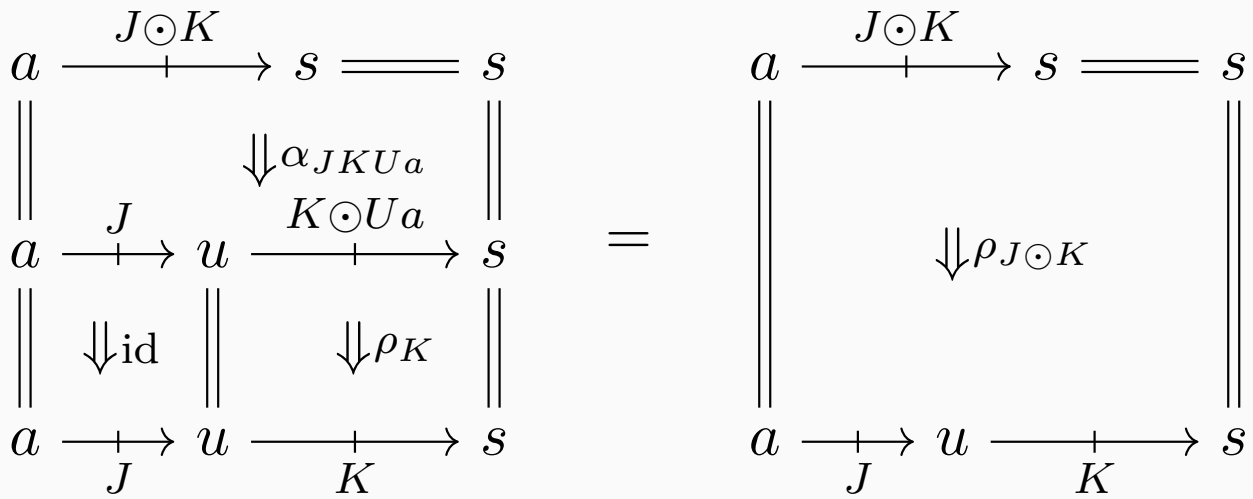
pseudo double category

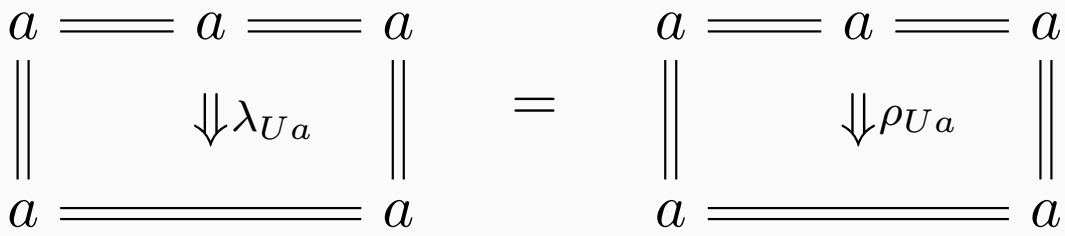
pseudo double category の条件 7 より



pseudo double category

bicategory の場合と同様，次が成り立つ．





【命題】

次のように定義すると $V(\mathbb{D})$ は strict 2-category になる．($V(\mathbb{D})$ を vertical 2-category という．)

- $V(\mathbb{D})$ の対象は $\mathbb{D}$ の対象とする．
- $V(\mathbb{D})$ の 1-morphism は $\mathbb{D}$ の垂直射とする．
- $V(\mathbb{D})$ の 2-morphism は cell $\begin{array}{ccc} a & = & a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & = & b \end{array}$ とする．

  但しこのとき $\mathrm{dom}(\beta) = f$，$\mathrm{cod}(\beta) = g$ とする．
- 1-morphism の合成は垂直射の合成とする．
- 以下略 □

【命題】

次のように定義すると $H(\mathbb{D})$ は bicategory になる．($H(\mathbb{D})$ を horizontal bicategory という．)

- $H(\mathbb{D})$ の対象は $\mathbb{D}$ の対象とする．
- $H(\mathbb{D})$ の 1-morphism は $\mathbb{D}$ の水平射とする．
- $H(\mathbb{D})$ の 2-morphism は cell $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & b \\ \| & \Downarrow\beta & \| \\ a & \xrightarrow[K]{} & b \end{array}$ とする．

  但しこのとき $\mathrm{dom}(\beta) = J$，$\mathrm{cod}(\beta) = K$ とする．
- 1-morphism の合成は $\odot$ とする．
- 以下略 □

proarrow equipment との関係

【命題】

strict 2-category $\mathcal{B}$ の proarrow equipment $(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ に対して，以下の $\mathbb{D}$ は pseudo double category になる．

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$．
- $\mathbb{D}$ の垂直射は map とする．
- $\mathbb{D}$ の水平射 $\Phi \colon a \nrightarrow b$ とは proarrow $\Phi \colon b \to a$ のこととする．
- $\mathbb{D}$ の cell $\begin{array}{ccc} a & \overset{\Phi}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \underset{\Psi}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & v \end{array}$ は $\mathcal{M}$ の 2-morphism $\begin{array}{ccc} a & \overset{\Phi}{\longleftarrow} & u \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & \swarrow\!\!\!\!\!\!\beta & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\ b & \underset{\Psi}{\longleftarrow} & v \end{array}$ のこととする．
- 以下略 $\square$

proarrow equipment との関係

- こうして pseudo double category は proarrow equipment の一般化とみなせる.
- $V(\mathbb{D}) = \mathcal{B}$ である.
- $H(\mathbb{D}) = \mathcal{M}^{\mathrm{op}}$ である.
- $(-)_*$ に相当する情報はこれから述べる companion, conjoint として得られる.

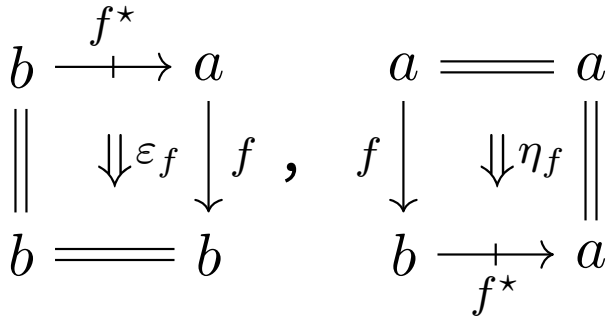
【定義】

$f : a \to b$ の companion とは $f_\star$，
$$\begin{array}{ccc} a & \overset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow f\varepsilon & \| \\ b & = & b \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccc} a & = & a \\ \| & \Downarrow f\eta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ a & \underset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b \end{array}$$
で
あって次の等式を満たすものをいう．

