

# フィルター圏

alg-d

[http://alg-d.com/math/kan\\_extension/](http://alg-d.com/math/kan_extension/)

2024年1月13日

定義. 圏  $C$  がフィルター圏 (filtered category)

$\iff$  任意の有限圏  $J$  と関手  $F: J \rightarrow C$  に対して, ある対象  $c \in C$  と自然変換  $F \Rightarrow \Delta c$  が存在する.

定義. 圏  $C$  が余フィルター圏 (cofiltered category)  $\iff C^{\text{op}}$  がフィルター圏となる.

命題 1. 圏  $C$  がフィルター圏  $\iff$  以下の条件\*1を満たす.

- (1)  $C$  は空でない.
- (2) 任意の  $a_0, a_1 \in C$  に対して, ある  $c \in C$  と射  $f_0: a_0 \rightarrow c, f_1: a_1 \rightarrow c$  が存在する.

$$\begin{array}{ccc} a_0 & \overset{f_0}{\dashrightarrow} & c \\ & \searrow & \nearrow \\ a_1 & \underset{f_1}{\dashrightarrow} & c \end{array}$$

- (3) 任意の  $a_0, a_1 \in C$  と  $f_0, f_1: a_0 \rightarrow a_1$  に対して, ある  $c \in C$  と  $g: a_1 \rightarrow c$  が存在して  $g \circ f_0 = g \circ f_1$  となる.

$$a_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xrightarrow{f_1} \end{array} a_1 \xrightarrow{g} c$$

証明. ( $\implies$ ) 明らか.

( $\impliedby$ ) STEP 1, STEP 2, STEP 3 の 3 段階に分けて示す.

(STEP 1)  $a_0, \dots, a_n \in C$  を  $C$  の対象とすると, ある対象  $u \in C$  と射  $f_i: a_i \rightarrow u$  が存在する.

---

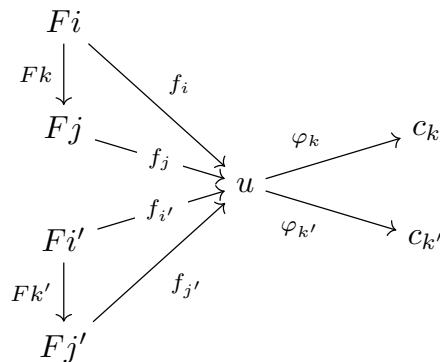
\*1 この条件をフィルター圏の定義にしている文献もある.

∴) 条件 (2) を繰り返し適用すればよい.

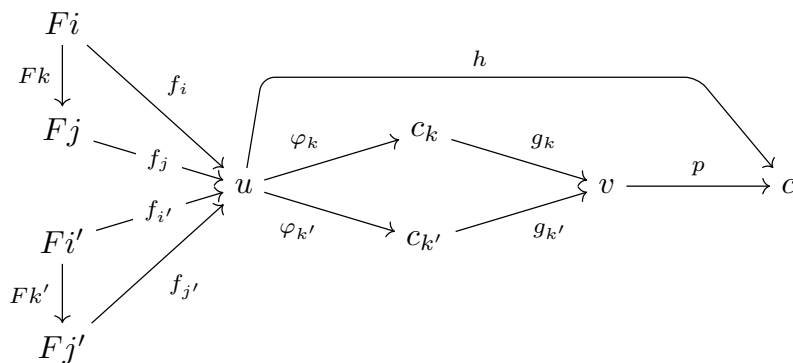
(STEP 2)  $f_0, \dots, f_n: a \rightarrow b$  を  $C$  の射とすると、ある対象  $c \in C$  と射  $p: b \rightarrow c$  が存在して  $p \circ f_0 = \dots = p \circ f_n$  となる.

∴) 条件 (3) を繰り返し適用すればよい.

(STEP 3)  $J$  を有限圏,  $F: J \rightarrow C$  を関手とする. 対象の有限族  $\{Fj\}_{j \in J}$  に STEP 1 を適用して, 対象  $u \in C$  と射  $f_j: Fj \rightarrow u$  が得られる. 次に  $k: i \rightarrow j$  を  $J$  の射とすると, 2つの射  $f_i$  と  $f_j \circ Fk: Fi \rightarrow u$  に条件 (3) を適用して  $\varphi_k: u \rightarrow c_k$  を得る.



再び STEP 1 を族  $\{c_k\}_{k \in \text{Mor}(J)}$  に適用して, 対象  $v \in C$  と射  $g_k: c_k \rightarrow v$  が得られる. 族  $\{g_k \circ \varphi_k: u \rightarrow v\}_{k \in \text{Mor}(J)}$  に STEP 2 を適用して, 対象  $c \in C$  と射  $p: v \rightarrow c$  が得られる.  $p$  の取り方から  $h := p \circ g_k \circ \varphi_k$  は  $k$  の取り方によらず一定である.



そこで  $\theta_j := h \circ f_j: Fj \rightarrow c$  と定めたとき  $\theta: F \Rightarrow \Delta c$  が自然変換となることを示せばよい. そのために  $k: i \rightarrow j$  を  $J$  の射とする. このとき定義から

$$\theta_j \circ Fk = h \circ f_j \circ Fk = h \circ f_i = \theta_i$$

となり次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} Fi & \xrightarrow{\theta_i} & c \\ Fk \downarrow & & \downarrow \text{id}_c \\ Fj & \xrightarrow{\theta_j} & c \end{array}$$

よって  $\theta: F \Rightarrow \Delta c$  は自然変換である. □

**例 2.** 有限余完備な圏はフィルター圏である.

**証明.** 有限圏  $J$  と関手  $F$  に対して, 自然変換  $F \Rightarrow \Delta(\text{colim } F)$  が存在する. □

**例 3.** 終対象を持つ圏は明らかにフィルター圏である. □

**例 4.** 順序集合  $X$  を圏とみなしたとき, これがフィルター圏となるのは, 命題 1 より  $X$  が空でない有向集合となるときである. □

**定義.** 添え字圏がフィルター圏となる余極限をフィルター余極限 (filtered colimit) という.

**Set** において, フィルター余極限は有限極限と交換するという重要な性質がある. 即ち

**命題 5.**  $I$  がフィルター圏のとき, 関手  $\text{colim}: \mathbf{Set}^I \rightarrow \mathbf{Set}$  は有限極限と交換する. 故に,  $J$  が有限な圏で  $T: I \times J \rightarrow \mathbf{Set}$  が関手のとき同型

$$\text{colim}_{i \in I} \lim_{j \in J} T(i, j) \cong \lim_{j \in J} \text{colim}_{i \in I} T(i, j).$$

が成り立つ.

