#豊穣圏は射が取れないからクソ

alg-d

今回の関西すうがく徒のつどい

- alg_d と申します．趣味で圏論をやっている者です．
- 最近は Youtube でスマブラをしています。(シュルク、パックマン)
- 今日はタイトルの Twitter タグの説明をします．
- (この講演に限らず) どんどん実況をしましょう (もう一日目終わりますが……)．
  タグ: #kansaimath303
  #alg_d #豊穣圏は射が取れないからクソ
  #全ての概念は Kan 拡張である
- この講演はスライドの撮影・Twitter 投稿は OK．
  (これは積極的にやれという意味です)
  (人が写らないようにしてください)

今回の関西すうがく徒のつどい

- 圏論は，すごい
- しかし圏論が適用できない場面もある
  $\Rightarrow$ 圏論を更に一般化して適用できる場面を増やしたい
  $\Rightarrow$ そのようなものの一つが豊穣圏論
- 圏論では $\mathrm{Hom}(a, b) \in \mathbf{Set} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Set}$ を圏 V に一般化
- でも一般化したら定理が成り立たなくなるんでしょ？
  $\Rightarrow$ 大体全部成り立ちます
  $\Rightarrow$ すごい！ 最強！

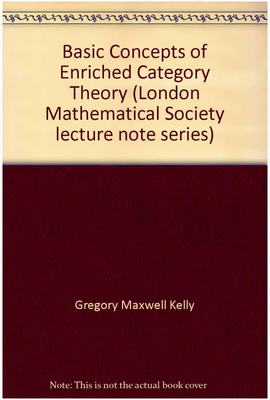
参考文献

Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory

http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html

通称 BEnri (alg_d 用語)

- 豊穣圏のことは大体書いてあり辞書として非常に便利
- Kan 拡張について異様に詳しいので通常の圏論の本としても有用
- 序盤の証明のギャップが超広いので~~殺意がわく~~勉強になる



参考文献

壱大整域, `http://alg-d.com/math/kan_extension/`


トップ > 数学 > 圏論

圏論

このページについて

※特に断らない限り、圏はlocally smallであると仮定しています。

※上から順に読むことを想定しています。

※定義が書いてない言葉があったりするので、その場合はnLabを見るなりしてください。

※選択公理は特に断らず使います。

意見・質問・感想・誤字や数学的間違いの指摘などはTwitterもしくはこのページのコメント欄まで。

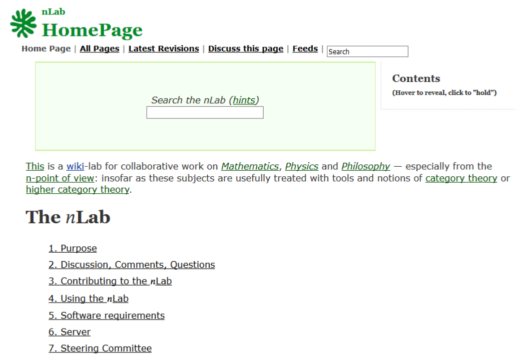
第0章　圏論入門

圏論を全く知らない人向けの解説です。圏論に馴染みのある方は飛ばしてもらって大丈夫です。

- 今日やる内容はだいたいここに書いてあります．
- 今日は一部証明を省略するので，ちゃんと追いたい人はここを読んでください
- BEnri で略された省略も載ってるので安心

参考文献

nLab, `https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage`



お馴染みのやつ

【定義】 (モノイド)

モノイド $\langle V, \otimes, I \rangle$ とは

1. V は集合である.
2. $\otimes \colon V \times V \to V$ は写像である.
3. $I \in V$ である.
4. $u, v, w \in V$ に対して $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$ である.
5. $u \in V$ に対して $I \otimes u = u$，$u \otimes I = u$ である.

【定義】 (モノイダル圏)

strict モノイダル圏 $\langle V, \otimes, I \rangle$ とは

1. V は~~集合~~圏である.
2. $\otimes \colon V \times V \to V$ は~~写像~~関手である.
3. $I \in V$ である.
4. $u, v, w \in V$ に対して自然に $(u \otimes v) \otimes w = u \otimes (v \otimes w)$ である.
5. $u \in V$ に対して自然に $I \otimes u = u$, $u \otimes I = u$ である.

【定義】 (モノイダル圏)

モノイダル圏 $\langle V, \otimes, I \rangle$ とは

1. V は~~集合~~圏である．
2. $\otimes : V \times V \to V$ は~~写像~~関手である．
3. $I \in V$ である．
4. $u, v, w \in V$ に対して自然に $(u \otimes v) \otimes w \cong u \otimes (v \otimes w)$ である．
5. $u \in V$ に対して自然に $I \otimes u \cong u$， $u \otimes I \cong u$ である．
6. coherence 条件

更に，ここではモノイダル圏に対して以下の条件を仮定する．
(以降，モノイダル圏と言ったら以下の条件は常に満たしているものとする．)

7. V は完備かつ余完備である．
8. $u, v \in V$ に対して自然に $u \otimes v \cong v \otimes u$ である (coherence 条件)．
9. $u \in V$ に対して関手 $- \otimes u \colon V \to V$ は右随伴 $[u, -] \colon V \to V$ を持つ．
(つまり $u, v, w \in V$ に対して自然に $\mathrm{Hom}_V(u \otimes v, w) \cong \mathrm{Hom}_V(u, [v, w])$ である．)

圏論の復習

- 同型射 $(u \otimes v) \otimes w \xrightarrow{\sim} u \otimes (v \otimes w)$ を α_{uvw} と書く．
- 同型射 $I \otimes u \xrightarrow{\sim} u$ を λ_u と書く．
- 同型射 $u \otimes I \xrightarrow{\sim} u$ を ρ_u と書く．
- 同型射 $u \otimes v \xrightarrow{\sim} v \otimes u$ を γ_{uv} と書く．

以下では，これらの添え字は省略して単に $\alpha, \rho, \lambda, \gamma$ と書く．

また，随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ に関して

- $\mathrm{id} \colon [u, v] \to [u, v]$ の随伴射 (=counit) を $\mathrm{ev} \colon [u, v] \otimes u \to v$ と書く．

【定理】 (普遍随伴)

C, U を圏とする．$\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[drr, bend left=10, "L \cong y^\dagger F"] & & \\
& & \\
C \arrow[uu, "y"] \arrow[rr, "F"'] & & U \arrow[uull, bend left=10, "K \cong F^\dagger y"] \arrow[uull, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}
$$

1. $F\colon C \to U$ を関手とする．
   各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するならば $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{C} \to U$ である．
2. 逆に $L \dashv K\colon \widehat{C} \to U$ ならば，
   ある $F\colon C \to U$ が存在して $L \cong y^\dagger F$，$K \cong F^\dagger y$ と書ける． $\square$

【定義】 (圏)

圏 C は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(C)$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(C)$)
2. $C(a, b)$: 集合　($\mathrm{Hom}_C(a, b)$ を単に $C(a, b)$ と書く)
3. $m_{abc} \colon C(b, c) \times C(a, b) \to C(a, c)$: 写像
4. $j_a \colon 1 = \{*\} \to C(a, a)$: 写像　($\mathrm{id}_a := j_a(*)$ と書く)
5. $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
   $\mathrm{id} \circ f = f$，$f \circ \mathrm{id} = f$

最後の 3 等式は次の図式の可換性で表せる．

$$
\begin{tikzcd}
& & \langle h, g, f \rangle \arrow[ddll, mapsto, bend right] \arrow[ddrr, mapsto, bend left] & & \\
& & C(c,d) \times C(b,c) \times C(a,b) \arrow[dl, "m_{bcd} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times m_{abc}"] & & \\
\langle h \circ g, f \rangle \arrow[ddr, mapsto, bend right] & C(b,d) \times C(a,b) \arrow[dr, "m_{abd}"'] & & C(c,d) \times C(a,c) \arrow[dl, "m_{acd}"] & \langle h, g \circ f \rangle \arrow[ddl, mapsto, bend left] \\
& & C(a,d) & & \\
& (h \circ g) \circ f \arrow[rr, equal] & & h \circ (g \circ f) &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\langle *, f \rangle \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddddr, mapsto, bend right] & & & f \arrow[dd, equal] \\
1 \times C(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[ddr, "j_b \times \mathrm{id}"'] & & C(a,b) & \\
& & & \mathrm{id}_b \circ f \\
& C(b,b) \times C(a,b) \arrow[uur, "m_{abb}"'] & & \\
& \langle \mathrm{id}_b, f \rangle \arrow[uurr, mapsto, bend right] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C(a,b) \times 1 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times j_a"'] & & C(a,b) \\
& C(a,b) \times C(a,a) \arrow[ur, "m_{aab}"'] &
\end{tikzcd}
$$

圏論の復習

【定義】 (圏)

圏 C は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(C)$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(C)$)
2. $C(a,b)$: 集合
3. $m_{abc} \colon C(b,c) \times C(a,b) \to C(a,c)$: 写像
4. $j_a \colon 1 \to C(a,a)$: 写像
5. 次が可換

$$\begin{tikzcd}
& C(c,d) \times C(b,c) \times C(a,b) \arrow[dl, "m_{bcd} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times m_{abc}"] & \\
C(b,d) \times C(a,b) \arrow[dr, "m_{abd}"'] & & C(c,d) \times C(a,c) \arrow[dl, "m_{acd}"] \\
& C(a,d) &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
1 \times C(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "j_b \times \mathrm{id}"'] & & C(a,b) \\
& C(b,b) \times C(a,b) \arrow[ur, "m_{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
C(a,b) \times 1 \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times j_a"'] & & C(a,b) \\
& C(a,b) \times C(a,a) \arrow[ur, "m_{aab}"'] &
\end{tikzcd}$$