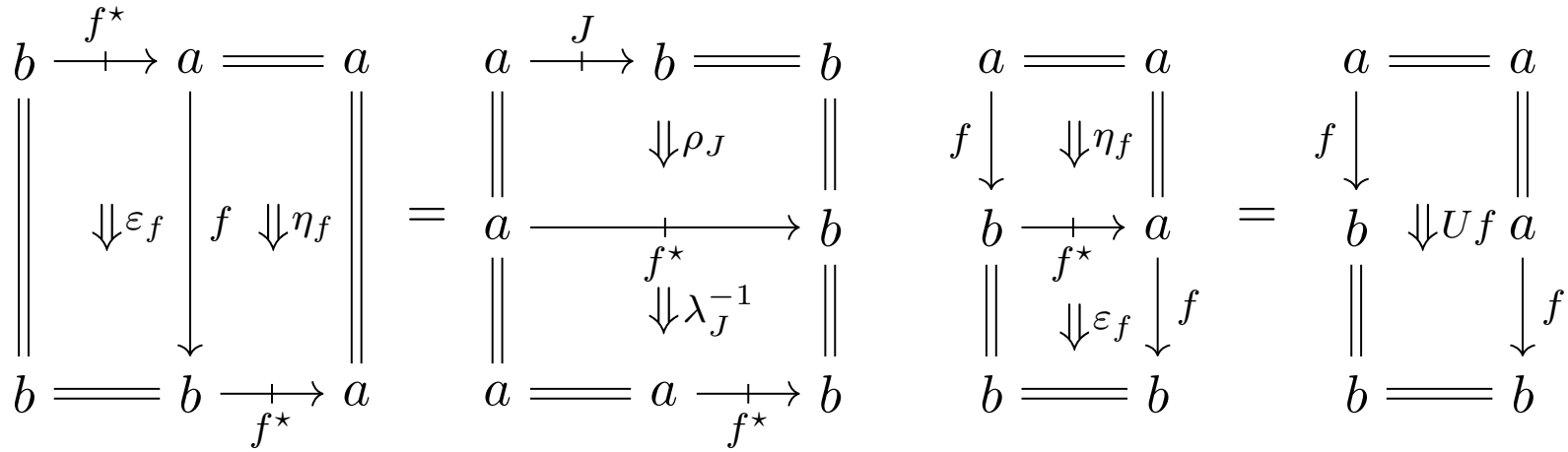
$$\begin{array}{ccccc} a & = & a & \overset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b \\ \| & \Downarrow f\eta & \downarrow{\scriptstyle f} & \Downarrow f\varepsilon & \| \\ a & \underset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b & = & b \end{array} = \begin{array}{ccccc} a & = & a & \overset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b \\ \| & \Downarrow \lambda_J & \| & \Downarrow \rho_J^{-1} & \| \\ a & \underset{J}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b & = & b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} a & = & a \\ \| & \Downarrow f\eta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ a & \underset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!+} & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow f\varepsilon & \| \\ b & = & b \end{array} = \begin{array}{ccc} a & = & a \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ a & \Downarrow Uf & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \| \\ b & = & b \end{array}$$

【定義】

$f : a \to b$ の conjoint とは $f^\star$，



であって次の等式を満たすものをいう．



proarrow equipment との関係

関手 $L, R\colon D^1 \to D^0$ から直積の普遍性により得られる関手を以下 $P\colon D^1 \to D^0 \times D^0$ で表す.

【定義】

P が Grothendieck fibration となる pseudo double category $\mathbb{D}$ を framed bicategory という.

【定義】

cell β が cartesian $\Longleftrightarrow$ D^1 の射として β が P-cartesian

proarrow equipment との関係

即ち，cell $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$ が cartesian とは，任意の cell $\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{M} & t \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ a & \Downarrow\theta & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$

に対して，cell θ' が一意に存在して次の等式が成り立つこと．

$$\begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{M} & t \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\theta' & \downarrow{\scriptstyle k} \\ a & \xrightarrow[J]{} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} s & \xrightarrow{M} & t \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ a & \Downarrow\theta & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$$

proarrow equipment との関係

cell $\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\nrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \underset{K}{\nrightarrow} & v \end{array}$ が opcartesian とは，任意の cell $\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\nrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \Downarrow\theta & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & \underset{M}{\nrightarrow} & w \end{array}$ に

対して，cell θ' が一意に存在して次の等式が成り立つこと．

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\nrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \underset{K}{\nrightarrow} & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\theta' & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & \underset{M}{\nrightarrow} & w \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\nrightarrow} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \Downarrow\theta & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & \underset{M}{\nrightarrow} & w \end{array}$$

proarrow equipment との関係

【命題】

f の companion $\langle f_\star, {}_f\varepsilon, {}_f\eta \rangle$ が存在するならば

$$\begin{array}{ccc} a & \overset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow {\scriptstyle {}_f\varepsilon} & \| \\ b & = & b \end{array} \text{ は cartesian で } \begin{array}{ccc} a & = & a \\ \| & \Downarrow {\scriptstyle {}_f\eta} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ a & \underset{f_\star}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & b \end{array} \text{ は opcartesian.} \qquad \square$$

【命題】

f の conjoint $\langle f^\star, \varepsilon_f, \eta_f \rangle$ が存在するならば

$$\begin{array}{ccc} b & \overset{f^\star}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & a \\ \| & \Downarrow {\scriptstyle \varepsilon_f} & \downarrow{\scriptstyle f} \\ b & = & b \end{array} \text{ は cartesian で } \begin{array}{ccc} a & = & a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow {\scriptstyle \eta_f} & \| \\ b & \underset{f^\star}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+} & a \end{array} \text{ は opcartesian.} \qquad \square$$

proarrow equipment との関係

pseudo double category $\mathbb{D}$ が framed bicategory とは，任意の図式 $\begin{array}{ccc} a & & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$ に対して，cartesian cell $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & u \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & \xrightarrow[K]{} & v \end{array}$ が存在することである．

【命題】

pseudo double category $\mathbb{D}$ が framed bicategory である
$\iff$ 任意の垂直射が companion と conjoint を持つ． □

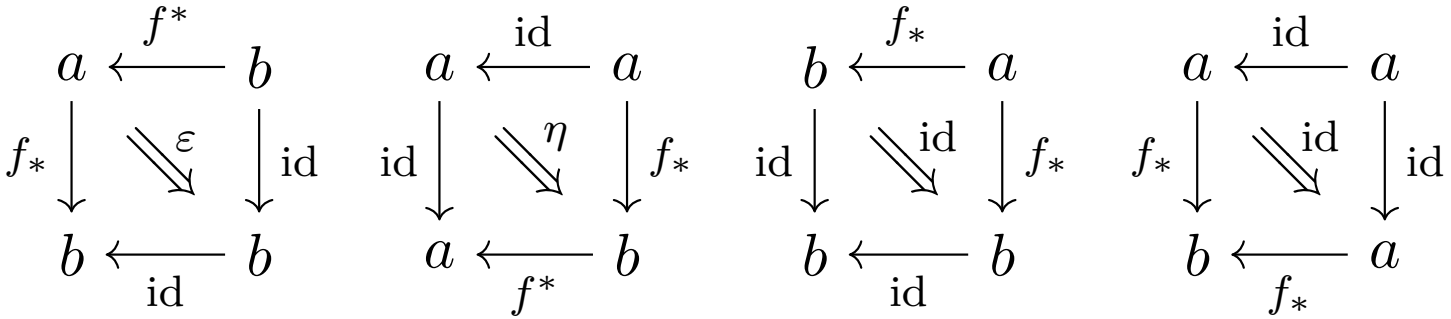
【定理】

strict 2-category $\mathcal{B}$ の proarrow equipment $(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ に対して，先のように $\mathbb{D}$ を定めると framed bicategory になる．