**証明.**  $\text{colim}: \mathbf{Set}^I \rightarrow \mathbf{Set}$  が終対象と pullback と交換することを示せばよい.

まず終対象について示す.  $\text{colim}(\Delta 1) \cong \left( \coprod_{i \in I} 1 \right) / \sim$  である.  $I$  がフィルター圏だから  $\text{colim}(\Delta 1) \cong 1$  となり,  $\text{colim}$  が終対象と交換することが分かった.

次に pullback について示す. 次の図式を  $\mathbf{Set}^I$  の pullback とする.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi_1} & P_1 \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow \\ P_0 & \longrightarrow & Q \end{array}$$

$\mathbf{Set}^I$  の極限は各点ごとに計算すればよい (「極限」の PDF を参照) から,  $i \in I$  に対して

$$\begin{array}{ccc} Xi & \xrightarrow{(\pi_1)_i} & P_1i \\ (\pi_0)_i \downarrow & & \downarrow \\ P_0i & \longrightarrow & Qi \end{array}$$

は pullback である. 故に

$$\begin{aligned} \operatorname{colim} X &\cong \left( \prod_{i \in I} P_0i \times_{Q_i} P_1i \right) / \sim \\ \operatorname{colim} P_k &\cong \left( \prod_{i \in I} P_ki \right) / \sim \end{aligned}$$

で,  $\operatorname{colim}(\pi_k)$  は  $\operatorname{colim}(\pi_k)([\langle u_0, u_1 \rangle]) = [u_k]$  で与えられる. pullback の普遍性から点線の射  $h$  が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{colim} X & \xrightarrow{\quad \operatorname{colim}(\pi_1) \quad} & & & \operatorname{colim} P_1 \\ & \searrow \text{dashed } h & & & \downarrow \\ & & \operatorname{colim} P_0 \times_{\operatorname{colim} Q} \operatorname{colim} P_1 & \longrightarrow & \operatorname{colim} P_1 \\ & \searrow \operatorname{colim}(\pi_0) & \downarrow & & \downarrow \\ & & \operatorname{colim} P_0 & \longrightarrow & \operatorname{colim} Q \end{array}$$

この  $h$  が全単射であることが容易にわかる. よって  $\operatorname{colim}$  は pullback と交換する.  $\square$

**補題 6.**  $F: C \rightarrow D$  を関手とする.  $a \in C$  を対象として  $E := \operatorname{Hom}_C(a, -)$  とする. このとき  $F^\dagger E \cong \operatorname{Hom}_D(Fa, -)$  である. 従って  $F = y$  のとき  $y^\dagger E \cong \operatorname{ev}_a$  である.

**証明.** 米田の補題により  $\operatorname{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, \operatorname{Hom}_D(Fa, F-)) \cong \operatorname{Hom}_D(Fa, Fa)$  である. この同型で右辺の  $\operatorname{id}_{Fa}$  に対応する自然変換を  $\eta: E \Rightarrow \operatorname{Hom}_D(Fa, F-)$  とする.

$$\begin{array}{ccc} D & & \\ \uparrow F & \searrow \operatorname{Hom}_D(Fa, -) & \\ C & \xrightarrow{E} & \mathbf{Set} \\ & \uparrow \eta & \end{array}$$

このとき  $\langle \operatorname{Hom}_D(Fa, -), \eta \rangle$  が  $F$  に沿った  $E$  の左 Kan 拡張であることを示す.

そのために任意の関手  $S: D \rightarrow \mathbf{Set}$  と自然変換  $\theta: E \Rightarrow SF$  を取る. 米田の補題から得られる次の同型で  $\theta$  に対応する  $\tau$  を取る.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, SF) & \xrightarrow{\sim} & SFa \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^D}(\mathrm{Hom}_D(Fa, -), S) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \theta & \longmapsto & \tau \end{array}$$

米田の補題の証明より,  $\theta_a(\mathrm{id}_a) = \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa})$  である. このとき等式

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{S} & \mathbf{Set} \\ F \uparrow & \nearrow \tau \Uparrow & \\ C & \xrightarrow{E} & \mathbf{Set} \\ \eta \Uparrow & & \\ & & \end{array} = \begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{S} & \mathbf{Set} \\ F \uparrow & \nearrow \theta \Uparrow & \\ C & \xrightarrow{E} & \mathbf{Set} \\ & & \end{array}$$

が成り立つ.

∴) 米田の補題より次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, \mathrm{Hom}_D(Fa, F-)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_D(Fa, Fa) \\ \tau_F \circ - \downarrow & & \downarrow \tau_{Fa} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, SF) & \xrightarrow{\sim} & SFa \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{id}_{Fa} \\ \tau_F \circ - \downarrow & & \downarrow \tau_{Fa} \\ \tau_F \circ \eta & \xrightarrow{\sim} & \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) \\ \theta & \xrightarrow{\sim} & \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) \end{array}$$

故に  $\tau_F \circ \eta = \theta$  となる.

