Kan 拡張

alg-d
`https://alg-d.com/math/kan_extension/`

2024 年 12 月 24 日

この PDF では Kan 拡張を定義して，それが各点 Kan 拡張と呼ばれる方法で計算できることを説明した後，Kan 拡張のよく使う基本的な性質を説明する．

目次

1 定義

関手 $F\colon C \to D$ と圏 U に対して，関手 $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ が $F^{-1}(S) := S \circ F$ により定まるのであった (第 1 章「自然変換・関手圏」の PDF を参照)．

定義． C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．F に沿った E の左 Kan 拡張 (left Kan extension of E along F) とは，E から F^{-1} への普遍射 $\langle F^{\dagger}E, \eta\rangle$ のことを

いう．

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\eta"] \arrow[rd, "\theta"'] & F^\dagger E \circ F \arrow[d, dashed, "\tau_F"] & F^\dagger E \arrow[d, dashed, "\tau"] \\
& S \circ F & S
\end{tikzcd}$$

即ち，以下の条件を満たす $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ のことである．

(1) $F^\dagger E$ は関手 $D \to U$ で，η は自然変換 $E \Rightarrow F^\dagger E \circ F$ である．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

(2) 組 $\langle S, \theta \rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S \colon D \to U$ は関手で $\theta \colon E \Rightarrow S \circ F$ は自然変換) ならば，自然変換 $\tau \colon F^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = \tau_F \circ \eta$ となる．即ち次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "F^\dagger E"'] \arrow[rd, bend left=45, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, bend left=45, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

(左辺の図では $F^\dagger E$ から S への点線の 2-セル τ)

自然変換 η を左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ の unit と呼ぶ．左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ を $\mathrm{Lan}_F E$ と書くこともある[*1]．

この PDF では主にこの左 Kan 拡張について述べるが，同じような概念として右 Kan 拡張，左 Kan リフト，右 Kan リフトがある．まず左 Kan 拡張の定義において自然変換の向きを逆にしたものが右 Kan 拡張 $\langle F^\ddagger E, \varepsilon \rangle$ である．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "F^\ddagger E"'] \arrow[rd, bend left=45, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\varepsilon\Downarrow"] & U
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, bend left=45, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Downarrow"] & U
\end{tikzcd}$$

[*1] というか，大抵の本・論文では Lan が使われている．† が使われているのは Kashiwara-Schapira の『Categories and Sheaves』など．

また関手の向きを逆にしたものを Kan リフトという．ここでは左 Kan リフトを $F_\dagger E$, 右 Kan リフトを $F_\ddagger E$ で表す.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "F"'] & \\ C & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"'] \arrow[ul, bend right, "S"'] \arrow[from=2-1, to=1-1, phantom, shift left=4, "\eta\Uparrow"] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, shift left=3, "\tau\,\Uparrow"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} D \arrow[d, "F"'] & \\ C & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, bend right, "S"'] \arrow[ul, phantom, "\theta\Uparrow"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "F"'] & \\ C & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\ddagger E"'] \arrow[ul, bend right, "S"'] \arrow[from=2-1, to=1-1, phantom, shift left=4, "\varepsilon\Downarrow"] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, shift left=3, "\tau\,\Downarrow"] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} D \arrow[d, "F"'] & \\ C & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, bend right, "S"'] \arrow[ul, phantom, "\theta\Downarrow"] \end{tikzcd}$$

普遍射の性質 (第 1 章「極限」「随伴関手」の PDF を参照) から次の 2 つの命題が分かる.

命題 1. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ に対して関手 $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-))\colon U^D \to \mathbf{Set}$ が得られる．このとき

$$\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \text{ が表現可能関手} \iff F^\dagger E \text{ が存在する}$$

が成り立つ．またこのとき $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(-)) \cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, -)$ である．これから得られる全単射 $\mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(F^\dagger E)) \cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, F^\dagger E)$ で右辺の $\mathrm{id}_{F^\dagger E}$ に対応する左辺の $\eta\colon E \Rightarrow F^{-1}(F^\dagger E)$ が，左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の unit である. □

命題 2. 各 $E \in U^C$ に対して，F に沿った左 Kan 拡張 $F^\dagger E \in U^D$ が存在するとする．このとき $F^\dagger$ は関手 $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ の左随伴関手を定める．随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を $\eta\colon \mathrm{id}_{U^C} \Rightarrow F^{-1} \circ F^\dagger$ とするとき，$E \in U^C$ に対して η_E が $F^\dagger E$ の unit となる．同様に右 Kan 拡張 $F^\ddagger\colon U^C \to U^D$ は F^{-1} の右随伴関手である．即ち $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ となる. □

例 3. 関手 $E\colon J \to U$ に対して余極限 $\operatorname{colim} E$ とは E から対角関手 $\Delta\colon U \to U^J$ への普遍射 $E \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} E)$ であった．一方 $\mathbb{1} = \{*\}$ を 1 点圏として $F\colon J \to \mathbb{1}$ を唯一の関手とすれば，Δ とは $U \cong U^{\mathbb{1}} \xrightarrow{F^{-1}} U^J$ のことである．F に沿った E の左 Kan 拡張とは普

遍射 $E \Rightarrow \Delta(F^\dagger E)$ のことだから，普遍射の一意性から $F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rd, "F^\dagger E \cong \operatorname{colim} E"] & \\
J \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

即ち，余極限は左 Kan 拡張である．この場合の unit η は余極限余錐である．同様にして，極限は右 Kan 拡張である． □

2　各点 Kan 拡張

余極限 (極限) が左 Kan 拡張 (右 Kan 拡張) であること (例 3) を使うと，「各点 Kan 拡張」という方法で Kan 拡張を計算することができる．C, D, U を圏，$F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ を関手として，左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D \to U$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

$d \in D$ に対して $F^\dagger E(d)$ を計算したい．d を $d(*) = d$ となる関手 $d\colon \mathbb{1} \to D$ とみなしてコンマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る．(P_0, P_1, σ はコンマ圏により得られる関手と自然変換である．「コンマ圏」の PDF を参照．)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\Nwarrow}{\sigma}"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

自然変換を合成すれば次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rd, "F^\dagger E(d)"] & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "EP_0"'] \arrow[ru, phantom, "\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

P_1 に沿った左 Kan 拡張は余極限になるから，もしこれが左 Kan 拡張であれば (実は一般にはそうなるとは限らない)，$F^\dagger E(d) \cong \operatorname{colim}(EP_0)$ となり，左 Kan 拡張が余極限に帰着できる．

以上を踏まえて C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．

$$\begin{tikzcd}
D & \\
C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

$d \in D$ に対してコンマ圏 $F \downarrow d$ を考えれば次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\arrow[from=2-2, to=1-1, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma"]
\end{tikzcd}$$

今，左 Kan 拡張 $\langle P_1^\dagger(EP_0), \nu^d \rangle$，即ち余極限 $\operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在すると仮定しよう．これを使って $Ld := \operatorname{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ と定義する．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrd, "Ld"] & & \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, "\nu^d \Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

次に射 $f\colon d \to d'$ に対して Lf を定める．$f\colon d \to d'$ は自然変換

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "d'"] \arrow[r, bend right, "d"'] \arrow[r, phantom, "f \Uparrow"] & D
\end{tikzcd}$$

と同一視できることに注意する．コンマ圏 $F \downarrow d$，$F \downarrow d'$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \\
F \downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "F"']
\arrow[from=2-2, to=1-1, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d'"] & D \\
F \downarrow d' \arrow[u, "P_1'"] \arrow[r, "P_0'"'] & C \arrow[u, "F"']
\arrow[from=2-2, to=1-1, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma'"]
\end{tikzcd}$$

左の図式と f を組み合わせて，次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, shift left=1.5, "d'"] \arrow[r, shift right=1.5, "d"'] \arrow[r, phantom, "f\Uparrow"] & D \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma\,\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}$$

コンマ圏 $F\downarrow d'$ の普遍性 (「コンマ圏」の PDF を参照) により関手 $H\colon F\downarrow d \to F\downarrow d'$ が存在して次の等号が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, "d'"] & D \\
& F\downarrow d' \arrow[u, "P_1'"] \arrow[r, "P_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma'\,\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, shift left=1.5, "d'"] \arrow[r, shift right=1.5, "d"'] \arrow[r, phantom, "f\Uparrow"] & D \\
& & C \arrow[u, "F"'] \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\sigma\,\Nwarrow"] & &
\end{tikzcd}$$

今，余極限 $Ld = \operatorname{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$，$Ld' = \operatorname{colim}(F\downarrow d' \xrightarrow{P_0'} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するのであった．

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[drr, "Ld"] & & \\
& & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\nu^d\Uparrow"] & & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[drr, bend left, "Ld'"] & & \\
& F\downarrow d' \arrow[u, "P_1'"] \arrow[r, "P_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\nu^{d'}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}$$

故に左 Kan 拡張 $\langle Ld, \nu^d\rangle$ の普遍性により射 $Lf\colon Ld \to Ld'$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[drr, bend left, "Ld'"] \arrow[drr, "Ld"'] \arrow[drr, phantom, bend left=15, "\Uparrow Lf"] & & \\
& & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\nu^d\Uparrow"] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[drr, bend left, "Ld'"] & & \\
& F\downarrow d' \arrow[u, "P_1'"] \arrow[r, "P_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\nu^{d'}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}$$

このとき L は関手 $L\colon D \to U$ となり，L が F に沿った E の左 Kan 拡張となることが分かる．このことは後で証明することにして認めてしまえば，次の定理が得られる．

定理 4. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して余極限 $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在して $F^\dagger E(d) \cong \mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U)$ となる．

C が小圏ならば $F\downarrow d$ も小圏となる．故に次の系が得られる．

系 5. C, D, U を圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．U が余完備で，C が小圏ならば，任意の関手 $E\colon C \to U$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在する．故にこの場合 F^{-1} は左随伴を持ち $F^\dagger \dashv F^{-1}\colon U^C \to U^D$ となる． □

Set は余完備であったから次の系を得る．

系 6. C, D を小圏，$F\colon C \to D$ を関手とする．任意の関手 $E\colon C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ に対して左 Kan 拡張 $F^\dagger E\colon D^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
D^{\mathrm{op}} \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\
C^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\Uparrow"] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

故に随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ が成り立つ[*2]． □

右 Kan 拡張に関しても，同様にして次の定理が得られる．

定理 7. C, D, U を圏として，$F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ を関手とする．各 $d \in D$ に対して極限 $\lim(d\downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ が存在するならば，F に沿った E の右 Kan 拡張 $F^\ddagger E$ が存在して $F^\ddagger E(d) \cong \lim(d\downarrow F \to C \xrightarrow{E} U)$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] \arrow[rd, phantom, "\Searrow"] & D \arrow[rd, "F^\ddagger E"] \arrow[rd, phantom, "\Downarrow"', near start] & \\
d\downarrow F \arrow[u] \arrow[r] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

故に U が完備で C が小圏ならば $F^\ddagger E$ は存在する．特に $F^{-1} \dashv F^\ddagger\colon \widehat{D} \to \widehat{C}$ が成り立つ． □

[*2] 正確には $(F^{\mathrm{op}})^\dagger \dashv (F^{\mathrm{op}})^{-1}$ であるが，単に $F^\dagger \dashv F^{-1}$ と書いている．

例 8. X, Y を集合，$f\colon X \to Y$ を写像とし，逆像を考える写像 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ を考える．これは ($\mathcal{P}(X), \mathcal{P}(Y)$ を包含関係による順序で圏とみなしたとき) 関手である．ここで圏 $\mathbb{2} = \{0 \to 1\}$ を考えると圏同型 $\mathcal{P}(X) \cong \mathbb{2}^X$ が成り立つが，このとき今考えている関手 f^{-1} は $\mathbb{2}^Y \ni A \mapsto A \circ f \in \mathbb{2}^X$ で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[dr, "A"] & \\
X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "f^{-1}(A)"'] & \mathbb{2}
\end{tikzcd}$$

つまりこの f^{-1} は，写像 f を (離散圏 X, Y の間の) 関手 $f\colon X \to Y$ とみなしたときに得られる関手 $f^{-1}\colon \mathbb{2}^Y \to \mathbb{2}^X$ と一致している．従って ($\mathbb{2}$ が余完備であることに注意して) 系 5 を適用すると，関手 $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手が存在してそれは左 Kan 拡張 $f^\dagger$ になることが分かる．これを各点左 Kan 拡張で計算してみよう．

$A\colon X \to \mathbb{2}$ に対して $f^\dagger A$ を求めるため，$d \in Y$ を取りコンマ圏 $f\downarrow d$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & Y & \\
f\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{2}
\arrow[from=2-2, to=1-1, Rightarrow, shorten=4mm]
\end{tikzcd}$$

コンマ圏の定義から $f\downarrow d = \{x \in X \mid f(x) = d\} = f^{-1}(d)$ は離散圏である．故に

$$f^\dagger A(d) \cong \operatorname{colim}(f\downarrow d \xrightarrow{P_0} X \xrightarrow{A} \mathbb{2}) = \coprod_{x \in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^\dagger A(d) = \begin{cases} 1 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x) = 1) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

である．即ち $A \in \mathcal{P}(X)$ に対して $f^\dagger A = f(A)$ となる．従って $f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ の左随伴関手は $f\colon \mathcal{P}(X) \ni A \mapsto f(A) \in \mathcal{P}(Y)$ である．

