可能な限り最短で Kan 拡張に到達する

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 6 日

当サイト (https://alg-d.com/math/kan_extension/) の PDF は，Kan 拡張に重点を置いた圏論の PDF であり，圏論の知識がゼロでも，前から読み進めていけば Kan 拡張を理解することができると考えます．が，現在ではかなりのボリュームがあり，とりあえずざっと Kan 拡張について知りたいという場合には向いていません．そこで，ここでは，可能な限り最短で Kan 拡張をざっと理解するための説明をします (最終目標は普遍随伴です)．細かい証明は省略したりする場合があるので，もっとしっかりした証明を知りたい場合は本編を読んでください．

目次

1 前提知識について 2
2 自然変換 2
3 米田 7
4 コンマ圏 9
5 余極限 11
6 随伴 13
7 Kan 拡張 14
8 普遍随伴 24

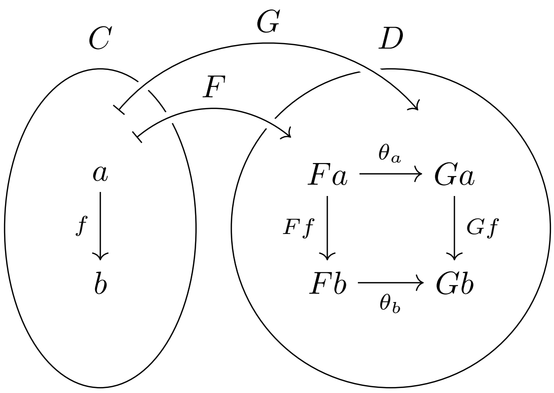
1　前提知識について

圏，関手の定義や，普遍性がどんな感じのものかについては知っているものとする．具体的には当サイト第 0 章の以下の PDF の内容が分かればよい．

- 『圏論とは何か』(intro.pdf)
- 『普遍性』(universality.pdf)
- 『双対』(dual.pdf)

2　自然変換

定義. C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手とする．F から G への自然変換とは，D の射の族 $\theta = \{\theta_a\colon Fa \to Ga\}_{a \in \mathrm{Ob}(C)}$ であって，C の射 $f\colon a \to b$ に対して $Gf \circ \theta_a = \theta_b \circ Ff$ を満たすものをいう．(またこのとき θ_a は a について自然であるという言い方をする．) 絵で書けば次のようになる．



θ が F から G への自然変換であることを記号で $\theta\colon F \Rightarrow G$ と表す．また θ_a を θ の a 成分と呼ぶ．

C, D を圏，$F, G\colon C \to D$ を関手，$\theta\colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．このとき，図式では次のように表す．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Downarrow"] & D \end{tikzcd}$$

さて，更に $H\colon C \to D$ を関手として $\sigma\colon G \Rightarrow H$ も自然変換とする．図式で書くと次のような状況となる．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\theta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\sigma\Downarrow"] & D
\end{tikzcd}$$

このとき，この自然変換 θ, σ を合成して新しい自然変換 $\sigma \circ \theta\colon F \Rightarrow H$ を得ることができる．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\circ\theta\Downarrow"] & D
\end{tikzcd}$$

そのためには $a \in C$ に対して $(\sigma \circ \theta)_a := \sigma_a \circ \theta_a$ と定義すればよい．この定義により $\sigma \circ \theta$ が自然変換となることを示そう．即ち C の射 $f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\sigma\circ\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, "(\sigma\circ\theta)_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

が可換となることを示す．定義より，この図式は次のように書き換えられる．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

θ, σ は自然変換だから，この小さい四角は可換となる．故に全体も可換となり，$\sigma \circ \theta$ が自然変換であることが分かった．

　この $\sigma \circ \theta$ を θ と σ の垂直合成と呼ぶ．

　さて，自然変換が合成できるという事は，関手を対象，自然変換を射とすれば圏になりそうである．実際，C, D を圏とするとき D^C を

- $\mathrm{Ob}(D^C)$ を C から D への関手全体とする．
- $F, G \in \mathrm{Ob}(D^C)$ に対して，自然変換 $F \Rightarrow G$ を F から G への射とする．

- 射の合成は垂直合成とする．
- $F \in \mathrm{Ob}(D^C)$ に対して，自然変換 $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$ を $(\mathrm{id}_F)_a := \mathrm{id}_{Fa}$ で定める．この id_F を恒等変換と呼ぶ．

で定義すれば，D^C は圏となる．これを関手圏と呼ぶ．

∵) それを示すため，まずは結合律を示す．$E, F, G, H \colon C \to D$ を関手として，$\theta \colon E \Rightarrow F$，$\sigma \colon F \Rightarrow G$，$\tau \colon G \Rightarrow H$ を自然変換とする．$(\tau \circ \sigma) \circ \theta = \tau \circ (\sigma \circ \theta)$ を示す．即ち，$a \in C$ に対して $((\tau \circ \sigma) \circ \theta)_a = (\tau \circ (\sigma \circ \theta))_a$ を示せばよい．定義から $(\tau_a \circ \sigma_a) \circ \theta_a = \tau_a \circ (\sigma_a \circ \theta_a)$ を示せばよいが，これは D が圏だから成り立つ．

後は $\theta \circ \mathrm{id}_E = \theta$ と $\mathrm{id}_F \circ \theta = \theta$ を示せばよい．それには $\theta_a \circ \mathrm{id}_{Ea} = \theta_a, \mathrm{id}_{Fa} \circ \theta_a = \theta_a$ を示せばよいが，これは D が圏だから成り立つ．

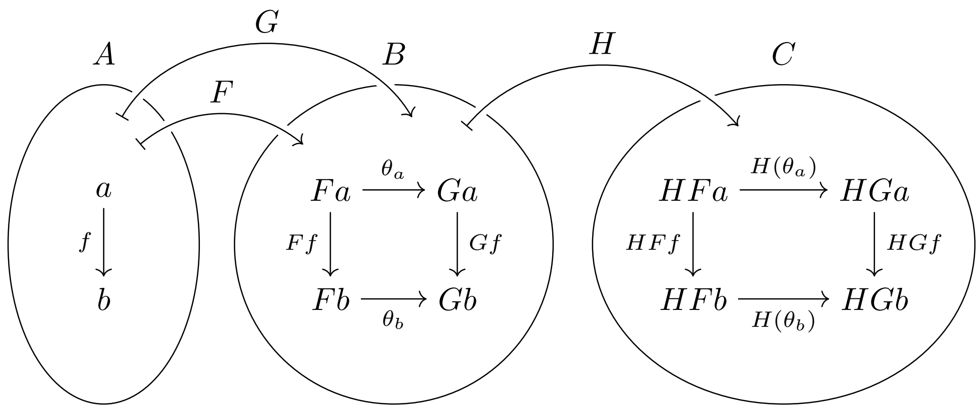
A, B, C を圏，$F, G \colon A \to B$ と $H \colon B \to C$ を関手，$\theta \colon F \Rightarrow G$ を自然変換とする．即ち次の図式のような状況である．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] & B \arrow[r, "H"] & C \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow \theta"] \end{tikzcd}$$