定義

【定義】 (V-豊穣圏)

V をモノイダル圏とする．V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ は以下からなる:

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$)
2. $\mathcal{C}(a, b)$: ~~集合~~$\in V$　(以下では，しばしば $\mathcal{C}(a, b)$ を $\mathcal{C}_{ab}$ と書く)
3. $m_{abc}\colon \mathcal{C}(b, c) \cancel{\times} \otimes \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$: ~~写像~~ V の射
4. $j_a\colon \cancel{1}\ I \to \mathcal{C}(a, a)$: ~~写像~~ V の射
5. 次が可換 (次のページ)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{bcd}\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{abc}"] \\
\mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[dr, "m_{abd}"'] & & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[dl, "m_{acd}"] \\
& \mathcal{C}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[rr, "\lambda"] \arrow[dr, "j_b\otimes\mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\
& \mathcal{C}(b,b) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "m_{abb}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes j_a"'] & & \mathcal{C}(a,b) \\
& \mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(a,a) \arrow[ur, "m_{aab}"'] &
\end{tikzcd}$$

【定義】 (V-関手)

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏とする．V-関手 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ とは

1. 各対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して，対象 $Fa \in \mathcal{D}$ が与えられている．
2. $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，V の射 $F_{ab}\colon \mathcal{C}(a,b) \to \mathcal{D}(Fa, Fb)$ が与えられている．
3. 次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc} \otimes F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
\mathcal{D}(Fb,Fc) \otimes \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] & \mathcal{D}(Fa,Fc)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "j_a"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & \mathcal{C}(a,a) \arrow[d, "F_{aa}"] \\
 & \mathcal{D}(Fa,Fa)
\end{tikzcd}
$$

豊穣圏の例

【例】 (Set：集合と写像の圏)

Set は $\otimes$ を直積，I を一元集合とすることでモノイダル圏になる．
Set-豊穣圏とは locally small な圏のことである． □

【例】 (Cat：圏と関手の圏)

Cat は $\otimes$ を直積，I を一点圏とすることでモノイダル圏になる．
Cat-豊穣圏，**Cat**-関手は strict 2-category，strict 2-functor と一致する．
(前回の講演を参照) □

【例】 ($\mathbf{2} := \{0 \to 1\}$)

$\mathbf{2}$ は $\otimes$ を直積，$I := 1 \in \mathbf{2}$ とすることでモノイダル圏になる．
前順序集合 X を圏とみなすと，$\mathrm{Hom}_X(a, b) \in \mathbf{2}$ と考えることができる．これにより前順序集合は $\mathbf{2}$-豊穣圏である．逆に小 $\mathbf{2}$-豊穣圏は前順序集合とみなせる．

豊穣圏の例 (2)

【例】 ($\mathbf{2} := \{0 \to 1\}$)

順序集合 X が集合 A により $X \cong \mathcal{P}(A)$ と書ける

$\iff$ X が余完備で，アトミック (参考: Wikipedia の Atom (order theory))

証明.

$\Longrightarrow$ は略．$\Longleftarrow$ を示す．順序集合 X を $\mathbf{2}$-豊穣圏とみなす．

$A := \{x \in X \mid x$ はアトム $\}$ と定義して，

$F\colon A \to X$ を包含関手とする．

この場合 $\widehat{A} = \mathcal{P}(A)$ で，米田埋込 $y\colon A \to \widehat{A}$ とは

$A \ni x \longmapsto \{x\} \in \mathcal{P}(A)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(A) \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
A \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & X \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

普遍随伴により右の図式を得る．この随伴が同型 $X \cong \mathcal{P}(A)$ を与えることがアトムの性質よりわかる． $\square$

【例】 (Ab: アーベル群と準同型写像の圏)

Ab は $\otimes$ をテンソル積，$I := \mathbb{Z}$ とすることでモノイダル圏になる．
つまり **Ab**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ とは以下を満たすことをいう．

1. $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$: 対象の集まり　(以下 $a, b, c, d \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$)
2. $\mathcal{C}(a, b)$: アーベル群
3. $m_{abc} \colon \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$: 準同型
4. $j_a \colon \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(a, a)$: 準同型
5. 次が可換 (省略)

Ab-豊穣圏を前加法圏と呼ぶ場合もある．(文献により多少流儀の差があるっぽい)

【例】 (Ab: アーベル群と準同型写像の圏)

ここで

- 準同型 $j_a\colon \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(a, a)$ を与えるのは，$\mathrm{id}_a \in \mathcal{C}(a, a)$ を与えるのと同じ．
- 準同型 $m_{abc}\colon \mathcal{C}(b, c) \otimes \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$ を与えるのは，双線型写像 $\mathcal{C}(b, c) \times \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$ を与えるのと同じ．

従って **Ab**-豊穣圏とは

- 圏であって
- 各 Hom にアーベル群の構造が与えられており
- 合成を与える写像 $\mathrm{Hom}(b, c) \times \mathrm{Hom}(a, b) \to \mathrm{Hom}(a, c)$ が双線型になっている

もののことだと言い換えることができる．

豊穣圏の例 (Ab)

【例】 (**Ab:** アーベル群と準同型写像の圏)

$\mathcal{C}$ を **Ab**-豊穣圏として $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}$ であるとする．

- $R := \mathcal{C}(*, *)$ とすればこれはアーベル群である (演算を $+$ で表す)．
- $\mathcal{C}$ の射の合成 $m_{***} : \mathcal{C}(*, *) \otimes \mathcal{C}(*, *) \to \mathcal{C}(*, *)$ は
  双線型写像 $\cdot : R \times R \to R$ を与える．

Ab-豊穣圏の条件から $\langle R, +, \cdot \rangle$ は単位的環である．

逆に R を単位的環とすれば，$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) = \{*\}$，$\mathcal{C}(*, *) := R$ により
一点 **Ab**-豊穣圏 $\mathcal{C}$ が得られる．

こうして一点 **Ab**-豊穣圏は単位的環と同一視することができる．

豊穣圏の例 (Ab)

【例】 **(Ab: アーベル群と準同型写像の圏)**

次に R を単位的環 (即ち一点 $\mathbf{Ab}$-豊穣圏) として $\mathbf{Ab}$-関手 $F\colon R \to \mathbf{Ab}$ を考える．

- $\mathrm{Ob}(R) = \{*\}$ と書くと，$M := F(*)$ はアーベル群である．
- $r \in R$ (即ち $r\colon * \to *$) に対して $F_{**}(r)\colon M \to M$ は準同型である．
  (注　$F_{**}\colon R(*,*) \to \mathbf{Ab}(F(*), F(*)) = \mathbf{Ab}(M, M)$ は準同型写像)
- $r \in R$，$x \in M$ に対して $rx := F_{**}(r)(x)$ と書けば次が成り立つ．

$$r(x + x') = rx + rx', \quad (r + r')x = rx + r'x, \quad (rr')x = r(r'x), \quad \mathrm{id}_* x = x$$

即ち M は左 R 加群である．

逆に M を左 R 加群とすれば，$\mathbf{Ab}$-関手 $R \to \mathbf{Ab}$ が得られる．

こうして $\mathbf{Ab}$-関手 $R \to \mathbf{Ab}$ は左 R 加群と同一視することができる．

豊穣圏の例 (Ab)

【例】 (Ab: アーベル群と準同型写像の圏)

同様にして $\mathbf{Ab}$-関手 $R^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ は右 R 加群と同一視することができる．

従って $\mathbf{Ab}$-豊穣圏 $\mathcal{A}$ に対して $\widehat{\mathcal{A}} := \mathbf{Ab}^{\mathcal{A}^{\mathrm{op}}}$ とすると
$\widehat{R} = \mathbf{Ab}^{R^{\mathrm{op}}} = R\text{-}\mathbf{Mod}$ (右 R 加群がなす $\mathbf{Ab}$-豊穣圏) である．

米田埋込は
$$\begin{array}{ccc} y\colon R & \longrightarrow & \widehat{R} = R\text{-}\mathbf{Mod} \\ \Psi & & \Psi \\ * & \longmapsto & R(-,*) \end{array}$$
となる．

($R(-,*)$ は R 自身を積で右 R 加群とみなしたものに対応)

普遍随伴を $V = \mathbf{Ab}$，$C = R$，$U = S\text{-}\mathbf{Mod}$ の場合に適用すると次を得る．

豊穣圏の例 (Ab)

【例】 (Ab: アーベル群と準同型写像の圏)

R, S を単位的環とする．このとき $L \dashv K\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ ならば，
ある $P\colon R \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ が存在して $L \cong y^\dagger P$，$K \cong P^\dagger y$ と書ける．

$$\begin{tikzcd} R\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[dr, shift left, "L"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\ R \arrow[u, "y"] \arrow[r, "P"'] & S\text{-}\mathbf{Mod} \arrow[ul, shift left, "K"] \end{tikzcd}$$

