随伴の列と Set

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 5 月 7 日

※ この PDF では局所小とは限らない圏を扱う.

定理 1. $F\colon C \to D$ が関手で C が小圏, D が局所小圏のとき $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv F^\ddagger\colon \widehat{C} \to \widehat{D}$ である. □

$0 \dashv ! \dashv 1\colon \mathbb{1} \to \mathbf{Set}$ だから $0^{-1} \dashv !^{-1} \dashv 1^{-1}\colon \widehat{\mathbf{Set}} \to \widehat{\mathbb{1}} \cong \mathbf{Set}$ が成り立つ. 故に随伴の列 $0^\dagger \dashv 0^{-1} \dashv !^{-1} \dashv 1^{-1} \dashv 1^\ddagger\colon \mathbf{Set} \to \widehat{\mathbf{Set}}$ を得る.

命題 2. 小圏 C の米田埋込を $y\colon C \to \widehat{C}$, $\widehat{C}$ の米田埋込を $z\colon \widehat{C} \to \widehat{\widehat{C}}$ とする. このとき $y^\ddagger \cong z$ である.

証明. $y^{-1} \dashv y^\ddagger\colon \widehat{\widehat{C}} \to \widehat{C}$ だから, $F := y^{-1} \circ z$ とすれば $y^\ddagger \cong F^\dagger z$ である (普遍随伴).

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\widehat{C}} \arrow[dr, shift left=2, "y^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "\perp"] & \\
\widehat{C} \arrow[u, "z"] \arrow[r, "F"'] & \widehat{C} \arrow[ul, shift left=2, "y^{\ddagger}"]
\end{tikzcd}$$

$P \in \widehat{C}$ に対して $F(P) = y^{-1}(z(P)) = z(P) \circ y = \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(y(-), P) \cong P$ だから $F \cong \mathrm{id}$ である. 故に $F^\dagger z(P) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(F-, P) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(\mathrm{id}_{\widehat{C}}(-), P) \cong z(P)$ だから $F^\dagger z \cong z$ である. よって $y^\ddagger \cong F^\dagger z \cong z$ が分かった. □

系 3. 圏 $\mathbf{Set}$ の米田埋込 $y\colon \mathbf{Set} \to \widehat{\mathbf{Set}}$ に対して, 随伴の列 $U \dashv V \dashv W \dashv X \dashv y$ が存在する.

証明. 圏 $\mathbb{0}$ の米田埋込を $z\colon \mathbb{0} \to \widehat{\mathbb{0}} \cong \mathbb{1}$，圏 $\mathbb{1}$ の米田埋込を $w\colon \mathbb{1} \to \widehat{\mathbb{1}} \cong \mathbf{Set}$ とする．随伴 $z^{-1} \dashv z^{\ddagger}\colon \mathbf{Set} \cong \widehat{\mathbb{1}} \to \widehat{\mathbb{0}} \cong \mathbb{1}$ が成り立つから，命題 2 により $z^{-1} \dashv w$ が分かる．ここで $z^{-1} = !\colon \mathbf{Set} \to \mathbb{1}$ だから $w \cong 1\colon \mathbb{1} \to \mathbf{Set}$ である．故に $1^{\ddagger} \cong w^{\ddagger} \cong y$ となり

$$0^{\dagger} \dashv 0^{-1} \dashv !^{-1} \dashv 1^{-1} \dashv 1^{\ddagger} \cong y$$

が分かる． $\square$

この系の性質は実は $\mathbf{Set}$ の特徴付けを与える (系 7)．以下ではそれを説明する．

C を局所小圏として，米田埋込 $y\colon C \to \widehat{C}$ に対して随伴の列 $W \dashv X \dashv y$ が存在するとする．$W \dashv X$ の unit を η，$X \dashv y$ の counit を ε とする．y が忠実充満だから W も忠実充満であり，よって η と ε は自然同型である．今，自然変換 $\sigma\colon W \Rightarrow y$ で

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
& C & \\
{} \arrow[r, phantom, "\overset{\eta}{\Rightarrow}"] & \widehat{C} \arrow[u, "X"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Rightarrow}"] & {} \\
& C \arrow[u, bend left=40, "W"] \arrow[u, bend right=40, "y"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\sigma}{\Rightarrow}"] \arrow[uu, bend left=90, "\mathrm{id}_C"] \arrow[uu, bend right=90, "\mathrm{id}_C"'] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[row sep=huge]
C \\
C \arrow[u, bend left=90, "\mathrm{id}_C"] \arrow[u, bend right=90, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