このとき H と θ を使って新しい自然変換 $H\theta \colon HF \Rightarrow HG$ を定義することができる．

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "H"] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow H\theta"] & \\ A \arrow[ur, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

そのためには $a \in A$ に対して $(H\theta)_a := H(\theta_a)$ と定義すればよい．ここで $\theta_a \colon Fa \to Ga$ だから $(H\theta)_a \colon HFa \to HGa$ である．絵で描けば次のようになる．



この定義により $H\theta$ が自然変換となることを示すためには，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
HFa \arrow[r, "(H\theta)_a"] \arrow[d, "HFf"'] & HGa \arrow[d, "HGf"] \\
HFb \arrow[r, "(H\theta)_b"'] & HGb
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは上の絵から明らかであろう．

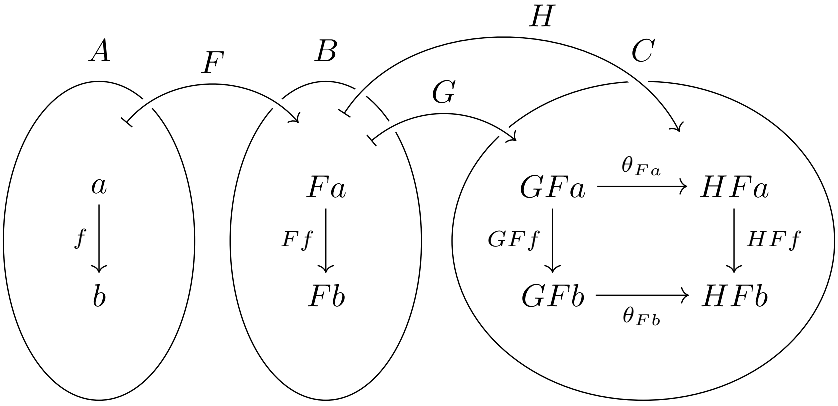
今度は A, B, C を圏，$F\colon A \to B$ と $G, H\colon B \to C$ を関手，$\theta\colon G \Rightarrow H$ を自然変換とする．即ち次の図式の状況である．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "F"] & B \arrow[r, bend left, "G"{name=U}] \arrow[r, bend right, "H"'{name=D}] & C \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\theta"]
\end{tikzcd}$$

このとき F と θ を使って新しい自然変換 $\theta_F\colon GF \Rightarrow HF$ を定義することができる．

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr, bend left, "G"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta_F"] & \\
A \arrow[ur, bend left, "F"] \arrow[dr, bend right, "F"'] & {} & C \\
 & B \arrow[ur, bend right, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

これは $a \in A$ に対して $(\theta_F)_a := \theta_{Fa}$ と定義すればよい．絵で描けば次のようになる．



この定義により θ_F が自然変換になることを示すためには，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
GFa \arrow[r, "(\theta_F)_a"] \arrow[d, "GFf"'] & HFa \arrow[d, "HFf"] \\
GFb \arrow[r, "(\theta_F)_b"'] & HFb
\end{tikzcd}$$

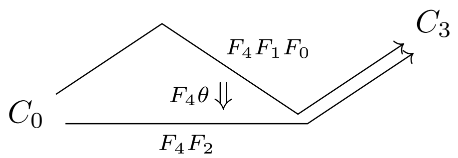
が可換であることを示せばよいが，それは上の絵から明らかであろう．

これらを使うと，様々な自然変換を合成することができるようになる．

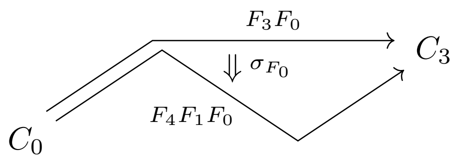
例 1. 次の $\theta\colon F_1F_0 \Rightarrow F_2$ と $\sigma\colon F_3 \Rightarrow F_4F_1$ を合成する．

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[rr, "F_3"] \arrow[dr, "F_1"] \arrow[d, phantom, "\theta\Downarrow"] & & C_3 \\
C_0 \arrow[ur, "F_0"] \arrow[rr, "F_2"'] & & C_2 \arrow[ur, "F_4"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\sigma"] &
\end{tikzcd}$$

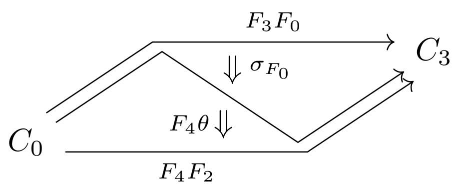
まず θ と F_4 から自然変換 $F_4\theta$ を得る．



次に σ と F_0 から自然変換 σ_{F_0} を得る．



これらを垂直合成して



自然変換 $F_4\theta \circ \sigma_{F_0}\colon F_3F_0 \Rightarrow F_4F_2$ が得られた． □

例 2. 次の自然変換 θ と σ を合成する．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left, "F_0"] \arrow[r, bend right, "F_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & B \arrow[r, bend left, "G_0"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & C
\end{tikzcd}$$

まず θ と G_0 から自然変換 $G_0\theta$ を得る.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=40, "G_0F_0"{name=U}] \arrow[r, bend right=30, "G_0F_1"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=D, phantom, "G_0\theta\Downarrow"]
\end{tikzcd}
$$

次に σ と F_1 から自然変換 σ_{F_1} を得る.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=30, "G_0F_1"{name=U}] \arrow[r, bend right=40, "G_1F_1"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\sigma_{F_1}"]
\end{tikzcd}
$$

これにより垂直合成 $\sigma_{F_1} \circ G_0\theta \colon G_0F_0 \Rightarrow G_1F_1$ を考えることができる.