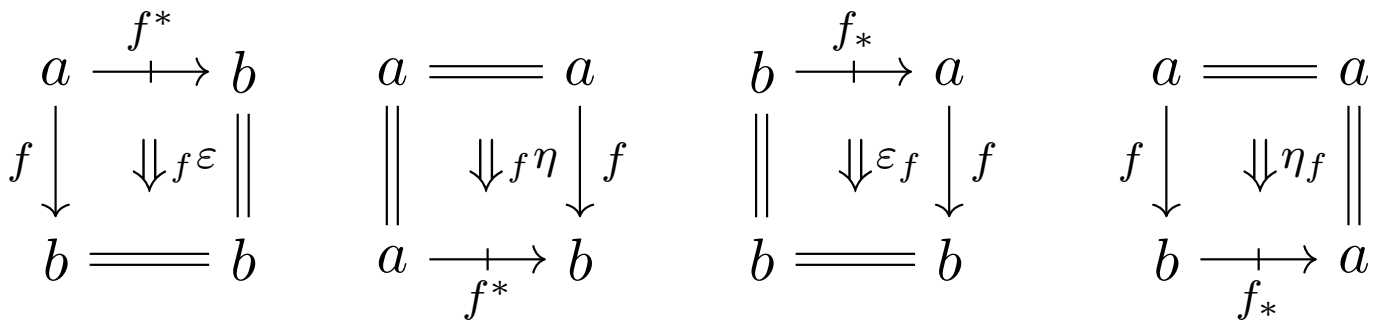
proarrow equipment との関係

証明.

$f : a \to b$ を垂直射，即ち map とすると $\mathcal{M}$ において随伴 $f_* \dashv f^* : a \to b$ が成り立つ．その unit, counit を η, ε とすれば



を得る．これは即ち cell



でありこれが companion, conjoint の条件を満たす． □

proarrow equipment との関係

【定理】

framed bicategory $\mathbb{D}$ に対して以下のように定義すると
proarrow equipment $F\colon V(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})^{\mathrm{op}}$ となる.

- 対象 $a \in \mathbb{D}$ に対して $F(a) := a$.
- $V(\mathbb{D})$ の 1-morphism (垂直射) f に対して $F(f) := f^\star$.
- $V(\mathbb{D})$ の 2-morphism $\beta\colon f \Rightarrow g$, 即ち cell $\begin{array}{ccc} a & = & a \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} \\ b & = & b \end{array}$ に対して $F(\beta)\colon f^\star \Rightarrow g^\star$ を次の合成で定める.

$$\begin{array}{ccccccc} b & \xrightarrow{f^\star} & a & = & a & = & a \\ \| & \Downarrow\varepsilon_f & \downarrow{\scriptstyle f} & \Downarrow\beta & \downarrow{\scriptstyle g} & \Downarrow\eta_g & \| \\ b & = & b & = & b & \xrightarrow[g^\star]{} & a \end{array}$$

□

proarrow equipment との関係

この対応により strict 2-category $\mathcal{B}$ の proarrow equipment $(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ と framed bicategory $\mathbb{D}$ は同等のものである.

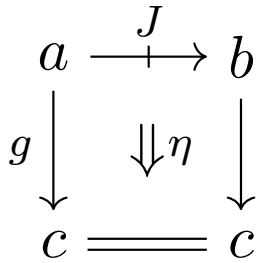
(更に「proarrow equipment のなす 2-category」と「framed bicategory のなす 2-category」を定義してそれらの biequivalence を示すこともできる (らしい).
M. A. Shulman, Framed Bicategories and Monoidal Fibrations)

また $f_\star = f^*$, $f^\star = f_*$ である.

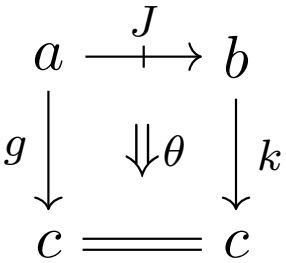
Kan 拡張

【定義】

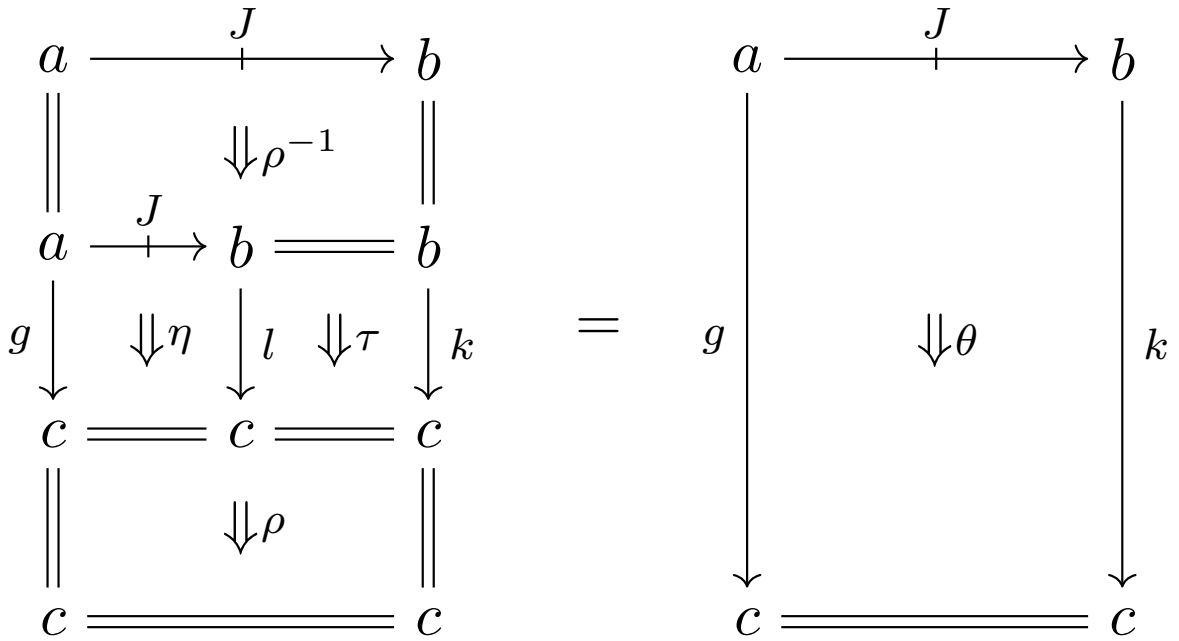
$J\colon a \nrightarrow b$ に沿った $g\colon a \to c$ の左 Kan 拡張とは $l\colon b \to c$ と cell



