随伴関手定理

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 6 日

左随伴関手は余極限と交換するのであった (「随伴関手」の PDF を参照). では逆に，余極限と交換する関手は左随伴になるのだろうか？ ある条件の下であればこれが成り立つ，という定理が随伴関手定理である. これを理解する上で重要なのが「随伴は Kan 拡張である」という事実 (定理 1) である.

1　一般随伴関手定理

定理 1. 関手 $F\colon C \to D$ に対して以下の条件は同値である.

(1) F は左随伴関手である.
(2) F に沿った id_C の絶対左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在する.
(3) F に沿った id_C の左 Kan 拡張 $\langle F^\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在し，F が左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger\mathrm{id}_C"] \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger\mathrm{id}_C)"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[r, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}"] & D
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F\circ(F^\dagger\mathrm{id}_C)\cong F^\dagger F"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow F\eta"] & C \arrow[r, "F"'] & D
\end{tikzcd}$$

またこのとき $F \dashv F^\dagger \mathrm{id}_C$ であり η がその unit である.

証明.「Kan 拡張」の PDF を参照. □

命題 2. $F\colon J \to C$ を関手とする. J が終対象 1 を持つならば，F の余極限は存在して $\operatorname{colim} F \cong F(1)$ となる.

証明.「Kan 拡張」の PDF を参照. □

命題 2 における終対象の性質を一般化したものが終関手である (例 6 も参照).

定義. 関手 $K\colon I \to J$ が終関手 (final functor[*1])
$\iff$ C を圏，$F\colon J \to C$ を関手とする．もし余極限 $\operatorname{colim} FK$ が存在すれば $\operatorname{colim} F$ も存在し，普遍性から得られる射 $\operatorname{colim} FK \to \operatorname{colim} F$ が同型を与える.

補題 3. $F\colon C \to D$，$E\colon C \to U$ で，左 Kan 拡張 $\langle F^{\dagger}E, \eta\rangle$ が存在すると仮定する.

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^{\dagger}E"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}$$

このとき $G\colon D \to B$ に対して

左 Kan 拡張 $\langle (GF)^{\dagger}E, \sigma\rangle$ が存在する $\iff$ 左 Kan 拡張 $\langle G^{\dagger}(F^{\dagger}E), \tau\rangle$ が存在する.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^{\dagger}E"] & \\
D \arrow[u, "G"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[uur, phantom, "\Uparrow\sigma"] & U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "G^{\dagger}(F^{\dagger}E)"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^{\dagger}E"] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & U
\end{tikzcd}$$

更に，これらが存在するとき $(GF)^{\dagger}E \cong G^{\dagger}(F^{\dagger}E)$ である.

証明. ($\Longrightarrow$) 左 Kan 拡張 $\langle (GF)^{\dagger}E, \sigma\rangle$ が存在するとする．$\langle F^{\dagger}E, \eta\rangle$ の普遍性により

[*1] cofinal functor と呼んでいる文献もあるので注意が必要.

$\tau\colon F^\dagger E \Rightarrow (GF)^\dagger E \circ G$ が存在して，$\sigma = \tau_F \circ \eta$ となる．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] \arrow[uu, phantom, "\Uparrow\sigma"] & U
\end{tikzcd}$$

$\langle (GF)^\dagger E, \tau\rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の左 Kan 拡張であることを示せばよい．任意の関手 $S\colon B \to U$ と $\theta\colon F^\dagger E \Rightarrow SG$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr, "(GF)^\dagger E"'] \arrow[ddr, bend left, "S"] \arrow[ddr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\rho"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr, "F^\dagger E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[dr, phantom, bend left=10, "\Uparrow\theta"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] \arrow[uu, phantom, "\Uparrow\sigma"] & U
\end{tikzcd}$$

$(GF)^\dagger E$ の普遍性から，$\rho\colon (GF)^\dagger E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_{GF} \circ \sigma = \theta_F \circ \eta$ となる．$\sigma = \tau_F \circ \eta$ だったから $\rho_{GF} \circ \tau_F \circ \eta = \theta_F \circ \eta$ である．よって左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ の普遍性から $\rho_G \circ \tau = \theta$ となる．従って $\langle (GF)^\dagger E, \tau\rangle$ が G に沿った $F^\dagger E$ の左 Kan 拡張である．