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
A \arrow[r, bend left=40, "G_0F_0"{name=U}] \arrow[r, "{}"{name=M}] \arrow[r, bend right=40, "G_1F_1"'{name=D}] & C
\arrow[from=U, to=M, phantom, "G_0\theta\Downarrow"]
\arrow[from=M, to=D, phantom, "\Downarrow\sigma_{F_1}"]
\end{tikzcd}
$$

この合成を θ と σ の水平合成と呼ぶ. $\square$

3 米田

C を圏とする. $a, b \in C$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, b) \in \mathbf{Set}$ だった. よって a を固定したとき関数

$$
\begin{array}{cccc}
F\colon & \mathrm{Ob}(C) & \longrightarrow & \mathrm{Ob}(\mathbf{Set}) \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& b & \longmapsto & \mathrm{Hom}_C(a, b)
\end{array}
$$

を考えることができる. これは実は関手になる. そのためには C の射 $g\colon b \to b'$ に対して写像 $F(g)\colon \mathrm{Hom}_C(a, b) \to \mathrm{Hom}_C(a, b')$ を

$$
\begin{array}{cccc}
F(g)\colon & \mathrm{Hom}_C(a, b) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(a, b') \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& (a \xrightarrow{h} b) & \longmapsto & (a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{g} b')
\end{array}
$$

で定めればよい．

$\because$) この F が関手になっていることを示すには $b \in C$ に対して $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{Fb}$ と，$b \xrightarrow{g} b' \xrightarrow{g'} b''$ に対して $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$ を示せばよい．

$h \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ とする．定義より $F(\mathrm{id}_b)(h) = \mathrm{id}_b \circ h = h$ だから $F(\mathrm{id}_b) = \mathrm{id}_{Fb}$ である．また

$$\begin{aligned}(Fg' \circ Fg)(h) &= Fg'(Fg(h)) = Fg'(g \circ h) = g' \circ (g \circ h) \\ &= (g' \circ g) \circ h = F(g' \circ g)(h)\end{aligned}$$

だから $F(g' \circ g) = Fg' \circ Fg$ である．

この関手 F を Hom 関手といい，$\mathrm{Hom}_C(a, -)$ で表す．

同様にして関手 $\mathrm{Hom}_C(-, a)\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を考えることもできる．つまり $f\colon b' \to b$ に対して

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_C(f, a)\colon & \mathrm{Hom}_C(b, a) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_C(b', a) \\ & \cup & & \cup \\ & (b \xrightarrow{h} a) & \longmapsto & (b' \xrightarrow{f} b \xrightarrow{h} a) \end{array}$$

と定めるのである．この $\mathrm{Hom}_C(-, a)$ も Hom 関手という．

$a \in C$ に対して $y(a) := \mathrm{Hom}_C(-, a)$ と書く．これは関手 $y(a)\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ であるから，$\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ と書けば $y(a) \in \widehat{C}$ である．実はこの y は関手 $y\colon C \to \widehat{C}$ を与えることが分かる．この関手 $y\colon C \to \widehat{C}$ を米田埋込と呼ぶ．米田埋込は圏論で重要な役割を持つが，まず基本的な性質として次の定理がある (証明は省略する)．

定理 3 (米田の補題)**.** C を圏，$a \in C$ を対象，$P\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を関手とする．このとき全単射 $\varphi_{a,P}\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), P) \to P(a)$ が存在する． $\square$

米田の補題からすぐ分かる重要な事実として，次の系がある．

系 4. $y(a) \cong y(b)$ ならば $a \cong b$ である． $\square$

ここで，$y(a) \cong y(b)$ というのは，関手圏 $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ において $y(a)$ と $y(b)$ が同型であるということである．この条件を具体的に書き下すと次の定理が得られる．

定理 5. C を圏，$a, b \in C$ とする．$x \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(x, a) \cong \mathrm{Hom}_C(x, b)$ ならば，$a \cong b$ である． $\square$

双対を考えれば次の定理も得られる．

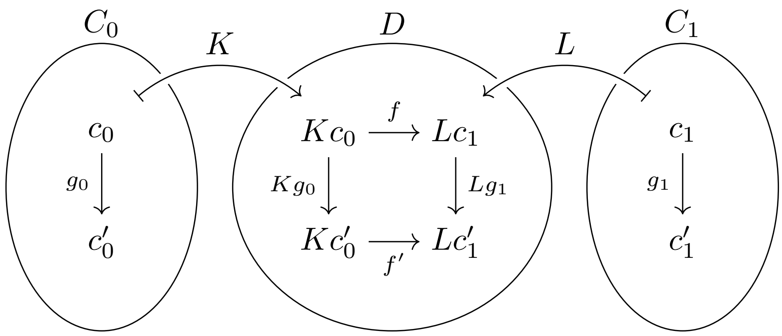
定理 6. C を圏，$a, b \in C$ とする．$x \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(a, x) \cong \mathrm{Hom}_C(b, x)$ ならば，$a \cong b$ である． $\square$

即ち，圏の対象が同型であるかどうかは，射の集合によって決定されるのである．(これは非常に良く使う重要な事実である．)

4 コンマ圏

定義. C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手とする．以下のようにして定まる圏をコンマ圏といい，$K \downarrow L$ と書く．

- $K \downarrow L$ の対象は組 $\langle c_0, c_1, f\rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) c_0 は C_0 の対象である．
  (2) c_1 は C_1 の対象である．
  (3) $f\colon Kc_0 \to Lc_1$ は D の射である．
- $K \downarrow L$ の射 $\langle c_0, c_1, f\rangle \to \langle c_0', c_1', f'\rangle$ とは組 $\langle g_0, g_1\rangle$ であり以下を満たすものである．
  (1) $g_0\colon c_0 \to c_0'$ は C_0 の射である．
  (2) $g_1\colon c_1 \to c_1'$ は C_1 の射である．
  (3) $Lg_1 \circ f = f' \circ Kg_0$，即ち以下の図式を可換にする．



C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手とする．コンマ圏 $K \downarrow L$ を考えると，関手 $P_0\colon K \downarrow L \to C_0$，$P_1\colon K \downarrow L \to C_1$ と自然変換 $\theta\colon K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ が以下のよ

うに定まる．

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
K \downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \theta"] & C_0 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_0\langle c_0, c_1, f \rangle := c_0$，$\langle g_0, g_1 \rangle \in \mathrm{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_0\langle g_0, g_1 \rangle := g_0$．
- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $P_1\langle c_0, c_1, f \rangle := c_1$，$\langle g_0, g_1 \rangle \in \mathrm{Mor}(K \downarrow L)$ に対して $P_1\langle g_0, g_1 \rangle := g_1$．
- $\langle c_0, c_1, f \rangle \in \mathrm{Ob}(K \downarrow L)$ に対して $\theta_{\langle c_0, c_1, f \rangle} := f$．