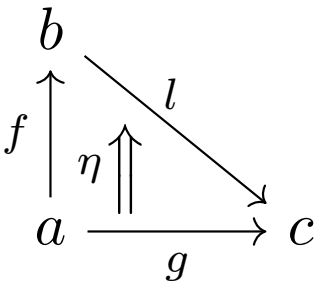
の組であり，次を満たすもの: 任意の



に対して，cell τ が一意に存在して次の等式が成り立つ．



【定理】

$V(\mathbb{D})$ の図式 

を考える．f の companion が存在するとして，η を $\mathbb{D}$ において

$_f\eta$ が opcartesian だから

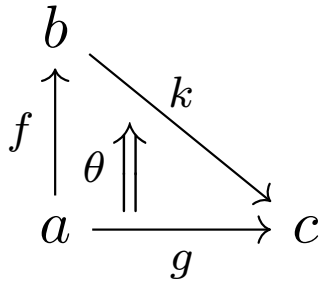
$$\begin{array}{ccc} a & = & a \\ \| & \Downarrow {}_f\eta & \downarrow f \\ a & \xrightarrow{f_\star} & b \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow \eta' & \downarrow {\scriptstyle l} \\ c & = & c \end{array} \qquad = \qquad \begin{array}{ccc} a & = & a \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow {\scriptstyle f} \\ & \Downarrow \eta & b \\ & & \downarrow {\scriptstyle l} \\ c & = & c \end{array}$$

と分解する．このとき $f_\star^\dagger g = \langle l, \eta' \rangle$

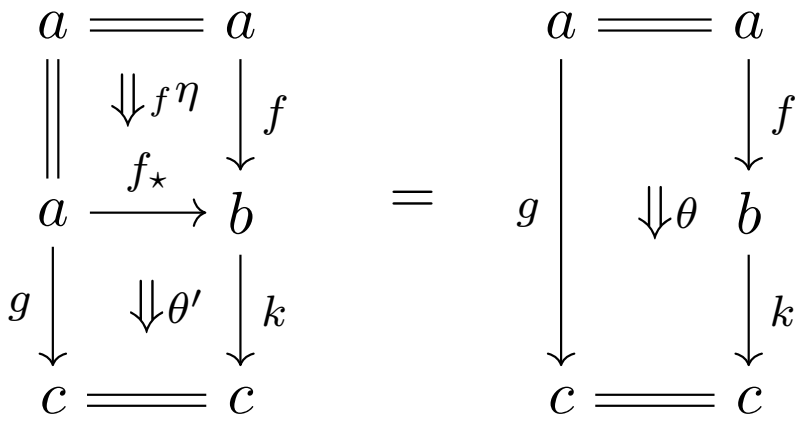
$\iff V(\mathbb{D})$ において $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$．

証明.