ここで $P\colon R \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ は左 R 右 S 加群と同一視できる．
また $y^\dagger P \cong - \otimes_R P$ もわかる．

以上により，任意の左随伴 $R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ は $- \otimes_R P$ の形をしている．
(Eilenberg-Watts の定理) $\square$

豊穣圏の例 ($\mathbf{Ch}(R)$)

【例】 ($\mathbf{Ch}(R)$: 鎖複体の圏)

R を単位的可換環とする．R 加群の鎖複体 $\cdots \to M_{-1} \to M_0 \to M_1 \to \cdots$ 全体がなす圏 $\mathbf{Ch}(R)$ は $\otimes$ を鎖複体のテンソル積，I を $\cdots \to 0 \to R \to 0 \to \cdots$ とすることでモノイダル圏になる．

$\mathbf{Ch}(R)$-豊穣圏を dg-category という． $\square$

豊穣圏の例

【例】 (CGWH：コンパクト生成弱ハウスドルフ空間と連続写像の圏)

CGWH は $\otimes$ を直積，I を一点空間とすることでモノイダル圏になる．
CGWH-豊穣圏を topological category といい，$(\infty, 1)$-category の「モデル」である．(前回講演を参照) $\square$

【例】 ($\widehat{\mathbb{A}}$：単体的集合とその射 (自然変換) の圏)

$\widehat{\mathbb{A}}$ は $\otimes$ を直積，I を終対象とすることでモノイダル圏になる．
$\widehat{\mathbb{A}}$-豊穣圏を simplicial category といい，$(\infty, 1)$-category の「モデル」である．(前回講演を参照) $\square$

豊穣圏の例

ここまでは全て「Hom 集合になんらかの構造が入った圏」だったが
そうでない例ももちろん存在する．

豊穣圏の例 (距離空間)

【例】 (距離空間)

$\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{\infty\}$ として，通常と逆の順序 $\geq$ により圏とみなす．
これは $\otimes := +$，$I := 0$ とすることでモノイダル圏になる．

$\langle X, d \rangle$ を距離空間としたとき，$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏 $\mathcal{C}$ を以下のように定めることができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := X$．
- $\mathcal{C}(a, b) := d(a, b)$．
- 三角不等式 $d(b, c) + d(a, b) \geq d(a, c)$ が成り立つから，射 $\mathcal{C}(b, c) + \mathcal{C}(a, b) \to \mathcal{C}(a, c)$ が一意に存在する．これを m_{abc} とする．
- $d(a, a) = 0$ だから射 $0 \to \mathcal{C}(a, a)$ が一意に存在する．これを j_a とする．

こうして，$\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏を一般化された距離空間と見なすことができる．

【例】 (距離空間)

$\langle X, d_X \rangle, \langle Y, d_Y \rangle$ を距離空間 (即ち $\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏) とする．
$F\colon X \to Y$ を $\overline{\mathbb{R}}_+$-関手とする．
定義より，$a, b \in X$ に対して $\overline{\mathbb{R}}_+$ の射 $F_{ab}\colon X(a,b) \to Y(Fa, Fb)$ が存在する．
これは $d_X(a,b) \geq d_Y(Fa, Fb)$ を意味する．
従ってこの場合 F は Lipschitz 定数が 1 以下の Lipschitz 連続写像である．

【命題】

$\langle X, d\rangle$ を距離空間，$Y \subset X$ を部分空間とする．
$f\colon Y \to \mathbb{R}$ を $f \geq 0$ となる Lipschitz 連続関数とする．
L を f の Lipschitz 定数とする．(即ち $|f(y_0) - f(y_1)| \leq Ld(y_0, y_1)$．)
このとき $\widetilde{f}\colon X \to \mathbb{R}$ を $\widetilde{f}(x) := \inf_{y \in Y} (f(y) + Ld(x, y))$ で定めれば
これは f の延長で Lipschitz 連続である．

豊穣圏の例 (距離空間)

証明.

X, Y の距離を $d' := Ld$ に変えた距離空間を X', Y' とする．このとき $f\colon Y' \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 定数が 1 となる Lipschitz 連続関数である．よって f を $\overline{\mathbb{R}}_+$-関手 $Y' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ とみなすことができる．$i\colon Y' \to X'$ を包含関手として，左 Kan 拡張 $i^\dagger f\colon X' \to \overline{\mathbb{R}}_+$ を考えれば $i^\dagger f\colon X' \to \mathbb{R}$ は Lipschitz 連続となる．

$$
\begin{tikzcd}
X' \arrow[dr, "i^\dagger f"] & \\
Y' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \overline{\mathbb{R}}_+
\end{tikzcd}
$$

更に $i^\dagger f(x) = \displaystyle\int^{y \in Y'} X'(i(y), x) \odot f(y) = \inf_{y \in Y} (f(y) + Ld(x, y))$ である． $\square$

豊穣圏の例 (距離空間)

通常の圏 C に対して

$$\overline{C} := \{P \in \widehat{C} \mid P \text{ は右随伴を持つ in } \mathbf{Prof}\}$$

を C の Cauchy 完備化という．

- Cauchy 完備化は「任意の絶対余極限が存在する」ように C を広げたもの (のうち最小のもの)．
- 随伴関手定理の「余完備」を「Cauchy 完備」に変えたバージョンが存在する．

Cauchy 完備化は V-豊穣圏に対しても上記と同様に定義できる．

【例】 (距離空間)

距離空間の ($\overline{\mathbb{R}}_+$-豊穣圏としての) Cauchy 完備化は Cauchy 列による完備化と一致する． □

【定理】 (普遍随伴)

$\mathcal{C}, \mathcal{M}$ を V-豊穣圏とする．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{C}} \arrow[dr, shift left=2, "L \cong y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathcal{M} \arrow[ul, shift left=2, "K \cong F^\dagger y"]
\end{tikzcd}
$$

1. $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手とする．
   各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するならば $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ である．
2. 逆に $L \dashv K\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ ならば，
   ある $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ が存在して $L \cong y^\dagger F$，$K \cong F^\dagger y$ と書ける．

今日の目標

【※注意※】
V-豊穣圏と V-関手の条件には
「合成に関する条件」と「id に関する条件」の二つがある．

以降では，「id に関する条件」については省略し，扱わない．

（時間の都合・合成の方が難しいから・めんどくさい　などなど……）

V-関手の合成

【命題】

$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，$G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．

- $a \in \mathcal{A}$ に対して $GF(a) := G(F(a))$．
- $a, b \in \mathcal{A}$ に対して $(GF)_{ab} := \left(\mathcal{A}(a,b) \xrightarrow{F_{ab}} \mathcal{B}(Fa, Fb) \xrightarrow{G_{FaFb}} \mathcal{C}(GFa, GFb)\right)$．

と定めると GF は V-関手 $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ となる．

証明．

次の図式が可換であることを示せばよい．(id に関する条件は省略するので)

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}(b,c) \otimes \mathcal{A}(a,b) & \xrightarrow{\quad m_{abc} \quad} & \mathcal{A}(a,c) \\
{\scriptstyle (GF)_{bc} \otimes (GF)_{ab}} \big\downarrow & & \big\downarrow {\scriptstyle (GF)_{ac}} \\
\mathcal{C}(GFb, GFc) \otimes \mathcal{C}(GFa, GFb) & \xrightarrow[m_{GFaGFbGFc}]{} & \mathcal{C}(GFa, GFc)
\end{array}$$

証明.

今の図式を GF の定義により書き換えると次のようになる.

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(b,c) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "m_{abc}"] \arrow[d, "F_{bc} \otimes F_{ab}"'] \arrow[dr, phantom, "(F)"] & \mathcal{A}(a,c) \arrow[d, "F_{ac}"] \\
\mathcal{B}(Fb,Fc) \otimes \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[r, "m_{FaFbFc}"'] \arrow[d, "G_{FbFc} \otimes G_{FaFb}"'] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[d, "G_{FaFc}"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc) \otimes \mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[r, "m_{GFaGFbGFc}"'] & \mathcal{C}(GFa,GFc)
\end{tikzcd}
$$

F, G が V-関手だからこれは可換である. $\square$

V-関手の合成

※ これにより V-豊穣圏と V-関手は圏をなす (これを V-**Cat** で表す).

※ このように，豊穣圏論では Hom 自体を扱って証明する.
($f \in \mathcal{C}(a, b)$ は，取れない！) #豊穣圏は射が取れないからクソ

とはいえ，どうしても「$\mathcal{C}$ の射」を取りたくなる場面は存在する.
そこで (既に少し見てきたように) 次のようなことをする.

