bicategoryでの極限

alg-d
`http://alg-d.com/math/kan_extension/`

2021年5月18日

2-limitのbicategoryバージョンがbilimitである．

定義. $\mathcal{J},\mathcal{B}$をbicategory, $W\colon \mathcal{J}\to\mathbf{CAT}$, $T\colon\mathcal{J}\to\mathcal{B}$をpseudofunctorとする．bilimitとは$a\in\mathcal{B}$についてpseudonaturalな圏同値

$$\varphi_a\colon\mathcal{B}(a,\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T)\to\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{J},\mathbf{CAT})(W,\mathcal{B}(a,T-))$$

が存在する対象$\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T\in\mathcal{B}$のことである．

bicategoryでの米田の補題よりbilimitは存在すれば同値を除いて一意である．bilimitが存在するとき$a=\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T$とすれば$\eta:=\varphi(\mathrm{id}_{\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T})\colon W\Rightarrow\mathcal{B}(\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T,T-)$が得られる．この$\eta$はpseudonatural transformationである．これを$\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T$のunitという．

定義. pseudonatural transformation $\sigma\colon W\Rightarrow\mathcal{B}(a,T-)$をbicylinderということにする．

例 1. 上記のunit $\eta\colon W\Rightarrow\mathcal{B}(\lim_{\mathrm{bi}}^{W}T,T-)$はbicylinderである． □

$a\mapsto\mathcal{B}(a,T-)$で定まるpseudofunctorを$G$とする．このときbicategoryの米田の補題の証明によれば$\varphi_a\cong(G-)\mathbin{\widehat{\bullet}}\eta$である．

定理 2. bicylinder $\eta\colon W\Rightarrow\mathcal{B}(c,T-)$がbilimitのunitとなるのは次の2条件が成り立つときである．

(1) (1次元的普遍性) 任意のbicylinder $\sigma\colon W\Rightarrow\mathcal{B}(a,T-)$に対して, ある1-morphism

$h\colon a \to c$ が存在して $(Gh)\mathbin{\widehat{\circ}}\eta \cong \sigma$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[rr, bend left=60, "W", ""' name=U] \arrow[rr, "\mathcal{B}(c,T-)", ""' name=M] \arrow[rr, bend right=60, "\mathcal{B}(a,T-)"', "" name=D] & & \mathbf{CAT} & \overset{\sim}{\Rrightarrow} & \mathcal{J} \arrow[rr, bend left=50, "W", ""' name=U2] \arrow[rr, bend right=50, "\mathcal{B}(a,T-)"', "" name=D2] & & \mathbf{CAT}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\eta"'] \arrow[Rightarrow, from=M, to=D, "Gh"'] \arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\sigma"']
\end{tikzcd}$$

(2) (2 次元的普遍性) $h, h'\colon a \to c$ を 1-morphism とする．このとき任意の modification $\Gamma\colon (Gh)\mathbin{\widehat{\circ}}\eta \Rrightarrow (Gh')\mathbin{\widehat{\circ}}\eta$ に対してある 2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して $(G\beta)\mathbin{\widehat{\bullet}}\eta = \Gamma$ となる．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[rr, bend left=60, "W", ""' name=U] \arrow[rr, "\mathcal{B}(c,T-)", ""' name=M] \arrow[rr, bend right=60, "\mathcal{B}(a,T-)"', "" name=D] & & \mathbf{CAT} & = & \mathcal{J} \arrow[rr, bend left=60, "W", ""' name=U2] \arrow[rr, bend right=60, "\mathcal{B}(a,T-)"', "" name=D2] & & \mathbf{CAT}
\arrow[Rightarrow, from=U, to=M, "\eta"'] \arrow[from=M, to=D, phantom, "Gh\Downarrow\underset{G\beta}{\Rrightarrow}\Downarrow Gh'"] \arrow[from=U2, to=D2, phantom, "(Gh)\widehat{\circ}\eta\Downarrow\overset{\Gamma}{\Rrightarrow}\Downarrow(Gh')\widehat{\circ}\eta"]
\end{tikzcd}$$

証明. (1) は $(G-)\mathbin{\widehat{\bullet}}\eta$ が本質的全射であることの言い換えであり，(2) は $(G-)\mathbin{\widehat{\bullet}}\eta$ が忠実充満であることの言い換えである． □

