

エンド

alg-d

https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025年1月6日

C, D を圏, $F, G: C \rightarrow D$ を関手とする. 自然変換 $\theta: F \Rightarrow G$ とは, 次の図式を可換にする射の族 $\{\theta_a: Fa \rightarrow Ga\}_{a \in C}$ であった.

$$\begin{array}{ccccc}
 a & & Fa & \xrightarrow{\theta_a} & Ga \\
 \downarrow f & & Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\
 b & & Fb & \xrightarrow{\theta_b} & Gb
 \end{array}$$

$1 = \{*\}$ を 1 元集合とすれば, 射の族 $\theta = \{\theta_a: Fa \rightarrow Ga\}_{a \in C}$ を与えることと, 写像の族 $\sigma = \{\sigma_a: 1 \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Ga)\}_{a \in C}$ を与えることは同じことである. θ が自然変換であるための条件を σ に翻訳すれば, 自然変換とは任意の $f: a \rightarrow b$ に対して図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \text{Hom}_D(Fa, Ga) & & \\
 & \nearrow \sigma_a & & \searrow Gf \circ - & \\
 1 & & & & \text{Hom}_D(Fa, Gb) \\
 & \searrow \sigma_b & & \nearrow - \circ Ff & \\
 & & \text{Hom}_D(Fb, Gb) & &
 \end{array}$$

を可換にする σ のことだと言える.

定義. C, D を圏, $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. $d \in D$ から T への wedge とは, D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a: d \rightarrow T(a, a)\}_{a \in C}$ であって, C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図

式が可換となるものである.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T(a, a) & & \\
 & \nearrow^{\sigma_a} & & \searrow^{T(\text{id}_a, f)} & \\
 d & & & & T(a, b) \\
 & \searrow_{\sigma_b} & & \nearrow_{T(f, \text{id}_b)} & \\
 & & T(b, b) & &
 \end{array}$$

σ が d から T への wedge であることを記号で $\sigma: d \twoheadrightarrow T$ と書くことにする.

定義. C, D を圏, $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. T から $d \in D$ への cowedge とは, D の射の族 $\sigma = \{\sigma_a: T(a, a) \rightarrow d\}_{a \in C}$ であって, C の任意の射 $f: a \rightarrow b$ に対して次の図式が可換となるものである.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T(a, a) & & \\
 & \nearrow^{T(f, \text{id}_a)} & & \searrow^{\sigma_a} & \\
 T(b, a) & & & & d \\
 & \searrow_{T(\text{id}_b, f)} & & \nearrow_{\sigma_b} & \\
 & & T(b, b) & &
 \end{array}$$

σ が T から d への cowedge であることを記号で $T \twoheadrightarrow d$ と書くことにする.

例 1. $1 \in \mathbf{Set}$ から $\text{Hom}_D(F-, G\Box)$ への wedge が自然変換 $F \Rightarrow G$ である. □

定義. C, D を圏, $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ を関手とする. T のエンドとは組 (e, λ) で以下を満たすものである.

- (1) $e \in D$ は対象である.
- (2) $\lambda: e \twoheadrightarrow T$ は wedge である.
- (3) $\sigma: d \twoheadrightarrow T$ を wedge とするとき, 射 $h: d \rightarrow e$ が一意に存在して, $a \in C$ に対して $\lambda_a \circ h = \sigma_a$ となる.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & T(a, a) & & \\
 & \nearrow^{\sigma_a} & & \searrow^{T(\text{id}_a, f)} & \\
 d & \xrightarrow{h} & e & & T(a, b) \\
 & \searrow_{\sigma_b} & & \nearrow_{T(f, \text{id}_b)} & \\
 & & T(b, b) & &
 \end{array}$$

このとき e を $\int_{c \in C} T(c, c)$ で表す.

双対的にコエンド $\int^{c \in C} T(c, c)$ も定義される.

例 2. 関手 $F, G: C \rightarrow D$ に対して $\int_{c \in C} \text{Hom}_D(Fc, Gc) \cong \text{Hom}_{D^C}(F, G)$ である. (つまり, 射 $Fa \rightarrow Ga$ を積み重ねると自然変換 $F \Rightarrow G$ になるということであり, まさしく積分であろう.)

証明. $\lambda_a: \text{Hom}_{D^C}(F, G) \rightarrow \text{Hom}_D(Fa, Ga)$ を $\lambda_a(\beta) := \beta_a$ で定めれば, λ は wedge である.