($\Longleftarrow$) 左 Kan 拡張 $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau\rangle$ が存在するとする．$\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta\rangle$ が GF に沿った E の左 Kan 拡張であることを示せばよい．任意の関手 $S\colon B \to U$ と $\theta\colon E \Rightarrow SGF$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[ddr] \arrow[ddr, bend left, "S"] \arrow[ddr, phantom, bend left=20, "\Uparrow\rho"] & \\
D \arrow[u, "G"] \arrow[dr] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\tau"] \arrow[ur, phantom, bend right, "\Uparrow\mu"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "E"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] \arrow[ur, phantom, bend right, "\Uparrow\theta"] & U
\end{tikzcd}$$

$F^\dagger E$ の普遍性から $\mu\colon F^\dagger E \Rightarrow SG$ が一意に存在して $\mu_F \circ \eta = \theta$ となる．よって $G^\dagger(F^\dagger E)$ の普遍性から $\rho\colon G^\dagger(F^\dagger E) \Rightarrow S$ が一意に存在して $\rho_G \circ \tau = \mu$ となる．このと

き $\rho_{GF} \circ (\tau_F \circ \eta) = \theta$ である．従って $\langle G^\dagger(F^\dagger E), \tau_F \circ \eta \rangle$ が GF に沿った E の左 Kan 拡張である． □

命題 4. 右随伴関手は終関手である．(よって右随伴の例として終対象を考えれば命題 2 が得られる．)

証明. $L \dashv K \colon J \to I$ を随伴，$F \colon J \to C$ を関手とする．FK の余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu \rangle$ が存在したとすると，この $\langle \operatorname{colim} FK, \mu \rangle$ は $! \colon I \to \mathbb{1}$ に沿った FK の左 Kan 拡張である．一方で $K \cong L^\dagger \mathrm{id}_C$ は絶対左 Kan 拡張であるから，次の図式全体は $! = ! \circ L$ に沿った $F = F \circ \mathrm{id}_J$ の左 Kan 拡張を与える (補題 3).

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rrdd, "\operatorname{colim} FK"] & & \\
I \arrow[u, "!"] \arrow[rd, "K"] \arrow[ur, phantom, "\mu\Uparrow"] & & \\
J \arrow[u, "L"] \arrow[r, "\mathrm{id}_J"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & J \arrow[r, "F"'] & C
\end{tikzcd}
$$

それは $\operatorname{colim} F$ であったから，普遍性から得られる射 $\operatorname{colim} FK \to \operatorname{colim} F$ が同型となることが分かる． □

終関手は圏の連結性を使って特徴付けることができる (命題 5).

定義. C を圏，$a, b \in C$ を対象とする．a と b を結ぶ zigzag とは

$$a \to c_0 \leftarrow c_1 \to \cdots \leftarrow c_{n-1} \to c_n \leftarrow b$$

の形の図式のことをいう．

定義. 圏 C が連結 $\iff C \neq \mathbb{0}$ で，任意の対象 $a, b \in C$ を結ぶ zigzag が存在する．

命題 5. I を小圏，J を圏，$K \colon I \to J$ を関手とする．このとき以下の条件は同値である．

(1) K は終関手である．
(2) $F \colon J \to \mathbf{Set}$ を関手とする (I が小圏だから $\operatorname{colim} FK$ が存在することに注意)．このとき $\operatorname{colim} F$ も存在して，普遍性から得られる射 $\operatorname{colim} FK \to \operatorname{colim} F$ が同型を与える．
(3) 任意の $j \in J$ に対して $\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_J(j, K-) \cong 1$ である．
(4) 任意の $j \in J$ に対して $j \downarrow K$ が連結である．

証明．$(1 \implies 2)$ 終関手の定義から明らか．

$(2 \implies 3)$ $j \in J$ として $F := \mathrm{Hom}_J(j, -)\colon J \to \mathbf{Set}$ と置く．このとき $a \in \mathbf{Set}$ について自然に

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(\operatorname{colim} F, a) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^J}(F, \Delta a) \cong \Delta a(j) = a \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, a)$$

となるから $\operatorname{colim} F \cong 1$ である．従って仮定 (2) により

$$\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_J(j, K-) = \operatorname{colim} FK \cong \operatorname{colim} F \cong 1$$

となる

$(3 \implies 4)$ $j \in J$ とする．仮定 (3) より $\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_J(j, K-) \cong 1$ であるが，これは $\mathbf{Set}$ での余極限だから同値関係 $\sim$ を使って

$$\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_J(j, K-) \cong \Big(\coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_J(j, Ki)\Big)/{\sim}$$