後はこの  $\tau$  の一意性を示せばよい. そのために  $\tau'$  が  $\tau'_F \circ \eta = \theta$  を満たしたとすると, 再び米田の補題により次の図式は可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, \mathrm{Hom}_D(Fa, F-)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_D(Fa, Fa) \\ \tau'_F \circ - \downarrow & & \downarrow \tau'_{Fa} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(E, SF) & \xrightarrow{\sim} & SFa \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \eta & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{id}_{Fa} \\ \tau'_F \circ - \downarrow & & \downarrow \tau'_{Fa} \\ \tau'_F \circ \eta & \xrightarrow{\sim} & \tau'_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) \\ \parallel & & \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) \\ \theta & \xrightarrow{\sim} & \theta_a(\mathrm{id}_a) \end{array}$$

故に  $\tau'_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa}) = \theta_a(\mathrm{id}_a) = \tau_{Fa}(\mathrm{id}_{Fa})$  が分かり, 米田の補題から  $\tau' = \tau$  が分かる.  $\square$

補題 7.  $C, D$  を圏,  $d \in D$  を対象とする.  $C$  は有限完備で関手  $F: C \rightarrow D$  は有限極限と

交換するとする. このときコマ圏  $d \downarrow F$  は余フィルター圏である.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{F} & D \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow d \\
 d \downarrow F & \longrightarrow & \mathbb{1}
 \end{array}$$

証明. 定義により,  $d \downarrow F$  の対象は  $D$  の射  $d \rightarrow Fc$  で, 射  $(d \rightarrow Fc_0) \rightarrow (d \rightarrow Fc_1)$  は次を可換にする  $C$  の射  $c_0 \rightarrow c_1$  である.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc_0 & & c_0 \\
 & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\
 d & & Fc_1 & & c_1
 \end{array}$$

命題 1 の 3 条件の双対を示せばよい.

(i) まず  $d \downarrow F \neq \mathbb{0}$  を示す.  $C$  が有限完備だから終対象  $1 \in C$  が存在する.  $F$  が有限極限と交換するから  $F(1) \in D$  は終対象になる. よって  $D$  の射  $d \rightarrow F(1)$  が存在する. 従って  $d \downarrow F \neq \mathbb{0}$  である.

(ii)  $g_0: d \rightarrow Fc_0$ ,  $g_1: d \rightarrow Fc_1$  とする.  $C$  が有限完備だから直積  $c_0 \times c_1$  が存在する.  $F$  が有限極限と交換するから  $F(c_0 \times c_1) \cong Fc_0 \times Fc_1$  である. 直積の普遍性から次の点線の射  $h$  が存在して可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc_0 & & c_0 \\
 & \nearrow^{g_0} & \uparrow & & \uparrow \\
 d & \overset{h}{\dashrightarrow} & F(c_0 \times c_1) & & c_0 \times c_1 \\
 & \searrow_{g_1} & \downarrow & & \downarrow \\
 & & Fc_1 & & c_1
 \end{array}$$

よって射  $(d \xrightarrow{h} F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \xrightarrow{g_0} Fc_0)$  と  $(d \xrightarrow{h} F(c_0 \times c_1)) \rightarrow (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$  が得られた.

(iii)  $g_0: d \rightarrow Fc_0$ ,  $g_1: d \rightarrow Fc_1$  として, 二つの射  $p, q: (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \rightarrow (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$  を取る. 即ち次の図式 (三角形は可換) を考える.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc_0 & & c_0 \\
 & \nearrow^{g_0} & \downarrow Fp & & \downarrow p \\
 d & & Fc_1 & & c_1 \\
 & \searrow_{g_1} & \downarrow Fq & & \downarrow q
 \end{array}$$

$C$  が有限完備だから equalizer  $c \xrightarrow{e} c_0 \xrightleftharpoons[p]{p} c_1$  が存在する.  $F$  が有限極限と交換するから  $Fc \xrightarrow{Fe} Fc_0 \xrightleftharpoons[Fq]{Fp} Fc_1$  も equalizer である. 今  $Fp \circ g_0 = g_1 = Fq \circ g_0$  だから, equalizer  $Fe$  の普遍性により次の点線の射が存在して, 三角形が可換となる.

$$\begin{array}{ccc}
 & & Fc \\
 & \nearrow h & \downarrow Fe \\
 d & \xrightarrow{g_0} & Fc_0 \\
 & \searrow g_1 & \downarrow Fp \quad \downarrow Fq \\
 & & Fc_1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c}
 c \\
 \downarrow e \\
 c_0 \\
 \downarrow p \quad \downarrow q \\
 c_1
 \end{array}$$

よって

$$(d \xrightarrow{h} Fc) \xrightarrow{e} (d \xrightarrow{g_0} Fc_0) \xrightleftharpoons[q]{p} (d \xrightarrow{g_1} Fc_1)$$

は  $d \downarrow F$  の射で  $p \circ e = q \circ e$  である.

以上の (i)(ii)(iii) により  $d \downarrow F$  は余フィルター圏である. □

定義.  $C$  を小圏とする. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が平坦 (flat) とは,  $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換することをいう.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{C} & & \\
 \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\
 C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

定理 8. 小圏  $C$  と関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  について以下は同値.

- (1)  $F$  が平坦
- (2)  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏
- (3)  $F$  が表現可能関手のフィルター余極限で書ける

証明. (1  $\implies$  2)  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  を関手とする. 各点左 Kan 拡張により,  $P \in \widehat{C}$  に対して

$$\begin{aligned} y^\dagger F(P) &\cong \operatorname{colim}(y \downarrow P \rightarrow C \xrightarrow{F} \mathbf{Set}) \\ &\cong \left( \coprod_{\langle c, u \rangle \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left( \coprod_{c \in C} \coprod_{u \in Pc} Fc \right) / \sim \\ &\cong \left( \coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim \end{aligned}$$

である.  $\langle c, u \rangle, \langle d, v \rangle \in y \downarrow P$  として  $f: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle d, v \rangle$  を射とする. つまり  $f$  は  $C$  の射  $f: c \rightarrow d$  で  $Pf(v) = u$  を満たす. このとき  $s \in Fc$  とすると,  $\left( \coprod_{\langle c, u \rangle \in y \downarrow P} Fc \right) / \sim$  において  $[s] = [Ff(s)]$  である.  $\left( \coprod_{c \in C} Pc \times Fc \right) / \sim$  で考えれば  $[[Pf(v), s]] = [[v, Ff(s)]]$  となる. 以下簡単のため  $[[-, \square]] = [-, \square]$  と書く.