例 3. $\mathcal{J} = \mathbb{0}$ の場合の bilimit を biterminal object という．つまり $\mathcal{B}$ の biterminal object とは，任意の $a \in \mathcal{B}$ に対して圏同値 $\mathcal{B}(a, x) \simeq \mathbb{1}$ が成り立つ対象 $x \in \mathcal{B}$ のことである．即ち x は次の条件を満たす．

- 任意の $a \in \mathcal{B}$ に対して，1-morphsim $a \to x$ が存在する．
- $f, g\colon a \to x$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphsim とするとき，2-morphism $\alpha\colon f \Rightarrow g$ が一意に存在する． □

例 4. $\mathcal{J}$ が小圏で $W = \Delta\mathbb{1}$ の場合．$\sigma\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ を bicylinder とすると $j \in \mathcal{J}$ に対して $\sigma_j\colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(a, Tj)$ は関手である．σ が pseudonatural だから，$\mathcal{J}$ の射 $m\colon i \to j$ に対して次の $\mathbf{CAT}$ での図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & \mathcal{C}(a, Ti) \arrow[d, "Tm\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"'] & \mathcal{C}(a, Tj)
\arrow[from=1-2, to=2-1, phantom, "\overset{\wr}{\Swarrow}\sigma_m"]
\end{tikzcd}$$

よって $f_j := \sigma_j(*)\colon a \to Tj$，$f_m := (\sigma_m)_*$ と置けば $f_m\colon Tm \circ f_i \cong f_j$ である．

$$\begin{tikzcd}
& Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "f_m \Downarrow \wr"] & \\
& Tj
\end{tikzcd}$$

σ が psuedonatural であることより

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[dr, "Tm\bullet-"] \arrow[d, phantom, "\sigma_m \Swarrow"] & \\
\arrow[r, phantom, "\overset{\varphi_{nm}}{\Longleftarrow}"] & \mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_j"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"] \arrow[d, phantom, "\sigma_n \Swarrow"] & \mathcal{C}(a,Tj) \arrow[dl, "Tn\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_k"'] & \mathcal{C}(a,Tk) &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[ddr, phantom, "\sigma_{n\circ m} \Swarrow"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[dd, bend right=60, "T(n\circ m)\bullet-"'] \arrow[dr, "Tm\bullet-"] & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi_{nm}}{\Longleftarrow}"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[dl, "Tn\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_k"'] & \mathcal{C}(a,Ti) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ti}"'] \arrow[d, bend right=70, "T(\mathrm{id}_i)"'] \arrow[dr, "\sigma_i"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\lambda_{\sigma_i} \Swarrow"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "\mathrm{id}_{Gi}"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"'] \arrow[u, phantom, shift right=3ex, "\overset{\psi^i}{\Leftarrow}"] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\rho^{-1}_{\sigma_i} \Swarrow"] & \mathcal{C}(a,Ti)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, bend right=70, "T(\mathrm{id}_i)"'] \arrow[d, phantom, "\sigma_{\mathrm{id}_i} \Swarrow"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "\mathrm{id}_{Gi}"] \arrow[d, bend right=70, "G(\mathrm{id}_i)"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi^i}{\Leftarrow}"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"'] & \mathcal{C}(a,Ti)
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．故に $f_n * (Tn \bullet f_m) = f_{n\circ m} * (\varphi^T \bullet f_i) * \alpha^{-1}_{Tn,Tm,f_i}$ かつ $f_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ である．

$$\begin{tikzcd}
& Ti \arrow[d, "Tm"] \\
a \arrow[ur, "f_i"] \arrow[r, "f_j"] \arrow[dr, "f_k"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "f_m \Downarrow"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "f_n \Downarrow"] & Tj \arrow[d, "Tn"] \\
& Tk
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Ti \arrow[dr, "Tm"] \arrow[dd, bend right=30, "T(n\bullet m)"'] & \\
a \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_k"'] \arrow[r, phantom, "f_{n\circ m} \Downarrow"] & \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi^T}{\Leftarrow}"] & Tj \arrow[dl, "Tn"] \\
& Tk &
\end{tikzcd}$$

このような条件を満たす族の組 $f = \langle\{f_j\}_j, \{f_m\}_m\rangle$ を bicone と呼ぶことにする．bicone があれば bicylinder $\sigma\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ が得られるから，この場合 bicylinder を bicone と同一視することができる．従って bilimit とは「普遍性」を持つ bicone のことである．