$\sigma: x \rightarrow \text{Hom}_D(F-, G-)$ を任意に取る. $a \in C$ に対して $\sigma_a: x \rightarrow \text{Hom}(Fa, Ga)$ だから, $u \in x$ に対して $\sigma_a(u) \in \text{Hom}(Fa, Ga)$ である. これにより自然変換 $\sigma_-(u): F \Rightarrow G$ が定まるから, 写像 $h: x \rightarrow \text{Hom}(F, G)$ が $h(u) := \sigma_-(u)$ により得られる. このとき $\lambda_a \circ h = \sigma_a$ である. 明らかにこのような h は一意に定まるから, $\int_{c \in C} \text{Hom}_D(Fc, Gc) \cong \text{Hom}_{D^C}(F, G)$ が分かった. \square

次は 3 変数の関手 $T: C^{\text{op}} \times C \times X \rightarrow D$ を考える. $x \in X$ を固定すれば 2 変数の関手 $T(-, -, x): C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ が得られるから, この関手のエンド $\int_{c \in C} T(c, c, x)$ を考えることができる. すると任意の $x \in X$ に対してこのようなエンドが存在すれば, 関数

$$X \ni x \mapsto \int_{c \in C} T(c, c, x) \in D$$

を考えることができる.

命題 3. C, D, X を圏, $T: C^{\text{op}} \times C \times X \rightarrow D$ を関手とする. 任意の $x \in X$ に対してエンド $\langle \int_c T(c, c, x), \lambda^x \rangle$ が存在すると仮定する. C の射 $f: a \rightarrow b$ と $x \in X$ に対して $\beta_x^f := T(\text{id}_a, f, \text{id}_x) \circ \lambda_a^x$ とおく.

$$\begin{array}{ccc}
 & \lambda_a^x \nearrow T(a, a, x) & \searrow T(\text{id}_a, f, \text{id}_x) \\
 \int_c T(c, c, x) & \overset{\beta_x^f}{\dashrightarrow} & T(a, b, x) \\
 & \lambda_b^x \searrow T(b, b, x) & \nearrow T(f, \text{id}_b, \text{id}_x)
 \end{array}$$

このとき関手 $F: X \rightarrow D$ が一意に存在して, 以下を満たす.

- (1) $x \in X$ に対して $F(x) = \int_{c \in C} T(c, c, x)$ である.
- (2) $f: a \rightarrow b$ に対して, $\beta_x^f: Fx \rightarrow T(a, b, x)$ が自然変換 $F \Rightarrow T(a, b, -)$ を定める.

証明. X の射 $k: x \rightarrow z$ を考える. まず $f: a \rightarrow b$ に対して

$$\begin{array}{ccc} \int_c T(c, c, x) & \xrightarrow{\lambda_a^x} & T(a, a, x) \\ \lambda_b^x \downarrow & & \downarrow T(\text{id}_a, f, \text{id}_x) \\ T(b, b, x) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b, \text{id}_x)} & T(a, b, x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \int_c T(c, c, z) & \xrightarrow{\lambda_a^z} & T(a, a, z) \\ \lambda_b^z \downarrow & & \downarrow T(\text{id}_a, f, \text{id}_z) \\ T(b, b, z) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b, \text{id}_z)} & T(a, b, z) \end{array}$$

は可換である. また, k と T から D の射

$$T(\text{id}_a, \text{id}_a, k): T(a, a, x) \rightarrow T(a, a, z)$$

等が得られるから, 先の図式と組み合わせて次の実線による図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccc} & & \int_c T(c, c, z) & \xrightarrow{\lambda_a^z} & T(a, a, z) \\ & \nearrow Fk & \downarrow & \nearrow & \downarrow T(\text{id}_a, f, \text{id}_z) \\ \int_c T(c, c, x) & \xrightarrow{\quad} & T(a, a, x) & & \\ \lambda_b^x \downarrow & & \downarrow & & \\ & & T(b, b, z) & \xrightarrow{\quad} & T(a, b, z) \\ & \nearrow & \downarrow & \nearrow T(\text{id}_a, \text{id}_b, k) & \\ T(b, b, x) & \xrightarrow{T(f, \text{id}_b, \text{id}_x)} & T(a, b, x) & & \end{array}$$

この実線部分は全て可換であるから, エンド $\int_{c \in C} T(c, c, z)$ の普遍性により点線の射 $Fk: \int_{c \in C} T(c, c, x) \rightarrow \int_{c \in C} T(c, c, z)$ が得られる. このとき明らかに F は関手である. また明らかに $\beta^f: F \Rightarrow T(a, b, -)$ は自然変換である. エンドの普遍性から, このような F は明らかに一意である. \square

4変数の関手 $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ を考える. C に関してエンドを取ることで関手 $\int_{a \in C} T(c, c, -, \square): X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ が得られるから, このエンド

$$\int_{x \in X} \int_{c \in C} T(c, c, x, x)$$

を考えることができる. 一方, 同型 $C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \cong (C \times X)^{\text{op}} \times (C \times X)$ によ

り $T: (C \times X)^{\text{op}} \times (C \times X) \rightarrow D$ とみなせば, エンド

$$\int_{\langle c, x \rangle \in C \times X} T(c, c, x, x)$$

も考えることができる.

