

# 圏の構成例

alg-d

[https://alg-d.com/math/kan\\_extension/](https://alg-d.com/math/kan_extension/)

2025年1月6日

例えば群の場合では、群  $G, H$  が与えられたときに新しい群  $G \times H$  を構成することができた。ここでは圏が与えられたときに、新しい圏を構成する方法をいくつか紹介する。

**定義.** 圏  $C, D$  の直積  $C \times D$  を以下のように定義する。

- 対象は「 $C$  の対象と  $D$  の対象の組」である。即ち  $\text{Ob}(C \times D) := \text{Ob}(C) \times \text{Ob}(D)$  となる。
- $\langle c, d \rangle$  から  $\langle c', d' \rangle$  への射は成分ごとの射の組  $\langle f: c \rightarrow c', g: d \rightarrow d' \rangle$  である。つまり  $\text{Hom}_{C \times D}(\langle c, d \rangle, \langle c', d' \rangle) := \text{Hom}_C(c, c') \times \text{Hom}_D(d, d')$  となる。
- 射の合成は成分ごとに行う。即ち  $\langle g, g' \rangle \circ \langle f, f' \rangle := \langle g \circ f, g' \circ f' \rangle$  となる。
- $\langle c, d \rangle$  の恒等射は  $\text{id}_{\langle c, d \rangle} := \langle \text{id}_c, \text{id}_d \rangle$  である。

この  $C \times D$  が圏の定義を満たすことは殆ど明らかであろう。

**例 1.** 集合  $X, Y$  を離散圏と見なして圏の直積  $X \times Y$  を考えると、 $X, Y$  の射は  $\text{id}$  しかないから、 $X \times Y$  の射も  $\text{id}$  のみになる。従って  $X \times Y$  も離散圏である。  $\text{Ob}(X \times Y) = \text{Ob}(X) \times \text{Ob}(Y)$  だったから、圏の直積  $X \times Y$  は直積集合  $X \times Y$  を離散圏とみなしたものである。  $\square$

**例 2.** モノイド  $M, N$  を圏とみなして圏の直積  $M \times N$  を考えると

$$\text{Ob}(M \times N) = \text{Ob}(M) \times \text{Ob}(N) = \{*\} \times \{*\} = \{(*, *)\}$$

だから  $M \times N$  もモノイドとなる。圏の直積の定義から

$$\text{Hom}_{M \times N}(\langle *, * \rangle, \langle *, * \rangle) = \text{Hom}_M(*, *) \times \text{Hom}_N(*, *) = M \times N$$

となるので、圏の直積  $M \times N$  はモノイドとしての直積  $M \times N$  を圏とみなしたものであ

る。特に、群  $G, H$  の圏としての直積は、直積群  $G \times H$  を圏とみなしたものである。  $\square$

例 3. 圏  $2 = \{a \xrightarrow{f} b\}$  を考える。直積  $2 \times 2$  は 4 個の対象  $\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle$  を持つ。2 の射の数は 3 個だから、 $2 \times 2$  の射は 9 個である。対象が 4 個だから、9 個の射のうち 4 個は恒等射である。残りの 5 個の射を図示すると次のようになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \langle a, a \rangle & \xrightarrow{\langle \text{id}_a, f \rangle} & \langle a, b \rangle \\
 \langle f, \text{id}_a \rangle \downarrow & \searrow \langle f, f \rangle & \downarrow \langle f, \text{id}_b \rangle \\
 \langle b, a \rangle & \xrightarrow{\langle \text{id}_b, f \rangle} & \langle b, b \rangle
 \end{array}$$

$\square$

集合などの直積では標準的な射影が与えられるが、圏の直積でも同様に「射影」を与える関手を定義することができる。圏  $C, D$  に対して関手  $P: C \times D \rightarrow C$  を次のように定義する。

- 対象  $\langle c, d \rangle \in C \times D$  に対して  $P(\langle c, d \rangle) := c$  とする。
- 射  $\langle f, g \rangle: \langle c, d \rangle \rightarrow \langle c', d' \rangle$  に対して  $P(\langle f, g \rangle) := f$  とする。

$P$  が関手となることは明らかであろう。これが  $C$  への射影である。 $D$  への射影も同様に定義できる。

定義. 圏  $C, D$  の直和  $C \amalg D$  を以下のように定義する。

- $\text{Ob}(C \amalg D) := \text{Ob}(C) \sqcup \text{Ob}(D)$  (非交和) である。
- $a$  から  $b$  への射は以下のように定める。

$$\text{Hom}_{C \amalg D}(a, b) := \begin{cases} \text{Hom}_C(a, b) & (a, b \in C \text{ のとき}) \\ \text{Hom}_D(a, b) & (a, b \in D \text{ のとき}) \\ \emptyset & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

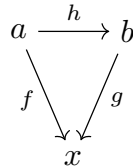
- 射の合成は  $C, D$  の合成で行う。
- 恒等射は  $C, D$  の恒等射である。

例 4. 集合  $X, Y$  を離散圏と見なして圏の直和  $X \amalg Y$  を考えると、これは  $X$  と  $Y$  の非交和  $X \sqcup Y$  を離散圏とみなしたものである。  $\square$

次にスライス圏という構成方法を紹介します。

定義.  $C$  を圏,  $x \in C$  を対象とする. スライス圏 (slice category もしくは over category)  $C/x$  を以下のように定義する.

- 対象は  $C$  の射  $f: a \rightarrow x$  である.
- $f: a \rightarrow x$  から  $g: b \rightarrow x$  への射は,  $g \circ h = f$  となるような射  $h: a \rightarrow b$  である.