$\lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T$ が存在するとして，その unit を $\eta\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(\lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T, T-)$ とし，η に対応する bicone を p とする．$h\colon a \to \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T$ に対して bicylinder $(Gh) \mathbin{\widehat{\circ}} \eta$ に対応する bicone を

ここでは $p \bullet h$ と書く．定義より $\mathcal{J}$ の射 $m\colon i \to j$ に対して $(p \bullet h)_j = p_j \circ h$ かつ

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[urr, "f_i"] \arrow[drr, "f_j"'] & f_m\Downarrow\wr & \\
 & & Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[r, "h"] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] \arrow[r, phantom, "p_m\Downarrow\wr"] & {} \\
 & & Tj
\end{tikzcd}$$

である．

f を bicone として対応する bicylinder を $\sigma\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ とすれば 1 次元的普遍性により $h\colon a \to \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T$ と同型 $\Phi\colon (Gh)\mathbin{\widehat{\circ}}\eta \Rrightarrow \sigma$ が存在する．$j \in \mathcal{J}$ に対して $\Phi_j\colon (- \bullet h) \circ \eta_j \Rightarrow \sigma_j\colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(a, Tj)$ は自然同型である．故に $* \in \mathbb{1}$ の行き先を考えれば，同型 $\varphi_j := (\Phi_j)_*\colon p_j \circ h = \eta_j(*) \circ h \cong \sigma_j(*) = f_j$ を得る．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[rr, bend right=40, "f_j"', ""{name=F}] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[r, "p_j"] \arrow[d, phantom, "\wr\Downarrow\varphi_j"] & Tj \\
 & {} &
\end{tikzcd}$$

Φ が modification だから，$m\colon i \to j$ に対して等式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[r, bend left, "((Gh)\widehat{\circ}\eta)_i"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sim}{\swarrow}"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "Tm\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "((Gh)\widehat{\circ}\eta)_j"] \arrow[r, bend right, "\sigma_j"'] \arrow[r, phantom, "\Phi_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(a,Tj)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[r, bend left, "((Gh)\widehat{\circ}\eta)_i"] \arrow[r, bend right, "\sigma_i"'] \arrow[r, phantom, "\Phi_i\Downarrow"] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sim}{\swarrow}\sigma_m"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "Fm\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, bend right, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(a,Tj)
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．即ち

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & \varphi_i^{-1}\Downarrow\wr & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[urr, bend left=40, "f_i"] \arrow[drr, bend right=40, "f_j"'] \arrow[r, "h"] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[ur, "p_i"] \arrow[dr, "p_j"'] \arrow[r, phantom, "p_m\Downarrow\wr"] & {} \\
 & \varphi_j\Downarrow\wr & Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[urr, bend left=40, "f_i"] \arrow[drr, bend right=40, "f_j"'] & f_m\Downarrow\wr & \\
 & & Tj
\end{tikzcd}$$

である．逆に同型な 2-morphism の族 $\varphi = \{\varphi_j\colon p_j \circ h \Rightarrow f_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ が上記の等式を満たせば同型な modification $\Phi\colon (Gh)\mathbin{\widehat{\circ}}\eta \Rrightarrow \sigma$ が得られるから，同型 $(Gh)\mathbin{\widehat{\circ}}\eta \cong \sigma$ を φ と同一視することができる．

次に $h, h' \colon a \to \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}}T$ として $f := p \bullet h$，$f' := p \bullet h'$ に対応する bicylinder をそれぞれ $\sigma, \sigma' \colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ とする．$\Gamma \colon \sigma \Rrightarrow \sigma'$ を modification とすると $j \in \mathcal{J}$ に対して $\Gamma_j \colon \sigma_j \Rightarrow \sigma'_j \colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(a, Tj)$ は自然変換で $\theta_j := (\Gamma_j)_* \colon f_j \Rightarrow f'_j \colon a \to Tj$ は 2-morphism となる．Γ が modification だから，$m \colon i \to j$ に対して等式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sim}{\Swarrow}\,\sigma_m"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "Tm\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_j"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(a,Tj)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_i"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_i"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_i\Downarrow"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sim}{\Swarrow}\,\sigma'_m"] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "Tm\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] & \mathcal{C}(a,Tj)
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．故に $\theta_j * f_m = f'_m * (Fm \bullet \theta_i)$ となることが分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f_i"] \arrow[dr, bend left, "f_j"] \arrow[dr, bend right, "f'_j"'] \arrow[r, phantom, "f_m\Swarrow"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow\theta_j"] & \\
 & Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f_i"] \arrow[ur, "f'_i"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\theta_i"] \arrow[dr, bend right, "f'_j"'] \arrow[r, phantom, "f'_m\Swarrow"] & \\
 & Tj
\end{tikzcd}$$