まず  $P = y(a)$  ( $a \in C$ ) の場合を考えると,  $y^\dagger F(y(a)) \cong \left( \coprod_{c \in C} \operatorname{Hom}(c, a) \times Fc \right) / \sim$  だから, 任意の  $u \in y^\dagger F(y(a))$  は  $u = [f, s]$  ( $f: c \rightarrow a$ ,  $s \in Fc$ ) と書ける. このとき  $[f, s] = [\operatorname{id}_a \circ f, s] = [Pf(\operatorname{id}_a), s] = [\operatorname{id}_a, Ff(s)]$  である. 一方  $y^\dagger F \circ y \cong F$  だったから  $y^\dagger F(y(a)) \cong Fa$  である. この同型は  $Fa \ni u \mapsto [\operatorname{id}_a, u] \in y^\dagger F(y(a))$  で与えられる.

$P, Q \in \widehat{C}$  として  $\theta: P \Rightarrow Q$  を自然変換とする. コンマ圏の普遍性により得られる  $H: y \downarrow P \rightarrow y \downarrow Q$  (下の図式参照) は  $\langle c, u \rangle \in y \downarrow P$  に対して  $H\langle c, u \rangle = \langle c, \theta_c(u) \rangle$  で与えられる.

$$\begin{array}{ccccc} & & & Q & \\ & & & \rightarrow & \widehat{C} \\ & & & \uparrow & \uparrow y \\ & & & \cong & \\ & & & \uparrow & \\ & & & 1 & \\ & & & \uparrow & \\ & & & y \downarrow Q & \rightarrow C \xrightarrow{F} \mathbf{Set} \\ & & & \uparrow & \uparrow \\ & & & \cong & \\ & & & y \downarrow P & \xrightarrow{H} y \downarrow Q \end{array}$$

故に  $y^\dagger F(\theta): y^\dagger F(P) \rightarrow y^\dagger F(Q)$  は  $u \in Pc$ ,  $s \in Fc$  に対して  $y^\dagger F(\theta)([u, s]) = [\theta_c(u), s]$  で与えられる.

$\Delta 1 \in \widehat{C}$  は終対象で,  $y^\dagger F$  が有限極限と交換するから  $y^\dagger F(\Delta 1)$  も終対象である. 従って  $y^\dagger F(\Delta 1) \cong 1$  となる. よって  $1 \cong (\coprod Fc) / \sim$  だから, ある  $c \in C$  について  $Fc \neq \emptyset$  なければならない. 故に  $1 \downarrow F \neq \mathbf{0}$  である.

次に  $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$  を取る.  $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$  と射  $\langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$ ,  $\langle c, u \rangle \rightarrow$



$\langle c_1, u_1 \rangle$  が存在することを示す. 今  $y^\dagger F$  が有限極限と交換するから, 直積

$$\begin{array}{ccc} & y(c_0) \times y(c_1) & \\ & \swarrow p_0 \quad \searrow p_1 & \\ y(c_0) & & y(c_1) \end{array}$$

と交換する. 即ち普遍性により得られる次の射  $h$  が同型 (即ち全単射) を与える.

$$\begin{array}{ccc} & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & \\ & \swarrow y^\dagger F(p_0) \quad \searrow y^\dagger F(p_1) & \\ y^\dagger F(y(c_0)) & & y^\dagger F(y(c_1)) \\ & \swarrow & \searrow \\ & y^\dagger F(y(c_0)) \times y^\dagger F(y(c_1)) & \end{array}$$

$h \downarrow \cong$

$y^\dagger F \circ y \cong F$  だから

$$\begin{array}{ccc} & y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) & \\ & \swarrow y^\dagger F(p_0) \quad \searrow y^\dagger F(p_1) & \\ Fc_0 & & Fc_1 \\ & \swarrow & \searrow \\ & Fc_0 \times Fc_1 & \end{array}$$

$h \downarrow \cong$

としてよい.  $u := h^{-1}(\langle u_0, u_1 \rangle) \in y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1))$  を取れば  $y^\dagger F(p_i)(u) = u_i$  である.

$$y^\dagger F(y(c_0) \times y(c_1)) \cong \left( \prod_{c \in C} \text{Hom}_C(c, c_0) \times \text{Hom}_C(c, c_1) \times Fc \right) / \sim$$

だから,  $u = [f_0, f_1, s]$  となる  $c \in C$ ,  $f_i: c \rightarrow c_i$ ,  $s \in Fc$  が取れる. このとき

$$u_i = y^\dagger F(p_i)([f_0, f_1, s]) = [f_i, s] = [\text{id}_{c_i} \circ f_i, s] = [\text{id}_{c_i}, Ff_i(s)]$$

だから  $Ff_i(s) = u_i$  となることが分かる. 故に  $f_i: \langle c, s \rangle \rightarrow \langle c_i, u_i \rangle$  は  $1 \downarrow F$  の射である.