豊穣圏における射

V の射 $f\colon I \to \mathcal{C}(a,b)$ を単に $\mathcal{C}$ の射と呼び，記号で $f\colon a \not\rightarrow\!\!\!\!\!\!\!\!\;\;\; V\; b$ と表す．(alg_d 記法)

$f\colon a \nrightarrow b$，$g\colon b \nrightarrow c$ とする．
(即ち $f\colon I \to \mathcal{C}(a,b)$，$g\colon I \to \mathcal{C}(b,c)$ である．)
このとき合成 $g \circ f\colon a \nrightarrow c$ (即ち $g \circ f\colon I \to \mathcal{C}(a,c)$) を

$$I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{g \otimes f} \mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,c)$$

により定める．この合成が結合律を満たすことを示そう．

豊穣圏における射

$f\colon a \nrightarrow b$，$g\colon b \nrightarrow c$，$h\colon c \nrightarrow d$ とする．
定義より $(h \circ g) \circ f\colon a \nrightarrow d$ は

$$
\begin{aligned}
I &\xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\lambda^{-1} \otimes \mathrm{id}} (I \otimes I) \otimes I \xrightarrow{(h \otimes g) \otimes f} (\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \\
&\xrightarrow{m \otimes \mathrm{id}} \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,d)
\end{aligned}
$$

であり，$h \circ (g \circ f)\colon a \nrightarrow d$ は

$$
\begin{aligned}
I &\xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \lambda^{-1}} I \otimes (I \otimes I) \xrightarrow{h \otimes (g \otimes f)} \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \\
&\xrightarrow{\mathrm{id} \otimes m} \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \xrightarrow{m} \mathcal{C}(a,d)
\end{aligned}
$$

である．よって

次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & (I \otimes I) \otimes I \arrow[r, "(h\otimes g)\otimes f"] \arrow[dd, "\alpha"] & (\mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(b,c)) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dd, "\alpha"'] & \mathcal{C}(b,d) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[d, "m"] \\
I \otimes I \arrow[ur, "\lambda^{-1}\otimes \mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[r, phantom, "(V)"] & {} \arrow[r, phantom, "(\alpha)"] & {} \arrow[r, phantom, "(\mathcal{C})"] & \mathcal{C}(a,d) \\
 & I \otimes (I \otimes I) \arrow[r, "h\otimes(g\otimes f)"'] & \mathcal{C}(c,d) \otimes (\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] & \mathcal{C}(c,d) \otimes \mathcal{C}(a,c) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

(V) の部分は，coherence 条件より可換である．(α) の部分は α の自然性から可換である．$(\mathcal{C})$ の部分は豊穣圏の定義から可換である．

豊穣圏における射

次に $\mathcal{C}$ の射 $\mathrm{id}_a\colon a \nrightarrow a$ を $j_a\colon I \to \mathcal{C}(a,a)$ により定める．
すると $f\colon a \nrightarrow b$ に対して $\mathrm{id}_b \circ f = f$，$f \circ \mathrm{id}_a = f$ が成り立つ．

従って

- 対象は $\mathcal{C}$ と同じ．
- 射は「$\mathcal{C}$ の射」．

とすると圏になることがわかる．
これを $\mathcal{C}$ の underlying category といい $U(\mathcal{C})$ で表す．

豊穣圏における射

$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．
$f\colon a \nrightarrow b$ に対して $F(f)\colon Fa \nrightarrow Fb$ を合成

$$I \xrightarrow{f} \mathcal{C}(a,b) \xrightarrow{F_{ab}} \mathcal{D}(Fa,Fb)$$

で定める．すると $f\colon a \nrightarrow b$，$g\colon b \nrightarrow c$ に対して

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff, \quad F(\mathrm{id}_a) = \mathrm{id}_{Fa} \tag{$*$}$$

である．

※ 逆に $(*)$ が成り立っているからといって F が V-関手になるとは限らない．
このように「$\mathcal{C}$ の射を取ればオッケー✌️」とはならない．

【例】 (2-category を知ってる人向け)

このようなとき反例としてよく使われるのが
$V = \mathbf{Cat}$ の場合 (つまり strict 2-category) である．$\mathcal{C}$ を $\mathbf{Cat}$-豊穣圏とすると

$\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \mathrel{V\mkern-14mu\rightarrow} b$
$\iff$ 関手 $f\colon \mathbf{1} \to \mathcal{C}(a, b)$
$\iff$ 対象 $f \in \mathcal{C}(a, b)$
$\iff$ $\mathcal{C}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$

となる．つまりこの場合「$\mathcal{C}$ の射 $=$ $\mathcal{C}$ の 1-morphism」

$\mathcal{C}$ には 2-morphism もあるので当然 $\mathcal{C}$ の射を見るだけでは当然情報量が足りない．
例えば先の条件 $(*)$ は $\mathbf{Cat}$-関手から 2-morphism の条件が抜けている． $\square$

【命題 14】 (番号は enrich.pdf の命題番号)

V-豊穣圏 $\mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.
- $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) := \mathcal{C}(b,a)$.
- 合成は

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[d, equal] & & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{C}(c,b) \otimes \mathcal{C}(b,a) \arrow[r, "\gamma"] & \mathcal{C}(b,a) \otimes \mathcal{C}(c,b) \arrow[r, "m_{cba}"] & \mathcal{C}(c,a)
\end{tikzcd}$$

とする.
- 恒等射は $j_a \colon I \to \mathcal{C}(a,a) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,a)$ とする.

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を与える.

証明．(命題 14)

次の図式の可換性を示せばよい．(id に関する条件は省略するので)

$$
\begin{tikzcd}
\left(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,d) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c)\right) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m\otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,d) \otimes \left(\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,c) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b)\right) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m"] \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(b,d) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dr, "m"'] & & \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(c,d) \otimes \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "m"] \\
& \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(a,d) &
\end{tikzcd}
$$

opposite

証明．（命題 14）

m の定義を使って書き換えると次のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
\big(\mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \\
\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c)\big)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[d, "m_{dcb}\otimes\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\big(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes m_{cba}"] \\
\mathcal{C}(d,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"'] & & & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[dl, "\gamma"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(d,b) \arrow[dr, "m_{dba}"'] & & \mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[dl, "m_{dca}"] & \\
& & \mathcal{C}(d,a) & &
\end{tikzcd}
$$

証明．(命題 14)．

これは次の通り可換となる．

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\big(\mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(b,a)\big) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"] \\
\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c)\big)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"] \arrow[dd, "m_{dcb}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\gamma)"] & & (V) & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\big(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big) \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes m_{cba}"] \arrow[ddl, phantom, "(\gamma)"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\big(\mathcal{C}(c,b)\otimes\mathcal{C}(d,c)\big) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes m_{dcb}"] & & \big(\mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(c,b)\big)\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[ll, "\alpha"'] \arrow[dd, "m_{cba}\otimes\mathrm{id}"'] & \\
\mathcal{C}(d,b)\otimes\mathcal{C}(b,a) \arrow[dr, "\gamma"'] & & (\mathcal{C}) & & \mathcal{C}(d,c)\otimes\mathcal{C}(c,a) \arrow[dl, "\gamma"] \\
& \mathcal{C}(b,a)\otimes\mathcal{C}(d,b) \arrow[dr, "m_{dba}"'] & & \mathcal{C}(c,a)\otimes\mathcal{C}(d,c) \arrow[dl, "m_{dca}"] & \\
& & \mathcal{C}(d,a) & &
\end{tikzcd}
$$

□

豊穣圏の積

【命題 17】

V-豊穣圏 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ に対して V-豊穣圏 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ を以下で定めることができる.

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathcal{D})$.
- $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle) := \mathcal{C}(c_0, c_1) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_1)$.
- m は次の合成とする.

$$
\begin{aligned}
&\bigl(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_1, d_1 \rangle, \langle c_2, d_2 \rangle)\bigr) \otimes \bigl(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_1, d_1 \rangle)\bigr) \\
&= \bigl(\mathcal{C}(c_1, c_2) \otimes \mathcal{D}(d_1, d_2)\bigr) \otimes \bigl(\mathcal{C}(c_0, c_1) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_1)\bigr) \\
&\xrightarrow{\delta} \bigl(\mathcal{C}(c_1, c_2) \otimes \mathcal{C}(c_0, c_1)\bigr) \otimes \bigl(\mathcal{D}(d_1, d_2) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_1)\bigr) \\
&\xrightarrow{m \otimes m} \mathcal{C}(c_0, c_2) \otimes \mathcal{D}(d_0, d_2) = \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c_0, d_0 \rangle, \langle c_2, d_2 \rangle)
\end{aligned}
$$

- j は $I \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes I \xrightarrow{j_c \otimes j_d} \mathcal{C}(c, c) \otimes \mathcal{D}(d, d) = \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}(\langle c, d \rangle, \langle c, d \rangle)$ とする.