同様なので $\Longrightarrow$ のみ示す．$V(\mathbb{D})$ の図式



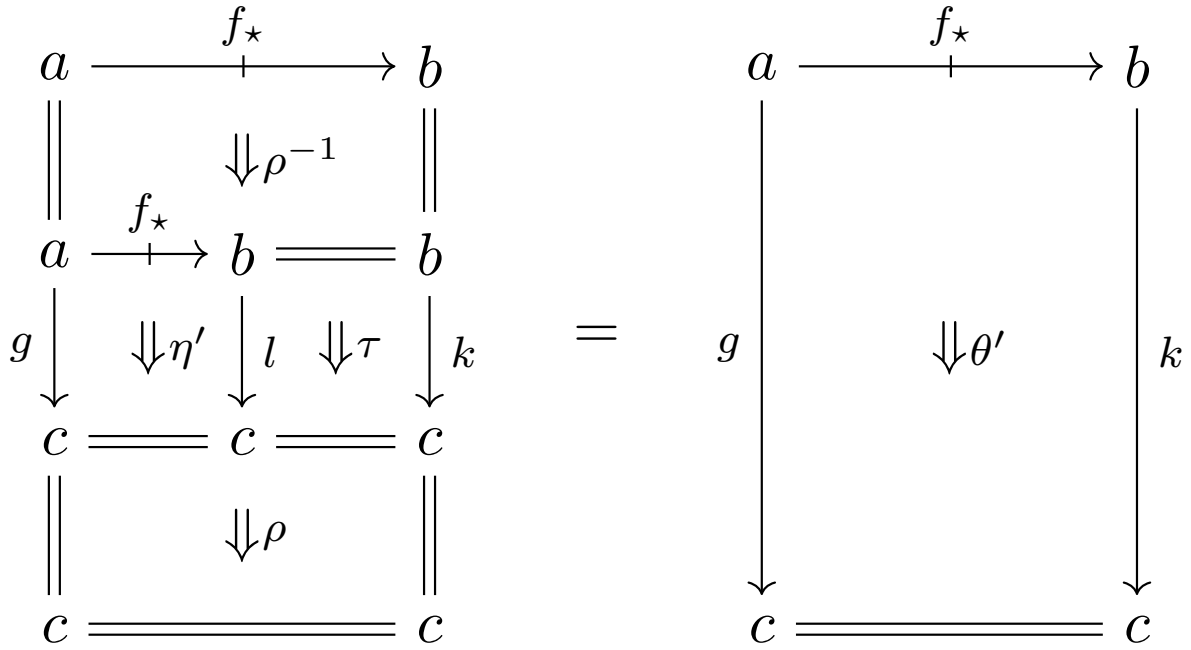
を考える．θ を $\mathbb{D}$ において



と分解する．

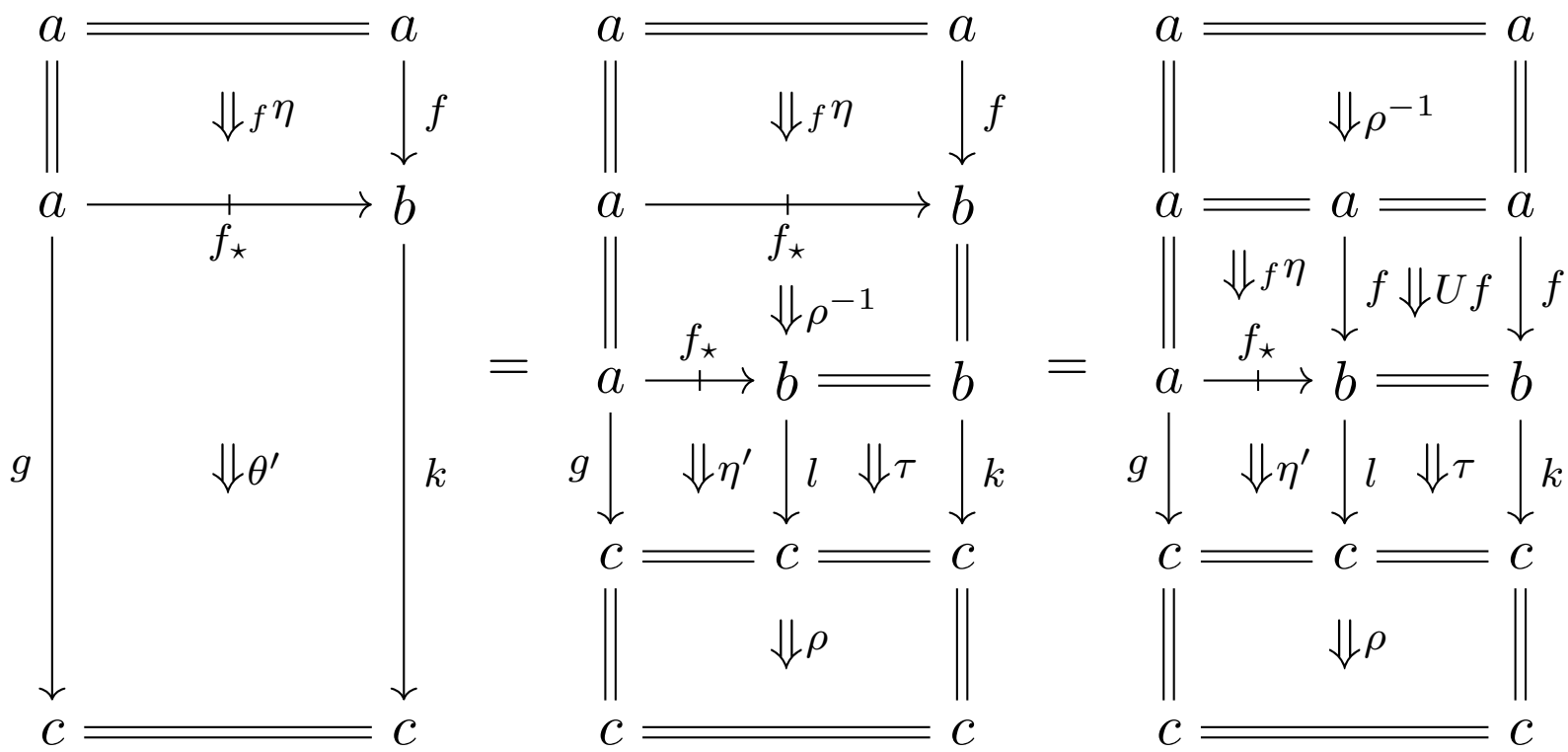
証明.

$\langle l, \eta' \rangle$ が $f_\star$ に沿った g の左 Kan 拡張だから，cell τ が一意に存在して



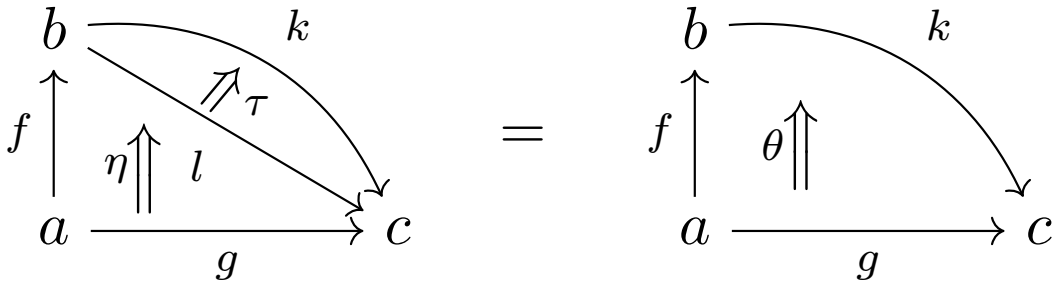
となる．このとき

証明.



となるから，$V(\mathbb{D})$ において $(\tau \bullet f) * \eta = \theta$，即ち

証明.



である．τ の一意性も容易に分かるから $V(\mathbb{D})$ において $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の左 Kan 拡張である． □

Kan 拡張

【定義】

$J\colon a \nrightarrow b$ に沿った $g\colon a \to c$ の各点左 Kan 拡張とは $l\colon b \to c$ と

cell $\begin{array}{ccc} a & \overset{J}{\longmapsto} & b \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta & \downarrow{\scriptstyle l} \\ c & = & c \end{array}$ の組で次を満たす: 任意の $\begin{array}{ccccc} a & \overset{J}{\longmapsto} & b & \overset{H}{\longmapsto} & u \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \Downarrow\theta & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & = & = & = & c \end{array}$

に対して，cell φ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{array}{ccccc} a & \overset{J}{\longmapsto} & b & \overset{H}{\longmapsto} & u \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta & \downarrow{\scriptstyle l} & \Downarrow\varphi & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & = & c & = & c \\ \| & & \Downarrow\rho & & \| \\ c & = & = & = & c \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccccc} a & \overset{J}{\longmapsto} & b & \overset{H}{\longmapsto} & u \\ & & & & \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \Downarrow\theta & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ c & = & = & = & c \end{array}$$

Kan 拡張

【定理】 (A)

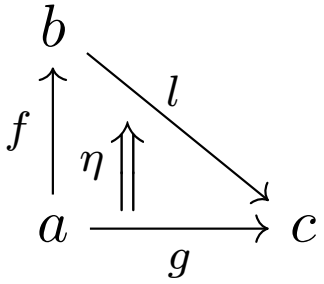
各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である.

証明.

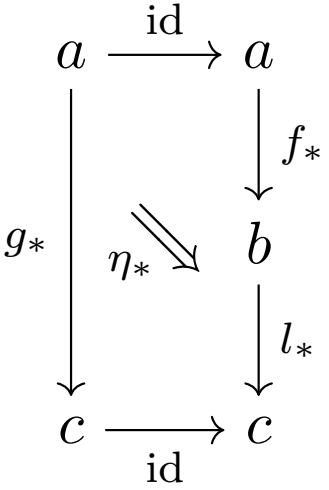
H として Ub を取ることで示せる. □

【定理】

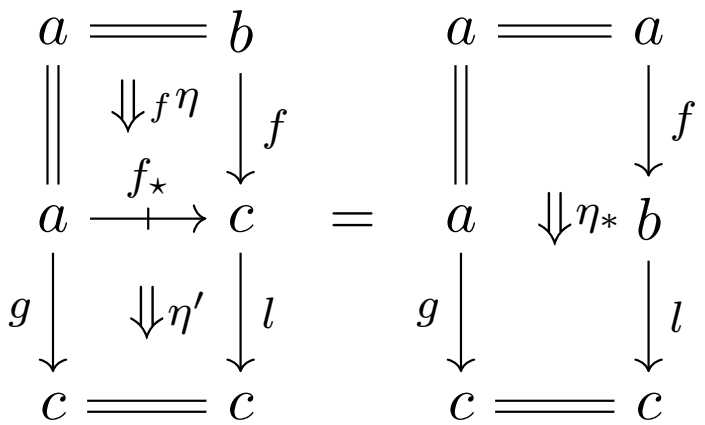
strict 2-category $\mathcal{B}$ の proarrow equipment $(-)_* \colon \mathcal{B} \to \mathcal{M}$ に対して，対応する framed bicategory $\mathbb{D}$ を取る．$\mathcal{B}$ の図式