逆にこのような条件を満たす $\theta = \{\theta_j \colon f_j \Rightarrow f'_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ があれば modification $\Gamma \colon \sigma \Rrightarrow \sigma'$ が得られるから，Γ と θ が対応することが分かる．このような θ が存在するとき，2 次元的普遍性から $\beta \colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して $(G\beta) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta = \Gamma$ となる．このとき $j \in \mathcal{J}$ に対して $(G\beta)_j \bullet \eta_j = \Gamma_j$ となるから $p_j \bullet \beta = \theta_j$ である．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}}T \arrow[r, "p_j"] & Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left, "f_j"] \arrow[rr, bend right, "f'_j"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta_j"] & & Tj
\end{tikzcd}$$

以上をまとめると，$\mathcal{J}$ が小圏で $W = \Delta\mathbb{1}$ の場合の bilimit とは，対象 $\lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}}$ と bicone p の組 $\langle \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}}T, p \rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

- (1 次元的普遍性) bicone f に対して，$h \colon a \to \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}}T$ と任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して同型

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[rr, bend right, "f_j"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\wr\Downarrow\varphi_j"] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}}T \arrow[r, "p_j"] & Tj
\end{tikzcd}$$

が存在して，任意の $m\colon i \to j$ に対して等式

$$\begin{tikzcd}
& Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[ru, bend left, "f_i"] \arrow[rd, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "f_m \Downarrow \wr"] & \\
& Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& & Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[r, "h"] \arrow[rru, bend left, "f_i"] \arrow[rrd, bend right, "f_j"'] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[ru, "p_i"] \arrow[rd, "p_j"'] \arrow[u, phantom, "\varphi_i^{-1} \Downarrow \wr"] \arrow[d, phantom, "\varphi_j \Downarrow \wr"] \arrow[r, phantom, "p_m \Downarrow \wr"] & \\
& & Tj
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．

- (2 次元的普遍性) $h, h'\colon a \to \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T$ を 1-morphism として $f := p \bullet h$, $f' := p \bullet h'$ とする．2-morphism の族 $\{\theta_j\colon f_j \Rightarrow f'_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が，任意の $m\colon i \to j$ に対して等式

$$\begin{tikzcd}
& Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[ru, bend left, "f_i"] \arrow[rd, "f_j"] \arrow[rd, bend right=40, "f'_j"'] \arrow[r, phantom, "f_m \Swarrow"] \arrow[rd, phantom, "\Swarrow \theta_j"'] & \\
& Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Ti \arrow[dd, "Tm"] \\
a \arrow[ru, bend left=40, "f_i"] \arrow[ru, "f'_i"'] \arrow[rd, bend right, "f'_j"'] \arrow[ru, phantom, "\Searrow \theta_i"] \arrow[r, phantom, "f'_m \Swarrow"] & \\
& Tj
\end{tikzcd}$$

を満たすとき，2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して，任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[r, "p_j"] & Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f_j"] \arrow[r, bend right, "f'_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \theta_j"] & Tj
\end{tikzcd}$$

となる． □

例 5. $\mathcal{J}$ が離散圏で $W = \Delta\mathbb{1}$ の場合の bilimit を biproduct という．$\mathcal{C}$ の対象の族 $\{a_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ の biproduct とは，例 4 によれば，組 $\langle c, p\rangle$ であって次の条件を満たすものである．

- $c \in \mathcal{C}$ は対象で，$j \in \mathcal{J}$ に対して $p_j\colon c \to a_j$ は 1-morphism である．
- (1 次元的普遍性) $a \in \mathcal{C}$ が対象で，$j \in \mathcal{J}$ に対して $f_j\colon a \to a_j$ が 1-morphism ならば，1-morphism $h\colon a \to c$ と同型

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[rr, bend right, "f_j"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\wr\|"] & c \arrow[r, "p_j"] & a_j
\end{tikzcd}$$

が存在する．

- (2次元的普遍性) $h, h'\colon a \to c$ を 1-morphism として, $j \in \mathcal{J}$ に対して $f_j := p_j \circ h$, $f'_j \circ h'$ とする．また $\theta_j\colon f_j \Rightarrow f'_j$ を 2-morphism とする．このとき 2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "h"{name=U}] \arrow[r, bend right, "h'"'{name=D}] & c \arrow[r, "p_j"] & a_j \arrow[r, phantom, "="] & a \arrow[r, bend left, "f_j"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "f'_j"'{name=D2}] & a_j
\arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\beta"]
\arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\theta_j"]
\end{tikzcd}$$