更に $\mathbb{2}$ は完備でもあるから，f^{-1} の右随伴関手 (= 右 Kan 拡張) も存在する．それを各点右 Kan 拡張により同様に計算してみると

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & Y & \\
d\downarrow f \arrow[u] \arrow[r] & X \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "A"'] & \mathbb{2}
\arrow[from=1-1, to=2-2, Rightarrow, shorten=4mm]
\end{tikzcd}$$

$$f^{\ddagger}A(d) \cong \lim(d\mathbin{\downarrow} f \to X \xrightarrow{A} \mathbb{2}) = \prod_{x\in f^{-1}(d)} A(x)$$

となるから

$$f^{\ddagger}A(d) = \begin{cases} 0 & (\text{ある } x \in f^{-1}(d) \text{ が存在して } A(x)=0) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

であり，$f^{\ddagger}A = Y \setminus f(X\setminus A) =: f_!(A)$ となることが分かる[3]．

以上により，$f^{-1}\colon \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ は左随伴，右随伴の両方を持つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(X) \arrow[r, bend left=40, "f"] \arrow[r, bend right=40, "f_!"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\perp"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\perp"] & \mathcal{P}(Y) \arrow[l, "f^{-1}" description]
\end{tikzcd}$$

従って f^{-1} は余極限と極限の両方と交換する (「随伴関手」の PDF を参照)．特に次の等式が成り立つ．

$$f^{-1}(A\cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B), \quad f^{-1}(A\cap B) = f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B).$$

一方で $f\colon \mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(Y)$ は左随伴を持たない．それは f が極限と交換しないこと (例えば $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ とは限らない) から分かる． □

例 9. 位相空間 X に対して，X の開集合全体がなす順序集合 $\mathcal{O}_X$ を圏とみなす．X 上の前層とは関手 $P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ のことであった (「例: 位相空間上の層」の PDF を参照)．よって $\widehat{\mathcal{O}_X} := \mathbf{Set}^{\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}}$ が X 上の前層がなす圏である．

X, Y を位相空間，$f\colon X\to Y$ を連続写像とする．このとき X 上の前層 P に対して，Y 上の前層 f_*P (即ち関手 $f_*P\colon \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$) が

$$f_*P(U) := P(f^{-1}(U))$$

により定まる．これは関手 $f_*\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ を定めることが分かる．これを順像関手と呼ぶ．この関手 f_* は左随伴関手 f^* を持つことが分かるので，それを逆像関手と呼ぶ．

左随伴 f^* が存在することが何故分かるのかというと，多くの教科書では次のように書いてある．Y 上の前層 P に対して，X 上の前層 f^*P (即ち関手 $f^*P\colon \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$) が

$$f^*P(U) := \operatorname*{colim}_{V\supset f(U)} P(V) \tag{10}$$

---

[3] この $f_!(A)$ を small image と呼ぶ，らしい．

により定まる．これは関手 $f^*\colon \widehat{\mathcal{O}_Y} \to \widehat{\mathcal{O}_X}$ を定めることが分かり，更に Hom について計算することで $f^* \dashv f_*$ も分かる．この説明は確かに正しいが，定義 (10) がいきなり与えられており，何故このような余極限を考えるのかよく分からない．

そこで関手 $F := (f^{-1})^{\mathrm{op}}\colon \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \to \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}}$ を考える．定義から $f_* = F^{-1}\colon \widehat{\mathcal{O}_X} \to \widehat{\mathcal{O}_Y}$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \arrow[dr, "P"] & \\
\mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "f^{-1} =: F"] \arrow[r, "f_*(P)"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

故に系 6 から f_* は左随伴 $F^\dagger$ を持つことが分かる (左随伴の一意性 (「随伴関手」の PDF を参照) から $F^\dagger \cong f^*$ である)．$P \in \widehat{\mathcal{O}_Y}$ に対して $F^\dagger P$ を各点左 Kan 拡張で計算してみると次のようになる．$U \in \mathcal{O}_X$ を取りコンマ圏 $F\downarrow U$ を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "U"] & \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} & \\
F\downarrow U \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "P"'] & \mathbf{Set}
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger P(U) \cong \operatorname{colim}(F\downarrow U \xrightarrow{P_0} \mathcal{O}_Y^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathbf{Set}) \cong \operatorname*{colim}_{\langle V,h\rangle \in F\downarrow U} P(V)$ となる．コンマ圏の定義から

$$\begin{aligned}
\langle V, h\rangle \in F\downarrow U &\iff h\colon F(V) \to U \text{ は } \mathcal{O}_X^{\mathrm{op}} \text{ の射} \\
&\iff F(V) \supset U \\
&\iff f^{-1}(V) \supset U \\
&\iff V \supset f(U)
\end{aligned}$$

となるので $F^\dagger P(U) \cong \operatorname*{colim}_{V \supset f(U)} P(V)$ となり定義 (10) の式が現れる．□

例 11. 各点左 Kan 拡張で書けない左 Kan 拡張は存在する．$C := \mathbb{1} = \{*\}$，$D := \mathbb{2} = \{0 \to 1\}$，$U = \{a, b\}$ とする．$F\colon \mathbb{1} \to \mathbb{2}$ を $F(*) := 1$，$E\colon \mathbb{1} \to U$ を $E(*) := a$ で定める．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{2} & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "a"'] & \{a, b\}
\end{tikzcd}$$

関手 $\mathbb{2} \to U$ は Δa と Δb の 2 つしか存在しない．また自然変換 $a \Rightarrow \Delta b \circ 1$ は存在せず，$a \Rightarrow \Delta a \circ 1$ は唯一つ存在する．よって $1^{\dagger} a = \Delta a$ である．一方，$0 \in \mathbb{2}$ に対して各点左 Kan 拡張を試みると

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "0"] & \mathbb{2} & \\
1 \downarrow 0 \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & \mathbb{1} \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "a"'] & \{a, b\}
\end{tikzcd}$$

$1 \downarrow 0 = \mathbb{0}$ だから，$\operatorname{colim}(1 \downarrow 0 \xrightarrow{P_0} \mathbb{1} \xrightarrow{a} \{a, b\})$ は始対象となるが，$\{a, b\}$ は明らかに始対象を持たない． □

さて，残っていた証明を終わらせ，定理 4 の証明を完成させよう．

証明. まず L が関手となることは普遍性から容易に分かる．L が F に沿った E の左 Kan 拡張になっていることを示すため，unit となる自然変換 $\eta\colon E \Rightarrow LF$ を定義する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "L"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

$c \in C$ とすると $Fc \in D$ である．LFc は左 Kan 拡張

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrd, "LFc"] & & \\
F \downarrow Fc \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\nu^{Fc} \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

で定義されるのであった．$\langle c, \mathrm{id}_{Fc} \rangle \in F \downarrow Fc$ だから，$\nu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc} \rangle}\colon Ec \to LFc$ となる．これを用いて $\eta_c\colon Ec \to LFc$ を $\eta_c := \nu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc} \rangle}$ で定める．この η は自然変換である．

∵) $f\colon c \to c'$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\nu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc} \rangle}"] \arrow[d, "Ef"'] & LFc \arrow[d, "LFf"] \\
Ec' \arrow[r, "\nu^{Fc'}_{\langle c', \mathrm{id}_{Fc'} \rangle}"'] & LFc'
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．

まず LFf の定義から次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "LFc'"] \arrow[rrd, "LFc"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=15, "\Uparrow LFf"] & & \\
& \nu^{Fc}\Uparrow & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow Fc \arrow[ruu, bend left, "P_1"] \arrow[rru, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "LFc'"] & \nu^{Fc'}\Uparrow & \\
& F\downarrow Fc' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow Fc \arrow[ruu, bend left, "P_1"] \arrow[ru, "H"'] \arrow[rru, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

故に $\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle \in F\downarrow Fc$ に対して $LFf \circ \nu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \nu^{Fc'}_{\langle c,Ff\rangle}$ となる．ここで $\nu^{Fc'}$ が自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Ff"'] \arrow[rd, "Ff"] & \\
Fc' \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fc'}"'] & Fc'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\nu^{Fc'}_{\langle c,Ff\rangle}"] \arrow[d, "Ef"'] & LFc' \arrow[d, "\mathrm{id}_{LFc'}"] \\
Ec' \arrow[r, "\nu^{Fc'}_{\langle c',\mathrm{id}_{Fc'}\rangle}"'] & LFc'
\end{tikzcd}$$

が可換である．故に $LFf \circ \nu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \nu^{Fc'}_{\langle c',\mathrm{id}_{Fc'}\rangle} \circ Ef$ となり示したい可換性が分かった．

普遍性を示すため，$S\colon D \to U$，$\theta\colon E \Rightarrow SF$ とする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, bend left, "S"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\theta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

$d \in D$ を取りコンマ圏を考えて，θ と合わせると次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, bend left, "S"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\Nwarrow}{\sigma}"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, shift left=6ex, "\theta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

余極限 $\langle Ld, \nu^d \rangle$ の普遍性により $\tau_d \colon Ld \to Sd$ が一意に存在して次の等式が成り立つ.

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "Sd"] \arrow[rrd, "Ld" description] \arrow[rrd, phantom, bend left=20, "\Uparrow \tau_d"] & & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\nu^d \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, bend left, "S"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta \Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

この τ_d が自然変換 $\tau \colon L \Rightarrow S$ を定める.

$\because$) $f \colon d \to d'$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
Ld \arrow[r, "\tau_d"] \arrow[d, "Lf"'] & Sd \arrow[d, "Sf"] \\
Ld' \arrow[r, "\tau_{d'}"'] & Sd'
\end{tikzcd}
\tag{12}
$$

が可換であることを示せばよい. まず

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left=50, "Sd'"] \arrow[rrd, "Ld'"] \arrow[rrd, bend right=15, "Ld"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=25, "\tau_{d'} \Uparrow"] \arrow[rrd, phantom, bend right=5, "\Nearrow Lf"] & & \\
 & \nu^d \Uparrow & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{matrix} (Lf\ \text{の定義}) \\ = \end{matrix}
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left=50, "Sd'"] \arrow[rrd, "Ld'"] \arrow[rrd, phantom, bend left=25, "\tau_{d'} \Uparrow"] & & \\
 & F\downarrow d' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] \arrow[u, phantom, shift left=6, "\nu^{d'} \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, shift left=4, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=4, "="] & & &
\end{tikzcd}
$$

($\tau_{d'}$ の定義)
$=$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[r, "d'"] & D \arrow[dr, "S"] & \\
 & F\downarrow d' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma'"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[u, phantom, "="] & & &
\end{tikzcd}$$

(H の定義)
$=$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[r, shift left, "d'"] \arrow[r, shift right, "d"'] \arrow[r, phantom, "f\Uparrow"] & D \arrow[dr, "S"] & \\
 & \arrow[ur, phantom, "\sigma\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta"] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

(τ_d の定義)
$=$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[drr, bend left=50, "Sd'"] \arrow[drr, bend left=20, "Sd"] \arrow[drr, bend right=20, "Ld"'] \arrow[drr, phantom, bend left=35, "\Nearrow Sf"] \arrow[drr, phantom, "\tau_d\Nearrow"] & & \\
 & \nu^d\Uparrow & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}$$

である．よって左 Kan 拡張 $\langle Ld, \nu^d \rangle$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, bend left=60, "Sd'"] \arrow[dr, bend left=30, "Sd"] \arrow[dr, bend right=20, "Ld"'] \arrow[dr, phantom, bend left=45, "\Nearrow Sf"] \arrow[dr, phantom, bend left=5, "\tau_d\Nearrow"] & \\
 & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, bend left=60, "Sd'"] \arrow[dr, "Ld'"] \arrow[dr, bend right=20, "Ld"'] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\tau_{d'}\Nearrow"] \arrow[dr, phantom, bend right=5, "\Nearrow Lf"] & \\
 & U
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．即ち (12) の可換性が分かった．

このとき $c \in C$ に対して τ_{Fc} の定義より

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, bend left, "SFc"] \arrow[rrd, "LFc"] \arrow[rrd, phantom, bend left=20, "\Uparrow \tau_{Fc}"] & & \\
F\downarrow Fc \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\nu^{Fc}\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "Fc"] & D \arrow[rd, bend left, "S"] \arrow[rd, phantom, "\theta\Uparrow"] & \\
F\downarrow Fc \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\sigma \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

となるから，$\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle \in F\downarrow Fc$ を考えれば

$$\tau_{Fc} \circ \eta_c = \tau_{Fc} \circ \nu^{Fc}_{\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \theta_c$$

が分かる．従って $\tau_F \circ \eta = \theta$ である．余極限 Ld の普遍性により，このような τ は一意だから，L は F に沿った E の左 Kan 拡張である． □

定理 4 の形で得られる左 Kan 拡張を各点左 Kan 拡張という．正確には次のように定義する．

定義. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$, $T\colon D \to U$ を関手，$\eta\colon E \Rightarrow TF$ を自然変換とする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "T"] \arrow[rd, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

$\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張 (pointwise left Kan extension)
$\Longleftrightarrow$ $d \in D$ に対して

$$\mu^d \quad := \quad \begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, "T"] \arrow[rd, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\sigma \Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

と定義すると $\langle Td, \mu^d\rangle$ が P_1 に沿った EP_0 の左 Kan 拡張 (即ち $F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限) になる．