証明．(命題 17).

$$
\begin{tikzcd}
((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})(\mathcal{C}_{bc}\mathcal{D}_{b'c'}))(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\delta\otimes\mathrm{id}"] & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})((\mathcal{C}_{bc}\mathcal{D}_{b'c'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\delta"'] \\
((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{bc})(\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{b'c'}))(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr, "\delta"'] \arrow[dd, "(m\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[rrrr, phantom, "(V)"] & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})((\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'c'}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[dl, "\delta"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes m)"'] \\
& ((\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{bc})\mathcal{C}_{ab})((\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{b'c'})\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[rr, "\alpha\otimes\alpha"'] \arrow[dd, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ddrr, phantom, "(\mathcal{C})"] & & (\mathcal{C}_{cd}(\mathcal{C}_{bc}\mathcal{C}_{ab}))(\mathcal{D}_{c'd'}(\mathcal{D}_{b'c'}\mathcal{D}_{a'b'})) \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes(\mathrm{id}\otimes m)"'] & \\
(\mathcal{C}_{bd}\mathcal{D}_{b'd'})(\mathcal{C}_{ab}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr, "\delta"] \arrow[ur, phantom, "(\delta)"] & & & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{D}_{c'd'})(\mathcal{C}_{ac}\mathcal{D}_{a'c'}) \arrow[dl, "\delta"'] \arrow[ul, phantom, "(\delta)"] \\
& (\mathcal{C}_{bd}\mathcal{C}_{ab})(\mathcal{D}_{b'd'}\mathcal{D}_{a'b'}) \arrow[dr, "m\otimes m"'] & & (\mathcal{C}_{cd}\mathcal{C}_{ac})(\mathcal{D}_{c'd'}\mathcal{D}_{a'c'}) \arrow[dl, "m\otimes m"] & \\
& & \mathcal{C}_{ad}\mathcal{D}_{a'd'} & &
\end{tikzcd}
$$

□

これにより「2 変数の V-関手」を考えることができるようになる．

【命題 18】

$T\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．
$a \in \mathcal{A}$，$b, c \in \mathcal{B}$ に対して V の射 $T(a,-)_{bc}$ を合成

$$\mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{\lambda^{-1}} I \otimes \mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{j_a \otimes \mathrm{id}} \mathcal{A}(a,a) \otimes \mathcal{B}(b,c) \xrightarrow{T} \mathcal{C}(T(a,b), T(a,c))$$

とすると，これは V-関手 $T(a,-)\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を定める．

証明． (命題 18)

次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(c,d) \otimes \mathcal{B}(b,c) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "T(a,-)_{cd} \otimes T(a,-)_{bc}"'] & \mathcal{B}(b,d) \arrow[d, "T(a,-)_{bd}"] \\
\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d)) \otimes \mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[r, "m"'] & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,d))
\end{tikzcd}
$$

それは次のようにして分かる．

証明．(命題 18).

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & \mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & \mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\lambda^{-1}"] & \mathcal{B}_{bd} \arrow[dd, "\lambda^{-1}"] \\
(I\mathcal{B}_{cd})\mathcal{B}_{bc} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(V)"] & I(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & I\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "\lambda^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[r, phantom, "(V)"] & {} \\
(I\mathcal{B}_{cd})(I\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "(j_a\otimes\mathrm{id})\otimes(j_a\times\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\delta)"] & (II)(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[d, "(j_a\otimes j_a)\otimes(\mathrm{id}\times\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(\otimes)"] & (II)\mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "\lambda\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "(j_a\otimes j_a)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(j)"] & I\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "j_a\otimes\mathrm{id}"] \\
(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{cd})(\mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "\delta"'] \arrow[d, "T\otimes T"'] & (\mathcal{A}_{aa}\mathcal{A}_{aa})(\mathcal{B}_{cd}\mathcal{B}_{bc}) \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes m"'] \arrow[dr, phantom, "(T)"] & (\mathcal{A}_{aa}\mathcal{A}_{aa})\mathcal{B}_{bd} \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{A}_{aa}\mathcal{B}_{bd} \arrow[d, "T"] \\
\mathcal{C}(T(a,c),T(a,d))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(a,c)) \arrow[rrr, "m"'] & & & \mathcal{C}(T(a,b),T(a,d))
\end{tikzcd}
$$

$\square$

豊穣圏の積

同様にして V-関手 $T(-,b)\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ も

$$\mathcal{A}(a,c) \xrightarrow{\rho^{-1}} \mathcal{A}(a,c) \otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes j_b} \mathcal{A}(a,c) \otimes \mathcal{B}(b,b) \xrightarrow{T} \mathcal{C}(T(a,b), T(c,b))$$

により得られる.

V を豊穣圏にする

$u, v, w \in V$ とする．随伴 $- \otimes u \dashv [u, -]$ について，合成

$$([v,w] \otimes [u,v]) \otimes u \xrightarrow{\alpha} [v,w] \otimes ([u,v] \otimes u) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}} [v,w] \otimes v \xrightarrow{\mathrm{ev}} w$$

の随伴射を $m_{uvw} \colon [v,w] \otimes [u,v] \to [u,w]$ とする．

随伴の性質より，次の図式は可換である．(補題 15)

$$\begin{tikzcd}
([v,w] \otimes [u,v]) \otimes u \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "m_{uvw} \otimes \mathrm{id}"'] & & {[v,w] \otimes ([u,v] \otimes u)} \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mathrm{ev}"] \\
{[u,w] \otimes u} \arrow[dr, "\mathrm{ev}"'] & & {[v,w] \otimes v} \arrow[dl, "\mathrm{ev}"] \\
& w &
\end{tikzcd}$$

V を豊穣圏にする

【命題 16】

$\mathcal{V}$ を

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{V}) := \mathrm{Ob}(V)$.
- $\mathcal{V}(u, v) := [u, v]$.
- 合成は先に定義した $m_{uvw} \colon [v, w] \otimes [u, v] \to [u, w]$ とする.
- $j_u \colon I \to [u, u]$ は $\lambda \colon I \otimes u \to u$ の随伴射とする.

により定義すれば，これは V-豊穣圏 $\mathcal{V}$ を与える.

V を豊穣圏にする

証明． **(命題 16)**

$$
\begin{tikzcd}
{[w,x]\otimes([v,w]\otimes[u,v])} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] & {[w,x]\otimes[u,w]} \arrow[d, "m"] \\
 & {[u,x]} \\
{([w,x]\otimes[v,w])\otimes[u,v]} \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] & {[v,x]\otimes[u,v]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

これの可換性を示せばよい．

V を豊穣圏にする

証明. **(命題 16)**

$$
\begin{tikzcd}
(([w,x]\otimes[v,w])\otimes[u,v])\otimes \underline{u} \arrow[r, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\alpha\otimes\mathrm{id}"'] & ([v,x]\otimes[u,v])\otimes \underline{u} \arrow[d, "m\text{ の随伴射}"] \\
([w,x]\otimes([v,w]\otimes[u,v]))\otimes \underline{u} \arrow[r, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] & ([w,x]\otimes[u,w])\otimes \underline{u} \arrow[d, "m\text{ の随伴射}"] \\
& x
\end{tikzcd}
$$

V を豊穣圏にする

証明．(命題 16).

$$
\begin{tikzcd}
 & (\,[w,x]\otimes([v,w]\otimes[u,v]))\otimes u \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes m)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[rrd, phantom, "(\alpha)"] & & ([w,x]\otimes[u,w])\otimes u \arrow[d, "\alpha"] \\
 & {[w,x]}\otimes(([v,w]\otimes[u,v])\otimes u) \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(m\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\alpha"'] \arrow[rd, phantom, "(m)"] & & {[w,x]}\otimes([u,w]\otimes u) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
 & & {[w,x]}\otimes([v,w]\otimes v) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] & {[w,x]}\otimes w \arrow[d, "\mathrm{ev}"] \\
 & {[w,x]}\otimes([v,w]\otimes([u,v]\otimes u)) \arrow[ru, "\mathrm{id}\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev})"] \arrow[rd, phantom, "(\alpha)"] & \arrow[r, phantom, "(m)"] & x \\
 \arrow[r, phantom, "(V)"] & & ([w,x]\otimes[v,w])\otimes v \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[rd, phantom, "(\otimes)"] & {[v,x]}\otimes v \arrow[u, "\mathrm{ev}"'] \\
 & ([w,x]\otimes[v,w])\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[ru, "(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[rr, "m\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[rrd, phantom, "(\alpha)"] & & {[v,x]}\otimes([u,v]\otimes u) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
 & (([w,x]\otimes[v,w])\otimes[u,v])\otimes u \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "(m\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[uuuuuu, bend left=90, "\alpha\otimes\mathrm{id}"] & & ([v,x]\otimes[u,v])\otimes u \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

【命題 22】

$s \in \mathcal{C}$ とする．F を

- $a \in \mathcal{C}$ に対して $Fa := \mathcal{C}(s, a)$．
- $a, b \in \mathcal{C}$ に対して $F_{ab} \colon \mathcal{C}(a, b) \to [\mathcal{C}(s, a), \mathcal{C}(s, b)]$ を $m_{sab} \colon \mathcal{C}(a, b) \otimes \mathcal{C}(s, a) \to \mathcal{C}(s, b)$ の随伴射とする．

により定めれば，これは V-関手 $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を与える．
(この F を $\mathcal{C}(s, -)$ で表す．)

また $\mathcal{C}$ として $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を考えたときの V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(s, -) \colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{V}$ を $\mathcal{C}(-, s)$ で表す．

Hom-関手

証明. **(命題 22)**

次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "m"] \arrow[d, "F_{bc}\otimes F_{ab}"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[dd, "F_{ac}"] \\
{[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]} \arrow[dr, "m"'] & \\
 & {[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]}
\end{tikzcd}$$

随伴 $-\otimes\mathcal{C}(s,a)\dashv[\mathcal{C}(s,a),-]$ により，

証明. (命題 22)

次の図式が可換であることを示せばよい.

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c) \otimes \mathcal{C}(a,b)) \otimes \underline{\mathcal{C}(s,a)} \arrow[r, "m \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "(F_{bc} \otimes F_{ab}) \otimes \mathrm{id}"'] & \mathcal{C}(a,c) \otimes \underline{\mathcal{C}(s,a)} \arrow[dd, "m"] \\
([\mathcal{C}(s,b), \mathcal{C}(s,c)] \otimes [\mathcal{C}(s,a), \mathcal{C}(s,b)]) \otimes \underline{\mathcal{C}(s,a)} \arrow[dr] & \\
 & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

これは次のように可換とわかる.