コンマ圏の重要な性質は，この $\langle K \downarrow L, P_0, P_1, \theta \rangle$ がある種の普遍性を持つ事である．

命題 7. C_0, C_1, D を圏，$K\colon C_0 \to D$，$L\colon C_1 \to D$ を関手として，上記のように関手 $P_0\colon K \downarrow L \to C_0$，$P_1\colon K \downarrow L \to C_1$ と自然変換 $\theta\colon K \circ P_0 \Rightarrow L \circ P_1$ を定める．このとき，別の組 $\langle X, Q_0, Q_1, \rho \rangle$ が同じ条件，即ち

- X は圏である．
- $Q_0\colon X \to C_0$ は関手である．
- $Q_1\colon X \to C_1$ は関手である．
- $\rho\colon K \circ Q_0 \Rightarrow L \circ Q_1$ は自然変換である．

$$
\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
X \arrow[u, "Q_1"] \arrow[r, "Q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \rho"] & C_0 \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば，関手 $H\colon X \to K \downarrow L$ が一意に存在して以下を満たす．

(1) $P_0 \circ H = Q_0$，$P_1 \circ H = Q_1$ である．

(2) 次の自然変換の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
 & K\downarrow L \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \theta"] & C_0 \arrow[u, "K"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & C_1 \arrow[r, "L"] & D \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow \rho"] & C_0 \arrow[u, "K"'] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

証明. $Q_0 \colon X \to C_0$，$Q_1 \colon X \to C_1$ を関手，$\rho \colon K \circ Q_0 \Rightarrow L \circ Q_1$ を自然変換とする．関手 $H \colon X \to K\downarrow L$ を

- 対象 $x \in X$ に対して $H(x) := \langle Q_0(x), Q_1(x), \rho_x \rangle$.
- 射 $f \in X$ に対して $H(f) := \langle Q_0(f), Q_1(f) \rangle$.

で定める．このとき明らかに条件 (1)(2) を満たす．またこの条件を満たす H は明らかにこれしかない． □

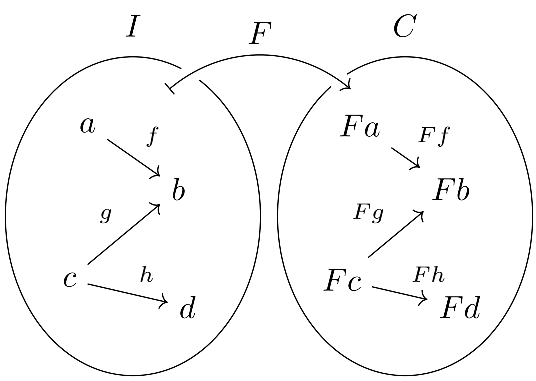
要するに，コンマ圏というのは，こういう形の図式のうちで一番「良い」ものになっているということである．

5 余極限

一般の余極限は以下のように定義される．まず，

定義. 圏 C における図式とは，関手 $F \colon I \to C$ のことをいう．また I を添え字圏という．

$F \colon I \to C$ を図式とする．このとき I 全体を F で写すことで，圏 C の中に I の形をした「図式」ができる．



こうしてできた図式の「余極限」を，F の余極限といい $\operatorname{colim} F$ と書く．より正確に定義すると次のようになる．

定義. $F\colon I \to C$ を図式とする．このとき F の余極限とは $\langle \operatorname{colim} F, \{\mu_i\}_{i\in I}\rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

- $\operatorname{colim} F$ は C の対象である．
- $i \in I$ に対して，μ_i は C の射 $\mu_i\colon Fi \to \operatorname{colim} F$ である．
- I の射 $f\colon i \to j$ に対して $\mu_j \circ Ff = \mu_i$ である．

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
& \operatorname{colim} F \\
Fj \arrow[ur, "\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

- $\langle x, \{\nu_i\}_{i\in I}\rangle$ が同じ条件を満たすならば，C の射 $h\colon \operatorname{colim} F \to x$ が一意に存在して，任意の $i \in I$ に対して $\mu_i \circ h = \nu_i$ を満たす．

$$\begin{tikzcd}
Fi \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\nu_i"] & & \\
& \operatorname{colim} F \arrow[r, dashed, "h"] & x \\
Fj \arrow[ur, "\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\nu_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

例えば I が離散圏の場合の余極限が余直積であり，$I = (\,\cdot \leftarrow \cdot \rightarrow \cdot\,)$ の場合が pushout である．最後に以下で使う言葉の定義をしておく．

定義.
- 添え字圏が小圏 ($\mathrm{Mor}(C)$ が集合となる圏 C のこと) となる図式の余極限を小余極限という．
- 任意の小余極限が存在する圏を余完備な圏という．例えば $\mathbf{Set}, \mathbf{Ab}$ などは余完備である．
- 関手 $F\colon C \to D$ が余極限と交換する
  $\iff$ $G\colon I \to C$ を図式として G の余極限 $\langle \operatorname{colim} G, \{\mu_i\}_{i\in I}\rangle$ が存在するとき，$\langle F(\operatorname{colim} G), \{F\mu_i\}_{i\in I}\rangle$ が $FG\colon I \to D$ の余極限となる．
  つまり図式

$$\begin{tikzcd}
Gi \arrow[d, "Gf"'] \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
& \operatorname{colim} G \\
Gj \arrow[ur, "\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

が G の余極限を与えているならば，これを F で写した図式

$$\begin{tikzcd}
FGi \arrow[dr, "F\mu_i"] \arrow[dd, "FGf"'] & \\
& F(\operatorname{colim} G) \\
FGj \arrow[ur, "F\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

が FG の余極限を与えるという事である．

極限に関しても同様に定義する (ここでは省略する).