となる．

例 6. 2-category $\mathcal{J}$ を

$$\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r, "m_1"] & j \\
& i_0 \arrow[u, "m_0"']
\end{tikzcd}$$

として．strict 2-functor $W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$, $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ を

$$\begin{tikzcd}
& i_1 \arrow[r, "m_1"] & j & & \mathbb{1} \arrow[r, "1"] & \mathbb{2} \\
W\colon & & {} \arrow[rr, mapsto] & & {} & \\
& & i_0 \arrow[uu, "m_0"'] & & & \mathbb{1} \arrow[uu, "0"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& i_1 \arrow[r, "m_1"] & j & & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
T\colon & & {} \arrow[rr, mapsto] & & {} & \\
& & i_0 \arrow[uu, "m_0"'] & & & a_0 \arrow[uu, "f"']
\end{tikzcd}$$

としたときの bilimit を f, g の bicomma object という．

$x \in \mathcal{B}$ を対象，$\sigma\colon W \Rightarrow \mathcal{B}(x, T-)$ を bicylinder とする．このとき $\sigma_{i_0}\colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}(x, a_0)$, $\sigma_{i_1}\colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}(x, a_1)$, $\sigma_j\colon \mathbb{2} \to \mathcal{B}(x, b)$ は関手であり，また σ が pseudonatural だから次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{B}(x, a_0) \arrow[d, "f\bullet-"] \arrow[dl, phantom, "\wr\Swarrow\sigma_{m_0}"] & \mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{B}(x, a_1) \arrow[d, "g\bullet-"] \arrow[dl, phantom, "\wr\Swarrow\sigma_{m_1}"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{B}(x, b) & \mathbb{2} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}$$

故に $q_0 := \sigma_{i_0}(*)$，$q_1 := \sigma_{i_1}(*)$ と定義すれば $q_k\colon x \to a_k$ であり，$(\sigma_{m_0})_*\colon \sigma_j(0) \cong f \circ q_0$ と $(\sigma_{m_1})_*\colon \sigma_j(1) \cong g \circ q_1$ は同型である．故に

$$\lambda := \bigl(f \circ q_0 \xRightarrow{(\sigma_{m_0})_*} \sigma_j(0) \xRightarrow{\sigma_j(l)} \sigma_j(1) \xRightarrow{(\sigma_{m_1})_*^{-1}} g \circ q_1\bigr)$$

は次の 2-morphism である．

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, Rightarrow, shorten=4mm, "\lambda"]
\end{tikzcd}$$

逆にこのような λ が与えられたとき，bicylinder $\sigma\colon W \Rightarrow \mathcal{B}(x, T-)$ を

$$\begin{aligned}
\sigma_{i_0}\colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}(x, a_0)\colon &\quad * \mapsto q_0 \\
\sigma_{i_1}\colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}(x, a_1)\colon &\quad * \mapsto q_1 \\
\sigma_j\colon \mathbb{2} \to \mathcal{B}(x, b)\colon &\quad 0 \mapsto f \circ q_0, \quad 1 \mapsto g \circ q_1, \\
&\quad l \mapsto \lambda
\end{aligned}$$

と $(\sigma_{m_0})_* = \mathrm{id}$，$(\sigma_{m_1})_* = \mathrm{id}$ により定めることができる．これにより σ と λ を同一視することができる．

さて，すると $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ の bicomma object とは，対象 $f \downarrow g \in \mathcal{B}$，1-morphism $p_0\colon a_0 \to b$，$p_1\colon a_1 \to b$，2-morphism $\eta\colon f \circ p_0 \Rightarrow g \circ p_1$ の四つ組 $\langle f \downarrow g, p_0, p_1, \eta\rangle$，即ち図式

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, Rightarrow, shorten=4mm, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