と書ける．これが 1 になるためには，ある $i \in I$ に対して $\mathrm{Hom}_J(j, Ki) \neq \emptyset$ でなければならない．従って $j \downarrow K \neq \mathbb{0}$ である．更に $\operatorname{colim} \mathrm{Hom}_J(j, K-) \cong 1$ となるためには任意の $f \in \mathrm{Hom}_J(j, Ki_0)$，$g \in \mathrm{Hom}_J(j, Ki_1)$ に対して $f \sim g$ とならなければならない．よって $j \downarrow K$ が連結となることが分かる．

$(4 \implies 1)$ C を圏，$F\colon J \to C$ を関手として余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu \rangle$ が存在するとする．$i \in I$ に対して $\mu_i\colon FKi \to \operatorname{colim} FK$ は C の射である．$j \in J$ を取る．$j{\downarrow}K \neq \mathbb{0}$ だから，ある対象 $\langle i, f \rangle \in j{\downarrow}K$ が存在する．この i と f を使って $\tau_j := \mu_i \circ Ff\colon Fj \to \operatorname{colim} FK$ と定める．

$$i \qquad j \xrightarrow{f} Ki \qquad Fj \xrightarrow{Ff} FKi \xrightarrow{\mu_i} \operatorname{colim} FK$$

この τ_j は well-defined である．

$\because$) $\langle i, f \rangle, \langle i', f' \rangle \in j \downarrow K$ に対して $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ を示せばよい．$j \downarrow K$ が連結だから zigzag $\langle i, f \rangle \to \langle i_0, f_0 \rangle \leftarrow \langle i_1, f_1 \rangle \to \cdots \to \langle i_n, f_n \rangle \leftarrow \langle i', f' \rangle$ が存在する．

このとき次の図式は可換である．

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[d] \\
i_0 \\
i_1 \arrow[u] \\
\vdots \\
i_n \\
i' \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Ki \arrow[d] \\
 & Ki_0 \\
j \arrow[uur, "f"] \arrow[ur, "f_0"] \arrow[r, "f_1"] \arrow[dr, "f_n"] \arrow[ddr, "f'"'] & Ki_1 \arrow[u] \\
 & \vdots \\
 & Ki_n \\
 & Ki' \arrow[u]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & FKi \arrow[d] \arrow[ddr, "\mu_i"] & \\
 & FKi_0 \arrow[dr, "\mu_{i_0}"] & \\
Fj \arrow[uur, "Ff"] \arrow[ur, "Ff_0"] \arrow[r, "Ff_1"] \arrow[dr, "Ff_n"] \arrow[ddr, "Ff'"'] & FKi_1 \arrow[u] \arrow[r, "\mu_{i_1}"] & \operatorname{colim} FK \\
 & \vdots & \\
 & FKi_n \arrow[uur, "\mu_{i_n}"] & \\
 & FKi' \arrow[u] \arrow[uuur, "\mu_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

故に $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff'$ である．

この τ_j は自然変換 $\tau\colon F \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} FK)$ を定める．

$\because$) $s\colon j \to j'$ とする．$\langle i, f\rangle \in j{\downarrow}K$，$\langle i', f'\rangle \in j'{\downarrow}K$ を任意に取れば $\tau_j = \mu_i \circ Ff$，$\tau_{j'} = \mu_{i'} \circ Ff'$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
i \\
\\
i'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
j \arrow[r, "f"] \arrow[dd, "s"'] & Ki \\
\\
j' \arrow[r, "f'"'] & Ki'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fj \arrow[r, "Ff"] \arrow[dd, "Fs"'] & FKi \arrow[dr, "\mu_i"] & \\
 & & \operatorname{colim} FK \\
Fj' \arrow[r, "Ff'"'] & FKi' \arrow[ur, "\mu_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき well-defined の証明と同様に連結性から $\mu_i \circ Ff = \mu_{i'} \circ Ff' \circ Fs$ となることが分かる．故に τ は自然変換である．

この τ が F から Δ への普遍射を与えることを示せばよい．そのために $a \in C$ を対象として $\theta\colon F \Rightarrow \Delta a$ を自然変換とする．このとき $\theta_K\colon FK \Rightarrow \Delta a$ は自然変換である．故に余極限 $\langle \operatorname{colim} FK, \mu\rangle$ の普遍性から射 $h\colon \operatorname{colim} FK \to a$ が存在して，$i \in I$ に対して