最後に対象  $\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle \in 1 \downarrow F$  と射  $f_0, f_1: \langle c_0, u_0 \rangle \rightarrow \langle c_1, u_1 \rangle$  を取る. ある対象  $\langle c, u \rangle \in 1 \downarrow F$  と射  $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$  で  $f_0 \circ g = f_1 \circ g$  を満たすものが存在することを示す.  $\hat{C}$  で equalizer

$$X \xrightarrow{\theta} y(c_0) \begin{array}{c} \xrightarrow{y(f_0)} \\ \xrightarrow{y(f_1)} \end{array} y(c_1)$$

が存在して、 $y^\dagger F$  がこれと交換するから

$$y^\dagger F(X) \xrightarrow{y^\dagger F(\theta)} Fc_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{Ff_0} \\ \xrightarrow{Ff_1} \end{array} Fc_1$$

が equalizer となる. 定義より  $Ff_0(u_0) = Ff_1(u_0)$  だから, ある  $s \in y^\dagger F(X)$  が存在して  $y^\dagger F(\theta)(s) = u_0$  となる. このとき  $s = [v, u]$  ( $c \in C, v \in Xc, u \in Fc$ ) と書けば

$$y^\dagger F(\theta)(s) = [\theta_c(v), u] = [\text{id}_{c_0}, F(\theta_c(v))(u)]$$

である. よって  $g := \theta_c(v): c \rightarrow c_0$  と置けば  $Fg(u) = u_0$  となり,  $g: \langle c, u \rangle \rightarrow \langle c_0, u_0 \rangle$  は射である. また  $\theta$  が equalizer であるから  $f_0 \circ g = f_1 \circ g$  も分かる.

(2  $\implies$  3) ここでは区別のため, 米田埋込  $C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}^C$  を  $z$  と書く.  $z \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$  だから (「コマ圏」の PDF を参照),  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏であるとする  $z \downarrow F$  はフィルター圏である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\ \uparrow & \swarrow & \searrow \text{id} \\ z \downarrow F & \rightarrow & C^{\text{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C \end{array}$$

よって  $F \cong \text{colim}(z \downarrow F \rightarrow C^{\text{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C)$  は表現可能関手のフィルター余極限である.

(3  $\implies$  1) フィルター圏  $J$  と関手  $S: J \rightarrow C^{\text{op}}$  を使って  $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{z} \mathbf{Set}^C)$  と書けたとする. 即ち

$$F \cong \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_{C^{\text{op}}}(-, Sj) = \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -)$$

である.  $y^\dagger \dashv y^{-1}$  だから  $y^\dagger$  は余極限と交換するので, 補題 6 を使うと

$$y^\dagger F \cong y^\dagger \left( \text{colim}_{j \in J} \text{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \text{colim}_{j \in J} y^\dagger \left( \text{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \text{colim}_{j \in J} \text{ev}_{Sj}$$

となる.  $\text{ev}_{Sj}$  は極限と交換し,  $\text{colim}_{j \in J}$  は有限極限と交換する (命題 5) から,  $y^\dagger F$  も有限極限と交換する.  $\square$

系 9.  $C$  を小圏とするとき

$$\text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set} \text{ が有限極限と交換する} \iff C \text{ がフィルター圏}$$

証明. 随伴  $\text{colim} \dashv \Delta: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$  が成り立つから, 普遍随伴により  $F := \text{colim} \circ y$  と置けば  $\text{colim} \cong y^\dagger F$  である.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Set}^C & & \\ \uparrow y & \searrow \text{colim} & \\ C^{\text{op}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

よって定理 8 から

$$\begin{aligned} \text{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set} \text{ が有限極限と交換する} &\iff F \text{ が平坦} \\ &\iff 1 \downarrow F \text{ が余フィルター圏} \end{aligned}$$

である. 故に  $1 \downarrow F \cong C^{\text{op}}$  を示せばよい. そのためには  $c \in C$  に対して  $\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, Fc) \cong 1$ , 即ち  $Fc \cong 1$  を示せばよい.  $c \in C$  と  $x \in \mathbf{Set}$  に対して

$$\text{Hom}_{\mathbf{Set}}(Fc, x) = \text{Hom}_{\mathbf{Set}}(\text{colim } y(c), x) \cong \text{Hom}_{\mathbf{Set}^C}(y(c), \Delta x) \cong \Delta x(c) = x$$

だから  $Fc \cong 1$  である. □

**系 10.** 平坦関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  は有限極限と交換する. 圏  $C$  が有限完備ならば逆も成り立つ. 即ち有限極限と交換する関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  は平坦である.

証明.  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が平坦ならば  $y$  と  $y^\dagger F$  が有限極限と交換するから  $F \cong y^\dagger F \circ y$  も有限極限と交換する.

$$\begin{array}{ccc} \widehat{C} & & \\ \uparrow y & \searrow y^\dagger F & \\ C & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set} \end{array}$$

圏  $C$  が有限完備で  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換するならば, 補題 7 により  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏だから, 定理 8 より  $F$  は平坦である. □

**例 11.**  $a \in C$  に対して  $F := \text{Hom}_C(a, -): C \rightarrow \mathbf{Set}$  は平坦関手である.

証明. 定理 8 より  $1 \downarrow F$  が余フィルター圏であることを示せばよいが,  $1 \downarrow F$  は始対象  $\langle a, \text{id}_a \rangle$  を持つから余フィルター圏である. □

**定理 12.**  $C, D$  を小圏として,  $C$  は有限完備とする. このとき

$$\text{関手 } F: C \rightarrow D \text{ が有限極限と交換する} \iff F^\dagger: \widehat{C} \rightarrow \widehat{D} \text{ が有限極限と交換する}$$

証明. ( $\Leftarrow$ )  $F^\dagger \circ y \cong y \circ F$  である.  $y$  と  $F^\dagger$  が有限極限と交換するから,  $y \circ F \cong F^\dagger \circ y$  も有限極限と交換する.  $y$  は忠実充満だから  $F$  が有限極限と交換することが分かる.

( $\Rightarrow$ )  $\widehat{C}$  の有限極限  $\lim P_i$  に対して  $F^\dagger(\lim P_i) \cong \lim F^\dagger P_i$  を示す. そのためには各  $d \in D$  に対して  $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong (\lim F^\dagger P_i)(d)$  を示せばよい.  $(\lim F^\dagger P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$  であるから  $F^\dagger(\lim P_i)(d) \cong \lim(F^\dagger P_i(d))$ , 即ち  $F^\dagger(-)(d): \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換することを示せばよい.