であって「普遍性」を満たすものであると言える．η に対応する bicylinder を $\overline{\eta}$ と書く．

別の組 $\langle x, q_0, q_1, \sigma\rangle$ が同じ条件を満たすとする．σ に対応する bicylinder を $\overline{\sigma}$ とする．1 次元的普遍性により 1-morphism $h\colon x \to f \downarrow g$ と同型 $\Phi\colon (Gh)\,\widehat{\circ}\,\overline{\eta} \Rrightarrow \overline{\sigma}$ が存在する．このとき $k \in \mathcal{J}$ に対して $\Phi_k\colon (- \bullet h) \circ \overline{\eta}_k \Rightarrow \overline{\sigma}_k$ は自然同型である．よって $\varphi_0 := (\Phi_{i_0})_*$，

$\varphi_1 := (\Phi_{i_1})_*$ と置けば $\varphi_0 \colon p_0 \circ h \Rightarrow q_0$，$\varphi_1 \colon p_1 \circ h \Rightarrow q_1$ は同型である．また

$$\begin{tikzcd}
(f \circ p_0) \circ h \arrow[r, "(\Phi_j)_0"] \arrow[d, "\eta \bullet h"'] & f \circ q_0 \arrow[d, "\sigma"] \\
(g \circ p_1) \circ h \arrow[r, "(\Phi_j)_1"'] & g \circ q_1
\end{tikzcd}$$

は可換である．Φ は modification だから等式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\eta}_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{B}(f \downarrow g, a_0) \arrow[r, bend left, "- \bullet h"] \arrow[d, "f \bullet -"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & \mathcal{B}(x, a_0) \arrow[d, "f \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend left, "\bar{\eta}_j"] \arrow[rr, bend right=40, "\bar{\sigma}_j"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow \Phi_j"] & \mathcal{B}(f \downarrow g, b) \arrow[r, bend left, "- \bullet h"] & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\eta}_{i_0}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\sigma}_{i_0}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \Phi_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{B}(f \downarrow g, a_0) \arrow[r, bend left, "- \bullet h"] & \mathcal{B}(x, a_0) \arrow[d, "f \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[rr, bend right=40, "\bar{\sigma}_j"'] & /\!/ & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\eta}_{i_1}"] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{B}(f \downarrow g, a_1) \arrow[r, bend left, "- \bullet h"] \arrow[d, "f \bullet -"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & \mathcal{B}(x, a_1) \arrow[d, "f \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend left, "\bar{\eta}_j"] \arrow[rr, bend right=40, "\bar{\sigma}_j"'] \arrow[rr, phantom, bend right=20, "\Downarrow \Phi_j"] & \mathcal{B}(f \downarrow g, b) \arrow[r, bend left, "- \bullet h"] & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\eta}_{i_1}"] \arrow[rr, bend right, "\bar{\sigma}_{i_1}"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \Phi_{i_0}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{B}(f \downarrow g, a_1) \arrow[r, bend left, "- \bullet h"] & \mathcal{B}(x, a_1) \arrow[d, "f \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[rr, bend right=40, "\bar{\sigma}_j"'] & /\!/ & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．故に

$$(f \circ (p_0 \circ h) \xRightarrow{\alpha^{-1}} (f \circ p_0) \circ h \xRightarrow{(\Phi_j^{\overline{\sigma}})_0} f \circ q_0) = f \bullet \varphi_0$$

$$(g \circ (p_1 \circ h) \xRightarrow{\alpha^{-1}} (g \circ p_1) \circ h \xRightarrow{(\Phi_j^{\overline{\sigma}})_1} g \circ q_1) = g \bullet \varphi_1$$

となるから $(g \bullet \varphi_1^{-1}) * (\eta \bullet h) * (f \bullet \varphi_0) = \sigma$ が分かる．

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta}{\Nwarrow}"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\Nwarrow}{\varphi_1}"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[urr, phantom, "\varphi_0^{-1} \Nwarrow"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \sigma \Nwarrow & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

これが bicomma object の 1 次元的普遍性である．

次に 2 次元的普遍性についてみる．そのために $h, h'\colon x \to f \downarrow g$ を 1-morphism として

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b & & & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & a_0 \arrow[u, "f"'] & := & & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & & & & x \arrow[ur, "h"] & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b & & & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & a_0 \arrow[u, "f"'] & := & & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1'"] \arrow[urr, bend right, "q_0'"'] \arrow[uurr, phantom, "\Nwarrow \sigma'"] & & & & x \arrow[ur, "h'"] & &
\end{tikzcd}$$