証明．(命題 22).

$$
\begin{tikzcd}
(\mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\underline{\mathcal{C}(s,a)} \arrow[rr, "m\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dd, "(F\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \mathcal{C}(a,c)\otimes\underline{\mathcal{C}(s,a)} \arrow[dddddd, bend left=80, "m"] \\
& \mathcal{C}(b,c)\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[dd, "F\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ur, phantom, "(m)"] & \\
([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes\mathcal{C}(a,b))\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[dd, "(\mathrm{id}\otimes F)\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & & \mathcal{C}(b,c)\otimes\mathcal{C}(s,b) \arrow[dd, "F\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddd, bend left=60, "m"] \\
& {[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]}\otimes(\mathcal{C}(a,b)\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes(F\otimes\mathrm{id})"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & \\
([\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]\otimes[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)])\otimes\underline{\mathcal{C}(s,a)} \arrow[dd, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha"] \arrow[ur, phantom, "(\alpha)"] & & {[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]}\otimes\mathcal{C}(s,b) \arrow[dd, "\mathrm{ev}"] \arrow[dd, phantom, shift left=10ex, "(F)"] \\
& {[\mathcal{C}(s,b),\mathcal{C}(s,c)]}\otimes([\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,b)]\otimes\mathcal{C}(s,a)) \arrow[ur, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \arrow[ur, phantom, "(F)"] \arrow[d, phantom, "(**)"] & \\
{[\mathcal{C}(s,a),\mathcal{C}(s,c)]}\otimes\mathcal{C}(s,a) \arrow[rr, "\mathrm{ev}"'] & & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
$$

□

【命題 23】

$\mathcal{C}(-,\square)\colon \langle a,b\rangle \mapsto \mathcal{C}(a,b)$ は V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を定める．

この証明には【神の定理】（個人の感想です）を使う．

【神の定理】 (補題 19)

$\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を V-豊穣圏とする．$a \in \mathcal{A}$ に対して V-関手 $F^a\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ と，$b \in \mathcal{B}$ に対して V-関手 $G^b\colon \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ が与えられ，$F^a b = G^b a$ を満たすとする．
また $a, b \in \mathcal{A}$，$c, d \in \mathcal{B}$ について次の実線部が可換であるとする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b) \otimes \mathcal{B}(c,d) \arrow[r, "G^d_{ab} \otimes F^a_{cd}"] \arrow[dd, "\gamma"'] \arrow[dr, dashed, "T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle}"'] & \mathcal{C}(G^d a, G^d b) \otimes \mathcal{C}(F^a c, F^a d) \arrow[d, "m"] \\
 & \mathcal{C}(F^a c, G^d b) \\
\mathcal{B}(c,d) \otimes \mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "F^b_{cd} \otimes G^c_{ab}"'] & \mathcal{C}(F^b c, F^b d) \otimes \mathcal{C}(G^c a, G^c b) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

このとき $T(a,b) := F^a b = G^b a$，$T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle} := m \circ (G^d_{ab} \otimes F^a_{cd})$ と定義すれば，これは $T(a,-) = F^a$，$T(-,b) = G^b$ を満たす V-関手 $T\colon \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を与える．

※

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b)\otimes\mathcal{B}(c,d) \arrow[r, "G^d_{ab}\otimes F^a_{cd}"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, "T_{\langle a,c\rangle\langle b,d\rangle}"'] & \mathcal{C}(G^d a, G^d b)\otimes\mathcal{C}(F^a c, F^a d) \arrow[d, "m"] \\
 & \mathcal{C}(F^a c, G^d b) \\
\mathcal{B}(c,d)\otimes\mathcal{A}(a,b) \arrow[r, "F^b_{cd}\otimes G^c_{ab}"'] & \mathcal{C}(F^b c, F^b d)\otimes\mathcal{C}(G^c a, G^c b) \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}$$

この図式の可換性は $f\colon a \nrightarrow b$，$g\colon c \to d$ に対して

$$T(f,d)\circ T(a,g) = T(f,g) = T(b,g)\circ T(f,c)$$

となることに対応する．

【命題 23】

$\mathcal{C}(-,\square)\colon \langle a,b\rangle \mapsto \mathcal{C}(a,b)$ は V-関手 $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を定める．

証明．

一旦神の定理を認めると，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}_{dt} \otimes \mathcal{C}_{ca} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d)"] \arrow[dd, "\gamma"'] & \mathcal{C}_{dt} \otimes [\mathcal{C}_{ad}, \mathcal{C}_{cd}] \arrow[r, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id}"] & {[\mathcal{C}_{cd}, \mathcal{C}_{ct}] \otimes [\mathcal{C}_{ad}, \mathcal{C}_{cd}]} \arrow[d, "m"] \\
 & & {[\mathcal{C}_{ad}, \mathcal{C}_{ct}]} \\
\mathcal{C}_{ca} \otimes \mathcal{C}_{dt} \arrow[r, "\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id}"'] & {[\mathcal{C}_{at}, \mathcal{C}_{ct}] \otimes \mathcal{C}_{dt}} \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-)"'] & {[\mathcal{C}_{at}, \mathcal{C}_{ct}] \otimes [\mathcal{C}_{ad}, \mathcal{C}_{at}]} \arrow[u, "m"']
\end{tikzcd}
$$

証明．(命題 23)．

$$
\begin{tikzcd}
 & (\mathcal{C}_{dt}[\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "(\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dl, phantom, "(\alpha)"] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & & ([\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{cd}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & \mathcal{C}_{dt}([\mathcal{C}_{ad},\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[rr, "\mathcal{C}(c,-)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"] \arrow[ddr, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \arrow[drr, phantom, "(*)"] & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]}([\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{cd}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"] \\
(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ca})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[uur, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(-,d))\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dddd, "\gamma\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddddr, phantom, "(V)"] & \mathcal{C}_{dt}(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{C}(-,d)\otimes\mathrm{id})"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & & {[\mathcal{C}_{cd},\mathcal{C}_{ct}]}\mathcal{C}_{cd} \arrow[dd, "\mathrm{ev}"] \\
 & \mathcal{C}_{dt}(\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{ca}) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"] \arrow[ddr, phantom, "(m)"] & \mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{cd} \arrow[ur, "\mathcal{C}(c,-)\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "m"'] \arrow[r, phantom, "(**)"] & {} \\
 & & & \mathcal{C}_{ct} \\
 & (\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad})\mathcal{C}_{ca} \arrow[uu, "\alpha"] \arrow[r, "m\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "(\gamma)"] & \mathcal{C}_{at}\mathcal{C}_{ca} \arrow[ur, "m"'] \arrow[r, phantom, "(**)"] & {} \\
(\mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ddr, "(\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id})\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\alpha)"] & \mathcal{C}_{ca}(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[d, "\mathcal{C}(-,t)\otimes(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{C}_{ca}\mathcal{C}_{at} \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "\mathcal{C}(-,t)\otimes\mathrm{id}"] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]}\mathcal{C}_{at} \arrow[uu, "\mathrm{ev}"'] \\
 & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]}(\mathcal{C}_{dt}\mathcal{C}_{ad}) \arrow[urr, "\mathrm{id}\otimes m"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes(\mathcal{C}(a,-)\otimes\mathrm{id})"'] \arrow[drr, phantom, "(\alpha)"] & {} \arrow[r, phantom, "(**)"] & {[\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]}([\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{at}]\mathcal{C}_{ad}) \arrow[u, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{ev}"'] \\
 & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}]\mathcal{C}_{dt})\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}\otimes\mathcal{C}(a,-))\otimes\mathrm{id}"'] & & ([\mathcal{C}_{at},\mathcal{C}_{ct}][\mathcal{C}_{ad}\mathcal{C}_{at}])\mathcal{C}_{ad} \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}
$$

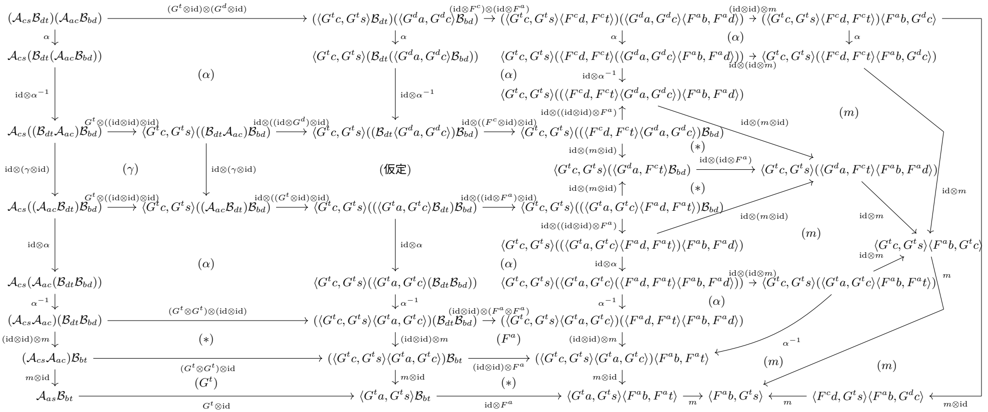
$\square$

神の定理の証明.