$P \in \widehat{C}$  に対して, 各点左 Kan 拡張により  $F^\dagger P(d) \cong \operatorname{colim} P \circ P_0$  である.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{d} & D^{\operatorname{op}} & & \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow & \searrow & \\
 & & F^{\operatorname{op}} & & F^\dagger P \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
 F^{\operatorname{op}} \downarrow d & \xrightarrow{P_0} & C^{\operatorname{op}} & \xrightarrow{P} & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

故に  $F^\dagger(-)(d) \cong (\widehat{C} \xrightarrow{P_0^{-1}} \mathbf{Set} \xrightarrow{F^{\operatorname{op}} \downarrow d} \operatorname{colim} \rightarrow \mathbf{Set})$  である.  $P_0^\dagger \dashv P_0^{-1}$  だから  $P_0^{-1}$  は右随伴, よって極限と交換する. 故に  $\operatorname{colim}: \mathbf{Set}^{F^{\operatorname{op}} \downarrow d} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限極限と交換することを示せばよい. そのためには系 9 より,  $F^{\operatorname{op}} \downarrow d$  がフィルター圏であればよいが,  $F^{\operatorname{op}} \downarrow d = (d \downarrow F)^{\operatorname{op}}$  だから, 補題 7 より明らか.  $\square$

**例 13.**  $\mathbf{Set}$  でない場合, 有限極限とフィルター余極限が交換できない場合がある. 圏  $I$  を順序集合  $\mathbb{N}$  を圏とみなしたものとして,  $J := (0 \rightrightarrows 1)$  とする. 関手  $T: I \times J \rightarrow \mathbf{Top}$  を定義する. 即ち,  $\mathbf{Top}$  の図式

$$\begin{array}{ccccccc}
 T(0, 1) & \xrightarrow{k_0} & T(1, 1) & \xrightarrow{k_1} & T(2, 1) & \xrightarrow{k_2} & \cdots \\
 f_0 \uparrow\uparrow g_0 & & f_1 \uparrow\uparrow g_1 & & f_2 \uparrow\uparrow g_2 & & \\
 T(0, 0) & \xrightarrow{h_0} & T(1, 0) & \xrightarrow{h_1} & T(2, 0) & \xrightarrow{h_2} & \cdots
 \end{array}$$

を定義する. まず  $T(i, 0) := [0, 1/(i+1)]$  として  $T(i, 1) := (T(i, 0) \amalg T(i, 0))/\sim$  と置く. ここで  $\sim$  は同値関係であって, 2つの 0 を同一視し, 2つの  $1/(i+1)$  を同一視するものである. (よって  $T(i, 1)$  は位相的には円周になる.) そして標準的に得られる二つの単射を  $f_i, g_i: T(i, 0) \rightarrow T(i, 1)$  とする. 次に関数  $h_i: T(i, 0) \rightarrow T(i+1, 0)$  を

$$h_i(x) := \begin{cases} x & \left( 0 \leq x \leq \frac{1}{i+2} \right) \\ \frac{1}{i+2} & \left( \frac{1}{i+2} < x \leq \frac{1}{i+1} \right) \end{cases}$$

で定義し,  $h_i \amalg h_i$  から得られる射を  $k_i: T(i, 1) \rightarrow T(i+1, 1)$  とする.

さて,  $X := \{a, b\}$  の位相を  $\{\emptyset, \{b\}, X\}$  により定義すると

$$\operatorname{colim}_i T(i, 0) \cong X, \quad \operatorname{colim}_i T(i, 1) \cong X$$

であり, 従って  $\lim_j \operatorname{colim}_i T(i, j) \cong X$  が分かる. 一方,  $\lim_j T(i, j)$  は 2 点からなる離散位相空間なので  $\operatorname{colim}_i \lim_j T(i, j)$  も 2 点からなる離散位相空間である. 故に

$$\operatorname{colim}_i \lim_j T(i, j) \not\cong \lim_j \operatorname{colim}_i T(i, j)$$

である. □

系 9 の有限極限を有限直積に弱めることで, 次の定義を得る.

定義. 小圏  $C$  が sifted  $\iff \operatorname{colim}: \mathbf{Set}^C \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限直積と交換する

小圏  $C$  が cosifted  $\iff C^{\text{op}}$  が sifted

定義. 添え字圏が sifted な余極限を sifted colimit という.

定義.  $C$  を小圏とする. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が sifted flat とは,  $y^\dagger F: \widehat{C} \rightarrow \mathbf{Set}$  が有限直積と交換することをいう.

系 9 によりフィルター圏は sifted である. 特に有限余完備な圏は sifted である.

定義. 圏  $C$  の図式  $a \leftarrow c \rightarrow b$  を  $a$  から  $b$  への span という. 双対的に, 図式  $a \rightarrow c \leftarrow b$  を  $a$  から  $b$  への cospan という.

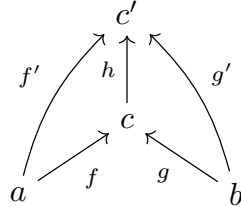
定義.  $C$  を圏,  $a, b \in C$  を対象とする.  $a$  から  $b$  への span がなす圏  $\operatorname{Span}(a, b)$  を以下のように定める.

- $\operatorname{Ob}(\operatorname{Span}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \operatorname{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xleftarrow{f} c \xrightarrow{g} b\}$
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \operatorname{Span}(a, b)$  とする.  $c := \operatorname{dom}(f)$ ,  $c' := \operatorname{dom}(f')$  とする.  $\langle f, g \rangle$  から  $\langle f', g' \rangle$  への射は, 次の図式を可換とする射  $h: c \rightarrow c'$  である.

$$\begin{array}{ccccc}
 & a & & b & \\
 & \swarrow f' & & \searrow g' & \\
 & & c' & & \\
 & \swarrow f & \uparrow h & \searrow g & \\
 & c & & & 
 \end{array}$$

同様にして cospan がなす圏  $\operatorname{Cospan}(a, b)$  が以下のように定まる.