と定める．$\Gamma\colon \bar{\sigma} \Rrightarrow \overline{\sigma'}$ を modification とすると modification の条件より等式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\sigma}_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{B}(x, a_0) \arrow[d, "f \bullet -"] & = & \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\sigma}_{i_0}"] \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma'}_{i_0}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{B}(x, a_0) \arrow[d, "f \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend left, "\bar{\sigma}_j"] \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma'}_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_j"] & \mathcal{B}(x, b) & & \mathbb{2} \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma'}_j"'] \arrow[r, phantom, "/\!/"] & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\sigma}_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & \mathcal{B}(x, a_1) \arrow[d, "g \bullet -"] & = & \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\bar{\sigma}_{i_1}"] \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma'}_{i_1}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{B}(x, a_1) \arrow[d, "g \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend left, "\bar{\sigma}_j"] \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma'}_j"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \Gamma_j"] & \mathcal{B}(x, b) & & \mathbb{2} \arrow[r, bend right, "\overline{\sigma'}_j"'] \arrow[r, phantom, "/\!/"] & \mathcal{B}(x, b)
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって $\theta_0 := (\Gamma_{i_0})_*\colon q_0 \Rightarrow q_0'$，$\theta_1 := (\Gamma_{i_1})_*\colon q_1 \Rightarrow q_1'$ と定義すると $(\Gamma_j)_0 = f \bullet \theta_0$，$(\Gamma_j)_1 = g \bullet \theta_1$ となる．また $\Gamma_j\colon \bar{\sigma}_j \Rightarrow \overline{\sigma'}_j$ は自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
f \circ q_0 \arrow[r, "(\Gamma_j)_0"] \arrow[d, "\sigma"'] & f \circ q_0' \arrow[d, "\sigma'"] \\
g \circ q_1 \arrow[r, "(\Gamma_j)_1"'] & g \circ q_1'
\end{tikzcd}$$

が可換である．故に $\sigma' * (f \bullet \theta_0) = (g \bullet \theta_1) * \sigma$ となる．

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\underset{\theta_1}{\Leftarrow}"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta_0"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma'"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

逆に $\langle \theta_0, \theta_1 \rangle$ がこの等式を満たせば modification $\Gamma\colon \bar{\sigma} \Rrightarrow \overline{\sigma'}$ が得られるから, Γ を $\langle \theta_0, \theta_1 \rangle$ と同一視することができる．

さて，Γ (即ち $\langle \theta_0, \theta_1 \rangle$) が存在したとすると 2 次元的普遍性より，$\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して $(G\beta) \mathbin{\widehat{\bullet}} \bar{\eta} = \Gamma$ となる．即ち $k \in \mathcal{J}$ に対して $(- \bullet \beta) \bullet \bar{\eta}_k = \Gamma_k$ となるから

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & f \downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "q_0"] \arrow[rr, bend right, "q_0'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta_0"] & & a_0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & f \downarrow g \arrow[r, "p_1"] & a_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "q_1"] \arrow[rr, bend right, "q_1'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & & a_1
\end{tikzcd}$$

が分かる．

以上をまとめると，f, g の bicomma object とは，図式

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Nwarrow"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

であって，以下の条件を満たすものである．

- (1 次元的普遍性) 図式

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma\Nwarrow"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

に対して 1-morphism $h\colon x \to f\downarrow g$ と同型な 2-morphism $\varphi_0\colon p_0 \circ h \Rightarrow q_0$, $\varphi_1\colon p_1 \circ h \Rightarrow q_1$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\eta}{\Leftarrow}"] \arrow[ul, phantom, "\overset{\varphi_1}{\Leftarrow}"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \arrow[urr, phantom, "\overset{\varphi_0^{-1}}{\Leftarrow}"] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

となる.

- (2 次元的普遍性) $h, h'\colon a \to \lim_{\mathrm{bi}}^{\Delta\mathbb{1}} T$ を 1-morphism としてそこから得られる

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1'"] \arrow[r, "q_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma'}{\Leftarrow}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

を取る．2-morphism θ_0, θ_1 が等式

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left=40, "q_1'"] \arrow[u, bend right=40, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\theta_1}"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Leftarrow}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta_0"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma'}{\Leftarrow}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

を満たすならば，2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "q_0"] \arrow[r, bend right, "q_0'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_0"] & a_0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_1"] & a_1
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "q_1"] \arrow[r, bend right, "q_1'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta_1"] & a_1
\end{tikzcd}$$