次の図式が可換であることを示せばよい．

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathcal{A}(c,s)\otimes\mathcal{B}(d,t))\otimes(\mathcal{A}(a,c)\otimes\mathcal{B}(b,d)) & \xrightarrow{m} & \mathcal{A}(a,s)\otimes\mathcal{B}(b,t) \\
{\scriptstyle T_{\langle c,d\rangle\langle s,t\rangle}\otimes T_{\langle a,b\rangle\langle c,d\rangle}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle T_{\langle a,b\rangle\langle s,t\rangle}} \\
\mathcal{C}(T(c,d),T(s,t))\otimes\mathcal{C}(T(a,b),T(c,d)) & \xrightarrow[m]{} & \mathcal{C}(T(a,b),T(s,t))
\end{array}
$$

神の定理の証明. (http://alg-d.com/test4.pdf)



$\square$

$u, v \in \mathcal{V}$ とすると

$$\mathrm{Hom}_V(I, [u, v]) \cong \mathrm{Hom}_V(I \otimes u, v) \cong \mathrm{Hom}_V(u, v) \qquad (**)$$

である．よって $\mathcal{V}$ の射 $u \nrightarrow v$ と V の射 $u \to v$ は一対一に対応する．

この対応により $U(\mathcal{V})$ は V と圏同型になることが分かる．

$\mathcal{V}$ の射 $f \colon u \nrightarrow v$ に対応する V の射を
$\widetilde{f} \colon u \to v$ と書くことにする．
同型 $(**)$ を追えば，$\widetilde{f} = \mathrm{ev} \circ (f \otimes \mathrm{id}) \circ \lambda^{-1}$ である．

$$\begin{tikzcd}
u \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\
I \otimes u \arrow[d, "f \otimes \mathrm{id}"'] & v \\
{[u, v] \otimes u} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathcal{C}$ の射 $f\colon a \nrightarrow b$ を取る．

$s \in \mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(s, -)\colon \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ は V-関手である．

よって $\mathcal{C}(s, f)\colon \mathcal{C}(s, a) \nrightarrow \mathcal{C}(s, b)$ は $\mathcal{V}$ の射となる．

$f \circ - := \widetilde{\mathcal{C}(s, f)}$ と書く． $\mathcal{C}(s, -)$ の定義を考慮すると次を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "\lambda^{-1}"'] \arrow[drr, "f\circ -"] & & \\
I \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "f\otimes \mathrm{id}"'] & & \mathcal{C}(s,b) \\
\mathcal{C}(a,b) \otimes \mathcal{C}(s,a) \arrow[urr, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

同様にして $- \circ f := \widetilde{\mathcal{C}(f, s)}$ と定めると次を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,s) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[drr, "- \circ f"] & & \\
\mathcal{C}(b,s) \otimes I \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes f"'] & & \mathcal{C}(a,s) \\
\mathcal{C}(b,s) \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[urr, "m"'] & &
\end{tikzcd}$$

豊穣圏における射

【命題 27】

$f\colon a \mathrel{\ooalign{$\nrightarrow$}}_{\mathcal{V}} b$，$g\colon b \nrightarrow_{\mathcal{V}} c$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，
$(g \circ -) \circ (f \circ -) = (g \circ f) \circ -$，$(- \circ f) \circ (- \circ g) = - \circ (g \circ f)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(s,a) \arrow[d, "f\circ-"'] \arrow[dr, "(g\circ f)\circ-"] & \\
\mathcal{C}(s,b) \arrow[r, "g\circ-"'] & \mathcal{C}(s,c)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(c,s) \arrow[d, "-\circ g"'] \arrow[dr, "-\circ(g\circ f)"] & \\
\mathcal{C}(b,s) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(a,s)
\end{tikzcd}
$$

□

【命題 29】

$f\colon a \mathrel{V\!\!\!\!\!\rightarrow} b$，$g\colon c \mathrel{V\!\!\!\!\!\rightarrow} d$ を $\mathcal{C}$ の射とするとき，
$(- \circ f) \circ (g \circ -) = (g \circ -) \circ (- \circ f)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(b,c) \arrow[r, "-\circ f"] \arrow[d, "g\circ -"'] & \mathcal{C}(a,c) \arrow[d, "g\circ -"] \\
\mathcal{C}(b,d) \arrow[r, "-\circ f"'] & \mathcal{C}(a,d)
\end{tikzcd}
$$

□

【定義】

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F, G \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．
V-自然変換 $\theta \colon F \Rightarrow G$ とは $\mathcal{D}$ の射の族 $\theta = \{\theta_a \colon Fa \nrightarrow Ga\}_{a \in \mathcal{C}}$ であって，
任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して次の図式が可換となるものである．

$$\begin{tikzcd}
 & I \otimes \mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\theta_b \otimes F_{ab}"] & \mathcal{D}(Fb,Gb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[dr, "m"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "\lambda^{-1}"] \arrow[dr, "\rho^{-1}"'] & & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
 & \mathcal{C}(a,b) \otimes I \arrow[r, "G_{ab} \otimes \theta_a"'] & \mathcal{D}(Ga,Gb) \otimes \mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

またこのとき $\theta_a \colon Fa \nrightarrow Ga$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然であるという．

【命題 31】

$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．$\theta_a\colon Fa \mathrel{\rlap{\,\,V}{\longrightarrow}} Ga$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然
$\iff$ 任意の $a, b \in \mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa, Fb) \arrow[dr, "\theta_b \circ -"] & \\
\mathcal{C}(a, b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[dr, "G_{ab}"'] & & \mathcal{D}(Fa, Gb) \\
 & \mathcal{D}(Ga, Gb) \arrow[ur, "- \circ \theta_a"'] &
\end{tikzcd}
$$

証明．(命題 31)．

「θ_a が $a \in \mathcal{C}$ について自然 (= 一番外側が可換) $\iff$ $(**)$ が可換」がわかる．

$$
\begin{tikzcd}
& I\otimes\mathcal{C}(a,b) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes F_{ab}"] \arrow[dr, phantom, "(\lambda)"] & I\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[r, "\theta_b\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Fb,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[ddr, "m"] & \\
& & \mathcal{D}(Fa,Fb) \arrow[u, "\lambda^{-1}"] \arrow[ddrr, "\theta_b\circ -"] & & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[uur, "\lambda^{-1}"] \arrow[urr, "F_{ab}"] \arrow[drr, "G_{ab}"'] \arrow[ddr, "\rho^{-1}"'] & & (**) & & \mathcal{D}(Fa,Gb) \\
& & \mathcal{D}(Ga,Gb) \arrow[d, "\rho^{-1}"'] \arrow[urr, "-\circ\theta_a"'] & & \\
& \mathcal{C}(a,b)\otimes I \arrow[r, "G_{ab}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "(\rho)"] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes I \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, "(*)"] & \mathcal{D}(Ga,Gb)\otimes\mathcal{D}(Fa,Ga) \arrow[uur, "m"'] &
\end{tikzcd}
$$

□

【命題】

V-関手 $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を対象，V-自然変換を射とすれば圏になる．(Fun$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ で表す)

証明.

$\theta_a \colon Fa \xrightarrow{V} Ga$，$\tau_a \colon Ga \xrightarrow{V} Ha$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然なとき
$\tau_a \circ \theta_a \colon Fa \xrightarrow{V} Ha$ も $a \in \mathcal{C}$ について自然なことを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(Fa, Fb) \arrow[dr, "\theta_b \circ -"] \arrow[rr, bend left, "(\tau_b \circ \theta_b) \circ -"] \arrow[dd, phantom, "(\theta)"] & & \\
 & & \mathcal{D}(Fa, Gb) \arrow[dr, "\tau_b \circ -"] \arrow[r, phantom, "(*)"] \arrow[dd, phantom, "(*)"] & {} \\
\mathcal{C}(a, b) \arrow[ur, "F_{ab}"] \arrow[r, "G_{ab}"'] \arrow[dr, "H_{ab}"'] & \mathcal{D}(Ga, Gb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] \arrow[dr, "\tau_b \circ -"] \arrow[dd, phantom, "(\tau)"] & & \mathcal{D}(Fa, Hb) \\
 & & \mathcal{D}(Ga, Hb) \arrow[ur, "-\circ\theta_a"'] \arrow[r, phantom, "(*)"] & {} \\
 & \mathcal{D}(Ha, Hb) \arrow[ur, "-\circ\tau_a"'] \arrow[rruu, bend right, "-\circ(\tau_a \circ \theta_a)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

V-自然変換

V-自然変換が定義できたので，Kan 拡張や随伴が圏論と同じようにして定義できる．

【定義】

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{M}$ を V-豊穣圏，
$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手とする．
F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^{\dagger}E, \eta \rangle$ であって

1. $F^{\dagger}E$ は V-関手 $\mathcal{D} \to \mathcal{M}$，$\eta$ は V-自然変換 $E \Rightarrow F^{\dagger}E \circ F$ である．
2. 普遍性

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, "F^{\dagger}E"'] \arrow[dr, bend left=50, "S"] \arrow[dr, phantom, bend left=25, "\Uparrow \tau"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[dr, bend left=50, "S"] & \\
\mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta \Uparrow"] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
$$