から得られる $\mathcal{M}$ の図式

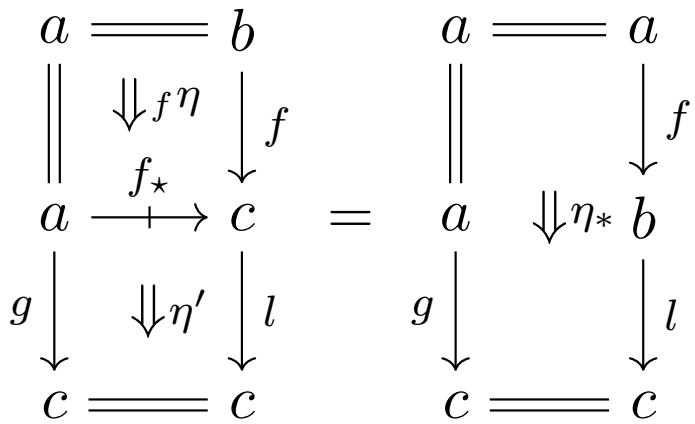


を $\mathbb{D}$ の cell η_* とみなして



と分解する．

【定理】



このとき
$\langle l, \eta' \rangle$ が f^* に沿った g の各点左 Kan 拡張
$\iff \mathcal{B}$ において $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の p-各点左 Kan 拡張.

□

こうして pseudo double category における各点左 Kan 拡張は p-各点左 Kan 拡張の一般化である.

【定義】

水平射 $J\colon a \nrightarrow b$ の tabulation とは組 $\langle\langle J\rangle, \pi\rangle$ であって

1. $\langle J\rangle \in \mathbb{D}$ は対象で π は cell $\begin{array}{ccc} \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$ である．
2. (1 次元的普遍性)

   $\begin{array}{ccc} u & = & u \\ {\scriptstyle q_a}\downarrow & \Downarrow\varphi & \downarrow{\scriptstyle q_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$ に対して $h\colon u \to \langle J\rangle$ が

   一意に存在して $\begin{array}{ccc} u & = & u \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow U h & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array} = \begin{array}{ccc} u & = & u \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$ となる．

【定義】

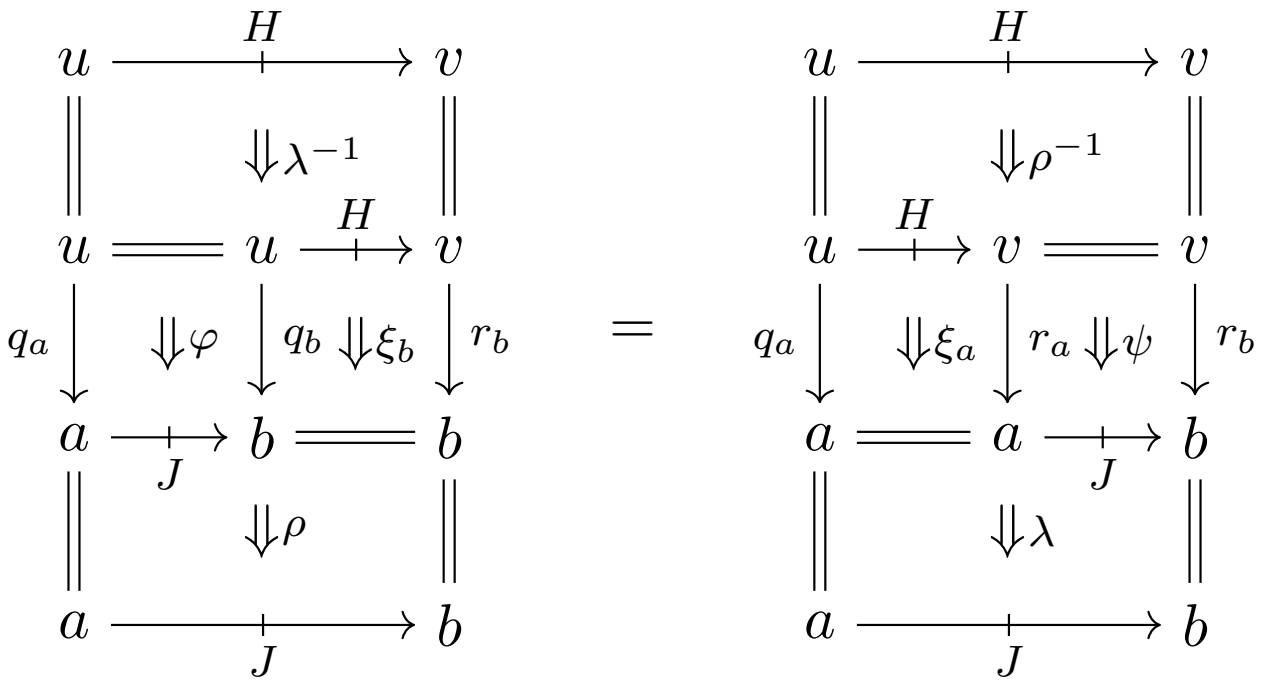
3. (2 次元的普遍性) cell $\begin{array}{ccc} u & = & u \\ {\scriptstyle q_a}\downarrow & \Downarrow\varphi & \downarrow{\scriptstyle q_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$, $\begin{array}{ccc} v & = & v \\ {\scriptstyle r_a}\downarrow & \Downarrow\psi & \downarrow{\scriptstyle r_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$ に対して，1 次元的普遍性により

$$\begin{array}{ccc} u & = & u \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow Uh & \downarrow{\scriptstyle h} \\ \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array} = \begin{array}{ccc} u & = & u \\ {\scriptstyle q_a}\downarrow & \Downarrow\varphi & \downarrow{\scriptstyle q_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} v & = & v \\ {\scriptstyle k}\downarrow & \Downarrow Uk & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array} = \begin{array}{ccc} v & = & v \\ {\scriptstyle r_a}\downarrow & \Downarrow\psi & \downarrow{\scriptstyle r_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$$

となるように h, k を取る．[続く]

【定義】

更に水平射 $H : u \nrightarrow v$ と cell ξ_a, ξ_b が等式



を満たすとする．[続く]

【定義】

このとき cell $\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{H} & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\xi & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \end{array}$ が一意に存在して等式

$$\begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{H} & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\xi & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow Up_a & \downarrow{\scriptstyle p_a} \\ a & = & a \end{array} = \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{H} & v \\ \downarrow{\scriptstyle q_a} & \Downarrow\xi_a & \downarrow{\scriptstyle r_a} \\ a & = & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{H} & v \\ {\scriptstyle h}\downarrow & \Downarrow\xi & \downarrow{\scriptstyle k} \\ \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_b}\downarrow & \Downarrow Up_b & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ b & = & b \end{array} = \begin{array}{ccc} u & \xrightarrow{H} & v \\ \downarrow{\scriptstyle q_b} & \Downarrow\xi_b & \downarrow{\scriptstyle r_b} \\ b & = & b \end{array}$$

が成り立つ.