このように定義すると次の命題 13, 14 が成り立つ．

命題 13. 定理 4 の証明で定義した $\langle L, \eta\rangle$ は各点左 Kan 拡張である．

証明. $\mu^d = \nu^d$ を示せばよい．つまり $\langle c, f\rangle \in F\downarrow d$ に対して $(L\sigma \circ \eta_{P_0})_{\langle c,f\rangle} = \nu^d_{\langle c,f\rangle}$ を示せばよい．まず L の定義より

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "Ld"] \arrow[rrd, "LFc"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=20, "\Uparrow Lf"] & & \\
& \nu^{Fc}\Uparrow & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow Fc \arrow[ruu, bend left] \arrow[rru, bend right] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "Ld"] & & \\
& F\downarrow d \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ru, phantom, "\nu^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F\downarrow Fc \arrow[ruu, bend left] \arrow[ru] \arrow[rru, bend right] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[r, phantom, "="'] & & &
\end{tikzcd}$$

となるから，$\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle$ 成分を考えると $Lf \circ \nu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \nu^d_{\langle c,f\rangle}$ が分かる．よって

$$(L\sigma \circ \eta_{P_0})_{\langle c,f\rangle} = L(\sigma_{\langle c,f\rangle}) \circ \eta_c = Lf \circ \nu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle} = \nu^d_{\langle c,f\rangle}$$

である． □

命題 14. 各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である．

証明. $\langle T, \eta\rangle$ を F に沿った E の各点左 Kan 拡張とする．即ち

$$\mu^d \quad := \quad \begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, "T"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

が $F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限になるから，定理 4 の証明の方法で関手 $L\colon D \to U$ を定義して $\beta_c := \mu^{Fc}_{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}$ と定めれば，$\langle L, \beta\rangle$ は F に沿った E の左 Kan 拡張になる (定義から $Ld = Td$ である)．また命題 13 の証明より

$$\mu^d \quad = \quad \begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, "L"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\beta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

である．ここで左 Kan 拡張の普遍性より $\tau\colon L \Rightarrow T$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, bend left, "T"] \arrow[rd, "L"'] \arrow[rd, phantom, bend left=20, "\tau\Nearrow"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\beta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, bend left, "T"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

となるが

$$\mu^d \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, bend left, "T"] & \\ F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, bend left, "T"] \arrow[rd, "L"'] \arrow[rd, phantom, bend left=20, "\tau\Nearrow"] & \\ F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\beta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "Td"] \arrow[rrd, "Ld"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=15, "\tau_d\Nearrow"] & & \\ F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\mu^d\Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \end{tikzcd}$$

となるから，余極限 $\langle Ld, \mu^d \rangle$ の普遍性により $\tau_d = \mathrm{id}$ が分かる．故に $L = T$，$\eta = \beta$ であるから $\langle L, \eta \rangle$ も F に沿った E の左 Kan 拡張である． $\Box$

定義. C, D, U, V を圏，$F \colon C \to D$，$E \colon C \to U$，$K \colon U \to V$ を関手として左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rd, "F^\dagger E"] & & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "K"'] & V \end{tikzcd}$$

このとき K が左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換する
$\Longleftrightarrow$ K を合成して得られる次の図式も左 Kan 拡張となる (即ち，$\langle K \circ (F^\dagger E), K\eta \rangle$ が F に沿った KE の左 Kan 拡張になる).

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rrd, "K\circ(F^\dagger E)"] & & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "K\eta\Uparrow"] & U \arrow[r, "K"'] & V \end{tikzcd}$$

定理 15. $F \colon C \to D$，$E \colon C \to U$ とする．各点左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在して，更に関手 $K \colon U \to V$ は余極限と交換するとする．このとき K は $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ と交換する．

証明. $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が各点左 Kan 拡張だから，$d \in D$ に対して

$$\mu^d \quad := \quad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\ F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

と定義すると $\langle F^\dagger E(d), \mu^d\rangle$ は $F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限である．K が余極限と交換するから $F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U \xrightarrow{K} V$ の余極限も存在して，それは $\langle K(F^\dagger E(d)), K\mu^d\rangle$ で与えられる．即ち $\langle K\circ F^\dagger E, K\eta\rangle$ は各点左 Kan 拡張である．故に命題 14 から $\langle K\circ F^\dagger E, K\eta\rangle$ は左 Kan 拡張となり，K は $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ と交換する． □

3　随伴と Kan 拡張

命題 2 で Kan 拡張が随伴を与えることを説明したが，逆に随伴は Kan 拡張で書くことができる (定理 17).

定義. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ を関手とする．F に沿った E の絶対左 Kan 拡張とは，F に沿った E の左 Kan 拡張であって，任意の関手 $H\colon U \to V$ と交換するものをいう．

定義から明らかに次が成り立つ.

命題 16. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$, $T\colon D \to U$ を関手，$\eta\colon E \Rightarrow TF$ を自然変換とする．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rd, "T"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

このとき $\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の絶対左 Kan 拡張である
$\Longleftrightarrow$ 任意の圏 V と関手 $K\colon D \to V$，$H\colon U \to V$，自然変換 $\theta\colon HE \Rightarrow KF$ に対して，ある自然変換 $\tau\colon HT \Rightarrow K$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "K"] \arrow[rd, "T"] & V & & D \arrow[r, "K"] & V \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow" near start] & U \arrow[u, "H"'] \arrow[lu, phantom, "\tau\Uparrow" near end] & = & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[u, "H"'] \end{tikzcd}$$

□

定理 17. 関手 $F\colon C \to D$ に対して以下の条件は同値である．

(1) F は左随伴関手である．

(2) F に沿った id_C の絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在する．

(3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在し，F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger \mathrm{id}_C"] \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger \mathrm{id}_C)"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}"] & D
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger \mathrm{id}_C)\cong F^\dagger F"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow F\eta"] & C \arrow[r, "F"'] & D
\end{tikzcd}$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \mathrm{id}_C$ であり η がその unit である．

証明. (1 $\Longrightarrow$ 2) $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴として，その unit を η，counit を ε とする．任意の圏 X と関手 $K\colon C \to X$，$H\colon D \to X$，自然変換 $\theta\colon K \Rightarrow HF$ を取る．

$$\tau \quad := \quad \begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dl, phantom, shift left=2ex, "\varepsilon\Uparrow"] & X \\
& C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

と定義すれば

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\tau\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\varepsilon\Uparrow"] & D \arrow[r, "H"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

である．逆に τ が

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"] \arrow[dr, phantom, shift right=3ex, "\eta\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\tau\Uparrow"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] & X \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & C \arrow[u, "K"']
\end{tikzcd}$$

を満たせば

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"'] & X \\
{} & C \arrow[u, "K"'] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\tau\Uparrow" near start, shift left=3]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "G"'] & X \\
{} & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"'] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\varepsilon\Uparrow" near start, shift left=3] \arrow[from=1-2, to=2-3, phantom, "\tau\Uparrow" near start, shift left=3] \arrow[from=1-2, to=2-3, phantom, "\eta\Uparrow" near end, shift right=3]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[r, "H"] & X \\
{} & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "K"'] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\varepsilon\Uparrow" near start, shift left=3] \arrow[from=2-2, to=1-3, phantom, "\theta\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

となるから，このような τ は一意である．故に $\langle G, \eta\rangle$ は絶対左 Kan 拡張である．

(2 $\Longrightarrow$ 3) 明らか．

(3 $\Longrightarrow$ 1) F が $G := F^{\dagger}\mathrm{id}_C$ と交換するから，$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\varepsilon\Uparrow" near start, shift left=3] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\eta\Uparrow" near end, shift right=3]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] & D \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[from=2-1, to=1-2, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

故に後は $G\varepsilon \circ \eta_G = \mathrm{id}_G$ を示せばよい．そのためには左 Kan 拡張 $\langle G, \eta\rangle$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[dr, "G"] & {} \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\varepsilon\Uparrow" near start, shift left=3] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\eta\Uparrow" near end, shift right=3] \arrow[from=1-2, to=2-3, phantom, "\Uparrow\eta" near end, shift right=3]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & D \arrow[dr, "G"] & {} \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\eta\Uparrow" near end, shift right=3] \arrow[from=2-2, to=1-2, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"]
\end{tikzcd}$$

を示せばよいが，それは明らか． □

この定理の具体例として，終対象を考えると次の系を得る．

系 18. 圏 C が終対象 1 を持つ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ が存在する．
また，このとき $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \cong 1$ が成り立つ．

証明. 終対象 1 とは対角関手 $\Delta\colon C \to C^{\mathbb{0}} \cong \mathbb{1}$ の右随伴である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "1"] & {} \\
C \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C \arrow[from=2-1, to=1-2, phantom, "\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

($\Longrightarrow$) 終対象 1，即ち Δ の右随伴が存在するから，定理 17 より $\Delta^{\dagger}\mathrm{id}_C$ が存在する．例 3 より $\Delta^{\dagger} \cong \mathrm{colim}$ だから $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ が存在して $\mathrm{colim}(\mathrm{id}_C) \cong 1$ となる．

($\Longleftarrow$) 定理 17 により Δ が $\Delta^\dagger \mathrm{id}_C \cong \mathrm{colim}(\mathrm{id}_C)$ と交換することを示せばよいが，それは明らか． □

$\Longrightarrow$ の証明で $\Delta^\dagger \cong \mathrm{colim}$ が絶対左 Kan 拡張であることから，次の命題が分かる．

命題 19. $T\colon J \to C$ を関手とする．J が終対象 1 を持つならば，T の余極限は存在して $\mathrm{colim}\, T \cong T(1)$ となる．

証明. 系 18 で見た通り $\Delta^\dagger \mathrm{id}_J = 1$ であり，これは絶対左 Kan 拡張である．

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[rd, "1"] & & \\ J \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "\mathrm{id}_J"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & J \arrow[r, "T"'] & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[rd, "T(1)"] & \\ J \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & C \end{tikzcd}$$

よって $\mathrm{colim}\, T \cong \Delta^\dagger T \cong T(1)$ である． □

絶対右 Kan 拡張や絶対 Kan リフトも同様に定義できて，次の定理が成り立つ (証明は同様なので省略する)．

定理 20. 関手 $G\colon D \to C$ に対して以下の条件は同値である．

(1) G は右随伴関手である．
(2) 絶対右 Kan 拡張 $\langle G^\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在する．
(3) 右 Kan 拡張 $\langle G^\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し，G が $G^\ddagger \mathrm{id}_D$ と交換する．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rd, "G^\ddagger \mathrm{id}_D"] & & \\ D \arrow[u, "G"] \arrow[r, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[ur, phantom, "\varepsilon \Downarrow"] & D \arrow[r, "G"] & C \end{tikzcd}$$

またこのとき $G^\ddagger \mathrm{id}_D \dashv G$ であり ε がその counit である． □

定理 21. 関手 $F\colon C \to D$ に対して以下の条件は同値である．

(1) F は左随伴関手である．
(2) 絶対右 Kan リフト $\langle F_\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在する．

(3) 右 Kan リフト $\langle F_\ddagger \mathrm{id}_D, \varepsilon \rangle$ が存在し，F が $F_\ddagger \mathrm{id}_D$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[d, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varepsilon"', shift right=20pt] \\
C \arrow[r, "F"] & D \arrow[ur, "F_\ddagger \mathrm{id}_D"] \arrow[r, "\mathrm{id}_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

またこのとき $F \dashv F_\ddagger \mathrm{id}_D$ であり ε がその counit である． □

定理 22. 関手 $G\colon D \to C$ に対して以下の条件は同値である．

(1) G は右随伴関手である．
(2) 絶対左 Kan リフト $\langle G_\dagger \mathrm{id}_C, \eta \rangle$ が存在する．
(3) 左 Kan リフト $\langle G_\dagger \mathrm{id}_C, \eta \rangle$ が存在し，G が $G_\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[d, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"', shift right=20pt] \\
D \arrow[r, "G"] & C \arrow[ur, "G_\dagger \mathrm{id}_C"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

またこのとき $G_\dagger \mathrm{id}_C \dashv G$ であり η がその unit である． □

定理 23. 左随伴関手は左 Kan 拡張と交換する．

証明. $F\colon C \to D$, $E\colon C \to U$ を関手，$L \dashv R\colon U \to V$ を随伴関手として，左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta \rangle$ が存在するとする．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[u, phantom, "\eta \Uparrow"', shift right=20pt] & U \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & V \arrow[l, bend left, "R"]
\end{tikzcd}$$

L が $F^\dagger E$ と交換することを示すため，任意の $S\colon D \to V$ と $\theta\colon LE \Rightarrow SF$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, bend left, "S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U \arrow[u, phantom, "\theta \Uparrow"] \arrow[r, bend left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & V \arrow[l, bend left, "R"]
\end{tikzcd}$$

$L \dashv R$ の unit を η' とすると，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性から，$\sigma\colon F^\dagger E \Rightarrow RS$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \arrow[d, phantom, "\sigma\Uparrow"] & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

$L \dashv R$ だから，定理 22 より $\langle L, \eta' \rangle$ は R に沿った id_U の絶対左 Kan リフトである．よって τ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"'] & \arrow[d, phantom, "\tau\Uparrow"] & V \arrow[dr, "R"] & \\
& U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"'] & \arrow[d, phantom, "\sigma\Uparrow"] & V \arrow[dr, "R"] & \\
& U \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \arrow[d, phantom, "\tau\Uparrow"] & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & \arrow[d, phantom, "\sigma\Uparrow"] & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & \arrow[u, phantom, "\eta'\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