6　随伴

定義. C, D を圏，$F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ を関手とする．$c \in C$，$d \in D$ について自然な全単射 $\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき，3 つ組 $\langle F, G, \varphi \rangle$ のことを随伴という．このとき記号では $F \dashv G\colon C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く．また F を G の左随伴関手，G を F の右随伴関手という．

ここでは随伴については詳しく説明しないが，代表的な例としては次のようなものがある．

例 8. $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ を，$x \in \mathbf{Set}$ に対して自由アーベル群 $Fx \in \mathbf{Ab}$ を対応させる関手とし，$U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．このとき $F \dashv U\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ である． □

例 9. a を集合とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を右から a を直積する関手，即ち $x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \times a \in \mathbf{Set}$ を対応させる関手とする．このとき $F \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, -)\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ である．（この関手 F を $- \times a$ などと書くことが多い．） □

また，以下で使う定理として次のようなものがある．(証明は省略する．)

定理 10. 関手 F の右随伴は同型を除いて一意である．即ち，$F \dashv G$，$F \dashv H$ ならば $G \cong H$ である． □

定理 11. 左随伴関手は余極限と交換する．右随伴関手は極限と交換する． □

7 Kan 拡張

定義. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張とは組 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) $F^\dagger E$ は関手 $D \to U$ で，η は自然変換 $E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ である．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F^\dagger E"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

(2) 組 $\langle S, \theta\rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S\colon D \to U$ は関手で $\theta\colon E \Rightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば，自然変換 $\tau\colon F^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる．即ち次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F^\dagger E"'] \arrow[drr, bend left, "S"] \arrow[drr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\tau"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

※ 自然変換の向きを逆にしたものを，F に沿った E の右 Kan 拡張という (記号では $F^\ddagger E$ と書く)．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F^\ddagger E"'] \arrow[drr, bend left, "S"] \arrow[drr, phantom, bend left=20, "\Downarrow\tau"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Downarrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\mathrm{Lan}_F E$，右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ を $\mathrm{Ran}_F E$ と書くこともある[*1]．

例 12. 余極限は左 Kan 拡張である．これはどういうことかというと $F\colon C \to \mathbb{1} = \{*\}$ を一意な関手としたとき，$F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E$ となる．(より正確に書くと $F^\dagger E(*) \cong \operatorname{colim} E$

[*1] というか，大抵の本・論文では Lan や Ran が使われている．

である．)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

これを理解するために，具体例として C が $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ という形の圏の場合を見てみよう．まず $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ は関手 E によって圏 U の図式 $Eb \xleftarrow{Ef} Ea \xrightarrow{Eg} Ec$ に写される．

$$\begin{tikzcd}
 & & b & & Eb \\
C \arrow[r, "E"'] & U & a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] & & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] \\
 & & c & & Ec \\
 & & & {} \arrow[r, mapsto, bend right, "E"'] & {}
\end{tikzcd}$$

一方，F により $b \xleftarrow{f} a \xrightarrow{g} c$ は $* \xleftarrow{\mathrm{id}_*} * \xrightarrow{\mathrm{id}_*} *$ に写される．

$$\begin{tikzcd}
 & & * & & \\
 & & * \arrow[u, "\mathrm{id}_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] & & \\
 & & * & & \\
\mathbb{1} & {} \arrow[u, mapsto, bend left, "F"] & & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U & & & \\
 & & b & & Eb \\
 & & a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] & & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] \\
 & & c & & Ec \\
 & & & {} \arrow[r, mapsto, bend right, "E"'] & {}
\end{tikzcd}$$

この $* \xleftarrow{\mathrm{id}_*} * \xrightarrow{\mathrm{id}_*} *$ は $F^\dagger E$ と S により U へと写される．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* & & & \\
* \arrow[u, "\mathrm{id}_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] \arrow[rrrddd, mapsto, bend left, "S"] \arrow[rrdd, mapsto, bend left, "F^\dagger E"] & & & \\
* & & & \\
b & Eb & F^\dagger E(*) & S* \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[uu, mapsto, bend left, "F"] \arrow[r, mapsto, "E"'] & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] & F^\dagger E(*) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & S* \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
c & Ec & F^\dagger E(*) & S*
\end{tikzcd}
$$

このとき，自然変換 η と θ は次の図式の赤い部分の射となり，またこれらが作る四角は可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift right=4, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[u, phantom, shift left=4, "\theta\Uparrow"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* & & & \\
* \arrow[u, "\mathrm{id}_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] \arrow[rrrddd, mapsto, bend left, "S"] \arrow[rrdd, mapsto, bend left, "F^\dagger E"] & & & \\
* & & & \\
b & Eb \arrow[r, red, "\eta_b"'] \arrow[rr, red, bend left, "\theta_b"] & F^\dagger E(*) & S* \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] \arrow[uu, mapsto, bend left, "F"] \arrow[r, mapsto, "E"'] & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] \arrow[r, red, "\eta_a"'] \arrow[rr, red, bend left, "\theta_a"] & F^\dagger E(*) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & S* \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
c & Ec \arrow[r, red, "\eta_c"] \arrow[rr, red, bend right, "\theta_c"'] & F^\dagger E(*) & S*
\end{tikzcd}
$$

左 Kan 拡張の条件は，このとき点線の射 τ_* が一意に存在して，図式が可換になるという

ことである．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "F^\dagger E" description] \arrow[dr, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
* & & & \\
* \arrow[u, "\mathrm{id}_*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_*"'] & & & \\
* & & & \\
b & Eb \arrow[r, "\eta_b"'] \arrow[rr, bend left, "\theta_b"] & F^\dagger E(*) \arrow[r, dashed, "\tau_*"'] & S* \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] & Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] \arrow[r, "\eta_a"'] \arrow[rr, bend left, "\theta_a"] & F^\dagger E(*) \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, dashed, "\tau_*"'] & S* \arrow[u, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
c & Ec \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[rr, bend right, "\theta_c"'] & F^\dagger E(*) \arrow[r, dashed, "\tau_*"] & S*
\end{tikzcd}
$$

ここで，id で繋がっている部分をまとめて 1 つにすると，次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
Eb \arrow[dr, "\eta_b"] \arrow[drr, bend left, "\theta_b"] & & \\
Ea \arrow[u, "Ef"] \arrow[d, "Eg"'] & F^\dagger E(*) \arrow[r, dashed, "\tau_*"'] & S* \\
Ec \arrow[ur, "\eta_c"] \arrow[urr, bend right, "\theta_c"'] & &
\end{tikzcd}
$$

つまり，$F^\dagger E(*)$ は $Eb \xleftarrow{Ef} Ea \xrightarrow{Eg} Ec$ の pushout である．

一般の場合にも，同じようにして $F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E$ となることが分かる．また，同様にして，極限が右 Kan 拡張であることも分かる． $\square$

さて，一般に $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手として，左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D \to U$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}
$$

このとき，定義だけでは $F^\dagger E$ がどういう関手なのかはよく分からないと思う．例えば，対象 $d \in D$ に対して，$F^\dagger E(d)$ は何になるのだろうか？ 実は，余極限 (極限) が左 Kan