V-自然変換

【定義】

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，
$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$G\colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ を V-関手とする．
$F \dashv G$ とは，$c \in \mathcal{C}$，$d \in \mathcal{D}$ について自然な同型

$$\mathcal{D}(Fc, d) \cong \mathcal{C}(c, Gd)$$

が成り立つことをいう．

※ 2-category 知ってる人向け注意
$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ が圏になることを使うと
V-**Cat** が strict 2-category になることが示せる．

すると 2-category の一般論により，V-**Cat** における
Kan 拡張や随伴が定義できる (これはさっきした定義と一致する)．

故に 2-category の一般論から
「左随伴が左 Kan 拡張と交換すること」などが従う．

関手「圏」$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ は定義できたが，
我々は豊穣圏論をやっているので $\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ も V-豊穣圏にしたい．

(つまり，$U(\mathcal{X}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$ となるような
V-豊穣圏 $\mathcal{X}$ を定義したい．)

これは「エンド」を使うとできる．

【命題】 (圏論)

関手 $F, G \colon C \to D$ に対して $\mathrm{Hom}_{D^C}(F,G) \cong \int_{c\in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, Gc)$. $\square$

関手圏

【定義】

$\mathcal{C},\mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ を V-関手とする．$d\in\mathcal{D}$ として，$a\in\mathcal{C}$ に対して $\sigma_a\colon d\nrightarrow T(a,a)$ を $\mathcal{D}$ の射とする．σ_a が $a\in\mathcal{C}$ について自然とは，任意の $a,b\in\mathcal{C}$ に対して，次の図式が可換であることをいう．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D}(T(a,a),T(a,b)) \arrow[dr, "-\circ\sigma_a"] & \\
\mathcal{C}(a,b) \arrow[ur, "T(a,-)_{ab}"] \arrow[dr, "T(-,b)_{ba}"'] & & \mathcal{D}(d,T(a,b)) \\
 & \mathcal{D}(T(b,b),T(a,b)) \arrow[ur, "-\circ\sigma_b"'] &
\end{tikzcd}$$

【定義】

$\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$T\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$ を V-関手とする．
T のエンドとは組 $\langle e, \lambda \rangle$ であって，以下を満たすものである．

1. $e \in \mathcal{V}$ は対象である．
2. $\lambda_a\colon e \xrightarrow{V} T(a,a)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．
3. $\sigma_a\colon x \xrightarrow{V} T(a,a)$ が $a \in \mathcal{C}$ について自然なとき，$\mathcal{V}$ の射 $p\colon x \xrightarrow{V} e$ が一意に存在して $\lambda_a \circ p = \sigma_a$ となる．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, dashed, "p"] \arrow[dr, "\sigma_a"'] & e \arrow[d, "\lambda_a"] \\ & T(a,a) \end{tikzcd}$$

この e を記号 $\displaystyle\int_{c\in\mathcal{C}} T(c,c)$ で表す．また λ をこのエンドの counit という．

関手圏

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏とする．($\mathcal{C}$ は小さいとする．)

$F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．

$\mathcal{D}(F-, G\square)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{V}$

このとき対象 $[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G) \in V$ を

$$[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G) := \int_{a \in \mathcal{C}} \mathcal{D}(Fa, Ga)$$

で定義する (V の完備性からこのエンドは存在することがわかる)．

またこのエンドの counit の成分を $(\mathrm{ev}_a)_{FG}\colon [\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G) \to \mathcal{D}(Fa, Ga)$ と書く．

$F, G, H \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ として ρ_a を合成

$$
\begin{aligned}
[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H) \otimes [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G) &\xrightarrow{(\mathrm{ev}_a)_{GH} \otimes (\mathrm{ev}_a)_{FG}} \mathcal{D}(Ga, Ha) \otimes \mathcal{D}(Fa, Ga) \\
&\xrightarrow{m_{Fa,Ga,Ha}} \mathcal{D}(Fa, Ha)
\end{aligned}
$$

で定義する．この ρ_a は $a \in \mathcal{C}$ について自然であるから，
エンドの普遍性より次の点線の射が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
{[\mathcal{C},\mathcal{D}](G,H) \otimes [\mathcal{C},\mathcal{D}](F,G)} \arrow[r, dashed, "m_{FGH}"] \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{GH} \otimes (\mathrm{ev}_a)_{FG}"'] & {[\mathcal{C},\mathcal{D}](F,H)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{FH}"] \\
\mathcal{D}(Ga, Ha) \otimes \mathcal{D}(Fa, Ga) \arrow[r, "m_{Fa,Ga,Ha}"'] & \mathcal{D}(Fa, Ha)
\end{tikzcd}
$$

$j_{Fa}\colon I \to \mathcal{D}(Fa, Fa)$ は $a \in \mathcal{C}$ について自然である．

故にエンドの普遍性から，V の射 $j_F\colon I \to [\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, F)$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, dashed, "j_F"] \arrow[dr, "j_{Fa}"'] & {[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, F)} \arrow[d, "(\mathrm{ev}_a)_{FF}"] \\ & \mathcal{D}(Fa, Fa) \end{tikzcd}$$

が可換となる．また $\mathrm{Ob}([\mathcal{C}, \mathcal{D}]) := \mathrm{Ob}(\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D}))$ とする．

【定理】

今定義した $\mathrm{Ob}([\mathcal{C}, \mathcal{D}])$，$[\mathcal{C}, \mathcal{D}](F, G)$，$m_{FGH}$, j_F により
$[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ は V-豊穣圏となる．この $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ を関手圏という． $\square$

【命題】

$U([\mathcal{C},\mathcal{D}]) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$. $\square$

【定理】

$\mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Cat}}(\mathcal{A}\otimes\mathcal{B},\mathcal{C}) \cong \mathrm{Hom}_{V\text{-}\mathbf{Cat}}(\mathcal{B},[\mathcal{A},\mathcal{C}])$ $\square$

この定理で $\mathcal{C}(-,\square)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}}\otimes\mathcal{C}\to\mathcal{V}$ に対応する
V-関手 $y\colon\mathcal{C}\to\widehat{\mathcal{C}} := [\mathcal{C}^{\mathrm{op}},\mathcal{V}]$ を米田埋込という．

【定理】 (米田の補題)

$\mathcal{C}$ を V-豊穣圏，$F\colon\mathcal{C}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{V}$ を V-関手とする．
このとき $a\in\mathcal{C}$ に対して V での同型 $\widehat{\mathcal{C}}(y(a),F)\cong Fa$ が成り立つ． $\square$

【定義】

$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{M}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$E\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$，$T\colon \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ を V-関手とする．

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[dr, "T"] & \\ \mathcal{C} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

T が F に沿った E の各点左 Kan 拡張とは，$d \in \mathcal{D}$，$m \in \mathcal{M}$ に対して自然な同型

$$\mathcal{M}(Td, m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))$$

が成り立つことをいう．

【定理】

$\mathcal{C}, \mathcal{D}$ を V-豊穣圏，$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を V-関手とする．
このとき $d \in \mathcal{D}$ に対して $F^\dagger y(d) \cong \mathcal{D}(F-, d)$ である．特に $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ である．

証明.

各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在することはわかる．すると $d \in \mathcal{D}$，$P \in \widehat{\mathcal{C}}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(F^\dagger y(d), P) &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(y-, P)) \\ &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), P)\end{aligned}$$

だから米田の補題により $F^\dagger y(d) \cong \mathcal{D}(F-, d)$ である．

故に $y^\dagger y(P) \cong \widehat{\mathcal{C}}(y-, P) \cong P$ である． □

【定理】

$F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ を V-関手とする．
各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するならば $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ である．

証明．

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(y^\dagger F(P), m) &\cong \widehat{\mathcal{C}}(\widehat{\mathcal{C}}(y-, P), \mathcal{M}(F-, m)) \\ &\cong \widehat{\mathcal{C}}(P, F^\dagger y(m)).\end{aligned}$$

□

普遍随伴

【定理】

$L \dashv K \colon \widehat{\mathcal{C}} \to \mathcal{M}$ ならば，
ある $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ が存在して $L \cong y^\dagger F$，$K \cong F^\dagger y$ と書ける．

証明.

$F := L \circ y$ とすると，左随伴は左 Kan 拡張と交換するから

$$L = L \circ \mathrm{id} \cong L \circ (y^\dagger y) \cong y^\dagger (L \circ y) = y^\dagger F$$

となり，右随伴の一意性から $K \cong F^\dagger y$ も分かる． $\square$

まとめ

- 豊穣圏論は普遍随伴も成り立つ最強の理論．
  ガンガン使おう!
- 射が取れないせいで基本的な命題を示すのも死ぬほど大変．
  ~~証明を追うのは諦めよう~~

次回予告

- 今回は $\mathcal{M}(Td, m) \cong \widehat{\mathcal{C}}(\mathcal{D}(F-, d), \mathcal{M}(E-, m))$ を使って各点 Kan 拡張を定義した
- 通常の圏論のように「コンマ豊穣圏」を定義して各点 Kan 拡張を定義することは可能か？
  $\Rightarrow$ できるが，今回の定義とは一致しない (例: $V = \mathbf{Cat}$ の場合)
- つまり，一般の 2-category において「コンマ対象」による各点 Kan 拡張はできない (正確には，できるけどそれは豊穣圏論の一般化にはならない)
  $\Rightarrow$ どうする？？
  $\Rightarrow$ 次回、「各点 Kan 拡張概論 (仮)」にて説明します!!