となるから，絶対左 Kan リフト $\langle L, \eta' \rangle$ の普遍性により

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & V \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", pos=0.3] & U \arrow[ur, "L"'] \arrow[u, phantom, "\tau\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & V \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"'] &
\end{tikzcd}$$

が分かる．後はこのような τ が一意であることを示せばよい．そこで τ' が

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & V \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", pos=0.3] & U \arrow[ur, "L"'] \arrow[u, phantom, "\tau'\Uparrow"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & V \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"'] &
\end{tikzcd}$$

を満たすとすると

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & V \arrow[dr, "R"] \arrow[d, phantom, "\eta'\Uparrow"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", pos=0.3] & U \arrow[ur, "L"] \arrow[u, phantom, "\tau'\Uparrow"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] & & V \arrow[dr, "R"] \arrow[d, phantom, "\eta'\Uparrow"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"] & & V \arrow[dr, "R"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow", pos=0.3] & U \arrow[u, phantom, "\sigma\Uparrow"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

となるから，左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性により

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"'] & & V \arrow[dr, "R"] \arrow[d, phantom, "\eta'\Uparrow"] & \\
& U \arrow[ur, "L"] \arrow[u, phantom, "\tau'\Uparrow"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, bend left, "S"] \arrow[dr, "F^\dagger E"'] & & V \arrow[dr, "R"] & \\
& U \arrow[u, phantom, "\sigma\Uparrow"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_U"'] & & U
\end{tikzcd}$$

となり，故に絶対左 Kan リフト $\langle L, \eta' \rangle$ の普遍性から $\tau' = \tau$ である． □

※ 今回は図式を使って示したが，Hom の対応を見ることでも証明できる．というのも $L \dashv R\colon U \to V$ のとき $L \dashv R\colon U^C \to V^C$ だから (「随伴関手」の PDF を参照)

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{V^C}(LE, F^{-1}(S)) &= \mathrm{Hom}_{V^C}(LE, SF)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{U^C}(E, RSF)\\ &= \mathrm{Hom}_{U^C}(E, F^{-1}(RS))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{U^D}(F^\dagger E, RS)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{V^D}(L \circ F^\dagger E, S)\end{aligned}$$

となり $F^\dagger(LE) \cong L \circ F^\dagger E$ が分かる．更に，この全単射による対応を計算することにより $L\eta$ が $F^\dagger(LE)$ の unit になっていることが分かる．

4 米田埋込と Kan 拡張

補題 24. $F\colon C \to D,\ E\colon C \to U$ を関手として $d \in D$ に対して関手 K を合成

$$F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$$

で定める．このとき $u \in U$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

が存在する[*4]．

証明. まず互いに逆な写像

$$\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \underset{\zeta_u}{\overset{\xi_u}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$$

を定義しよう．$\theta \in \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u)$ に対して写像

$$\xi_u(\theta)_c\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_U(Ec, u)$$

を $\xi_u(\theta)_c(f) := \theta_{\langle c, f\rangle}$ で定義する．この $\xi_u(\theta)$ は自然変換である．

[*4] ここでの証明は「頑張ると全単射が構成できる」というものでよく分からないが，実はこれは profunctor を使って説明することができる．「ココンマ圏と profunctor」の PDF を参照

∵) $g\colon c \to c'$ を C の射とする．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\xi_u(\theta)_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec, u) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[u, "-\circ Fg"] \arrow[r, "\xi_u(\theta)_{c'}"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec', u) \arrow[u, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f' \circ Fg \arrow[r, mapsto, "\xi_u(\theta)_c"] & \theta_{\langle c, f' \circ Fg \rangle} \\
 & \theta_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg \\
f' \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fg"] \arrow[r, mapsto, "\xi_u(\theta)_{c'}"'] & \theta_{\langle c', f' \rangle} \arrow[u, mapsto, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}$$

そこで $f' \in \mathrm{Hom}_D(Fc', d)$ として $f := f' \circ Fg$ と置く．このときコンマ圏の定義から $\langle c, f \rangle \in F{\downarrow}d$ かつ $\langle c', f' \rangle \in F{\downarrow}d$ であり $g\colon \langle c, f \rangle \to \langle c', f' \rangle$ は $F{\downarrow}d$ の射である．今 $\theta\colon K \Rightarrow \Delta u\colon F{\downarrow}d \to U$ が自然変換だったから，次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\theta_{\langle c, f \rangle}"] \arrow[d, "Eg"'] & u \arrow[d, "\mathrm{id}_u"] \\
Ec' \arrow[r, "\theta_{\langle c', f' \rangle}"'] & u
\end{tikzcd}$$

即ち $\theta_{\langle c', f' \rangle} \circ Eg = \theta_{\langle c, f \rangle} = \theta_{\langle c, f' \circ Fg \rangle}$ となり，示したい可換性が分かった．

故に ξ_u は写像 $\xi_u\colon \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K, \Delta u) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$ を与える．

次に $\beta \in \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))$ に対して U の射

$$\zeta_u(\beta)_{\langle c, f \rangle}\colon K\langle c, f \rangle = Ec \to u$$

を $\zeta_u(\beta)_{\langle c, f \rangle} := \beta_c(f)$ で定める．これは自然変換 $\zeta_u(\beta)\colon K \Rightarrow \Delta u$ を定める．

∵) $g\colon \langle c, f \rangle \to \langle c', f' \rangle$ を $F{\downarrow}d$ の射とする．即ち $g\colon c \to c'$ は C の射で $f' \circ Fg = f$ となる．次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Ec \arrow[r, "\beta_c(f)"] \arrow[d, "Eg"'] & u \arrow[d, "\mathrm{id}_u"] \\
Ec' \arrow[r, "\beta_{c'}(f')"'] & u
\end{tikzcd}$$

β が自然変換だから次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \arrow[r, "\beta_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec,u) \\
\mathrm{Hom}_D(Fc',d) \arrow[u, "-\circ Fg"] \arrow[r, "\beta_{c'}"'] & \mathrm{Hom}_U(Ec',u) \arrow[u, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f'\circ Fg=f \arrow[r, mapsto, "\beta_c"] & \beta_c(f) \\
 & \beta_{c'}(f')\circ Eg \\
f' \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fg"] \arrow[r, mapsto, "\beta_{c'}"'] & \beta_{c'}(f') \arrow[u, mapsto, "-\circ Eg"']
\end{tikzcd}$$

故に $\beta_{c'}(f')\circ Eg=\beta_c(f)$ である．

このとき $\xi_u\circ\zeta_u=\mathrm{id}$，$\zeta_u\circ\xi_u=\mathrm{id}$ である．

$\because$) まず $\theta\colon K\Rightarrow\Delta u$，$\langle c,f\rangle\in F\downarrow d$ に対して

$$\bigl(\zeta_u\circ\xi_u(\theta)\bigr)_{\langle c,f\rangle}=\zeta_u(\xi_u(\theta))_{\langle c,f\rangle}=\xi_u(\theta)_c(f)=\theta_{\langle c,f\rangle}$$

だから $\zeta_u\circ\xi_u=\mathrm{id}$ である．次に $\beta\colon\ \mathrm{Hom}_D(F-,d)\Rightarrow\mathrm{Hom}_U(E-,u)$ に対して

$$\bigl(\xi_u\circ\zeta_u(\beta)\bigr)_c(f)=\xi_u(\zeta_u(\beta))_c(f)=\zeta_u(\beta)_{\langle c,f\rangle}=\beta_c(f)$$

だから $\zeta_u\circ\xi_u=\mathrm{id}$ である．

従って ξ_u は全単射である．

後は ξ_u が u について自然であることを示せばよい．ここで ξ_u のコドメインに出てくる

$$u\longmapsto\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u))$$

という関手は正確に書くと

$$U\xrightarrow{y}\widehat{U}\xrightarrow{E^{-1}}\widehat{C}\xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P,-)}\mathbf{Set}\qquad\text{(但し }P:=\mathrm{Hom}_D(F-,d)\text{ と書いた)}$$

という関手である．従って ξ_u の自然性とは，U の射 $k\colon u\to v$ に対して次の図式が可換であることを意味している．(ここで $y(k)\colon\ \mathrm{Hom}_U(-,u)\Rightarrow\mathrm{Hom}_U(-,v)$ は自然変換だから $E^{-1}(y(k))=y(k)_E\colon\ \mathrm{Hom}_U(E-,u)\Rightarrow\mathrm{Hom}_U(E-,v)$ も自然変換である．)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K,\Delta u) \arrow[r, "\xi_u"] \arrow[d, "(\Delta k)\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \arrow[d, "y(k)_E\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K,\Delta v) \arrow[r, "\xi_v"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,v))
\end{tikzcd}$$

故に $\theta\in\mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(K,\Delta u)$ に対して等式 $\xi_v((\Delta k)\circ\theta)=y(k)_E\circ(\xi_u(\theta))$ を示せばよい．

それは $\langle c,f\rangle \in F\downarrow d$ に対して

$$\begin{aligned} \xi_v((\Delta k)\circ\theta)_c(f) &= ((\Delta k)\circ\theta)_{\langle c,f\rangle} = k\circ\theta_{\langle c,f\rangle} \\ \bigl(y(k)_E\circ(\xi_u(\theta))\bigr)_c(f) &= y(k)_{Ec}(\xi_u(\theta)_c(f)) = k\circ\theta_{\langle c,f\rangle} \end{aligned}$$

となるから分かる． □

定理 25. C, D, U を圏，$F\colon C\to D$，$E\colon C\to U$，$T\colon D\to U$ を関手とする．以下の条件は同値である．

(1) ある $\eta\colon E\Rightarrow TF$ が存在して $\langle T,\eta\rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張になる．

(2) $d\in D$，$u\in U$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_U(Td,u)\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u))$$

が存在する．

証明． $(1\implies 2)$ $\langle T,\eta\rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張であるとする．即ち

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[rd, "T"] & \\ F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\sigma\Nwarrow"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \end{tikzcd}$$

が $F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限となる．よって補題 24 と合わせて全単射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_U(Td,u) &\cong \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U, \Delta u) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \end{aligned}$$

を得る．これを φ_{du} とする．φ_{du} は $u\in U$ について自然であるから，後は $d\in D$ について自然であることを示せばよい．そのためには $g\colon d\to d'$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_U(Td,u) \arrow[r, "\varphi_{du}"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \\ \mathrm{Hom}_U(Td',u) \arrow[u, "-\circ Tg"] \arrow[r, "\varphi_{d'u}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d'),\mathrm{Hom}_U(E-,u)) \arrow[u, "-\circ y(g)_F"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} k\circ Tg \arrow[r, mapsto, "\varphi_{du}"] & \varphi_{du}(k\circ Tg) \\ & \varphi_{d'u}(k)\circ y(g)_F \\ k \arrow[uu, mapsto, "-\circ Tg"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{d'u}"'] & \varphi_{d'u}(k) \arrow[u, mapsto, "-\circ y(g)_F"'] \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．まず $k \in \mathrm{Hom}_U(Td', u)$ に対して

$$\beta^{d',k} \quad := \quad \begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d'"] \arrow[rrd, bend left=60, "u"] & D \arrow[rd, "T"] \arrow[rd, phantom, shift left=4ex, "\Nearrow k"] & \\
F \downarrow d' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

と定義すると，補題 24 の証明で定義した ξ_u を使えば $\varphi_{d'u}(k) = \xi_u(\beta^{d',k})$ である．故に $f \colon Fc \to d$ に対して

$$(\varphi_{d'u}(k) \circ y(g)_F)_c(f) = \varphi_{d'u}(k)_c(g \circ f) = \beta^{d',k}_{\langle c, g \circ f \rangle}$$

となる．同様にして $\varphi_{du}(k \circ Tg) = \beta_u(\mu^{d, k \circ Tg})$ だから

$$\varphi_{du}(k \circ Tg)_c(f) = \beta^{d, k \circ Tg}_{\langle c, f \rangle}$$

である．故に $\beta^{d,k \circ Tg}_{\langle c,f \rangle} = \beta^{d',k}_{\langle c, g \circ f \rangle}$ を示せばよい．

命題 14 の証明での記号を使うと，$T = L$ なので

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "Td'"] \arrow[rrd, "Td"'] \arrow[rrd, phantom, shift left=2ex, "\Uparrow Tg"] & & \\
& \mu^d \Uparrow & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F \downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, bend right, "P_0"'] & & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "Td'"] & & \\
& F \downarrow d' \arrow[u, "P'_1"] \arrow[r, "P'_0"'] \arrow[ur, phantom, "\mu^{d'} \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F \downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3ex, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "="] & & &
\end{tikzcd}$$

となる．よって

$$\beta^{d',k}_H \quad = \quad \begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, "d'"] \arrow[rrd, bend left=60, "u"] & D \arrow[rd, "T"] \arrow[rd, phantom, shift left=4ex, "\Nearrow k"] & \\
& F \downarrow d' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\mu^{d'} \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \\
F \downarrow d \arrow[uur, bend left, "P_1"] \arrow[ur, "H"'] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, shift left=3ex, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "="] & & &
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "d'"] \arrow[drr, "Td"'] \arrow[drr, rounded corners, to path={|- ([yshift=3em]\tikztotarget.north |- \tikztostart.north) -- (\tikztotarget)}, "u"] & D \arrow[dr, "T"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow Tg"] & \\ {} \arrow[r, phantom, "\mu^d \Uparrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U \arrow[ul, phantom, "\Uparrow k"] \\ F\downarrow d \arrow[uu, bend left, "P_1"] \arrow[ur, bend right, "P_0"'] & & \end{tikzcd} = \beta^{d,k\circ Tg}$$