$h \circ \mu_i = \theta_{Ki}$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[dd, "t"'] & FKi \arrow[dd, "Ft"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_{Ki}"] & & \\
& & \operatorname{colim} FK \arrow[r, dashed, "h"] & a \\
i' & FKi' \arrow[ur, "\mu_{i'}"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_{Ki'}"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって τ の定義と θ_j の自然性から $h \circ \tau_j = h \circ \mu_i \circ Ff = \theta_{Ki} \circ Ff = \theta_j$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
i & j \arrow[r, "f"] & Ki & Fj \arrow[r, "Ff"] \arrow[drrr, rounded corners, "\theta_j"] \arrow[drr, rounded corners, "\tau_j"'] & FKi \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_{Ki}"] & & \\
& & & & & \operatorname{colim} FK \arrow[r, "h"] & a
\end{tikzcd}
$$

また $\operatorname{colim} FK$ の普遍性から h の一意性も分かり，τ は F から Δ への普遍射である． □

例 6. 圏 C の対象 $c \in C$ に対して関手 $K\colon \mathbb{1} \to C$ を $K(*) := c$ により定めると

$$c \in C \text{ が終対象} \iff K \text{ が終関手}$$

証明. ($\Longrightarrow$) $c \in C$ を終対象とすると，任意の $a \in C$ に対して $a \downarrow K = \mathbb{1}$ が連結だから命題 5 により K は終関手である．

($\Longleftarrow$) $a \in C$ とすると，K の定義より $a \downarrow K$ は離散圏であって $a \downarrow K = \mathrm{Hom}_C(a, c)$ となる．今 K が終関手だから $a \downarrow K$ は連結なので $|\mathrm{Hom}_C(a, c)| = 1$ しかあり得ない．よって a から c への射は唯 1 つであり，c は終対象である． □

さて，いよいよ本題の随伴関手定理を示していく．

定理 7 (一般随伴関手定理)**.** C, D を圏，C は余完備で関手 $F\colon C \to D$ は余連続であるとする．更に，任意の $d \in D$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F \downarrow d)$ が存在して次を満たすとする (この条件を解集合条件 (solution set condition) と呼ぶ).

$$\text{任意の } \langle c, f \rangle \in F \downarrow d \text{ に対してある } \langle s, k \rangle \in S \text{ と射 } \langle c, f \rangle \to \langle s, k \rangle \text{ が存在する}$$

$$\begin{tikzcd}
 & Fs \arrow[dr, "k"] & \\
Fc \arrow[ur, dashed] \arrow[rr, "f"] & & d \\
 & Fs' \arrow[ur, "k'"'] &
\end{tikzcd}$$

このとき F は左随伴関手である．

証明．各 $d \in D$ に対して $\mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ が存在することを示せばよい．

$\because$) 余極限 $\mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C) = \mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{\mathrm{id}_C} C)$ が存在したとする．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D & \\
F \downarrow d \arrow[u] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] & C \arrow[u, "F"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_C"'] & C
\end{tikzcd}$$

このとき各点左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在する．今 F が余連続だから，F は $F^\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．従って定理 1 により F は左随伴関手である．

$d \in D$ とする．解集合条件を満たす集合 $S \subset \mathrm{Ob}(F \downarrow d)$ を取り，$S \subset F \downarrow d$ を充満部分圏とみなす．$K\colon S \to F \downarrow d$ を包含関手とすれば，S が small で C は余完備だから，余極限 $\mathrm{colim}(S \xrightarrow{K} F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ が存在する．従って，後は K が終関手であることを示せば $\mathrm{colim}(F \downarrow d \xrightarrow{P_0} C)$ の存在が分かる．

$\langle c, f \rangle \in F \downarrow d$ とする．$\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることを示せばよい．まず，解集合条件から明らかに $\langle c, f \rangle \downarrow K \neq \mathbb{0}$ である．次に $\langle \langle s_0, k_0 \rangle, g_0 \rangle, \langle \langle s_1, k_1 \rangle, g_1 \rangle \in \langle c, f \rangle \downarrow K$ とする．即ち $g_0\colon \langle c, f \rangle \to \langle s_0, k_0 \rangle$，$g_1\colon \langle c, f \rangle \to \langle s_1, k_1 \rangle$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & s_0 \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
 & s_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & Fs_0 \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] \arrow[rrr, "f"] & & & d \\
 & Fs_1 \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}$$

C が余完備だから，左の図式の pushout c' が存在する．また F が余連続だから，Fc' も

pushout である．

$$
\begin{tikzcd}
& s_0 \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & c' \\
& s_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fc' & d \\
& Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

よって pushout の普遍性により，射 $Fc' \to d$ が一意に伸びる．

$$
\begin{tikzcd}
& Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fc' \arrow[r, dashed] & d \\
& Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