定理 4 (Fubini の定理). $T: C^{\text{op}} \times C \times X^{\text{op}} \times X \rightarrow D$ を関手として, 任意の $u, v \in X$ に対してエンド $\int_{c \in C} T(c, c, u, v)$ が存在すると仮定する. このとき

$$\int_{\langle c, x \rangle \in C \times X} T(c, c, x, x) \cong \int_{x \in X} \int_{c \in C} T(c, c, x, x).$$

但しこの式は, 片方が存在するならばもう片方も存在して同型となることを表す.

証明. 命題 3 で示したように, X の任意の射 $x \rightarrow z$ に対して次が可換である,

$$\begin{array}{ccc} \int_c T(c, c, x, x) & \longrightarrow & \int_c T(c, c, x, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(a, b, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, z) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \int_c T(c, c, z, z) & \longrightarrow & \int_c T(c, c, x, z) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T(a, b, z, z) & \longrightarrow & T(a, b, x, z) \end{array}$$

また C の射 $a \rightarrow b$ に対して次が可換である.

$$\begin{array}{ccc} & \int_c T(c, c, x, x) & \\ & \swarrow \quad \downarrow & \\ T(a, a, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \int_c T(c, c, x, x) & \\ & \swarrow \quad \downarrow & \\ T(b, b, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, x) \end{array}$$

これらを組み合わせて, 次の可換図式を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & T(b, b, z, z) \\ & & & & \uparrow \\ & & & \int_c T(c, c, z, z) & \downarrow \\ & & & \downarrow & T(a, b, z, z) \\ & & & \downarrow & \downarrow \\ \int_c T(c, c, x, x) & \longrightarrow & \int_c T(c, c, x, z) & & \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \\ T(a, a, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, z) \end{array}$$

よって x に関する wedge $d \dashrightarrow \int_c T(c, c, x, x)$ が与えられた時, $\langle a, x \rangle$ に関する wedge $d \dashrightarrow T(a, a, x, x)$ が得られる.

逆に $\langle a, x \rangle$ に関する wedge $d \dashrightarrow T(a, a, x, x)$ が与えられたとする. このとき $x \in X$ を固定すれば $a, b \in C$ に関する wedge $d \dashrightarrow T(a, b, x, x)$ が得られる. 従ってエンドの普遍性により次の点線の射が得られる.

$$\begin{array}{ccccc}
 d & \xrightarrow{\quad} & & & T(b, b, z, z) \\
 & \dashrightarrow & & & \downarrow \\
 & & \int_c T(c, c, z, z) & & T(a, b, z, z) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \int_c T(c, c, x, x) & \longrightarrow & \int_c T(c, c, x, z) \\
 & \downarrow & \swarrow & \searrow & \downarrow \\
 T(a, a, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, x) & \longrightarrow & T(a, b, x, z)
 \end{array}$$

これにより x に関する wedge $d \dashrightarrow \int_c T(c, c, x, x)$ が得られる.

以上の対応により

$$\int_{\langle c, x \rangle \in C \times X} T(c, c, x, x) \cong \int_{x \in X} \int_{c \in C} T(c, c, x, x).$$

が得られることが分かる. □

特に, 各エンドが存在するという仮定の下で, 積分の順序交換

$$\int_{x \in X} \int_{c \in C} T(c, c, x, x) \cong \int_{c \in C} \int_{x \in X} T(c, c, x, x)$$

が成り立つ.

エンドの定義から分かるように, エンドは以下のように極限で書くことが出来る. 2つの直積

$$d := \prod_{c \in \text{Ob}(C)} T(c, c), \quad d' := \prod_{f \in \text{Mor}(C)} T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$$

を考え,

$$T(\text{id}, f): T(\text{dom}(f), \text{dom}(f)) \rightarrow T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$$

により得られる射を $s: d \rightarrow d'$,

$$T(f, \text{id}): T(\text{cod}(f), \text{cod}(f)) \rightarrow T(\text{dom}(f), \text{cod}(f))$$

により得られる射を $t: d \rightarrow d'$ とする. このときエンド $\int_c T(c, c)$ は $s, t: d \rightarrow d'$ の equalizer である. 故に

定理 5. C が小圏で, D が完備ならば, $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンド $\int_c T(c, c) \in D$ が存在する. □