となるから $\beta^{d,k\circ Tg}_{\langle c,f\rangle} = \beta^{d',k}_{\langle c,g\circ f\rangle}$ である．

(2 $\Longrightarrow$ 1) 仮定 (2) で与えられている全単射を

$$\varphi_{du}\colon \mathrm{Hom}_U(Td,u) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-,d),\mathrm{Hom}_U(E-,u))$$

とすると $c\in C$ に対して $\psi^c := \varphi_{Fc,TFc}(\mathrm{id}_{TFc})\colon \mathrm{Hom}_D(F-,Fc) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-,TFc)$ は自然変換である．そこで $\eta_c := \psi^c_c(\mathrm{id}_{Fc})\colon Ec \to TFc$ と定める．これは c について自然である．

$\because$) C の射 $f\colon c\to c'$ に対して

$$\begin{tikzcd} Ec \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "Ef"'] & TFc \arrow[d, "TFf"] \\ Ec' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & TFc' \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．まず $\psi^{c'}$ が自然変換だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(Fc,Fc') \arrow[r, "\psi^{c'}_c"] & \mathrm{Hom}_U(Ec,TFc') \\ \mathrm{Hom}_D(Fc',Fc') \arrow[r, "\psi^{c'}_{c'}"'] \arrow[u, "-\circ Ff"] & \mathrm{Hom}_U(Ec',TFc') \arrow[u, "-\circ Ef"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ff \arrow[r, mapsto, "\psi^{c'}_c"] & \psi^{c'}_c(Ff) \\ & \eta_{c'}\circ Ef \\ \mathrm{id}_{Fc'} \arrow[uu, mapsto, "-\circ Ff"] \arrow[r, mapsto, "\psi^{c'}_{c'}"'] & \eta_{c'} \arrow[u, mapsto, "-\circ Ef"'] \end{tikzcd}$$

故に $\mathrm{id}_{Fc'}$ の行き先を考えれば $\psi^{c'}_c(Ff) = \eta_{c'}\circ Ef$ が分かる．

次に φ_{du} が $d \in D$, $u \in U$ について自然だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc, TFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc}"] \arrow[d, "TFf\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Fc), \mathrm{Hom}_U(E-, TFc)) \arrow[d, "y(TFf)_E\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_U(TFc, TFc') \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc'}"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Fc), \mathrm{Hom}_U(E-, TFc')) \\
\mathrm{Hom}_U(TFc', TFc') \arrow[r, "\varphi_{Fc',TFc'}"'] \arrow[u, "-\circ TFf"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Fc'), \mathrm{Hom}_U(E-, TFc')) \arrow[u, "-\circ y(Ff)_F"']
\end{tikzcd}$$

よって id_{TFc} と $\mathrm{id}_{TFc'}$ の行き先を考えれば

$$y(TFf)_E \circ \psi^c = \varphi_{Fc,TFc'}(TFf) = \psi^{c'} \circ y(Ff)_F$$

が分かる．この等式の c 成分を考えれば $y(TFf)_{Ec} \circ \psi^c_c = \psi^{c'}_c \circ y(Ff)_{Fc}$ となるから id_{Fc} に適用することで $TFf \circ \eta_c = \psi^{c'}_c(Ff)$ を得る．

以上により $TFf \circ \eta_c = \psi^{c'}_c(Ff) = \eta_{c'} \circ Ef$ が分かる．

次に $h \in \mathrm{Hom}_U(Td, u)$ とすると $\varphi_{du}(h)\colon \mathrm{Hom}_D(F-, d) \Rightarrow \mathrm{Hom}_U(E-, u)$ は自然変換である．このとき $c \in C$, $f \in \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ に対して $\varphi_{du}(h)_c(f) = h \circ Tf \circ \eta_c$ となる．

$\because$) まず φ_{du} が u について自然だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc, TFc) \arrow[r, "\varphi_{Fc,TFc}"] \arrow[d, "(h\circ Tf)\circ-"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Fc), \mathrm{Hom}_U(E-, TFc)) \arrow[d, "y(h\circ Tf)_E\circ-"] \\
\mathrm{Hom}_U(TFc, u) \arrow[r, "\varphi_{Fc,u}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Fc), \mathrm{Hom}_U(E-, u))
\end{tikzcd}$$

よって id_{TFc} の行き先を考えれば $y(h \circ Tf)_E \circ \psi^c = \varphi_{Fc,u}(h \circ Tf)$ が分かる．従って

$$\bigl(y(h \circ Tf)_E \circ \psi^c\bigr)_c(\mathrm{id}_{Fc}) = \varphi_{Fc,u}(h \circ Tf)_c(\mathrm{id}_{Fc})$$

である．左辺を計算すると定義より

$$\bigl(y(h \circ Tf)_E \circ \psi^c\bigr)_c(\mathrm{id}_{Fc}) = (h \circ Tf) \circ (\psi^c_c(\mathrm{id}_{Fc})) = h \circ Tf \circ \eta_c$$

となる．一方右辺については，φ_{du} が d について自然だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_U(TFc, u) \arrow[r, "\varphi_{Fc,u}"] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, Fc), \mathrm{Hom}_U(E-, u)) \\
\mathrm{Hom}_U(Td, u) \arrow[u, "-\circ Tf"] \arrow[r, "\varphi_{du}"'] & \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u)) \arrow[u, "-\circ y(f)_F"']
\end{tikzcd}$$

が可換となり，h の行き先を考えれば $\varphi_{Fc,u}(h \circ Tf) = \varphi_{du}(h) \circ y(f)_F$ が分かる．従って

$$\varphi_{Fc,u}(h \circ Tf)_c(\mathrm{id}_{Fc}) = \varphi_{du}(h)_c(f)$$

である．以上により $\varphi_{du}(h)_c(f) = h \circ Tf \circ \eta_c$ が分かった．

さて，$\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った E の各点左 Kan 拡張となることを示そう．即ち

$$\begin{tikzcd}
\mu^d \quad := & \mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "T"] & \\
& F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma\,\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

が余極限になることを示す．φ_{du} と補題 24 で定義した ζ_u を合成して，$u \in U$ について自然な全単射

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(Td, u) &\xrightarrow{\varphi_{du}} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u)) \\
&\xrightarrow{\zeta_u} \mathrm{Hom}_{U^{F\downarrow d}}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U, \Delta u)
\end{aligned}$$

を得る．従って $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U) \cong Td$ である．この余極限の余極限余錐は $\zeta_{Td}(\varphi_{d,Td}(\mathrm{id}_{Td}))$ となるので，その $\langle c, f\rangle$ 成分を計算すると

$$\zeta_{Td}(\varphi_{d,Td}(\mathrm{id}_{Td}))_{\langle c,f\rangle} = \varphi_{d,Td}(\mathrm{id}_{Td})_c(f) = Tf \circ \eta_c = \mu^d_{\langle c,f\rangle}$$

となるから $\langle Td, \mu^d\rangle$ が $F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限である． □

※ 同様にして右 Kan 拡張についても次の条件が同値である．

(1) ある $\varepsilon\colon TF \Rightarrow E$ が存在して $\langle T, \varepsilon\rangle$ が F に沿った E の各点右 Kan 拡張になる．

(2) $d \in D,\ u \in U$ について自然な全単射

$$\mathrm{Hom}_U(u, Td) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\mathrm{Hom}_D(d, F-), \mathrm{Hom}_U(u, E-))$$

が存在する．

系 26. $F\colon C \to D$ が関手で C が小圏のとき，左 Kan 拡張 $F^{\dagger}y$ が存在する．

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "F^{\dagger}y"] & \\ C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C} \end{tikzcd}$$

これは $d \in D$ について自然に $F^{\dagger}y(d) \cong \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ となる．

証明. $T := (D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ と定める．即ち $d \in D$ に対して $Td = \mathrm{Hom}_D(F-, d)$ である．$P \in \widehat{C}$ に対して米田の補題で得られる自然同型を $\chi_P\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P) \Rightarrow P$ とすると，全単射

$$\varphi_{dP} := \chi_P^{-1} \circ -\colon \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(Td, P) \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, P))$$

が得られる．これは $d \in D,\ P \in \widehat{C}$ について自然である．故に定理 25 より，ある η が存在して $\langle T, \eta\rangle$ が F に沿った y の各点左 Kan 拡張になる． □

定理 25 の証明によればこの左 Kan 拡張の unit $\eta\colon y \Rightarrow TF$ は

$$\eta_c = \psi^c_c(\mathrm{id}_{Fc}) \quad (\psi^c := \varphi_{Fc,TFc}(\mathrm{id}_{TFc}) = \chi^{-1}_{TFc} \circ \mathrm{id}_{TFc} = \chi^{-1}_{TFc})$$

で与えられる．ここで次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(TFc, TFc) \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[d, "\chi^{-1}_{TFc}\circ-"', "\wr"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc), \mathrm{Hom}_D(Fc, Fc)) \arrow[d, "(\chi^{-1}_{TFc})_c\circ-"', "\wr"] \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(TFc, \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y-, TFc)) \arrow[r, "\mathrm{ev}_c"'] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), TFc)) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_{TFc} \arrow[r, mapsto, "\mathrm{ev}_c"] \arrow[dd, mapsto, "\chi^{-1}_{TFc}\circ-"'] & \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_D(Fc,Fc)} \arrow[d, mapsto, "(\chi^{-1}_{TFc})_c\circ-"'] \\ & (\chi^{-1}_{TFc})_c \\ \psi^c \arrow[r, mapsto, "\mathrm{ev}_c"'] & \psi^c_c \end{tikzcd}$$

よって id_{TFc} の行き先を考えれば $\psi^c_c = (\chi^{-1}_{TFc})_c$ が分かる．故に $\eta_c = \psi^c_c(\mathrm{id}_{Fc}) = (\chi^{-1}_{TFc})_c(\mathrm{id}_{Fc})$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c), TFc) \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & \mathrm{Hom}_D(Fc, Fc) \arrow[l, "(\chi^{-1}_{TFc})_c"'] \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] \\
\eta_c & \mathrm{id}_{Fc} \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

即ち $\eta_c\colon y(c) \Rightarrow TFc$ は米田の補題で id_{Fc} に対応する自然変換である．従って $a \in C$ に対して $(\eta_c)_a$ は

$$\begin{tikzcd}
(\eta_c)_a\colon \mathrm{Hom}_C(a, c) \arrow[r] \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] & TFc(a) = \mathrm{Hom}_D(Fa, Fc) \arrow[d, phantom, sloped, "\ni"] \\
f \arrow[r, mapsto] & Ff
\end{tikzcd}$$

という写像になっている．

系 27. 小圏 C に対して $y^\dagger y \cong \mathrm{id}_{\widehat{C}}$ である．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}_{\widehat{C}}"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

証明. 系 26 と米田の補題により, $P \in \widehat{C}$ について自然な同型 $y^\dagger y(P) \cong \mathrm{Hom}(y-, P) \cong P$ が成り立つ． □

> ※ 系 26 の後に注意した事を使えば $\langle \mathrm{id}_{\widehat{C}}, \mathrm{id}_y \rangle$ が y に沿った y の左 Kan 拡張になっていることが分かる．

系 28. 任意の $P \in \widehat{C}$ に対して，ある $T\colon J \to C$ が存在して $P \cong \mathrm{colim}(J \xrightarrow{T} C \xrightarrow{y} \widehat{C})$ となる．

証明. 系 27 により $y^\dagger y(P) \cong P$ であるが，一方各点左 Kan 拡張

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "P"] & \widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y \cong \mathrm{id}"] & \\
y \downarrow P \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ul, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

により $P \cong y^\dagger y(P) \cong \operatorname{colim}(y \downarrow P \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{y} \widehat{C})$ である． □

命題 29. $P \in \widehat{C}$ が表現可能 $\iff$ コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象を持つ．

証明. ($\Longrightarrow$) $P \cong y(c)$ とすると

$$\mathrm{Ob}(y \downarrow P) \cong \mathrm{Ob}(y \downarrow y(c)) = \{\langle d, \theta \rangle \mid d \in C,\ \theta \colon y(d) \Rightarrow y(c)\}$$

であり，y は忠実充満だから $\mathrm{Ob}(y \downarrow P) \cong \mathrm{Ob}(\mathrm{id}_C \downarrow c)$ が分かる．この対応により圏同型 $y \downarrow P \cong \mathrm{id}_C \downarrow c$ が成り立つことが分かる．$\mathrm{id}_C \downarrow c$ は終対象 $\langle c, \mathrm{id}_c \rangle$ を持つから，$y \downarrow P$ も終対象を持つ．

($\Longleftarrow$) コンマ圏 $y \downarrow P$ が終対象 $\langle c, \theta \rangle$ を持つとすれば，命題 19 と系 28 の証明により $P \cong \operatorname{colim}(y \downarrow P \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{y} \widehat{C}) \cong y(c)$ である． □

定理 30. $F \colon C \to D$, $E \colon C \to U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $F^\dagger E$, $y^\dagger E$ が存在するとする．($\widehat{C}$ が余完備なので各点左 Kan 拡張 $F^\dagger y$ も存在する．)

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "F^\dagger E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "F^\dagger y"] & \widehat{C} \arrow[d, "y^\dagger E"] \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[ru, "y"] \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