解集合条件により，この射 $Fc' \to d$ はある $\langle s_2, k_2 \rangle \in S$ を使って $Fc' \to Fs_2 \xrightarrow{k_2} d$ と書ける．

$$
\begin{tikzcd}
& Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drrr, bend left, "k_0"] & & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fc' \arrow[r] & Fs_2 \arrow[r, "k_2"] & d \\
& Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urrr, bend right, "k_1"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

このとき次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& s_0 \arrow[dr] & \\
c \arrow[ur, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"'] & & s_2 \\
& s_1 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& Fs_0 \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "k_0"] & & \\
Fc \arrow[ur, "Fg_0"] \arrow[dr, "Fg_1"'] & & Fs_2 \arrow[r, "k_2"] & d \\
& Fs_1 \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "k_1"'] & &
\end{tikzcd}
$$

この図式は可換である．故に $\langle c, f \rangle \downarrow K$ が連結であることが分かる． $\square$

2 特殊随伴関手定理

C を圏として，$c \in C$ に対して充満部分圏 $\mathrm{Epi}_c \subset c \downarrow \mathrm{id}_C$ を

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{Epi}_c) := \{\langle a, f\rangle \in c{\downarrow}\mathrm{id}_C \mid f\colon c \to a \text{ はエピ射 }\}$$

で定める．

命題 8. Epi_c は (集合とは限らない) 前順序になる．即ち，任意の $\langle a, f\rangle, \langle b, g\rangle \in \mathrm{Epi}_c$ に対して $|\mathrm{Hom}_{\mathrm{Epi}_c}(\langle a, f\rangle, \langle b, g\rangle)| \leq 1$ である．

証明. Epi_c の射 $\langle a, f\rangle \to \langle b, g\rangle$ とは，C の射 $h\colon a \to b$ であって

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ a \arrow[rr, "h"'] & & b \end{tikzcd}$$

が可換になるものである．f がエピ射だから，このような h は高々 1 つしか存在しない．即ち $|\mathrm{Hom}_{\mathrm{Epi}_c}(\langle a, f\rangle, \langle b, g\rangle)| \leq 1$ である． □

$\mathrm{Quot}_c \subset \mathrm{Epi}_c$ を骨格として次のように定義する．

定義. 圏 C が well-copowered
$\iff$ 任意の $c \in C$ に対して Quot_c は順序集合になる．

例 9. 小圏 C は well-copowered である．

証明. $c{\downarrow}\mathrm{id}_C$ が小圏になるから Epi_c も小圏 (即ち前順序集合) となり，従って Quot_c は順序集合である． □

例 10. $\mathbf{Set}$ は well-copowered である．

証明. $x \in \mathbf{Set}$ に対して $E_x := \{R \subset x \times x \mid R \text{ は同値関係 }\}$ と定める．$R \in E_x$ に対して $f_R\colon x \to x/R$ を標準全射として $Q_x := \{\langle x/R, f_R\rangle \mid R \in E_x\}$ とすれば，これは充満部分圏 $Q_x \subset \mathrm{Epi}_x$ を定める．この Q_x は Epi_x の骨格である．

∵) まず Q_x が骨格的であることを示す．そのために $R, R' \in E_x$ が Epi_x における同型 $\langle x/R, f_R\rangle \cong \langle x/R', f_{R'}\rangle$ を満たすとする．即ち，全単射 $h\colon x/R \to x/R'$ が存在して

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f_R"'] \arrow[dr, "f_{R'}"] & \\ x/R \arrow[rr, "\sim", "h"'] & & x/R' \end{tikzcd}$$

が可換となる．このとき $R = R'$ であることが容易に分かり，Q_x は骨格的である．

後は任意の $\langle z, f\rangle \in \mathrm{Epi}_x$ に対して，ある $R \in E_x$ が存在して $\langle z, f\rangle \cong \langle x/R, f_R\rangle$ であることを示せばよい．2 項関係 $R \subset x \times x$ を

$$aRb \iff f(a) = f(b)$$

で定義すると，この R は同値関係である．$h\colon x/R \to z$ を $h([a]) := f(a)$ で定義すると，これは well-defined であり

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, "f_R"'] \arrow[dr, "f"] & \\ x/R \arrow[rr, "h"'] & & z \end{tikzcd}$$

が可換となる．この h は全単射だから $\langle z, f\rangle \cong \langle x/R, f_R\rangle$ である．

そこで $\mathrm{Quot}_x = Q_x$ としてよい．このとき Q_x は集合だから，**Set** は well-copowered である． □

定義. $S \subset \mathrm{Ob}(C)$ が generating set
$\iff$ S は集合であり，任意の $f, g\colon a \to b$ に対して次が成り立つ．

$f \neq g$ ならば，ある $s \in S$ と $h\colon s \to a$ が存在して $f \circ h \neq g \circ h$ となる．

定義. 対象 $c \in C$ が generator $\iff$ $\{c\} \subset \mathrm{Ob}(C)$ が generating set.

