双対

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 6 日

圏論における概念に対して，射の向きを逆にして得られる概念を双対概念という．この PDF では双対の例をいくつか取り上げる．

目次

1　余極限　1

2　モノ射・エピ射　5

1　余極限

圏 C の対象 $a, b \in C$ に対して，a と b の直積とは 3 つ組 $\langle a \times b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものであった．

(1) $a \times b$ は C の対象である．

(2) $p_0 \colon a \times b \to a$，$p_1 \colon a \times b \to b$ は C の射である．

(3) 3 つ組 $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件を満たすならば，射 $h \colon v \to a \times b$ が一意に存在して $q_0 = p_0 \circ h$，$q_1 = p_1 \circ h$ となる．

$$\begin{tikzcd}
& v \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[ddl, bend right, "q_0"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\
& a \times b \arrow[dl, "p_0"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
a & & b
\end{tikzcd}$$

この定義における射の向きを全て逆にしたものが「直積の双対概念」である．これを余直積[*1]と呼ぶ．(双対概念は頭に「余」(英語では co) を付けて表すことが多い．) つまり余直積の定義は次のようになる．

定義. 圏 C の対象 $a, b \in C$ の余直積 (coproduct) とは，3 つ組 $\langle a \amalg b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) $a \amalg b$ は C の対象である．

(2) $p_0 \colon a \to a \amalg b$，$p_1 \colon b \to a \amalg b$ は C の射である．

$$\begin{tikzcd} & a \amalg b & \\ a \arrow[ur, "p_0"'] & & b \arrow[ul, "p_1"] \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $q_0 \colon a \to v$，$q_1 \colon b \to v$ が射となる) を満たすならば，射 $h \colon a \amalg b \to v$ が一意に存在して $q_0 = h \circ p_0$，$q_1 = h \circ p_1$ となる．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} & v & \\ & a \amalg b \arrow[u, dashed, "h"'] & \\ a \arrow[ur, "p_0"'] \arrow[uur, bend left, "q_0"] & & b \arrow[ul, "p_1"] \arrow[uul, bend right, "q_1"'] \end{tikzcd}$$

つまり圏 C における a と b の余直積とは，圏 C^{op} における a と b の直積である．終対象，pullback，equalizer についても同様に双対を考えることができて，それを始対象，pushout，coequalizer と呼ぶ．定義を書き下すと以下のようになる．

定義. 対象 $u \in C$ が始対象 (initial object)
$\Longleftrightarrow$ 任意の $v \in C$ に対して射 $u \to v$ が一意に存在する．

始対象は記号 0 で表すことが多い．

---

*1 直和 (direct sum) と呼ぶこともあるが，直和は別の意味で使われる場合があるので余直積と呼んだ方が良いと思う．

定義. C を圏，$a, b, c \in C$ を対象，$f\colon c \to a$，$g\colon c \to b$ を射とする．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \\ a & \end{tikzcd}$$

f と g の pushout とは，3 つ組 $\langle a \amalg_c b, p_0, p_1 \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) $a \amalg_c b$ は C の対象である．

(2) $p_0\colon a \to a \amalg_c b$，$p_1\colon b \to a \amalg_c b$ は C の射で，$p_0 \circ f = p_1 \circ g$ を満たす (即ち次の図式が可換である)．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "p_1"'] \\ a \arrow[r, "p_0"] & a \amalg_c b \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, q_0, q_1 \rangle$ が同じ条件 (即ち, v が対象で $q_0\colon a \to v$, $q_1\colon b \to v$ が射で, $q_0 \circ f = q_1 \circ g$ となる) を満たすならば, 射 $h\colon a \amalg_c b \to v$ が一意に存在して $q_0 = h \circ p_0$, $q_1 = h \circ p_1$ となる．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "p_1"'] \arrow[ddr, bend left, "q_1"] & \\ a \arrow[r, "p_0"] \arrow[drr, bend right, "q_0"'] & a \amalg_c b \arrow[dr, dashed, "h"'] & \\ & & v \end{tikzcd}$$

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象，$f, g\colon a \to b$ を射とする．f と g の coequalizer とは，組 $\langle u, e \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

(1) u は C の対象である．

(2) $e\colon b \to u$ は C の射で，$e \circ f = e \circ g$ を満たす．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "e"] & u \end{tikzcd}$$

(3) $\langle v, e' \rangle$ が同じ条件 (即ち，v が対象で $e'\colon b \to v$ が射で，$e' \circ f = e' \circ g$ となる) を

満たすならば，射 $h\colon u \to v$ が一意に存在して $e' = h \circ e$ となる．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "e'"'] & u \arrow[d, dashed, "h"] \\ & & v \end{tikzcd}$$

余直積などの定義は，射の向きを逆にしただけなので，直積などと同様の定理が成り立つことが分かる (証明における射の向きを逆にすればよい)．例えば

命題 1. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．$\langle u, p_0, p_1\rangle$，$\langle v, q_0, q_1\rangle$ を a と b の余直積とする．このとき同型 $u \cong v$ が成り立つ． □