となる. □

定理 7. $f\colon a_0 \to b,\ g\colon a_1 \to b$ を 1-morphism とするとき，bicomma object $f \downarrow g$ とは，x について pseudonatural な圏同値

$$\mathcal{B}(x, f \downarrow g) \simeq \mathcal{B}(x, f) \downarrow \mathcal{B}(x, g)$$

が成り立つ対象のことである．

証明. コンマ圏 $\mathcal{B}(x, f) \downarrow \mathcal{B}(x, g)$ とは

- 対象は 3 つ組 $\langle q_0\colon x \to a_0, q_1\colon x \to a_1, \sigma\colon f \circ q_0 \Rightarrow g \circ q_1 \rangle$ である．
- $\langle q_0, q_1, \sigma \rangle$ から $\langle q_0', q_1', \sigma' \rangle$ への射は 2 つ組 $\langle \theta_0\colon q_0 \Rightarrow q_0', \theta_1\colon q_1 \Rightarrow q_1' \rangle$ であって

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left=50, "q_1'"{name=A}] \arrow[u, bend right=30, "q_1"'{name=B}] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\arrow[Rightarrow, from=B, to=A, "\theta_1"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left=30, "q_1'"] \arrow[r, bend left, "q_0'"{name=C}] \arrow[r, bend right, "q_0"'{name=D}] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\sigma'"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\arrow[Rightarrow, from=D, to=C, "\theta_0"']
\end{tikzcd}$$

を満たすものである．

で定まる圏である． □

定理 8. $f\colon a_0 \to b,\ g\colon a_1 \to b$ として絶対右 Kan リフト

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_\ddagger g"'{name=E}] & b \\
 & a_0 \arrow[u, "f"']
\arrow[phantom, from=E, to=1-2, "\Uparrow\varepsilon"]
\end{tikzcd}$$

と bicomma object $\mathrm{id} \downarrow f_\ddagger g$ が存在するとする．このとき $f \downarrow g$ は存在して $f \downarrow g \cong \mathrm{id} \downarrow f_\ddagger g$ である．

証明. まず定理 7 より，$u \in \mathcal{B}$ について自然に $\mathcal{B}(u, \mathrm{id} \downarrow f_\ddagger g) \simeq \mathrm{id} \downarrow \mathcal{B}(u, f_\ddagger g)$ である．ここで $\mathrm{id} \downarrow \mathcal{B}(u, f_\ddagger g)$ とは

- 対象は 3 つ組 $\langle q_0\colon u \to a_0,\ q_1\colon u \to a_1,\ \theta\colon q_0 \Rightarrow f_\ddagger g \circ q_1 \rangle$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "f_\ddagger g"] & \\
u \arrow[ur, "q_1"] \arrow[rr, "q_0"'] \arrow[rr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\theta"] & & a_0
\end{tikzcd}$$

- 射 $\langle q_0, q_1, \theta\rangle \to \langle q'_0, q'_1, \theta'\rangle$ は 2 つ組 $\langle \beta\colon q_0 \Rightarrow q'_0, \gamma\colon q_1 \Rightarrow q'_1\rangle$ であって

$$\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "f_\ddagger g"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \theta"] & \\
u \arrow[ur, bend left=60, "q'_1"] \arrow[ur, bend left=20, "q_1"'] \arrow[ur, phantom, bend left=40, "\gamma\Uparrow"] \arrow[rr, "q_0"'] & {} & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "f_\ddagger g"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \theta'"] & \\
u \arrow[ur, bend left=30, "q'_1"] \arrow[rr, bend left=15, "q'_0"] \arrow[rr, bend right=15, "q_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow \beta"] & {} & a_0
\end{tikzcd}$$

  を満たすものである．

となる圏である．ε が絶対右 Kan リフトだから次の図式における σ と θ は一対一に対応する．

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
u \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow \sigma"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[dr, "f_\ddagger g"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \theta"] & \\
u \arrow[ur, "q_1"] \arrow[rr, "q_0"'] & {} & a_0
\end{tikzcd}$$

よって上で述べた定義を見比べれば $\mathrm{id}\downarrow \mathcal{B}(u, f_\ddagger g) \cong \mathcal{B}(u, f)\downarrow \mathcal{B}(u, g)$ が分かる．従って $\mathcal{B}(u, \mathrm{id}\downarrow f_\ddagger g) \simeq \mathcal{B}(u, f)\downarrow \mathcal{B}(u, g)$ が分かり，再び定理 7 により $f\downarrow g \simeq \mathrm{id}\downarrow f_\ddagger g$ が分かった． □