例 11. $1 = \{*\}$ を 1 元集合とするとき，$1 \in$ **Set** は generator である．

証明. $f, g\colon a \to b$ を写像として $f \neq g$ とする．即ち，ある $x \in a$ が存在して $f(x) \neq g(x)$ である．このとき写像 $h\colon 1 \to a$ を $h(*) := x$ で定義すれば $f \circ h \neq g \circ h$ である． □

※ この generator や generating set という言葉は広く使われているが，一般には特に何かを「生成」しているわけではない．なので nLab [2] 等では generator という言葉は使わず，separator という言葉が使われている．

補題 12. C, D, U を圏で U は well-copowered かつ余完備とする．$F\colon C \to D$ と $S, T\colon C \to U$ を関手，$\varphi\colon S \Rightarrow T$ をエピな自然変換とする．このとき左 Kan 拡張

$F^\dagger S$ が存在するならば $F^\dagger T$ も存在する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[drr, "F^\dagger S"] & & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[rr, "S"] \arrow[rr, bend right, "T"'] \arrow[rr, phantom, shift right=2, "\Downarrow\varphi"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & & U
\end{tikzcd}
$$

証明. 定理 7 のときと同じく，$d \in D$ に対して $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ が存在することを示せばよい．まず U が余完備だから $F^\dagger S$ は各点左 Kan 拡張であり，従って

$$
\mu^d \quad := \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "d"] & D \arrow[dr, "F^\dagger S"] & \\
F\downarrow d \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma}{\Nwarrow}"] & C \arrow[u, "F"] \arrow[r, "S"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U
\end{tikzcd}
$$

が余極限 $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{S} U)$ を与える．このとき P_0 と自然変換 $\varphi\colon S \Rightarrow T$ を合わせて $\varphi_{P_0}\colon SP_0 \Rightarrow TP_0$ を得る．今 U が余完備だから，$\langle c, f\rangle \in F\downarrow d$ に対して pushout

$$
\begin{tikzcd}
F^\dagger S(d) \arrow[r, "\psi_{\langle c,f\rangle}"] & K\langle c, f\rangle \\
Sc \arrow[u, "\mu^d_{\langle c,f\rangle}"] \arrow[r, "\varphi_c"'] & Tc \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

が取れる．これは関手 $K\colon F\downarrow d \to U$ と自然変換 $\psi\colon \Delta(F^\dagger S(d)) \Rightarrow K$ を定める．

$\because$) $F\downarrow d$ の射 $k\colon \langle c, f\rangle \to \langle c', f'\rangle$ に対して，pushout の普遍性から次の点線の射が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
& F^\dagger S(d) \arrow[rr, "\psi_{\langle c',f'\rangle}"] & & K\langle c', f'\rangle \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, "\psi_{\langle c,f\rangle}"] & & K\langle c, f\rangle \arrow[ur, dashed] & \\
& Sc' \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c'}"] & & Tc' \arrow[uu] \\
Sc \arrow[uu, "\mu^d_{\langle c,f\rangle}"] \arrow[ur, "Sk"] \arrow[rr, "\varphi_c"'] & & Tc \arrow[uu] \arrow[ur, "Tk"'] &
\end{tikzcd}
$$

これにより K は関手，ψ は自然変換になる．

仮定から φ_c はエピ射で，エピ射の pushout はエピ射だから，ψ_c もエピ射である．よって $\langle K\langle c,f\rangle, \psi_c\rangle \in \mathrm{Quot}_{F^\dagger S(d)}$ としてよい．仮定より U が well-copowered かつ余完備だから，$\mathrm{Quot}_{F^\dagger S(d)}$ において余直積 $\langle v, g\rangle := \coprod_{\langle c,f\rangle \in F\downarrow d} K\langle c,f\rangle$ を取ることができる．

$$\begin{tikzcd}
& F^\dagger S(d) \arrow[rr] & & K\langle c',f'\rangle \arrow[dr, two heads] & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & K\langle c,f\rangle \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] & & v \\
& Sc' \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c'}"] & & Tc' \arrow[uu] & \\
Sc \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_c"'] & & Tc \arrow[uu] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