定理 6. 連続関手はエンドと交換する. 即ち $F: D \rightarrow X$ を連続関手で $T: C^{\text{op}} \times C \rightarrow D$ のエンド $\int_c T(c, c)$ が存在するとすれば $F\left(\int_{c \in C} T(c, c)\right) \cong \int_{c \in C} F(T(c, c))$. □

系 7. $\text{Hom}_D\left(d, \int_{c \in C} T(c, c)\right) \cong \int_{c \in C} \text{Hom}_D(d, T(c, c))$. □

D^{op} で考えれば $\text{Hom}_D\left(\int_{c \in C} T(c, c), d\right) \cong \int_{c \in C} \text{Hom}_D(T(c, c), d)$ も分かる.

エンドは極限で書けたが, 逆に極限はエンドで書くことが出来る. $F: J \rightarrow C$ を関手としたとき, $F(j, k) := F(k)$ とすることで F を $F: J^{\text{op}} \times J \rightarrow C$ とみなすことができる. (即ち, 射影 $P_2: J^{\text{op}} \times J \rightarrow J$ との合成 $F \circ P_2$ を考えるのである.) このとき自然変換 $\theta: \Delta a \Rightarrow F$ は可換図式

$$\begin{array}{ccc}
 & F(j) & \\
 \theta_j \nearrow & & \searrow F(\text{id}, f) = Ff \\
 a & & F(k) \\
 \theta_k \searrow & & \nearrow F(f, \text{id}) = \text{id} \\
 & F(k) &
 \end{array}$$

を与える. よって $\int_{j \in J} F(j) = \lim F$ である.

定義. C を圏として, $a \in C$ と $x \in \mathbf{Set}$ を取る.

- (1) x から $\text{Hom}_C(a, -)$ への普遍射を $x \rightarrow \text{Hom}_C(a, c)$ とするとき, c を copower object (もしくは tensor object) といい $x \odot a$ で表す.
- (2) x から $\text{Hom}_C(-, a)$ への普遍射を $x \rightarrow \text{Hom}_C(c, a)$ とするとき, c を power object (もしくは cotensor object) といい $x \pitchfork a$ で表す.

普遍射の性質により

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C(x \odot a, b) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(a, b)) \\ \mathrm{Hom}_C(b, x \pitchfork a) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, \mathrm{Hom}_C(b, a))\end{aligned}$$

である。また各対象 $a \in C$, $x \in \mathbf{Set}$ に対して $x \odot a$, $x \pitchfork a$ が存在すれば, これらは関手 $\odot: \mathbf{Set} \times C \rightarrow C$, $\pitchfork: \mathbf{Set}^{\mathrm{op}} \times C \rightarrow C$ を定め, 随伴

$$\begin{aligned}- \odot a \dashv \mathrm{Hom}_C(a, -): \mathbf{Set} &\rightarrow C \\ - \pitchfork a \dashv \mathrm{Hom}_C(-, a): \mathbf{Set} &\rightarrow C^{\mathrm{op}}\end{aligned}$$

が成り立つ (「随伴関手」の PDF を参照.) .

例 8. $C = \mathbf{Set}$ の場合

$$- \times a \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a, -): \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$$

となるから $x \odot a \cong x \times a$ である。また

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, a) \dashv \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(-, a): \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathrm{op}}$$

だから (「Kan 拡張」の PDF を参照) $x \pitchfork a \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(x, a) = a^x$ である。 \square

定理 9. C, D, U を圏, $F: C \rightarrow D$, $E: C \rightarrow U$ を関手として, 各 $c, c' \in C$, $d \in D$ に対して copower $\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec'$ が存在するとする。更に各 $d \in D$ に対してコエンド $\int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec$ が存在するとする。このとき F に沿った E の各点左 Kan 拡張が存在する。

証明. $Td := \int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec$ とすると, 命題 3 よりこれは関手 $T: D \rightarrow U$ を定める。このとき $d \in D$, $u \in U$ について自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_U(Td, u) &= \mathrm{Hom}_U\left(\int^{c \in C} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec, u\right) \\ &\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_U(\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \odot Ec, u) \\ &\cong \int_{c \in C^{\mathrm{op}}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\mathrm{Hom}_D(Fc, d), \mathrm{Hom}_U(Ec, u)) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{Hom}_D(F-, d), \mathrm{Hom}_U(E-, u))\end{aligned}$$

である。よって T は F に沿った E の各点左 Kan 拡張である。 \square

双対的に $F^\dagger E \cong \int_{c \in C} \mathrm{Hom}_D(-, Fc) \pitchfork Ec$ である。