拡張 (右 Kan 拡張) であることを使うと，「各点 Kan 拡張」という方法でこれを計算することができる．

まず対象 $d \in D$ を $d(*) = d$ となる関手 $d\colon \mathbf{1} \to D$ とみなしてコンマ圏 $F\!\downarrow\! d$ を考えれば次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \\
F\!\downarrow\! d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

これらの自然変換を第 2 節で説明した方法で合成すれば次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[drr, "F^\dagger E(d)"] & & \\
F\!\downarrow\! d \arrow[u, "P_1"] \arrow[rr, "EP_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

コンマ圏というのは，こういう形の図式のうちで一番「良い」ものだった (7) から，この図式も「良い」図式，即ち左 Kan 拡張になるのではないかと期待できる (実は一般にはそうなるとは限らない)．もしそうなってくれれば，この場合 P_1 に沿った左 Kan 拡張は余極限になる (例 12) から $F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F\!\downarrow\! d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となり，左 Kan 拡張が余極限に帰着できる．

実は，ある程度の仮定があれば上記の期待は正しいことが分かり，次の定理を示すことができる (証明は省略する)．

定理 13. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して余極限 $\mathrm{colim}(F\!\downarrow\! d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F\!\downarrow\! d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となる． $\square$

C が小圏ならば $F\!\downarrow\! d$ も小圏となる．故に次の系が得られる．

系 14. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．U が余完備で，C が小圏ならば，任意の関手 $E\colon C \to U$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する． $\square$

つまり，U が余完備[*2]であれば左 Kan 拡張は余極限で計算できると思ってしまってほぼ良いのである．

[*2] 応用上は大抵この条件は成り立っているので，最初から U は余完備であると思ってしまってもあまり問題ない．

さて，C, D, U を圏，$F\colon C \to D$ を関手として，任意の $E\colon C \to U$ に対して $F^\dagger E$ が存在するとする．このとき実は $E \mapsto F^\dagger E$ という対応は関手 $F^\dagger\colon U^C \to U^D$ を定めることが分かる (左 Kan 拡張の普遍性を使えばよい)．また，左 Kan 拡張の普遍性

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[drr, "F^\dagger E"{description}] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "E"'] \arrow[r, phantom, "\theta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

から，対応

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{U^C}(E, SF) \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\tau & \longmapsto & \theta = \tau_F \circ \eta
\end{array}
$$

は全単射であることが分かる．ここで関手 $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ を

- $K \in U^D$ に対して $F^{-1}(K) := KF$ とする．
- $\theta\colon K \Rightarrow L\colon D \to U$ に対して $F^{-1}(\theta) := \theta_F$ とする．

で定義すると先の全単射は

$$\mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, S) \cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(S))$$

と書ける．この同型は E, S について自然であることが分かる．つまり左 Kan 拡張は随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ を与えることになる．

なお，右 Kan 拡張に関しても，同様にして次の定理が得られる．

定理 15. C, D, U を圏として，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して極限 $\lim(d \downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が存在して $F^\ddagger E(d) \cong \lim(d \downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\ddagger E"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \\
d \downarrow F \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Searrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
$$

故に U が完備で C が小圏ならば $F^\ddagger E$ は存在する．

また，各 $E\colon C \to U$ に対して $F^\ddagger E$ が存在するならば，$F^\ddagger\colon U^C \to U^D$ は関手となり $F^{-1} \dashv F^\ddagger$ である． □

例 16. X, Y を集合, $f\colon X \to Y$ を写像とする．集合を離散圏とみなせば $f\colon X \to Y$ は関手である．また逆像を考える写像 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を考えると，これも $(\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ を包含関係による順序で圏とみなしたとき) 関手である．

圏 $\mathbb{2} = \{0 \to 1\}$ を考えれば圏同型 $\mathcal{P}(X) \cong \mathbb{2}^X$ が成り立つが，このとき今考えている関手 f^{-1} は $\mathbb{2}^Y \ni A \mapsto A \circ f \in \mathbb{2}^X$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "A"] & \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f^{-1}(A)"'] & \mathbb{2} \end{tikzcd}$$

つまり，この f^{-1} は先ほど定義した意味での関手 $f^{-1}\colon \mathbb{2}^Y \to \mathbb{2}^X$ と一致している．

一方 $\mathbb{2}$ は余完備だから, 系 14 より任意の $A\colon X \to \mathbb{2}$ に対して左 Kan 拡張 $f^{\dagger}A\colon Y \to \mathbb{2}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "f^{\dagger}A"] & \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "A"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \mathbb{2} \end{tikzcd}$$

故に関手 $f^{\dagger}\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ が得られて，$f^{\dagger} \dashv f^{-1}$ となる．この $f^{\dagger}$ を各点左 Kan 拡張で計算してみよう．

$A\colon X \to \mathbb{2}$ に対して $f^{\dagger}A$ を求めるため，$d \in Y$ を取りコンマ圏 $f \downarrow d$ を考える．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d"] & Y & \\ f \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{2} \end{tikzcd}$$

コンマ圏の定義から $f \downarrow d = \{x \in X \mid f(x) = d\} = f^{-1}(d)$ は離散圏である．故に

$$f^{\dagger}A(d) \cong \operatorname{colim}(f \downarrow d \xrightarrow{P_0} X \xrightarrow{A} \mathbb{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^{\dagger}A(d) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である．即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A)$ となる．従って $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f\colon \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である．

更に $\mathbb{2}$ は完備でもあるから，f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する．それを各点右 Kan 拡張により同様に計算してみると

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow"] & Y & \\
d\downarrow f \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{2}
\end{tikzcd}$$

$$f^\ddagger A(d) \cong \lim(d\downarrow f \to X \xrightarrow{A} \mathbb{2}) = \prod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\ddagger A(d) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり，$f^\ddagger A = Y \setminus f(X \setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる．

以上により，$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は左随伴，右随伴の両方を持つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, bend left=40, "f"] \arrow[r, bend right=40, "f_!"'] & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, "f^{-1}" description] \arrow[l, phantom, shift right=3, "\perp"] \arrow[l, phantom, shift left=3, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

従って定理 11 より f^{-1} は余極限，極限両方と交換する．特に次の等式が成り立つ:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

一方で $f\colon \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ は左随伴を持たない．それは f が極限と交換しないこと (例えば $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ とは限らない) から分かる． $\square$

例 17. (位相空間上の前層を知っている人向けの例．知らない人は飛ばしてください．)

位相空間 X に対して，X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．X 上の (集合の) 前層とは関手 $P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことであった．よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である．