Kan 拡張

【命題】

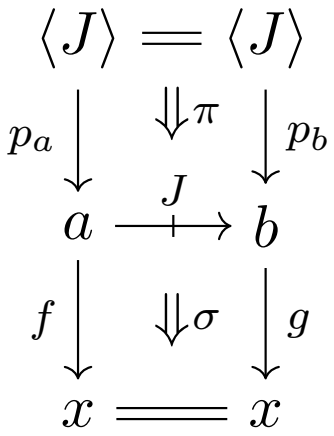
$f\colon a \to x$，$g\colon b \to x$ を $\mathbb{D}$ の垂直射として，次のような cartesian cell σ が存在し，更に J の tabulation が存在するとする．

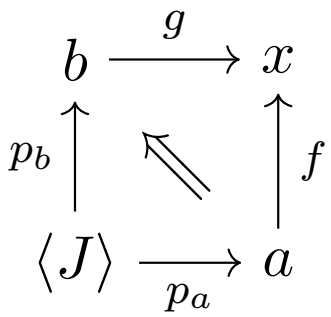
$$\begin{array}{ccc} \langle J \rangle & = & \langle J \rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \Downarrow\sigma & \downarrow{\scriptstyle g} \\ x & = & x \end{array}$$

このとき $V(\mathbb{D})$ において $\langle J \rangle$ は f と g のコンマ対象となる．

証明.

左の $\mathbb{D}$ の図式は，右の $V(\mathbb{D})$ の図式を与える．





tabulation の普遍性からコンマ対象の普遍性が示せる． □

Kan 拡張

【定理】

$\mathbb{D}$ を opcartesian tabulation を持つ framed bicategory とする．

cell $\begin{array}{ccc} a & = & a \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ c & = & b \end{array}$ を $\begin{array}{ccc} a & = & a \\ \| & \Downarrow f\eta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ a & \xrightarrow{f_\star} & b \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta' & \downarrow{\scriptstyle l} \\ c & = & c \end{array}$ $=$ $\begin{array}{ccc} a & = & a \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ c & = & b \end{array}$ と分解する

$\begin{array}{ccc} & & \\ {\scriptstyle l}\downarrow & & \\ & & \end{array}$

る．このとき

$\langle l, \eta' \rangle$ が $f_\star$ に沿った g の各点左 Kan 拡張 $\iff$ $V(\mathbb{D})$ において

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の c-各点左 Kan 拡張．

証明のため，補題を用意する．

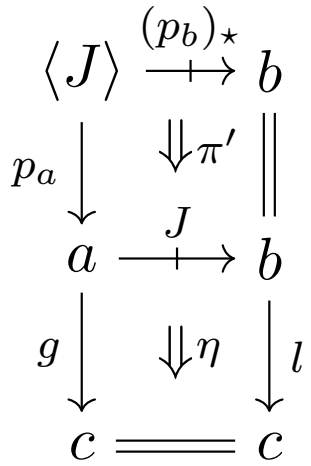
【補題】

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & b \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta & \downarrow{\scriptstyle l} \\ c & = & c \end{array}$$ を cell，$$\begin{array}{ccc} \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$$ を J の opcartesian tabulation とする．更に p_a の conjoint と p_b の companion が存在するとして，π を

$$\begin{array}{ccc} \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ \| & \Downarrow{\scriptstyle p_b}\eta & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ \langle J\rangle & \xrightarrow{(p_b)_\star} & b \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi' & \| \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} \langle J\rangle & = & \langle J\rangle \\ {\scriptstyle p_a}\downarrow & \Downarrow\pi & \downarrow{\scriptstyle p_b} \\ a & \xrightarrow[J]{} & b \end{array}$$

と分解する．

【補題】



このとき $J^\dagger g = \langle l, \eta \rangle \iff ((p_b)_*)^\dagger (g \circ p_a) = \langle l, \eta \circ \pi' \rangle$ $\square$

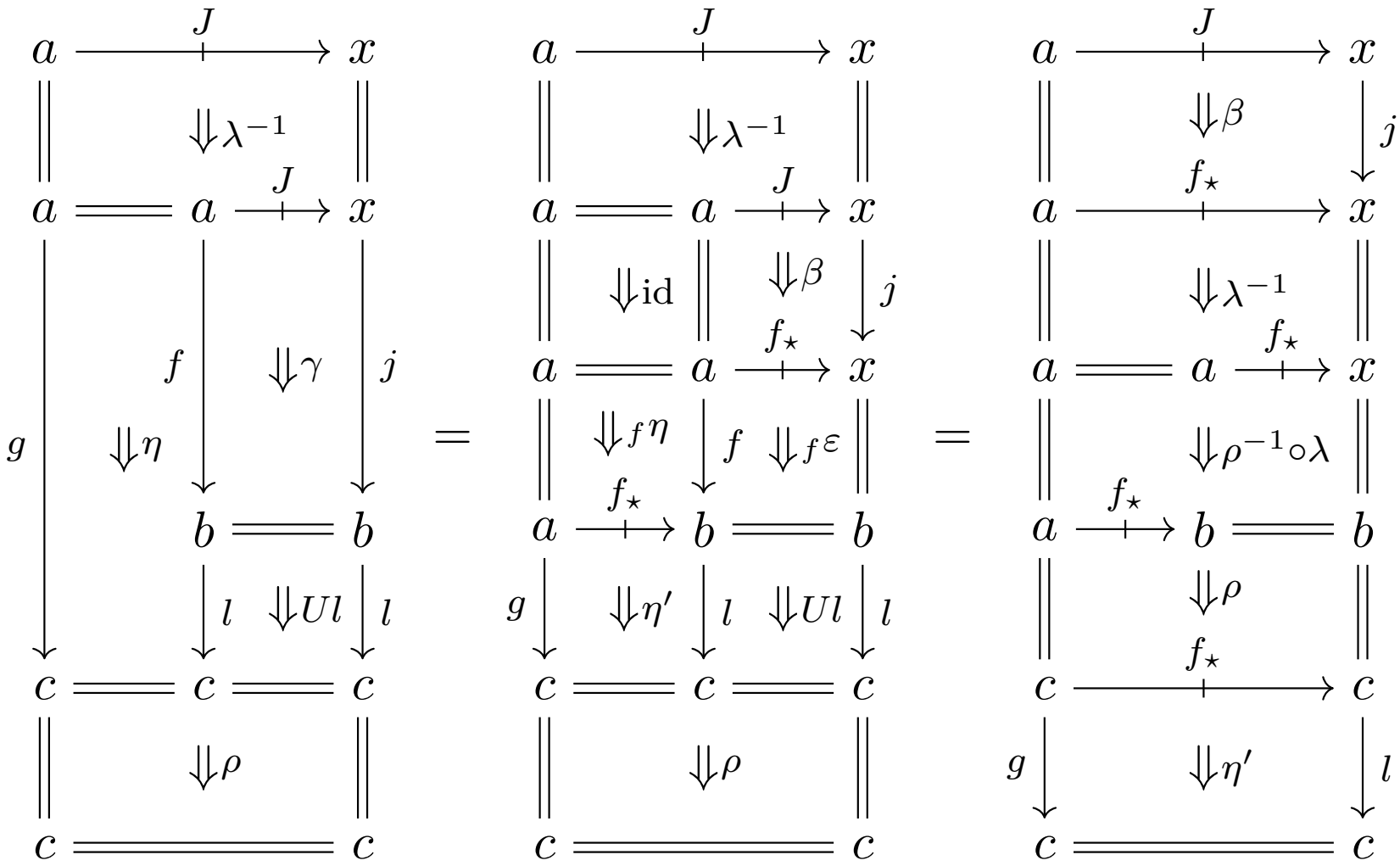
証明.