命題 2. 図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[r] \arrow[d] & c \arrow[d] \\ x \arrow[r] & y \arrow[r] & z \end{tikzcd}$$

において左の四角が pushout を与えているとする．このとき

$$\text{右の四角が pushout を与える} \iff \text{外側の四角が pushout を与える}$$

□

命題 3. 圏 C が余直積と coequalizer を持つとき，pushout を持つ． □

例 4. 集合の圏 **Set** の場合，余直積とは非交和のことである．つまり $X, Y \in \mathbf{Set}$ に対して $X \amalg Y := (X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ として，$p_0\colon X \to X \amalg Y$，$p_1\colon Y \to X \amalg Y$ を標準埋込とすれば $\langle X \amalg Y, p_0, p_1\rangle$ が X と Y の余直積である．

また $f, g\colon X \to Y$ を写像としたとき，f と g の coequalizer は次で与えられる．まず Y 上の 2 項関係 R を $R := \{\langle f(x), g(x)\rangle \mid x \in X\} \subset Y \times Y$ により定義し，R を含む最小の同値関係を $\sim$ とする．このとき標準全射 $Y \to Y/{\sim}$ が f と g の coequalizer である．

□

例 5. 群の圏 **Grp** における余直積は群の自由積 (free product) であり，pushout は融合積 (amalgamated product) である． □

例 6. アーベル群の圏 **Ab** における余直積はアーベル群の直和である． □

例 7. 位相空間の圏 **Top** における余直積は位相空間の直和である． □

※ $\mathbf{Grp}, \mathbf{Ab}, \mathbf{Top}$ などの場合，どれも直積は「集合としての直積 (= $\mathbf{Set}$ での直積)」に構造を入れたもの，になっていた．一方，余直積は「集合としての非交和 (= $\mathbf{Set}$ での余直積)」に構造を入れたもの，には ($\mathbf{Top}$ を除いて) なっていない．双対なのにこのような違いがあるのは一見不思議であるが，実は第一章で登場する随伴関手を使って理解することができる．(忘却関手が左随伴関手/右随伴関手を持つか，が関係している．)

2　モノ射・エピ射

双対の例として，ここではモノ射・エピ射を取り上げる．

定義. 射 $f\colon a \to b$ がモノ射 (monomorphism)
$\iff c \in C$ を対象，$g, h\colon c \to a$ を射とするとき，$f \circ g = f \circ h$ ならば $g = h$ である．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & a \arrow[r, "f"] & b \end{tikzcd}$$

定義. 射 $f\colon a \to b$ がエピ射 (epimorphism)
$\iff c \in C$ を対象，$g, h\colon b \to c$ を射とするとき，$g \circ f = h \circ f$ ならば $g = h$ である．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

モノ射とエピ射は互いに双対である．

例 8. $\mathbf{Set}$ におけるモノ射とは単射であり，エピ射とは全射である．　□

この例から，モノ射は単射を，エピ射は全射を一般化したような概念だと思うことができる．但し，圏によってはモノ射が単射，エピ射が全射であるとは限らないので注意が必要である．

例 9. 例えば $\mathbf{CRing}$ を単位的可換環と環準同型がなす圏として，$\mathbf{CRing}$ の射として包含写像 $i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ を考える．環準同型 $f\colon \mathbb{Q} \to R$ は $f(1)$ の値で定まるから，i はエピ射であることが分かる．しかし i は全射ではない．　□

命題 10. $f\colon a \to b,\ g\colon b \to c$ を射とする．

(1) f, g が共にモノ射ならば $g \circ f$ もモノ射である．

(2) $g \circ f$ がモノ射ならば f もモノ射である．

(3) f, g が共にエピ射ならば $g \circ f$ もエピ射である．

(4) $g \circ f$ がエピ射ならば g もエピ射である．

証明．(3)(4) は双対なので，(1)(2) を示せばよい．

(1) f, g をモノ射とする．$h, k \colon d \to a$ を $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$ となるように取る．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

すると $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$ だから，g がモノ射であることより $f \circ h = f \circ k$ である．よって f がモノ射であることから $h = k$ となる．故に $g \circ f$ はモノ射である．

(2) $g \circ f$ がモノ射だとする．$h, k \colon d \to a$ を $f \circ h = f \circ k$ となるように取る．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, "g"] & c \end{tikzcd}$$

このとき $g \circ f \circ h = g \circ f \circ k$ だから，$g \circ f$ がモノ射であることより $h = k$ である． $\square$

命題 11. 同型射はモノ射かつエピ射である．

証明．双対を考えればよいから，同型射 $f \colon a \to b$ がモノ射であることを示せばよい．そのために対象 $c \in C$ と射 $g, h \colon c \to a$ を $f \circ g = f \circ h$ となるように取る．$f^{-1} \colon b \to a$ を f の逆射とする．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & a \arrow[r, shift left, "f"] & b \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