X, Y を位相空間，$f\colon X \to Y$ を連続写像とする．このとき，X 上の前層 P に対して Y 上の前層 f_*P が $f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$ により定まり，関手 $f_*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を順像と

いうのであった．また関手 f_* は左随伴関手 f^* を持ち，これを逆像というのであった．さて，F を関手 $\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \ni U \longmapsto f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}$ とすれば，定義から $f_* = F^{-1}\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "P"] & \\
\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "f^{-1} =: F"] \arrow[r, "f_*(P)"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

故に左随伴の一意性から $f^* \cong F^\dagger$ が分かる．そこで前層 $P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ の逆像 $F^\dagger P \cong f^*(P)$ を各点左 Kan 拡張で計算してみよう．

$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコンマ圏 $F \downarrow U$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "U"] & \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} & \\
F \downarrow U \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger P(U) \cong \operatorname{colim}(F \downarrow U \to \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \operatorname*{colim}_{\langle V, h\rangle \in F\downarrow U} P(V)$ となる．コンマ圏の定義から

$$\begin{aligned}
\langle V, h\rangle \in F \downarrow U &\iff h\colon F(V) \to U \quad \text{in } \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \\
&\iff F(V) \supset U \\
&\iff f^{-1}(V) \supset U \\
&\iff V \supset f(U)
\end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \operatorname*{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$ となり，普段見る逆像の定義が現れる． $\square$

定義. 定理 13 の形で得られる左 Kan 拡張を各点左 Kan 拡張という．

各点左 Kan 拡張に対しては，次の重要な同型がある (証明は省略する).

定理 18. $F^\dagger E$ が各点左 Kan 拡張のとき，$d \in D$，$u \in U$ について自然な同型

$$\mathrm{Hom}_U(F^\dagger E(d), u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が成り立つ． $\square$

系 19. C を小圏，D を圏，$F\colon C\to D$ を関手とするとき $F^\dagger y(d)\cong \mathrm{Hom}_D(F-,d)$.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

証明. $\widehat{C}$ が余完備だから各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ が存在する．故に $P\in\widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d),P) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-,P)) && (\text{定理 } 18)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),P) && (\text{米田の補題})
\end{aligned}$$

となる．従って定理 6 により $F^\dagger y(d)\cong \mathrm{Hom}_D(F-,d)$ を得る． □

系 20. 小圏 C に対して $y^\dagger y\cong \mathrm{id}_{\widehat{C}}$ である．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y\cong \mathrm{id}_{\widehat{C}}"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

証明. 系 19 と米田の補題により，$P\in\widehat{C}$ について自然な同型 $y^\dagger y(P)\cong \mathrm{Hom}(y-,P)\cong P$ が成り立つ． □

系 21. 任意の前層 $P\in\widehat{C}$ は $y(c)$ の余極限で書ける．

証明. 系 20 により $y^\dagger y(P)\cong P$ であるが，一方各点左 Kan 拡張

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y\cong \mathrm{id}"] & \\
y\downarrow P \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C \arrow[u, "y"'] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

により $P\cong y^\dagger y(P)\cong \mathrm{colim}(y\downarrow P\xrightarrow{P_0} C\xrightarrow{y}\widehat{C})$ である． □

8　普遍随伴

定理 22. C を小圏，U を余完備な圏とすると，関手 $F\colon C \to U$ から 2 つの各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$，$F^\dagger y$ が得られる．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\dashv"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

※ この随伴を，twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる．一般に広く使われている名称は無いようだが，例えば nlab では nerve and realization というページがある．

証明. $P \in \widehat{C}$，$u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P), \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && (\text{定理 }18)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && (\text{米田の補題})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)) && (\text{系 }19)
\end{aligned}$$

となるので $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である．□

逆に次が成り立つ．

定理 23. 任意の随伴 $L \dashv R\colon \widehat{C} \to U$ はこのようにして得られる．

証明. $F := L \circ y\colon C \to U$ とする．随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．このとき $y^\dagger F \cong L$ となることが証明できる．右随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ も分かる．□

例 24. $C = \mathbb{1}$ とすれば $\widehat{\mathbb{1}} = \mathbf{Set}$ だから，随伴 $L \dashv R\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$ とすれば

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left, "L"] \arrow[dr, phantom, "\dashv"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \arrow[ul, shift left, "R"]
\end{tikzcd}$$

$L \cong y^\dagger F$，$R \cong F^\dagger y$ である．$x := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば，$a \in \mathbf{Set}$ について自然に

$$R(a) \cong F^\dagger y(a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a)$$

だから $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ である．一方 $L(a) \cong y^\dagger F(a) \cong \mathrm{colim}(y \downarrow a \to \mathbb{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ であって $y \downarrow a \cong a$ となるから

$$L(a) \cong \coprod_{b \in a} x \cong a \times x$$

により $L \cong - \times x$ である．故に，任意の随伴 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は $- \times x \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ の形をしている．

また $F \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を圏同値とすると，これは右随伴となるから，ある $x \in \mathbf{Set}$ を使って $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ と書ける．これが余極限と交換するためには $x = 1$ でなければならないから $F \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}$ である．即ち圏同値 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は自明なものしかない． □

例 25. $L \dashv R \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ を随伴とする．$F := L \circ y \colon \mathbb{1} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ と置けば $L \cong y^\dagger F$，$R \cong F^\dagger y$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=2, "L"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[ul, shift left=2, "R"]
\end{tikzcd}$$

よって $x := F(*)$ とすれば $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(x, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ が得られる．また任意の $a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, x)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a \times b, x) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x), b)
\end{aligned}$$

だから $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である．従って $L \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) = R$ となることが分かる[*3]． □

例 26. 小圏 J に対して随伴 $\Delta \dashv \lim \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^J$ が成り立つ．よって $F := \Delta \circ y$ と置

[*3] より正確に書けば $L \cong R^{\mathrm{op}}$ である．

けば，$T \in \mathbf{Set}^J$ に対して $\lim T \cong F^\dagger y(T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F(*), T)$ である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=1.5, "\Delta"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^J \arrow[ul, shift left=1.5, "\lim"] \arrow[ul, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}
$$

$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる． □

例 27. (位相空間上の層を知ってる人向けの例．詳しくは『例: 位相空間上の層　その 2』(sheaf_kan_extension.pdf) を参照)．)
位相空間 X に対して, X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．開集合 $U \in \mathcal{O}_X$ に対して $F(U)$ で包含写像 $U \to X$ を表すことにする．この F は関手 $F\colon \mathcal{O}_X \to \mathbf{Top}/X$ を定める．普遍随伴 (定理 22) により