任意の垂直射 $j\colon x \to b$ に対して cartesian cell $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & x \\ \| & \Downarrow\beta & \downarrow j \\ a & \xrightarrow{f_\star} & b \end{array}$ を考

える． $\gamma :=$ $\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & x \\ \| & \Downarrow\beta & \downarrow j \\ a & \xrightarrow{f_\star} & b \\ f\downarrow & \Downarrow{}_f\varepsilon & \| \\ c & = & c \end{array}$ と定めると，β も ${}_f\varepsilon$ も cartesian だ

から γ も cartesian である．また

証明.

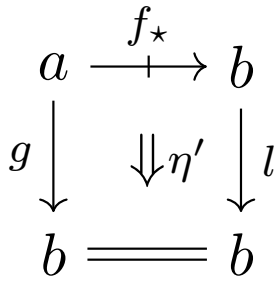

a J x
a a J x
b b
c c c
c c
J
f
j
g
l
$\Downarrow\lambda^{-1}$
$\Downarrow\eta$
$\Downarrow\gamma$
$\Downarrow Ul$
$\Downarrow\rho$
=
$\Downarrow\mathrm{id}$
$\Downarrow\beta$
$\Downarrow f\eta$
$\Downarrow f\varepsilon$
$f_\star$
$\Downarrow\eta'$
=
$\Downarrow\rho^{-1}\circ\lambda$

証明.

$$= \quad \begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{J} & x \\ \| & \Downarrow\beta & \downarrow j \\ a & \xrightarrow{f_\star} & b \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Downarrow\eta' & \downarrow{\scriptstyle l} \\ c & = & c \end{array}$$

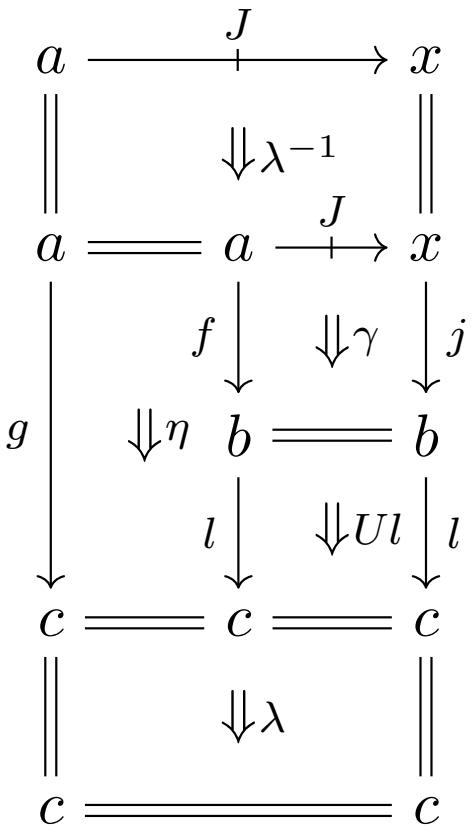
となる．ここで $\langle l, \eta' \rangle$ が $f_\star$ に沿った g の各点左 Kan 拡張である $\iff$ 任意の j に対して $\langle l \circ j, \eta' \circ \beta \rangle$ が J に沿った g の左 Kan 拡張である，となる．

証明.



が各点左 Kan 拡張である

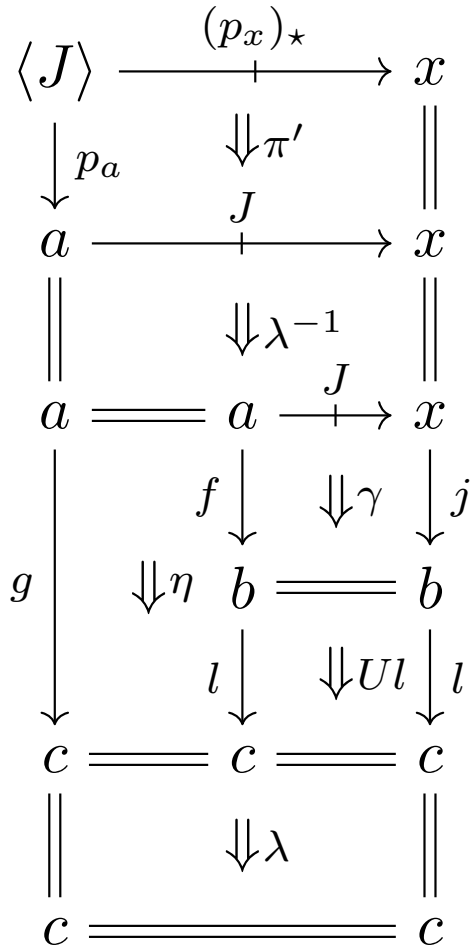
$\overset{\text{上記}}{\iff}$ 任意の j に対して



が左 Kan 拡張

証明.

$\overset{\text{補題}}{\iff}$ 任意の j に対して



が左 Kan 拡張

$\iff$ 任意の j に対して，$V(\mathbb{D})$ において $p_x^\dagger(g \circ p_a) = l \circ j$ $\square$

Kan 拡張

【 double category　まとめ 】

- proarrow equipment は framed bicategory と同等であり，この意味で pseudo double category は proarrow equipment の一般化である
- p-各点 Kan 拡張も pseudo double category における各点 Kan 拡張に一般化される
- c-各点 Kan 拡張も pseudo double category における各点 Kan 拡張で書ける
- 普遍随伴???

Kan 拡張

PDF はまだありません.
double category における各点 Kan 拡張の論文↓
S. R. Koudenburg, On pointwise Kan extensions in double categories
double category と proarrow equipment の関係について↓
M. A. Shulman, Framed Bicategories and Monoidal Fibrations