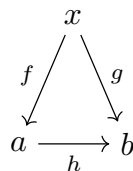


- 射の合成は  $C$  の合成で行う.
- 恒等射は  $C$  の恒等射である.

スライス圏と同じような方法でコスライス圏を得ることができる.

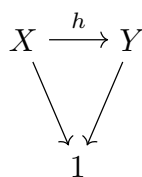
定義.  $C$  を圏,  $x \in C$  を対象とする. コスライス圏 (coslice category もしくは under category)  $x/C$  を以下のように定義する.

- 対象は  $C$  の射  $f: x \rightarrow a$  である.
- $f: x \rightarrow a$  から  $g: x \rightarrow b$  への射は,  $h \circ f = g$  となるような射  $h: a \rightarrow b$  である.



- 射の合成は  $C$  の合成で行う.
- 恒等射は  $C$  の恒等射である.

例 5.  $1 \in \mathbf{Set}$  を 1 元集合として  $\mathbf{Set}/1$  を考える. 集合  $X$  に対して写像  $f: X \rightarrow 1$  はただ 1 つしかない. よって  $\text{Ob}(\mathbf{Set}/1) = \text{Ob}(\mathbf{Set})$  と見なしてよい.  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{Set}) = \text{Ob}(\mathbf{Set}/1)$  を取ると, 任意の  $h: X \rightarrow Y$  に対して次の図式は可換である.



よって任意の  $h: X \rightarrow Y$  が  $\mathbf{Set}/1$  の射となる。以上により  $\mathbf{Set}/1 = \mathbf{Set}$  と見なせる (つまり正確に言えば圏同型  $\mathbf{Set}/1 \cong \mathbf{Set}$  となる) ことが分かる。

※ これはより正確に言えば、圏の同型  $\mathbf{Set}/1 \cong \mathbf{Set}$  が成り立っているということである。つまり関手  $F: \mathbf{Set}/1 \rightarrow \mathbf{Set}$  を

- $\mathbf{Set}/1$  の対象  $f$  に対して  $F(f) := \text{dom}(f) \in \mathbf{Set}$  とする。
- $\mathbf{Set}/1$  の射  $h$  に対して  $F(h) := h$  とする。

と定めれば、この  $F$  が同型  $\mathbf{Set}/1 \cong \mathbf{Set}$  を与えることが容易に分かる。

同様にして  $\emptyset/\mathbf{Set} \cong \mathbf{Set}$  も分かる。 □

例 6. 単位的可換環を対象、環準同型を射とする圏を  $\mathbf{CRing}$  と書く。このとき  $k \in \mathbf{CRing}$  に対して、コスライス圏  $k/\mathbf{CRing}$  は  $k$ -代数の圏である。 □

例 7.  $1 \in \mathbf{Top}$  を 1 点空間としたとき  $1/\mathbf{Top} \cong \mathbf{Top}_*$  である\*<sup>1</sup>。 □

最後に部分圏というものを導入する。

定義.  $C, D$  を圏とする。  $C$  が  $D$  の部分圏 (subcategory) であるとは、  $\text{Ob}(C) \subset \text{Ob}(D)$ ,  $\text{Mor}(C) \subset \text{Mor}(D)$  であって、  $C$  におけるドメイン、コドメイン、合成、恒等射が  $D$  におけるそれと一致していることをいう。記号では  $C \subset D$  と書く。

定義. 部分圏  $C \subset D$  が充満部分圏 (full subcategory) であるとは、任意の  $a, b \in C$  に対して  $\text{Hom}_C(a, b) = \text{Hom}_D(a, b)$  となることをいう。

例 8. 写像の合成を射の合成とすることで、以下のような圏  $\mathbf{Inj}, \mathbf{FinSet}, \mathbf{FinInj}$  を定めることができる。

- 集合を対象、単射を射とする圏を  $\mathbf{Inj}$  とする。
- 有限集合を対象、写像を射とする圏を  $\mathbf{FinSet}$  とする。
- 有限集合を対象、単射を射とする圏を  $\mathbf{FinInj}$  とする。

このように定義したとき  $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{Inj} \subset \mathbf{Set}$  と  $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$  は部分圏である。更に  $\mathbf{FinInj} \subset \mathbf{Inj}$  と  $\mathbf{FinSet} \subset \mathbf{Set}$  は充満部分圏になっている。 □

例 9. アーベル群を対象、群準同型を射とする圏を  $\mathbf{Ab}$  と書く。アーベル群は群だから部

\*<sup>1</sup>  $\mathbf{Top}_*$  は基点付き位相空間の圏である。定義は「圏論とは何か」の PDF を参照。

分圏  $\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$  となる。これは充満部分圏である。  $\square$

例 10. 集合を離散圏とみなした時、部分圏とは部分集合のことである。またこの場合、部分圏は常に充満部分圏となる。  $\square$

例 11.  $G$  を群,  $H \subsetneq G$  を真の部分群として  $G, H$  を圏とみなせば  $H \subset G$  は部分圏であるが充満部分圏ではない。また逆に  $C \subset G$  を部分圏で  $C \neq \mathbb{0}$  とすると,  $C$  はモノイドではあるが群であるとは限らない。  $\square$

例 12. 圏  $C$  に対して集まり  $X \subset \text{Ob}(C)$  が与えられたとき, 部分圏  $D \subset C$  を

- $\text{Ob}(D) := X$  とする。
- $a, b \in X$  に対して  $\text{Hom}_D(a, b) := \text{Hom}_C(a, b)$  とする。

により定義することができる。これは明らかに充満部分圏である。  $\square$