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{O}_X} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] & \\
\mathcal{O}_X \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top}/X \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"] \arrow[ul, phantom, "\perp"]
\end{tikzcd}
$$

を得る．この随伴により「X 上の前層」は「コドメインが X となる連続写像」と大きな関係がある．というのも「コドメインが X となる連続写像」のうち良い性質を持つものとしてエタール束と呼ばれるものがあるが，実は $P \in \widehat{\mathcal{O}_X}$ に対して $y^\dagger F(P)$ はエタール束になることが分かる．そこで

- エタール束がなす充満部分圏を $\mathrm{Etale}(X) \subset \mathbf{Top}/X$ と書く．
- 層がなす充満部分圏を $\mathrm{Sh}(X) \subset \widehat{\mathcal{O}_X}$ と書く．

とすると $y^\dagger F$ は圏同値 $y^\dagger F\colon \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Etale}(X)$ を与えることが知られている (更に逆向きの圏同値は $F^\dagger y\colon \mathrm{Etale}(X) \to \mathrm{Sh}(X)$ になる)．つまり $y^\dagger F$ と $F^\dagger y$ により層とエタール束は同一視できるのである．この同一視がどうのようになっているのかというのは各点左 Kan 拡張を計算すればよいが，実際にやってみると層の通常の説明で出てくる対応のさせ方が出てくる． □

最後に普遍随伴が現れる例として単体的集合について述べる．(詳しくは『例: 単体的集合』(simplex.pdf) を参照．)

以下では $0 \in \mathbb{N}$ とする．

定義． $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$ として，これを通常の大小関係で順序集合，即ち圏とみなす．このとき $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Ob}(\mathbf{Cat})$ が定める充満部分圏を $\mathbb{\Delta}$ で表す．(従って $\mathbb{\Delta}$ の射とは順序を保つ写像である．)

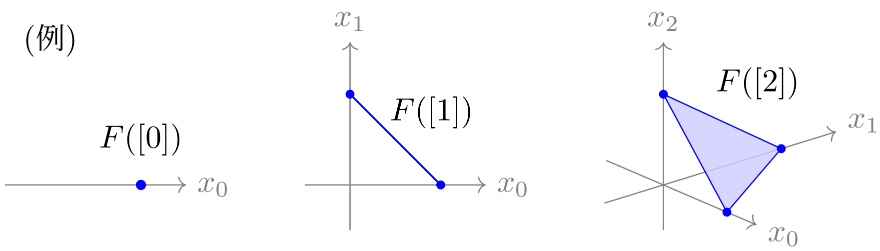
定義． 関手 $\mathbb{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ を単体的集合という．また単体的集合の間の射とは自然変換のこととする．故に $\widehat{\mathbb{\Delta}}$ が単体的集合の圏である．

$X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ とするとき，$k \in \mathbb{N}$ に対して通常 $X_k := X([k])$ と書く．$\Delta^n := y([n]) \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を standard n-simplex という．つまり $k \in \mathbb{N}$ に対して $\Delta^n_k = \mathrm{Hom}_{\mathbb{\Delta}}([k], [n])$ である．また系 21 より，任意の単体的集合 X は Δ^n の余極限で書ける．(即ちある関手 $T\colon J \to \mathbb{\Delta}$ が存在して $X \cong \mathrm{colim}(y \circ T) \cong \operatorname*{colim}_{j \in J} \Delta^{n_j}$ となる．ここで n_j は $[n_j] = Tj$ となるように取った．)

$n \in \mathbb{N}$ に対して位相空間 $F([n]) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ を次により定める．

$$F([n]) := \{\langle x_0, \cdots, x_n \rangle \in [0,1]^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1\}$$

(例)

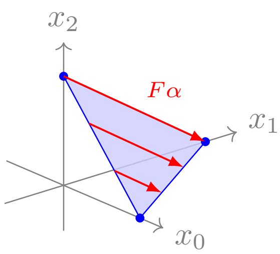


次に $\mathbb{\Delta}$ の射 $\alpha\colon [m] \to [n]$ に対して $F\alpha\colon F([m]) \to F([n])$ を次により定める．

$$F\alpha(x_0, \cdots, x_m) := \left\langle \sum_{i \in \alpha^{-1}(0)} x_i\,, \cdots, \sum_{i \in \alpha^{-1}(n)} x_i \right\rangle$$

(例) $\alpha\colon [2] \to [1]$　　$F\alpha\colon F([2]) \to F([1])$

$$\alpha(0) := 0$$
$$\alpha(1) := 1$$
$$\alpha(2) := 1$$



このとき F は関手 $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Top}$ になることが容易に分かるから普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．$|-| := y^\dagger F\colon \widehat{\mathbb{\Delta}} \to \mathbf{Top}$ を幾何学的実現，$\mathrm{Sing} := F^\dagger y\colon \mathbf{Top} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を singular functor と呼ぶ.

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=2, "|-|"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Top} \arrow[ul, "\mathrm{Sing}"] \arrow[ul, phantom, shift left=1, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

y が忠実充満だから $|\Delta^n| \cong F([n])$ である．また左随伴は余極限と交換するから, 単体的集合 X を上記のように $X \cong \operatorname*{colim}_{j\in J} \Delta^{n_j}$ と書けばその幾何学的実現は $|X| \cong \operatorname*{colim}_{j\in J} F([n_j])$ となる．(つまり $|X|$ は $F([n])$ を貼り合わせることで得られる位相空間である．)

次に $\mathbb{\Delta} \subset \mathbf{Cat}$ が充満部分圏だったから，これの包含関手を $F\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbf{Cat}$ とすれば普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が得られる．$\tau_1 := y^\dagger F$ と書き，$X \in \widehat{\mathbb{\Delta}}$ に対して $\tau_1(X)$ を X の fundamental category と呼ぶ．また $N := F^\dagger y\colon \mathbf{Cat} \to \widehat{\mathbb{\Delta}}$ を nerve functor という．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathbb{\Delta}} \arrow[dr, shift left=2, "\tau_1"] & \\
\mathbb{\Delta} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Cat} \arrow[ul, "N"] \arrow[ul, phantom, shift left=1, "\perp"]
\end{tikzcd}$$

これらの随伴は普遍随伴の具体例の中でも特に重要なものであり，これらの随伴を通して単体的集合，位相空間，圏の 3 つには様々な関係がある．