

Isbell 双対

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 4 月 2 日

圏 C に対して関手 $z: C \rightarrow (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}$ を, C^{op} の米田埋込 $C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^C$ の opposite で定める. つまり $z(a) = \text{Hom}_C(a, -)$ であり, 米田の補題により $\text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(P, z(a)) \cong Pa$ である. z に対する普遍随伴は次のようになる.

定理 1. C を小圏, U を圏, $F: C \rightarrow U$ を関手として各点右 Kan 拡張 $z^\dagger F$ が存在するとする. このとき随伴 $F^\dagger z \dashv z^\dagger F$ が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ \uparrow F & \swarrow F^\dagger z & \\ C & \xrightarrow{z} & (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}} \end{array}$$

証明. まず $(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}$ が完備だから各点右 Kan 拡張 $F^\dagger z$ が存在する. これは $u \in U$ に対して $F^\dagger z(u) \cong \text{Hom}_U(u, F-)$ を満たす.

$\therefore u \in U, P \in (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(P, F^\dagger z(u)) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\text{Hom}_U(u, F(-)), \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(P, z(-))) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\text{Hom}_U(u, F(-)), P) \\ &\cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(P, \text{Hom}_U(u, F(-))) \end{aligned}$$

となるから $F^\dagger z(u) \cong \text{Hom}_U(u, F-)$ である.

このとき $z^\dagger F$ が各点右 Kan 拡張だから, $P \in (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}$, $u \in U$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Hom}_U(u, z^\dagger F(P)) &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(\text{Hom}_C(P, z-), \text{Hom}_U(u, F-)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(P, \text{Hom}_U(u, F-)) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(P, F^\dagger z(u)) \\ &\cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(F^\dagger z(u), P) \end{aligned}$$

となるので $F^\dagger z \dashv z^\dagger F$ である. □

ここで $F := y$ としたとき次の定理を得る.

定理 2. C を小圏とすると普遍随伴により $y^\dagger z \dashv z^\dagger y$ と $y^\dagger z \dashv z^\dagger y$ が成り立つ. このとき $y^\dagger z \cong y^\dagger z$, $z^\dagger y \cong z^\dagger y$ である.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \swarrow y^\dagger z \cong y^\dagger z & \\ C & \xrightarrow{z} & (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}} \end{array}$$

証明. $y^\dagger z$ は左随伴だから余極限と交換する. また y が忠実充満だから $(y^\dagger z) \circ y \cong z$ である. よって $y^\dagger z \cong y^\dagger z$ が分かる. 随伴の一意性により $z^\dagger y \cong z^\dagger y$ も分かる. □

$\mathcal{O} := y^\dagger z$, $\text{Spec} := z^\dagger y$ と書き随伴 $\mathcal{O} \dashv \text{Spec}: \widehat{C} \rightarrow (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}$ を Isbell 双対という. これは

- $P \in \widehat{C}$ に対して $\mathcal{O}(P) \cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(P, y(-))$
- $X \in (\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}$ に対して $\text{Spec}(X) \cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(z(-), X)$

を満たす. 特に $a \in C$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{O}(y(a)) &\cong \text{Hom}_{\widehat{C}}(y(a), y(-)) \cong \text{Hom}_C(a, -) = z(a) \\ \text{Spec}(z(a)) &\cong \text{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\text{op}}}(z(-), z(a)) \cong \text{Hom}_C(-, a) = y(a) \end{aligned}$$

である.

定理 3. $y^\dagger y \cong \text{Spec} \circ \mathcal{O}$ である. 即ち随伴 $\mathcal{O} \dashv \text{Spec}$ が与えるモナドは y の codensity monad と一致する.

証明. $P, Q \in \widehat{C}$ に対して自然に

$$\begin{aligned}
 \mathrm{Hom}_U(P, z^\dagger y(y^\dagger z(Q))) &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), \mathrm{Hom}(y^\dagger z(Q), z(-))) \\
 &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), y^\dagger z(Q)) \\
 &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), z(-)), \mathrm{Hom}(Q, y(-))) \\
 &\cong \mathrm{Hom}_{(\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Hom}(P, y(-)), \mathrm{Hom}(Q, y(-)))
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & & \widehat{C} \xrightarrow{\mathcal{O} = y^\dagger z} (\mathbf{Set}^C)^{\mathrm{op}} \\
 \uparrow y & \searrow y^\dagger y & \uparrow y \quad \nearrow z \quad \downarrow \mathrm{Spec} = z^\dagger y \\
 C & \xrightarrow{y} \widehat{C} & C \xrightarrow{y} \widehat{C}
 \end{array}$$

となるから $\mathrm{Spec} \circ \mathcal{O} = z^\dagger y \circ y^\dagger z$ は y に沿った y の各点右 Kan 拡張である. 故に $\mathrm{Spec} \circ \mathcal{O} \cong y^\dagger y$ である. \square

参考文献

- [1] Isbell duality in nlab, <https://ncatlab.org/nlab/show/Isbell+duality>
- [2] Ivan Di Liberti, Codensity: Isbell duality, pro-objects, compactness and accessibility, <https://arxiv.org/abs/1910.01014>