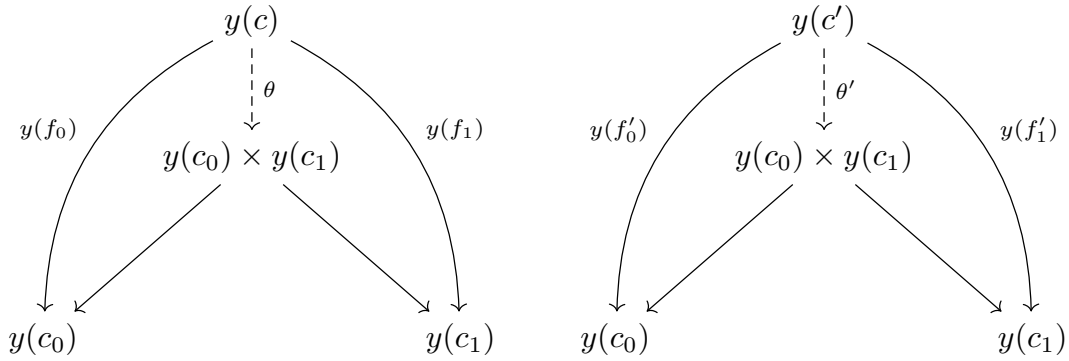
- $\text{Ob}(\text{Cospan}(a, b)) := \{\langle f, g \rangle \in \text{Mor}(C)^2 \mid c \in C, a \xrightarrow{f} c \xleftarrow{g} b\}$
- $\langle f, g \rangle, \langle f', g' \rangle \in \text{Cospan}(a, b)$  とする.  $c := \text{cod}(f)$ ,  $c' := \text{cod}(f')$  とする.  $\langle f, g \rangle$  から  $\langle f', g' \rangle$  への射は, 次の図式を可換とする射  $h: c \rightarrow c'$  で定める.



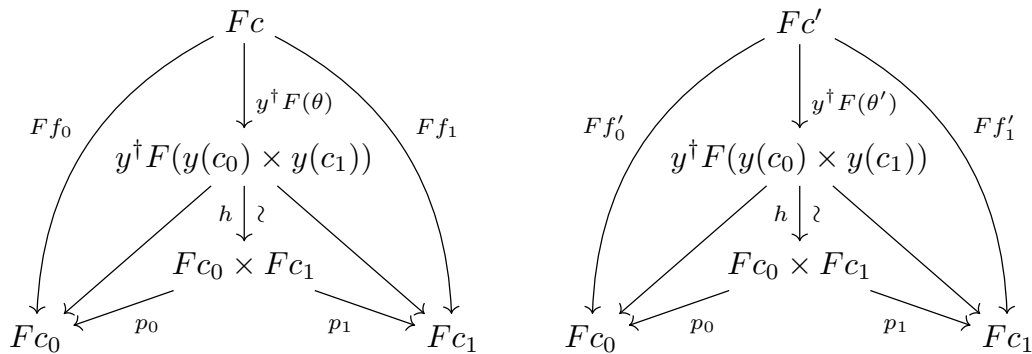
補題 14. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  が sifted flat ならば, 任意の  $s, t \in 1 \downarrow F$  に対して,  $1 \downarrow F$  における span からなる圏  $\text{Span}(s, t)$  は連結である.

証明. まず定理 8 の  $\implies$  の証明により, ある  $\langle c, s \rangle \in 1 \downarrow F$  と  $f_i: \langle c, s \rangle \rightarrow \langle c_i, u_i \rangle$  が存在することが分かる. 故に  $\text{Span}(\langle c_0, u_0 \rangle, \langle c_1, u_1 \rangle) \neq \mathbf{0}$  である.

次に二つの span  $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f_0} \langle c, u \rangle \xrightarrow{f_1} \langle c_1, u_1 \rangle$ ,  $\langle c_0, u_0 \rangle \xleftarrow{f'_0} \langle c', u' \rangle \xrightarrow{f'_1} \langle c_1, u_1 \rangle$  を取る. この二つが zigzag で結ばれることを示そう. 直積の普遍性から次の点線の射  $\theta, \theta'$  が存在する.



定理 8 の  $\implies$  の証明と同様, 次の図式を得る.

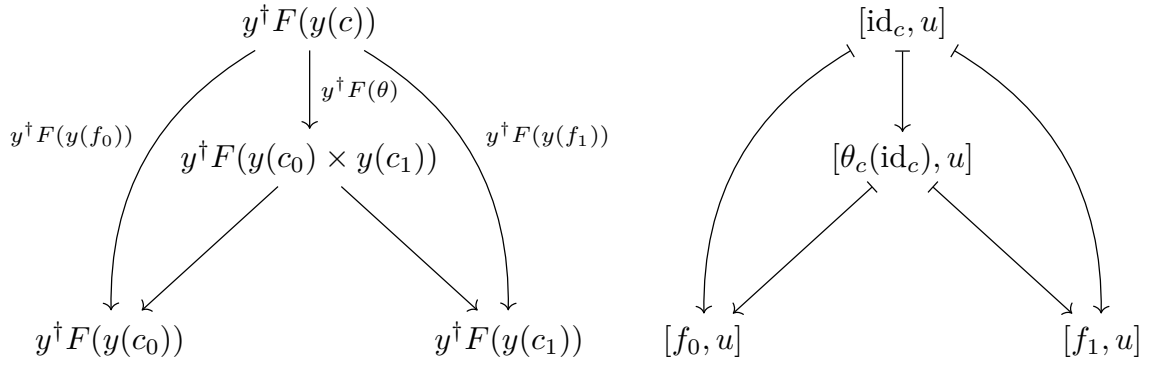


故に

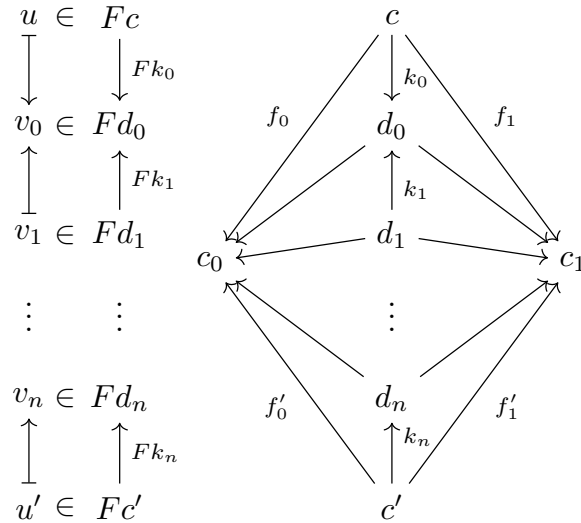
$$u_i = Ff_i(u) = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta))(u) = p_i(h(y^\dagger F(\theta)(u)))$$