この v が余極限 $\mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ を与えることを示そう．そのために任意の $\theta\colon TP_0 \Rightarrow \Delta w$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
& & & & & w \\
& F^\dagger S(d) \arrow[urrrr, dashed] \arrow[rr] & & K\langle c',f'\rangle \arrow[urr, dashed] \arrow[dr, two heads] & & \\
F^\dagger S(d) \arrow[ur] \arrow[rr] & & K\langle c,f\rangle \arrow[ur] \arrow[rr, two heads] & & v \arrow[uur, dashed] & \\
& Sc' \arrow[uu] \arrow[rr, "\varphi_{c'}"] & & Tc' \arrow[uu] \arrow[uuurr, bend right, "\theta_{\langle c',f'\rangle}"] & & \\
Sc \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr, "\varphi_c"'] & & Tc \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[uuuurrr, bend right=50, "\theta_{\langle c,f\rangle}"'] & & &
\end{tikzcd}$$

このとき $\theta \circ \varphi\colon SP_0 \Rightarrow \Delta w$ が得られるから，普遍性により $F^\dagger S(d) \to w$ が得られる．よって pushout の普遍性から $K\langle c,f\rangle \to w$ が得られる．よって v の普遍性から $v \to w$ が得られる．以上により $v \cong \mathrm{colim}(F\downarrow d \xrightarrow{P_0} C \xrightarrow{T} U)$ である． □

定理 13 (特殊随伴関手定理)**.** C, D が圏で，C は well-copowered かつ余完備で，generating set $S \subset \mathrm{Ob}(C)$ を持つとする．このとき関手 $F\colon C \to D$ に対して

$$F \text{ が余連続である} \iff F \text{ が左随伴関手である．}$$

証明．($\Longleftarrow$) 明らか．

($\Longrightarrow$) 左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい．

generating set $S \subset \mathrm{Ob}(C)$ を充満部分圏とみなし，$K\colon S \to C$ を包含関手とする．S が集合で C が余完備だから左 Kan 拡張 $K^\dagger K$，$(FK)^\dagger K$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[ddr, "(FK)^\dagger K"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[dr, "K^\dagger K"'] & \\
S \arrow[u, "K"] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}$$

故に補題 3 より $F^\dagger(K^\dagger K)$ も存在して，$F^\dagger(K^\dagger K) \cong (FK)^\dagger K$ が成り立つ．$K^\dagger K$ の普遍性により $\tau\colon K^\dagger K \Rightarrow \mathrm{id}_C$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, "K^\dagger K"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\tau\Uparrow"] & \\
S \arrow[u, "K"] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
C \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}_C"] & \\
S \arrow[u, "K"] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_K\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}$$

この τ はエピ射である．

∵) $c \in C$ に対して $\tau_c\colon K^\dagger K(c) \to c$ がエピ射であることを示せばよい．そこで $u, v\colon c \to d$ を取り $u \neq v$ とする．$u \circ \tau_c \neq v \circ \tau_c$ を示せばよい．

S が generating set だったから，ある $s \in S$ と $g\colon s \to c$ が存在して $u \circ g \neq v \circ g$ となる．このとき $\langle s, g\rangle \in K{\downarrow}c$ である．このとき

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[dr, "K^\dagger K"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dr, phantom, bend left=20, "\tau\Uparrow"] & \\
K{\downarrow}c \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma\Nwarrow"] & S \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "c"] & C \arrow[dr, bend left, "\mathrm{id}_C"] & \\
K{\downarrow}c \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\sigma\Nwarrow"] & S \arrow[u, "K"'] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_K\Uparrow"] & C
\end{tikzcd}$$

だから，$\langle s, g\rangle$ 成分を考えると $\tau_c \circ K^\dagger K(g) \circ \eta_s = g$ を得る．故に

$$u \circ \tau_c \circ K^\dagger K(g) \circ \eta_s = u \circ g \neq v \circ g = v \circ \tau_c \circ K^\dagger K(g) \circ \eta_s$$

となるから $u \circ \tau_c \neq v \circ \tau_c$ でなければならない．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "F^\dagger(K^\dagger K)"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] \arrow[r, shift left=2, "K^\dagger K"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\varphi"] & C
\end{tikzcd}$$

よって補題 12 により $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在する． □

3　双対版

双対的に，以下の定理も成り立つ．(証明は同様である．)

定義. 圏 C が well-powered $\iff$ C^{op} が well-copowered.

定義. $S \subset \mathrm{Ob}(C)$ が cogenerating set $\iff$ $S \subset \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$ が generating set.

定義. $c \in C$ が cogenerator $\iff$ $c \in C^{\mathrm{op}}$ が generator.