となるものが一意に存在する．充満部分圏 $A \subset C$ を $\mathrm{Ob}(A) := \{a \in C \mid \sigma_a$ が同型 $\}$ により定義し，$I\colon A \to C$ を包含関手とする．定義より $\sigma_I\colon WI \Rightarrow yI$ は自然同型である．

定理 4. 局所小圏 C の米田埋込を $y\colon C \to \widehat{C}$ とするとき
小圏 A が存在して $C \simeq \widehat{A}$ と書ける
$\iff$ 随伴の列 $W \dashv X \dashv y$ が存在し，上記のように $I\colon A \to C$ を取ると I が稠密で I^{-1} が左随伴を持つ．

証明. ($\Longrightarrow$) 略

($\Longleftarrow$) I^{-1} が左随伴を持つから左 Kan 拡張 $I^{\dagger}$ が存在し $I^{\dagger} \dashv I^{-1}$ である．$F := I^{-1} \circ y$ とすると $I^{\dagger} \dashv I^{-1}$ かつ $X \dashv y$ だから F は左随伴 $X \circ I^{\dagger}$ を持つ．

$$
\begin{tikzcd}
\widehat{A} \arrow[r, shift left, "I^{\dagger}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \widehat{C} \arrow[l, shift left, "I^{-1}"] \arrow[r, shift left, "X"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, shift left, "y"]
\end{tikzcd}
$$

I が忠実充満だから $I^{\dagger}$ も忠実充満であり，よって $I^{-1} \circ I^{\dagger} \cong \mathrm{id}$ である．今 I が稠密だから $F \cong \mathrm{Hom}_A(I-, \Box)$ は忠実充満である．従って F が本質的全射であることを示せばよ

い．そのために任意の $P \in \widehat{A}$ に対して $c := X(I^\dagger P)$ とすると

$$\begin{aligned} F(c) &\cong \mathrm{Hom}_C(I-, c) = \mathrm{Hom}_C(I-, X(I^\dagger P)) \cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(WI-, I^\dagger P) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\widehat{C}}(yI-, I^\dagger P) \cong I^\dagger P(I-) = (I^{-1} \circ I^\dagger)(P) \\ &\cong P \end{aligned}$$

となるから F は本質的全射である． □

定理 5. 局所小圏 C の米田埋込を $y\colon C \to \widehat{C}$ とするとき
余完備順序集合 A が存在して $C \simeq \widehat{A}$ と書ける $\iff$ 随伴の列 $V \dashv W \dashv X \dashv y$ が存在する．

証明. ($\Longrightarrow$) A を余完備順序集合として $z\colon A \to \widehat{A}$ を米田埋込とすると z は左随伴 F を持つ．よって $F^\dagger \dashv F^{-1} \dashv z^{-1} \dashv z^\ddagger \cong y$ である．

($\Longleftarrow$) 上記のように $I\colon A \to C$ と $\sigma\colon W \Rightarrow y$ を取る．$T := Vy\colon C \to C$ とすると σ_T は自然同型である．よって $H\colon C \to A$ を $Hc := Tc$ で定義できる．このとき $H \dashv I$ である．故に $H^{-1} \dashv I^{-1}$ である．また I は稠密である．故に定理 4 (の証明) により A は小圏で $C \simeq \widehat{A}$ が分かる．また A は余完備であることが分かる．故に A は順序集合である． □

定理 6. 局所小圏 C の米田埋込を $y\colon C \to \widehat{C}$ とするとき

$C \simeq \mathbf{Set} \iff$ 随伴の列 $V \dashv W \dashv X \dashv y$ が存在し，V が pullback と交換する．

証明. ($\Longrightarrow$) 系 3 と右随伴が pullback と交換することから明らか.

($\Longleftarrow$) 定理 5 (の証明) により，順序集合 A を使って $C \simeq \widehat{A}$ と書けるが，このとき A が Grothendieck トポスであることが分かる．すると射 $1 \to \Omega$ が 1 つしか無いから $\mathrm{true} = \mathrm{false}\colon 1 \to \Omega$ である．故に $A \cong \mathbb{1}$ であり $C \simeq \mathbf{Set}$ が分かる． □

系 7. 局所小圏 C の米田埋込を $y\colon C \to \widehat{C}$ とするとき

$C \simeq \mathbf{Set} \iff$ 随伴の列 $U \dashv V \dashv W \dashv X \dashv y$ が存在する．

証明. 右随伴 V が pullback と交換するから明らか. □

参考文献

[1] R. Rosebrugh and R. J. Wood, an Adjoint Characterization of the Category of Sets, Proceedings of the American Mathematical Society vol. 122 No. 2 (1994), 409–413