このとき $g = f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ f \circ h = h$ である．故に f はモノ射である． $\square$

例 12. モノ射かつエピ射ならば同型射，は一般には成り立たない[*2]．例えば例 9 で出てきた **CRing** における射 $i \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ はモノ射かつエピ射であるが，同型射ではない． $\square$

命題 13. 圏 C が終対象 1 を持つとき，任意の射 $f \colon 1 \to a$ はモノ射である．

証明．$b \in C$ を対象としたとき，射 $b \to 1$ はただ 1 つしかないから明らか． $\square$

[*2] これが成り立つ圏は balanced であるという．

命題 14. 射 $f\colon a \to b$ がモノ射 $\Longleftrightarrow$ 次の図式が pullback を与える．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

証明. $(\Longrightarrow)$ $f\colon a \to b$ をモノ射とする．任意の $x \in C$ と $q_0, q_1\colon x \to a$ で $f \circ q_0 = f \circ q_1$ となるものを取る．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "q_1"] \arrow[ddr, bend right, "q_0"'] & & \\
& a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[d, "f"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

f がモノ射だから $q_0 = q_1$ である．よって $h = q_0$ と取れば図式が可換になる．また明らかにこのような h は一意である．故にこの図式が pullback となることが分かった．

$(\Longleftarrow)$ 次の図式で右下の四角が pullback を与えるとする．$g, h\colon x \to a$ が $f \circ g = f \circ h$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & \\
& a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_a"] & a \arrow[d, "f"] \\
& a \arrow[r, "f"'] & b
\end{tikzcd}$$

このとき pullback の普遍性から，点線の射 $k\colon x \to a$ が存在して図式が可換となる．従って $g = k = h$ となり，f はモノ射である． $\square$

命題 15. $f\colon a \to c$ をモノ射で，$g\colon b \to c$ を射として，f と g の pullback が存在すると

する．次の図式をその pullback とするとき，p_1 もモノ射である[*3]．

$$\begin{tikzcd} a \times_c b \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\ a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

証明. $x \in C$ を対象，$h, k \colon x \to a \times_c b$ を射として $p_1 \circ h = p_1 \circ k$ であるとする．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & a \times_c b \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_0"'] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

このとき $f \circ p_0 \circ h = g \circ p_1 \circ h = g \circ p_1 \circ k = f \circ p_0 \circ k$ である．f がモノ射だから $p_0 \circ h = p_0 \circ k$ を得る．よって次の 2 つの図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr, "h"] \arrow[drr, bend left, "p_1 \circ h = p_1 \circ k"] \arrow[ddr, bend right, "p_0 \circ h = p_0 \circ k"'] & & \\ & a \times_c b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[dr, "k"] \arrow[drr, bend left, "p_1 \circ h = p_1 \circ k"] \arrow[ddr, bend right, "p_0 \circ h = p_0 \circ k"'] & & \\ & a \times_c b \arrow[r, "p_1"'] \arrow[d, "p_0"] & b \arrow[d, "g"] \\ & a \arrow[r, "f"'] & c \end{tikzcd}$$

従って pullback の普遍性から $h = k$ が分かる． □

命題 16. 次の図式が equalizer を与えるとする．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

このとき f はモノ射である．

証明. $k, l \colon d \to a$ を射として $f \circ k = f \circ l$ であるとする．

$$\begin{tikzcd} d \arrow[r, shift left, "k"] \arrow[r, shift right, "l"'] & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \end{tikzcd}$$

[*3] 一般に pullback において，p_1 を f の (g に沿った) pullback と呼ぶ．よってこの命題は「モノ射の pullback はモノ射」と言い表すことができる．

このとき $g \circ f \circ k = h \circ f \circ k$，$g \circ f \circ l = h \circ f \circ l$ である．

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\ d \arrow[ur, "k"] \arrow[urr, "f\circ k = f\circ l"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & c \\ d \arrow[ur, "l"] \arrow[urr, "f\circ k = f\circ l"'] \end{tikzcd}$$

よって equalizer の普遍性から $k = l$ が分かる． □

双対を考えれば次の命題が成り立つことが分かる．

命題 17. 圏 C が始対象 0 を持つとき，任意の射 $f\colon a \to 0$ はエピ射である． □

命題 18. 射 $f\colon a \to b$ がエピ射 $\Longleftrightarrow$ 次の図式が pushout を与える．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "\mathrm{id}_b"] \\ b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] & b \end{tikzcd}$$

□

命題 19. エピ射の pushout はエピ射である．即ち，$f\colon c \to a$ をエピ射で，$g\colon c \to b$ を射として，f と g の pushout が存在するとする．次の図式をその pushout とするとき，p_1 もエピ射である．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & b \arrow[d, "p_1"] \\ a \arrow[r, "p_0"'] & a \amalg_c b \end{tikzcd}$$

□

命題 20. 次の図式が coequalizer を与えるとする．

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & b \arrow[r, "f"] & c \end{tikzcd}$$

このとき f はエピ射である． □