このとき $y^\dagger E \circ F^\dagger y \cong F^\dagger E$ である．

証明. $d \in D$, $u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger E(F^\dagger y(d)), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), F^\dagger y(d)), \mathrm{Hom}_U(E(-), u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F^\dagger y(d), \mathrm{Hom}_U(E(-), u)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F(-), d), \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), \mathrm{Hom}_U(E(-), u))) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F(-), d), \mathrm{Hom}_U(E(-), u))
\end{aligned}$$

となるから，定理 25 より $y^\dagger E \circ F^\dagger y$ は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である．故に $y^\dagger E \circ F^\dagger y \cong F^\dagger E$ である． □

定理 31. 関手 $F \colon C \to D$ に対して $F^\dagger \circ y \cong yF$ である．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[r, "F^\dagger"] & \widehat{D} \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

(よって $c \in C$ に対して $F^{\dagger}(\mathrm{Hom}_C(-,c)) \cong \mathrm{Hom}_D(-,Fc)$ となり，表現可能関手の左 Kan 拡張は表現可能関手である．)

証明. $c \in C$，$P \in \widehat{D}$ に関して自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\widehat{D}}(y(F(c)),P) \cong P(F(c)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c),PF) = \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(c),F^{-1}P)\\ \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{D}}(F^{\dagger}(y(c)),P)\end{aligned}$$

であるから米田の補題により $y(F(c)) \cong F^{\dagger}(y(c))$ である．これは $c \in C$ について自然だから (「米田の補題」の PDF を参照) $F^{\dagger} \circ y \cong yF$ である． □

定理 32. $\langle F^{\dagger}E, \eta\rangle$ が各点左 Kan 拡張で F が忠実充満のとき η は同型である．

証明. $\langle F^{\dagger}E, \eta\rangle$ が各点左 Kan 拡張だから

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "Fc"] & D \arrow[dr, "F^{\dagger}E"] & \\
F\downarrow(Fc) \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ul, phantom, "\sigma\Nwarrow"] & U \arrow[ul, phantom, "\eta\Uparrow"]
\end{tikzcd} \tag{33}$$

は余極限を与える．コンマ圏 $F\downarrow(Fc)$ の対象は $g\colon Fc' \to Fc$ であるが，今 F が忠実充満関手だから g は $c' \to c$ と対応する．よって $F\downarrow(Fc) \cong \mathrm{id}_C \downarrow c$ が分かる．$\mathrm{id}_C \downarrow c$ は終対象 $\langle c, \mathrm{id}_c\rangle$ を持つから，命題 19 により $\mathrm{colim}(F\downarrow(Fc) \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U) \cong Ec$ となる．命題 19 の証明によれば，合成

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}"] & & & \\
F\downarrow(Fc) \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & F\downarrow(Fc) \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}$$

が $F\downarrow(Fc) \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{E} U$ の余極限を与える．左 Kan 拡張の普遍性により τ が存在して

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[dr, "{\langle c,\mathrm{id}_{Fc}\rangle}"] \arrow[rrr, bend left, "F^{\dagger}E(Fc)"] & & & \\
F\downarrow(Fc) \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & F\downarrow(Fc) \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\tau\Nearrow"] & C \arrow[r, "E"'] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "Fc"] & D \arrow[dr, "F^{\dagger}E"] & \\
F\downarrow(Fc) \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "E"'] \arrow[ul, phantom, "\sigma\Nwarrow"] & U \arrow[ul, phantom, "\eta\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

となる．図式 (33) も左 Kan 拡張なので τ は同型である．この両辺の $\langle c, \mathrm{id}_{Fc}\rangle$ 成分を考えることで $\tau_* \circ E(\mathrm{id}_c) = \eta_c$ を得る．よって η は同型である． □

逆に

定理 34. $\langle F^\dagger y, \eta\rangle$ を左 Kan 拡張とする．η が同型ならば F は忠実充満である．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger y"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

証明. $T := (D \overset{y}{\to} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ と定める．系 26 より，ある η' が存在して $\langle T, \eta'\rangle$ は F に沿った y の左 Kan 拡張になる．系 26 の後の注意によれば η' は

$$(\eta'_c)_a = F\colon\ \mathrm{Hom}_C(a, c) \to TFc(a) = \mathrm{Hom}_D(Fa, Fc) \tag{35}$$

となっている．ここで $\langle F^\dagger y, \eta\rangle$ も左 Kan 拡張だから自然同型 $\tau\colon F^\dagger y \Rightarrow T$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger y"'] \arrow[dr, bend left=40, "T"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\tau\Uparrow"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, bend left=40, "T"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\eta'\Uparrow"] & \widehat{C}
\end{tikzcd}$$

となる．η と τ が自然同型だから η' も自然同型であり，故に (35) は全単射である．よって F は忠実充満である． □

系 36. $F\colon C \to D$ が忠実充満
$\iff$ $E\colon C \to U$ が関手のとき，各点左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger E, \eta\rangle$ が存在するならば η は自然同型である． □

定理 37. $F\colon C \to D$ を関手とすれば $F^\dagger, F^\ddagger\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ が得られる (系 6)．このとき次は同値である．

(1) F が忠実充満
(2) $F^\dagger$ が忠実充満
(3) $F^\ddagger$ が忠実充満

証明. ($1 \implies 2$) 随伴 $F^\dagger \dashv F^{-1}$ の unit を η とすれば「$F^\dagger$ が忠実充満 $\iff$ η が同型」であった．仮定 (1) により F が忠実充満だから η が同型となり (定理 32)，$F^\dagger$ も忠実充満である．

$(2 \Longrightarrow 1)$ 定理 31 により $F^\dagger \circ y \cong yF$ である．仮定 (2) より $F^\dagger$ が忠実充満で，y も忠実充満だから $F^\dagger \circ y \cong yF$ も忠実充満である．よって F も忠実充満と分かる．

$(2 \Longleftrightarrow 3)$ 一般に $F \dashv G \dashv H$ のとき「F が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ H が忠実充満」であった．よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger$ より分かる． □

定義． $F\colon C \to D$ を関手とする．

(1) F が strongly generating $\Longleftrightarrow$ $F^\dagger y$ が conservative[*5].

(2) F が稠密 (dense) $\Longleftrightarrow$ $\langle \mathrm{id}_D, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "\mathrm{id}_D"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F \Uparrow"] & D
\end{tikzcd}$$

例 38. 米田埋込は稠密である (系 27). □

定理 39. 関手 $F\colon C \to D$ に対して次の条件は同値である．

(1) F が稠密である．

(2) ある自然同型 $\eta\colon F \Rightarrow F$ が存在して，$\langle \mathrm{id}_D, \eta \rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張となる．

(3) $F^\dagger y\colon D \to \widehat{C}$ が忠実充満である．

証明． $(1 \Longrightarrow 2)$ 定義から明らか．

$(2 \Longrightarrow 3)$ 系 26 より $F^\dagger y \cong (D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ である．y が忠実充満なので，$F^\dagger y$ が忠実充満であることを示すには (y により $D \subset \widehat{D}$ と見なして) $F^{-1}|_D\colon D \to \widehat{C}$ が忠実充満であることを示せばよい．

定理 25 より，各点左 Kan 拡張 $\langle \mathrm{id}_D, \eta \rangle$ は $y(d)$ と交換するから

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "\mathrm{id}"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\eta \Uparrow"] & D \arrow[r, "y(d)"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "y(d)"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F^{-1}(y(d))"'] \arrow[ur, phantom, "y(d)\eta \Uparrow"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}$$

[*5] 関手 G が conservative とは，Gf が同型射ならば f が同型射になることをいう．詳細は「自然変換・圏同値」の PDF を参照．

$\langle y(d), y(d)\eta\rangle$ が F に沿った $y(d)\circ F = F^{-1}(y(d))$ の左 Kan 拡張となる．従って任意の $\theta\colon y(d)\circ F \Rightarrow y(d)\circ F$ に対して，ある $\tau\colon y(d)\Rightarrow y(d)$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rd, "\mathrm{id}"] \arrow[rrd, "y(d)"] & & & & D \arrow[rrd, "y(d)"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "y(d)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Uparrow\tau"] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} & = & C \arrow[u, "F"] \arrow[u, phantom, shift left=4, "\theta\Uparrow"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[r, "y(d)"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}
\end{tikzcd}$$

となる．これは言い換えれば

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(y(d), y(d)) &\xrightarrow{F^{-1}} \mathrm{Hom}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d))) \\
&\qquad \xrightarrow{-\circ(y(d)\eta)} \mathrm{Hom}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d)))
\end{aligned}$$

が全単射ということである．η が同型だから $-\circ(y(d)\eta)$ は全単射である．故に

$$F^{-1}\colon \mathrm{Hom}(y(d), y(d)) \to \mathrm{Hom}(F^{-1}(y(d)), F^{-1}(y(d)))$$

も全単射であり，従って $F^{-1}|_D\colon D\to\widehat{C}$ は忠実充満である．

(3 $\Longrightarrow$ 1) $T := (D \xrightarrow{y} \widehat{D} \xrightarrow{F^{-1}} \widehat{C})$ と定める．仮定 (3) と定理 26 から T は忠実充満である．故に全単射

$$T_{dd'}\colon \mathrm{Hom}_D(d, d') \to \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_D(F-, d'))$$

が得られる．これは $d, d'\in D$ について自然だから定理 25 より，ある $\eta\colon F\Rightarrow F$ が存在して $\langle \mathrm{id}_D, \eta\rangle$ が F に沿った F の各点左 Kan 拡張になる．定理 25 の証明によれば，この η は

$$\eta_c := \psi^c_c(\mathrm{id}_{Fc}) \quad (\psi^c := T_{Fc,Fc}(\mathrm{id}_{Fc}))$$

により得られる．T が関手だから $\psi^c = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_D(F-,Fc)}$ である．故に

$$\eta_c = \psi^c_c(\mathrm{id}_{Fc}) = \mathrm{id}_{Fc}$$

となるから $\eta = \mathrm{id}_F$ が分かる． □

命題 40. 稠密関手は strongly generating である．

証明. 忠実充満関手は conservative であるから, 定理 39 の条件 (3) と strongly generating の定義より明らか. □

5　普遍随伴

定理 41. C を小圏，U を圏，$F\colon C \to U$ を関手として各点左 Kan 拡張 $y^\dagger F$ が存在するとする．このとき随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ が成り立つ．($\widehat{C}$ が余完備なので $F^\dagger y$ は存在する．)

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & U \arrow[ul, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

証明. $y^\dagger F$ が各点左 Kan 拡張だから，$P \in \widehat{C}$，$u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_U(y^\dagger F(P), u) &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_C(y-, P), \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && (\text{定理 } 25)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, \mathrm{Hom}_U(F-, u)) && (\text{米田の補題})\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(P, F^\dagger y(u)) && (\text{系 } 26)
\end{aligned}$$

となるので $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ である． □

逆に任意の随伴 $L \dashv R\colon \widehat{C} \to U$ はこのようにして得られる．即ち

定理 42. C を小圏，U を圏，$L \dashv R\colon \widehat{C} \to U$ を随伴とする．このとき関手 $F\colon C \to U$ が存在して $y^\dagger F \cong L$，$F^\dagger y \cong R$ となる．

証明. $F := L \circ y\colon C \to U$ とする．系 26 より $y^\dagger y$ は各点左 Kan 拡張である．左随伴関手 L は余極限と交換するから，定理 15 より $y^\dagger y$ と交換する．よって $y^\dagger F$ も存在して

$$L \circ (y^\dagger y) \cong y^\dagger (L \circ y) = y^\dagger F$$

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[dr, "y^\dagger y"] & & & & \widehat{C} \arrow[drr, "L\circ(y^\dagger y) \cong y^\dagger F"] & & \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "y"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \widehat{C} \arrow[r, "L"'] & U & = & C \arrow[u, "y"] \arrow[rr, "L\circ y = F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}$$

となる．このとき系 27 により

$$y^\dagger F \cong L \circ (y^\dagger y) \cong L \circ \mathrm{id} = L$$

である．また定理 15 の証明より $y^\dagger F$ は各点左 Kan 拡張だから，定理 41 から $L \dashv F^\dagger y$ となる．故に随伴の一意性から $R \cong F^\dagger y$ である． □

※ この随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y$ を，twitter 等で一部の人が普遍随伴と呼んでいる．一般に広く使われている名称は無いようだが，例えば nlab では nerve and realization [4] というページがある．

例 43. $C = \mathbb{1}$ とすれば $\widehat{\mathbb{1}} = \mathbf{Set}$ だから，随伴 $L \dashv R\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ に対して $F := L \circ y$ とすれば

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[rd, shift left=1.5, "L"] \arrow[rd, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set} \arrow[lu, shift left=1.5, "R"]
\end{tikzcd}$$

$L \cong y^\dagger F$，$R \cong F^\dagger y$ である．$x := F(*) \in \mathbf{Set}$ と置けば，$a \in \mathbf{Set}$ について自然に

$$R(a) \cong F^\dagger y(a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(F-, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a)$$

だから $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ である．一方 $L(a) \cong y^\dagger F(a) \cong \mathrm{colim}(y \downarrow a \to \mathbb{1} \xrightarrow{F} \mathbf{Set})$ であって $y \downarrow a \cong a$ となるから

$$L(a) \cong \coprod_{b \in a} x \cong a \times x$$

により $L \cong - \times x$ である．故に，任意の随伴 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は $- \times x \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ の形をしている．