定理 14 (一般随伴関手定理)**.** C, D を圏，D は完備で関手 $G\colon D \to C$ は連続であるとする．更に，任意の $c \in C$ に対してある集合 $S \subset \mathrm{Ob}(c{\downarrow}G)$ が存在して次を満たすとする．(この条件を解集合条件と呼ぶ)

任意の $\langle d, f\rangle \in c{\downarrow}G$ に対してある $\langle s, k\rangle \in S$ と射 $\langle s, k\rangle \to \langle d, f\rangle$ が存在する

$$\begin{tikzcd}
& Gs \arrow[dr, dashed] & \\
c \arrow[ur, "k"] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "k'"'] & & Gd \\
& Gs' &
\end{tikzcd}$$

このとき G は右随伴関手である． □

定理 15 (特殊随伴関手定理)**.** C, D が圏で，D は well-powered かつ完備で，cogenerating set $S \subset \mathrm{Ob}(D)$ を持つとする．このとき関手 $G\colon D \to C$ に対して

$$G \text{ が連続である} \iff G \text{ が右随伴関手である.}$$

□

例 16. **Top** を位相空間と連続写像がなす圏，**CptHaus** $\subset$ **Top** をコンパクト Hausdorff 空間がなす充満部分圏とする．**CptHaus** は well-powered かつ完備であり包含関手 $U\colon \mathbf{CptHaus} \to \mathbf{Top}$ は連続である．閉区間 $[0,1] \in \mathbf{CptHaus}$ は cogenerator である．

$\because$) $f, g\colon X \to Y$ を **CptHaus** の射で $f \neq g$ とする．即ちある $x \in X$ が存在して $f(x) \neq g(x)$ となる．このとき Urysohn の補題により，ある連続写像 $h\colon Y \to [0,1]$ が存在して $$h(f(x)) = 0, \quad h(g(x)) = 1$$ となる．即ち $h \circ f \neq h \circ g$ である．

故に特殊随伴関手定理により U は左随伴関手 $F\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{CptHaus}$ を持つ．$X \in \mathbf{Top}$ に対して $F(X) \in \mathbf{CptHaus}$ を X の Stone-Čech コンパクト化という．□

また，関手の表現可能性について次の定理が分かる．

定理 17. D を完備な圏，$G\colon D \to \mathbf{Set}$ を連続な関手で解集合条件を満たすとする．このとき G は表現可能関手である．

証明． 一般随伴関手定理により G は左随伴関手 $F\colon \mathbf{Set} \to D$ を持つ．このとき $d \in D$ と $1 \in \mathbf{Set}$ に対して $\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$ である．故に G は表現可能関手である．□

定理 18. D は well-powered かつ完備な圏で，cogenerating set $S \subset \mathrm{Ob}(D)$ を持つとする．このとき関手 $G\colon D \to \mathbf{Set}$ に対して以下は同値である．

(1) G が連続である．
(2) G が右随伴関手である．
(3) G が表現可能関手である．

証明． $1 \iff 2$ は特殊随伴関手定理である．

($2 \implies 3$) G の左随伴関手を $F\colon \mathbf{Set} \to D$ とすれば $1 \in \mathbf{Set}$ に対して

$$\mathrm{Hom}_D(F(1), -) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(1, G-) \cong G$$

である．故に G は表現可能関手である．

($3 \implies 1$) 表現可能関手 $\mathrm{Hom}_D(d, -)$ は連続だから明らか．□

定理 19. C を余完備な圏，D を圏とする．$A \subset C$ を小さい稠密部分圏とするとき

関手 $F\colon C \to D$ が余連続である $\Longleftrightarrow$ F が左随伴関手である.

証明. ($\Longleftarrow$) 明らか.

($\Longrightarrow$) 左 Kan 拡張 $F^\dagger \mathrm{id}_C$ が存在することを示せばよい. 包含関手 $K\colon A \to C$ が稠密だから $K^\dagger K \cong \mathrm{id}_C$ である. また A が小圏で C が余完備だから $(FK)^\dagger K$ も存在する.

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[ddr, "(FK)^\dagger K"] & \\
C \arrow[u, "F"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\Uparrow"] & \\
A \arrow[u, "K"] \arrow[r, "K"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_K"] & C
\end{tikzcd}
$$

故に補題 3 より $F^\dagger \mathrm{id}_C$ も存在する. $\square$

参考文献

[1] E. J. Dubuc, Kan Extensions in Enriched Category Theory, Lecture Notes in Mathematics 145 (1970), (Proposition III.2.2, Theorem III.2.2), `https://link.springer.com/book/10.1007/BFb0060485`

[2] nLab, separator, `https://ncatlab.org/nlab/show/separator`