$$u'_i = Ff'_i(u') = (p_i \circ h \circ y^\dagger F(\theta'))(u') = p_i(h(y^\dagger F(\theta')(u')))$$

を得る. よって集合の直積の定義から,  $h(y^\dagger F(\theta)(u)) = h(y^\dagger F(\theta')(u'))$  である.  $h$  が同型だから  $y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u')$  を得る. 同型  $Fc \cong y^\dagger F(y(c))$  は  $u \mapsto [\text{id}_c, u]$  で与えられていたから,



で考えれば  $\theta_c(\text{id}_c) = \langle f_0, f_1 \rangle$  となることが分かる. 同様にして  $\theta'_c(\text{id}_{c'}) = \langle f'_0, f'_1 \rangle$  である. また  $[\langle f_0, f_1 \rangle, u] = y^\dagger F(\theta)(u) = y^\dagger F(\theta')(u') = [\langle f'_0, f'_1 \rangle, u']$  が分かる. これが成り立つためには, 次の右側の可換図式と  $v_0 \in Fd_0, \dots, v_n \in Fd_n$  であって



$Fk_0(u) = v_0, Fk_1(v_1) = v_0, Fk_n(u') = v_n$  となるものが存在しなければならない. これは圏  $1 \downarrow F$  における二つの span  $\langle f_0, f_1 \rangle, \langle f'_0, f'_1 \rangle$  が zigzag で結ばれることを意味する. □

命題 15. 小圏  $C$  に対して以下の条件は同値.

- (1)  $C$  が sifted
- (2) 任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Cospan}(a, b)$  が連結
- (3) 対角関手  $\Delta: C \rightarrow C \times C$  が final

証明. (1  $\implies$  2)  $F := \text{colim } \circ y: C^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  と置く.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{Set}^C & & \\
 \uparrow y & \searrow \text{colim} & \\
 C^{\text{op}} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}
 \end{array}$$

$C$  が sifted だから  $F$  は sifted flat である. 一方  $1 \downarrow F = C^{\text{op}}$  であった. よって補題 14 により, 任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Cospan}(a, b)$  が連結であることが分かる.

(2  $\iff$  3)  $\Delta: C \rightarrow C \times C$  を対角関手とすれば,  $a, b \in C$  に対して  $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta = \text{Cospan}(a, b)$  である. よって「 $\Delta$  が final  $\iff$  任意の  $a, b$  に対して  $\langle a, b \rangle \downarrow \Delta$  が連結」(「随伴関手定理」の PDF を参照) より明らか.

(2  $\implies$  1) 略 □

よって有限余直積を持つ圏は sifted である.

双対を考えれば「小圏  $C$  が cosifted  $\iff$  任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Span}(a, b)$  が連結」である.

定理 16. 関手  $F: C \rightarrow \mathbf{Set}$  に対して以下の条件は同値.

- (1)  $F$  が sifted flat.
- (2)  $1 \downarrow F$  が cosifted.
- (3)  $F$  は表現可能関手の sifted colimit である. 即ち sifted な圏  $J$  と関手  $K: J \rightarrow C^{\text{op}}$  が存在して  $F \cong \text{colim}(J \xrightarrow{K} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$  と書ける.

証明. (1  $\implies$  2) 補題 1 より明らか.

(2  $\implies$  3)  $y^\dagger y \cong \text{id}$  だから各点左 Kan 拡張により

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{F} & \mathbf{Set}^C \\
 \uparrow & \swarrow & \uparrow y \\
 y \downarrow F & \rightarrow & C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C
 \end{array}$$



$F \cong y^\dagger y(F) \cong \operatorname{colim}(y \downarrow F \rightarrow C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C)$  であるが条件 2 より  $y \downarrow F = (1 \downarrow F)^{\text{op}}$  は sifted である.

(3  $\implies$  1) sifted な  $J$  と  $S: J \rightarrow C^{\text{op}}$  が存在して  $F \cong \operatorname{colim}(J \xrightarrow{S} C^{\text{op}} \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^C) = \operatorname{colim}_{j \in J} \operatorname{Hom}_C(Sj, -)$  と書けるとする.  $y^\dagger \dashv y^{-1}$  だから  $y^\dagger$  は余極限と交換し

$$y^\dagger F = y^\dagger \left( \operatorname{colim}_{j \in J} \operatorname{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \operatorname{colim}_{j \in J} y^\dagger \left( \operatorname{Hom}_C(Sj, -) \right) \cong \operatorname{colim}_{j \in J} \operatorname{ev}_{Sj}$$

である.  $\operatorname{ev}_{Sj}$  は極限と交換し,  $\operatorname{colim}_{j \in J}$  は有限直積と交換するから,  $y^\dagger F$  も有限直積と交換する.  $\square$

## 参考文献

- [1] J. Adamek and J. Rosicky, On sifted colimits and generalized varieties, *Theory and Applications of Categories*, Vol. 8 (2001), No. 3, 33–53, <http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/8/n3/8-03abs.html>
- [2] Francis Borceux, *Handbook of Categorical Algebra: Volume 1*, Cambridge University Press (1994)