また $F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ を圏同値とすると，これは右随伴となるから，ある $x \in \mathbf{Set}$ を使って $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, -)$ と書ける．これが余極限と交換するためには $x = 1$ でなければならないから $F \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Set}}$ である．即ち圏同値 $\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ は自明なものしかない． □

例 44. $L \dashv R\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ を随伴とする．$F := L \circ y\colon \mathbb{1} \to \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$ と置けば $L \cong y^\dagger F$，$R \cong F^\dagger y$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[rd, shift left=1.5, "L"] \arrow[rd, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \arrow[lu, shift left=1.5, "R"]
\end{tikzcd}$$

よって $x := F(*)$ とすれば $R \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(x, -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ が得られる．また任

意の $a, b \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, x)) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a \times b, x)\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(b, \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x))\\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, x), b)\end{aligned}$$

だから $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x)$ である．従って $L \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, x) = R$ となることが分かる[6]. □

例 45. 小圏 J に対して随伴 $\Delta \dashv \lim\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}^J$ が成り立つ．よって $F := \Delta \circ y$ と置けば，$T \in \mathbf{Set}^J$ に対して $\lim T \cong F^{\dagger} y(T) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F(*), T)$ である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Set} \arrow[dr, shift left=2, "\Delta"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\mathbb{1} \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & \mathbf{Set}^J \arrow[ul, shift left=2, "\lim"]
\end{tikzcd}$$

$F(*) = \Delta(y(*)) \cong \Delta 1$ だから $\lim T \cong \mathrm{Hom}(\Delta 1, T)$ が分かる． □

例 46. $F\colon C \to D$ を関手とすると，例 6 より $F^{\dagger} \dashv F^{-1}\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ である．定理 42 (の証明) により，$E := F^{\dagger} \circ y$ とすれば $F^{\dagger} \cong y^{\dagger} E$ である．定理 31 より $E \cong yF$ だから $F^{\dagger} \cong y^{\dagger}(yF)$ である．また定理 41 より $F^{-1} \cong (yF)^{\dagger} y$ である．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{C} \arrow[r, shift left=2, "F^{\dagger}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widehat{D} \arrow[l, shift left=2, "F^{-1}"] \\
C \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & D \arrow[u, "y"']
\end{tikzcd}$$

□

定義. 対象 $a \in C$ が small projective $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}_C(a, -)$ が余連続.

定理 47. 圏 C が，ある小圏 A を使って $C \simeq \widehat{A}$ と書ける
$\Longleftrightarrow$ C が余完備で，小さい充満部分圏 $A \subset C$ が存在して，包含関手 $F\colon A \to C$ が strongly generating で，任意の $a \in A$ が small projective.

---

[6] より正確に書けば $L \cong R^{\mathrm{op}}$ である．

証明. ($\Longrightarrow$) $C \simeq \widehat{A}$ のとき，C は余完備で，米田埋込 $y\colon A \to C$ により $A \subset C$ は充満部分圏と見なせる．また $y^\dagger y \cong \mathrm{id}$ は明らかに余連続かつ conservative である．

($\Longleftarrow$) 仮定の充満部分圏と包含関手 $F\colon A \to C$ を取る．C が余完備だから，定理 41 により普遍随伴 $y^\dagger F \dashv F^\dagger y\colon \widehat{A} \to C$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{A} \arrow[rd, shift left=1.5, "y^\dagger F"] \arrow[rd, phantom, "\perp"] & \\
A \arrow[u, "y"] \arrow[r, "F"'] & C \arrow[lu, shift left=1.5, "F^\dagger y"]
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger y$ が本質的全射かつ忠実充満であることを示せばよい．そのためにまず $F^\dagger y$ が余連続であることを示す．

$\because$) $c \in C$ に対して $F^\dagger y(c) \cong \mathrm{Hom}_C(F-, c)$ である．よって

$$\mathrm{Hom}_C(F-, \operatorname*{colim}_j c_j) \cong \operatorname*{colim}_j \mathrm{Hom}_C(F-, c_j)$$

を示せばよい．$\widehat{A}$ の余極限は各点ごとに計算すればよいから，各対象 $a \in A$ に対して $\mathrm{Hom}_C(a, \mathrm{colim}_j\, c_j) \cong \mathrm{colim}_j\, \mathrm{Hom}_C(a, c_j)$ を示せばよい．ところがいま $a \in A$ は small projective なのでこれは成り立つ．

本質的全射であることを示すため，$P \in \widehat{A}$ を取る．系 28 により $P \cong \mathrm{colim}_j\, y(a_j)$ と書ける．$c := \mathrm{colim}_j\, F(a_j) \in C$ と置けば，$F^\dagger y$ が余連続だから系 26 を使って

$$\begin{aligned}
F^\dagger y(c) &\cong \mathrm{Hom}_C(F-, c) \cong \mathrm{Hom}_C(F-, \mathrm{colim}_j\, F(a_j)) \\
&\cong \mathrm{colim}_j\, \mathrm{Hom}_C(F-, F(a_j)) \cong \mathrm{colim}_j\, \mathrm{Hom}_A(-, a_j) \\
&= \mathrm{colim}_j\, y(a_j) \cong P
\end{aligned}$$

となり，$F^\dagger y$ は本質的全射である．

$F^\dagger y$ が忠実充満であることを示す．そのためには定理 39 より F が稠密であることを示せばよい．即ち $c \in C$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[rd, "\mathrm{id}_C"] & \\
F \downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\overset{\Nwarrow}{\sigma}"] & A \arrow[u, "F"] \arrow[r, "F"'] \arrow[ru, phantom, "\mathrm{id}_F \Uparrow"] & C
\end{tikzcd}$$

が余極限を与えることを示す．$G := (F\downarrow c \xrightarrow{P_0} A \xrightarrow{F} C)$ と書く．まず C が余完備なので G の余極限が存在するから，それを $\langle s, \mu\rangle$ とする．余極限の普遍性から $h\colon s \to c$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "c"] \arrow[rrd, "s"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=15, "h\Uparrow"] & & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "\mu\Uparrow"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[r, "F"'] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[rd, "\mathrm{id}_C"] & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow"] \arrow[r, "F"'] & C
\end{tikzcd} \tag{48}$$

となる．今 $F^\dagger y$ が余連続だから

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrrd, "F^\dagger y(s)"] & & & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "(F^\dagger y)\mu\Uparrow"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[r, "F"'] & C \arrow[r, "F^\dagger y"'] & \widehat{A}
\end{tikzcd} \tag{49}$$

も余極限である．$F^\dagger y$ の unit を η とすると，系 26 の証明より $\langle F^\dagger y, \eta\rangle$ は各点左 Kan 拡張なので

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[rd, "F^\dagger y"] & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, "y"'] & \widehat{A}
\end{tikzcd}$$

は余極限である．一方でこの図式は

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[rd, "F^\dagger y"] & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, "y"'] & \widehat{A}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[rd, "\mathrm{id}_C"] & & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow"] \arrow[r, "F"'] \arrow[rr, bend right=50, "y"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "F^\dagger y"'] & \widehat{A}
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "c"] \arrow[rrd, "s"'] \arrow[rrd, phantom, bend left=15, "h\Uparrow"] & & & \\
F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[ur, phantom, "\mu\Uparrow"] \arrow[r, "P_0"'] & A \arrow[r, "E"'] \arrow[rr, bend right=50, "y"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "F^\dagger y"'] & \widehat{A}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[rrrr, bend left, "F^\dagger y(c)"] \arrow[rrrr, "F^\dagger y(s)"'] \arrow[rrrr, phantom, "F^\dagger y(h) \Uparrow"] & & & & \\
= & F\downarrow c \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "(F^\dagger y)\mu \Uparrow"] & A \arrow[rr, "E"'] \arrow[rrr, hook, bend right, "y"'] \arrow[rrr, phantom, "\eta \Uparrow"] & & C \arrow[r, "F^\dagger y"'] & \widehat{A}
\end{tikzcd}$$

と変形できる．今 F が忠実充満だから定理 32 より η は同型である．(49) が余極限だったから，その普遍性により $F^\dagger y(h)$ は同型になる．今 F が strongly generating だから h も同型である．故に (48) の右辺も余極限となる． □

定理 50. 小圏 C 上の前層 P に対して圏同値 $\widehat{y\downarrow P} \simeq \widehat{C}/P$ が成り立つ．(特に $a \in C$ に対して $P := y(a)$ の場合を考えると，$y\downarrow y(a) \cong C/a$ だから $\widehat{C/a} \simeq \widehat{C}/y(a)$ となる．)

証明. コンマ圏の定義を考えれば $y\downarrow P$ は充満部分圏 $y\downarrow P \subset \widehat{C}/P$ とみなせる．米田埋込 $y\downarrow P \to \widehat{y\downarrow P}$ をここでは区別のため z と書き，包含関手を $F\colon y\downarrow P \to \widehat{C}/P$ とする．定理 47 (の証明) によれば

(1) $\widehat{C}/P$ が余完備.
(2) 包含関手 $F\colon y\downarrow P \to \widehat{C}/P$ が strongly generating.
(3) 任意の $\langle a, x\rangle \in y\downarrow P$ が small projective.

を示せば圏同値 $\widehat{y\downarrow P} \simeq \widehat{C}/P$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{y\downarrow P} \arrow[rd, bend left=10, "z^\dagger F"] \arrow[rd, phantom, "\perp"] & \\
y\downarrow P \arrow[u, "z"] \arrow[r, "F"'] & \widehat{C}/P \arrow[lu, bend left=10, "F^\dagger z"]
\end{tikzcd}$$

(1) $\widehat{C}$ が余完備だから，余完備な圏 U と対象 $u \in U$ に対して U/u が余完備であることを示せばよい．そのために J を小圏として $T\colon J \to U/u$ を関手とする．$U/u \cong \mathrm{id}_U \downarrow u$ はコンマ圏だから次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[r, "T"'] & U/u \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ru, phantom, "\sigma \Nwarrow"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}$$

U が余完備だから $P_0T\colon J \to U$ の余極限 $\langle a, \mu\rangle$ が存在する．この余極限の普遍性により，射 $h\colon a \to u$ が存在して次の等号が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "u", ""{name=Uu, below}] \arrow[rrd, "a"', ""{name=Aa}] & & & & \mathbb{1} \arrow[rrd, bend left, "u", ""{name=Vv, below}] & & \\
J \arrow[u, "P_1T"] \arrow[r, "T"'] & U/u \arrow[r, "P_0"'] \arrow[to=Aa, Rightarrow, "\mu"] & U \arrow[from=Aa, to=Uu, Rightarrow, phantom] & = & J \arrow[u, "P_1T"] \arrow[r, "T"'] & U/u \arrow[r, "P_0"'] \arrow[to=Vv, Rightarrow, "\sigma_T"] & U
\arrow[from=Aa, to=Uu, Rightarrow, "h"']
\end{tikzcd}$$

即ち $j \in J$ に対して $h \circ \mu_j = \sigma_{Tj}$ であり，μ_j は U/u の射 $\mu_j\colon \langle P_0Tj, \sigma_{Tj}\rangle \to \langle a, h\rangle$ となる．

$$\begin{tikzcd}
P_0Tj \arrow[rd, "\sigma_{Tj}"] \arrow[dd, "\mu_j"'] & \\
 & u \\
a \arrow[ru, "h"'] &
\end{tikzcd}$$

これは言い換えると $\mu_j\colon Tj \to \langle a, h\rangle$ ということである．即ち自然変換 $\mu\colon T \Rightarrow \Delta\langle a, h\rangle$ となる．

後は $\langle\langle a, h\rangle, \mu\rangle$ が T の余極限となることを示せばよい．そのために $\theta\colon T \Rightarrow \Delta\langle b, g\rangle$ を自然変換とすると，次の実線の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & P_0Tj \arrow[rd, "\mu_j"] \arrow[rrd, bend left, "\theta_j"] \arrow[dddr, "\sigma_{Tj}"] & & \\
 & & a \arrow[r, dashed, "l"] \arrow[dd, "h"] & b \arrow[ddl, "g"] \\
P_0Ti \arrow[uur] \arrow[urr, "\mu_i"] \arrow[urrr, bend right, "\theta_i"] \arrow[drr, "\sigma_{Ti}"'] & & & \\
 & & u &
\end{tikzcd}$$

余極限 $\langle a, \mu\rangle$ の普遍性により，点線の射 l が存在して $l \circ \mu_i = \theta_i$ となる．このとき $\langle a, \mu\rangle$ の普遍性により $g \circ l = h$ である．故に l は U/u の射 $l\colon \langle a, h\rangle \to \langle b, g\rangle$ を与える．再び $\langle a, \mu\rangle$ の普遍性から，このような l は明らかに一意である．以上により $\langle\langle a, h\rangle, \mu\rangle$ が余極限となることが分かった．

(2) まず $\widehat{C}/P$ の対象 $\tau\colon Q \Rightarrow P$ に対して $F^\dagger z(\tau) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(-, \tau) \in \widehat{y{\downarrow}P}$ は次で与えられる．

- $\langle a, u\rangle \in y{\downarrow}P$ に対して $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a, u\rangle, \tau) = \{s \in Qa \mid \tau_a(s) = u\}$ である．

- $y \downarrow P$ の射 $f\colon \langle a,u\rangle \to \langle b,v\rangle$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(f,\tau)\colon \{s \in Qb \mid \tau_b(s)=v\} \arrow[r] & \{t \in Qa \mid \tau_a(t)=u\} \\[-20pt]
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\[-20pt]
s \arrow[r, mapsto] & Qf(s)
\end{tikzcd}$$

次に $\beta\colon \langle Q,\tau\rangle \to \langle R,\rho\rangle$ を $\widehat{C}/P$ の射とすると $F^\dagger z(\beta)$ は自然変換であり，その $\langle a,u\rangle$ 成分は

$$\begin{tikzcd}
F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle}\colon \{s \in Qa \mid \tau_a(s)=u\} \arrow[r] & \{t \in Ra \mid \rho_a(t)=u\} \\[-20pt]
\rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\[-20pt]
s \arrow[r, mapsto] & \beta_a(s)
\end{tikzcd}$$

で与えられる．

$F^\dagger z$ が conservative であることを示すため，$F^\dagger z(\beta)$ が自然同型であるとする．つまり各 $\langle a,u\rangle \in y \downarrow P$ に対して $F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle}$ は全単射である．このとき $a \in C$ に対して $\beta_a\colon Qa \to Ra$ が全単射であることを示せばよい．

単射であることを示すため $s,t \in Qa$ が $\beta_a(s)=\beta_a(t)$ を満たすとする．このとき

$$\tau_a(s) = \rho_a \circ \beta_a(s) = \rho_a \circ \beta_a(t) = \tau_a(t)$$

である．よって $u := \tau_a(s)$ とすると $s,t \in \mathrm{dom}(F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle})$ であり

$$F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle}(s) = \beta_a(s) = \beta_a(t) = F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle}(t)$$

だから $F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle}$ の単射性により $s=t$ が分かる．

全射であることを示すため $t \in Ra$ とする．$u := \rho_a(t)$ とすれば $t \in \mathrm{cod}(F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle})$ である．故に $s \in \mathrm{dom}(F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle})$ が存在して $F^\dagger z(\beta)_{\langle a,u\rangle}(s)=t$ とできる．このとき明らかに $\beta_a(s)=t$ である．

(3) $\langle a,u\rangle \in y \downarrow P$ に対して $\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, -)$ が余連続であることを示す．

J を小圏として $T\colon J \to \widehat{C}/P$ を関手とする．$i \in J$ に対して $T(i) = \langle Q^i, \tau^i\rangle$ と書き，$\operatorname{colim} T = \langle\langle R,\rho\rangle,\mu\rangle$ と書くことにする．このとき図式

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, T(i)) \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle,\mu^i)"] \arrow[dd] & \\
& \mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, \rho) \\
\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, T(j)) \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle,\mu^j)"'] &
\end{tikzcd}$$

が $\operatorname{colim}\operatorname{Hom}_{\widehat{C}/P}(\langle a,u\rangle, T-)$ を与えることを示せばよい．上記で計算した通り，この図式は

$$\begin{tikzcd}
\{s\in Q^i a \mid \tau^i_a(s)=u\} \arrow[dd] \arrow[dr, "\mu^i"] & \\
& \{s\in Ra \mid \rho_a(s)=u\} \\
\{s\in Q^j a \mid \tau^j_a(s)=u\} \arrow[ur, "\mu^j"'] &
\end{tikzcd} \tag{51}$$

である．ここで (1) で示した通り $R=\operatorname{colim}_i Q^i$ であり，ρ はその普遍性により得られる射である．次の (i)(ii) の場合に (51) が余極限を与えることを示せばよい．

(i) J が離散圏の場合，図式 (51) は次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\{s\in Q^i a \mid \tau^i_a(s)=u\} \arrow[dr, "\mu^i"] & \\
& \left\{s\in \coprod_{i\in J} Q^i a \,\middle|\, \rho_a(s)=u\right\} \\
\{s\in Q^j a \mid \tau^j_a(s)=u\} \arrow[ur, "\mu^j"'] &
\end{tikzcd}$$

ρ の取り方から明らかに $\left\{s\in \coprod_{i\in J} Q^i a \,\middle|\, \rho_a(s)=u\right\} = \coprod_{i\in J}\{s\in Q^i a \mid \tau^i_a(s)=u\}$ だからこの場合は良い．

(ii) $J=(j\leftarrow i\rightarrow k)$ の場合，図式 (51) は次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
& \{s\in Q^j a \mid \tau^j_a(s)=u\} \arrow[dr, "\mu^j"] & \\
\{s\in Q^i a \mid \tau^i_a(s)=u\} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \{s\in Ra \mid \rho_a(s)=u\} \\
& \{s\in Q^k a \mid \tau^k_a(s)=u\} \arrow[ur, "\mu^k"'] &
\end{tikzcd}$$

ここで $Ra=(Q^j_a \amalg Q^k a)/{\sim}$ であり，ρ の取り方から

$$\{s\in Ra \mid \rho_a(s)=u\} = (\{s\in Q^j a \mid \tau^j_a(s)=u\} \amalg \{s\in Q^k a \mid \tau^k_a(s)=u\})/{\sim}$$

となるからこの場合も良い． □

※ (1) の証明で，余極限 $\langle a,\mu\rangle$ から自然変換 $\mu\colon T\Rightarrow \Delta\langle a,h\rangle$ を得る操作は圏論的によく分からないように見えるが，これは実は「コンマ圏の 2 次元的普遍性」で説明できる．(2 次元的普遍性については「2-category での極限」の PDF を参照．)

まず h の定義の図式は書き換えると

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T"] \arrow[r, bend left, "\Delta a"] \arrow[r, bend right, "P_0T"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mu"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\Delta h"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T"] \arrow[u, bend right, "P_1T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mathrm{id}}"] \arrow[r, bend right, "P_0T"'] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma_T"]
\end{tikzcd}$$

となるが，ここで σ_T と Δh については次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
& U/u \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ul, phantom, "="] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma"] \\
J \arrow[ur, "T"'] \arrow[uur, bend left, "P_1T"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] \arrow[urr, phantom, bend right=15, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
& \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma_T"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \\
J \arrow[uur, bend left, "P_1T"] \arrow[urr, bend right, "P_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
& U/u \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ul, phantom, "="] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma"] \\
J \arrow[ur, "\Delta\langle a{,}h\rangle"'] \arrow[uur, bend left, "P_1T"] \arrow[urr, bend right, "\Delta a"'] \arrow[urr, phantom, bend right=15, "="] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& \mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
& \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\Delta h"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"'] \\
J \arrow[uur, bend left, "P_1T"] \arrow[urr, bend right, "\Delta a"'] & &
\end{tikzcd}$$

即ち $\sigma_T, \Delta h$ に 1 次元的普遍性で対応するのはそれぞれ $T, \Delta\langle a, h\rangle$ である．従ってコンマ圏の 2 次元的普遍性により，ある $\nu\colon T \Rightarrow \Delta\langle a, h\rangle$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left, "\Delta\langle a{,}h\rangle"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\nu"] & U/u \arrow[r, "P_0"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left, "\Delta a"] \arrow[r, bend right, "P_0T"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mu"] & U
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
U/u \arrow[u, "P_1"] \\
J \arrow[u, bend left, "\Delta\langle a{,}h\rangle"] \arrow[u, bend right, "T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\nu}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
\\
J \arrow[uu, bend left, "P_1T"] \arrow[uu, bend right, "P_1T"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\mathrm{id}}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}$$

となる．この $\nu\colon T \Rightarrow \Delta\langle a, h\rangle$ が T の余極限を与えることを示せばよい．そこで自然

変換 $\theta\colon T \Rightarrow \Delta\langle b, g\rangle$ を取る．σ と θ の水平合成を 2 通りの合成で考えれば

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T"] \arrow[r, bend left, "\Delta b"] \arrow[r, bend right, "P_0T"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow P_0\theta"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \Delta g"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left=40, "P_1T"] \arrow[u, bend right=40, "P_1T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mathrm{id}}"] \arrow[r, bend right, "P_0T"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma_T"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}$$

を得る．一方で $\langle a, \mu\rangle$ の普遍性により次の l が取れる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, bend left, "b"] \arrow[drr, "a"'] \arrow[drr, phantom, bend left=20, "\Nearrow l"] & & \\
J \arrow[u, "P_1T"] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "\mu \Uparrow"] & U/u \arrow[r, "P_0"'] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[drr, bend left, "b"] & & \\
J \arrow[u, "P_1T"] \arrow[r, "T"'] \arrow[ur, phantom, "P_0\theta \Uparrow"] & U/u \arrow[r, "P_0"'] & U
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T"] \arrow[r, bend left=60, "\Delta b"] \arrow[r, "\Delta a" description] \arrow[r, bend right=60, "P_0T"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Uparrow \Delta l"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Uparrow \mu"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \Delta g"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T"] \arrow[r, bend left=60, "\Delta b"] \arrow[r, bend right=60, "P_0T"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow P_0\theta"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \Delta g"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left=40, "P_1T"] \arrow[u, bend right=40, "P_1T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mathrm{id}}"] \arrow[r, bend right, "P_0T"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma_T"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left=40, "P_1T"] \arrow[u, bend right=40, "P_1T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mathrm{id}}"] \arrow[r, "\Delta a"] \arrow[r, bend right=60, "P_0T"'] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Uparrow \mu"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \Delta h"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}$$

となるから，$\langle a, \mu\rangle$ の普遍性により

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T"] \arrow[r, bend left=60, "\Delta b"] \arrow[r, "\Delta a"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Uparrow \Delta l"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \Delta g"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "u"] & U \\
J \arrow[u, bend left=40, "P_1T"] \arrow[u, bend right=40, "P_1T"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\mathrm{id}}"] \arrow[r, "\Delta a"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \Delta h"] & U \arrow[u, "\mathrm{id}_U"']
\end{tikzcd}$$

が得られる．故に 2 次元的普遍性から，ある $\xi\colon \Delta\langle a,h\rangle \Rightarrow \Delta\langle b,g\rangle$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left, "\Delta\langle b,g\rangle", ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, "\Delta\langle a,h\rangle"', ""{name=B}] \arrow[Rightarrow, from=B, to=A, "\xi"'] & U/u \arrow[r, "P_0"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left, "\Delta b", ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right, "\Delta a"', ""{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=D, to=C, "\Delta l"'] & U
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
U/u \arrow[u, "P_1"] \\
J \arrow[u, bend left, "\Delta\langle b,g\rangle", ""{name=L, right}] \arrow[u, bend right, "\Delta\langle a,h\rangle"', ""{name=R, left}] \arrow[Rightarrow, from=R, to=L, "\xi"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
J \arrow[u, bend left, "P_1T", ""{name=L, right}] \arrow[u, bend right, "P_1T"', ""{name=R, left}] \arrow[Rightarrow, from=R, to=L, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

となる．このとき

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left=50, "\Delta\langle b,g\rangle", ""{name=A, below}] \arrow[r, "\Delta\langle a,h\rangle" description, ""{name=M}] \arrow[r, bend right=50, "T"', ""{name=B}] \arrow[Rightarrow, from=M, to=A, "\xi"'] \arrow[Rightarrow, from=B, to=M, "\nu"'] & U/u \arrow[r, "P_0"] & U
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left=50, "\Delta b", ""{name=C, below}] \arrow[r, "\Delta a" description, ""{name=N}] \arrow[r, bend right=50, "P_0T"', ""{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=N, to=C, "\Delta l"'] \arrow[Rightarrow, from=D, to=N, "\mu"'] & U
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left=50, "\Delta b", ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right=50, "P_0T"', ""{name=D}] \arrow[Rightarrow, from=D, to=C, "P_0\theta"'] & U
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
U/u \arrow[u, "P_1"] \\
J \arrow[u, bend left=50, "\Delta\langle b,g\rangle", ""{name=L, right}] \arrow[u, "\Delta\langle a,h\rangle" description, ""{name=M}] \arrow[u, bend right=50, "T"', ""{name=R, left}] \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\xi"'] \arrow[Rightarrow, from=R, to=M, "\nu"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
J \arrow[u, bend left=50, "P_1T", ""{name=L, right}] \arrow[u, "P_1T" description, ""{name=M}] \arrow[u, bend right=50, "P_1T"', ""{name=R, left}] \arrow[Rightarrow, from=M, to=L, "\mathrm{id}"'] \arrow[Rightarrow, from=R, to=M, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \\
J \arrow[u, bend left=50, "P_1T", ""{name=L, right}] \arrow[u, bend right=50, "P_1T"', ""{name=R, left}] \arrow[Rightarrow, from=R, to=L, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

だから 2 次元的普遍性 (一意性) により

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[r, bend left=50, "\Delta\langle b{,}g\rangle"] \arrow[r, "\Delta\langle a{,}h\rangle" description] \arrow[r, bend right=50, "T"'] \arrow[r, phantom, shift left=2.5ex, "\Uparrow\xi"] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "\Uparrow\nu"] & U/u & = & J \arrow[r, bend left=50, "\Delta\langle b{,}g\rangle"] \arrow[r, bend right=50, "T"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & U/u
\end{tikzcd}$$

が分かる.

参考文献

[1] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)

[2] ft_math さんによる圏論祭, 2012 年 12 月 8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`

[3] ft_math さんによる圏論祭, 2013 年 12 月 7 日・8 日, `http://alg-d.com/math/ft_math/`

[4] *n*Lab, nerve and realization, `https://ncatlab.org/nlab/show/nerve+and+realization`