随伴関手

alg-d
https://alg-d.com/math/kan_extension/

2025 年 1 月 11 日

目次

1 基本的性質 1

2 図式による定義 14

3 冪等随伴 22

4 Cartesian 閉圏 26

5 随伴の例 33

1 基本的性質

定義. C, D を圏，$F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ を関手とする．$c \in C$，$d \in D$ について自然な全単射 $\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ が存在するとき，3 つ組 $\langle F, G, \varphi\rangle$ のことを随伴 (adjunction) という．このとき記号では $F \dashv G\colon C \to D$ もしくは単に $F \dashv G$ と書く．また F を G の左随伴関手 (left adjoint functor)，G を F の右随伴関手 (right adjoint functor) という．

$F \dashv G\colon C \to D$ とすると，自然同型 φ により次のような 2 つの射が 1 対 1 に対応するという事になる．

$$f\colon Fc \to d \qquad g\colon c \to Gd$$

$\varphi_{cd}(f) = g$ のとき，g を f の右随伴射 (right adjunct)，f を g の左随伴射 (left adjunct)

と呼ぶ．この PDF では随伴射を $\widetilde{\ }$ をつけて表すことにする．つまり $f\colon Fc \to d$, $g\colon c \to Gd$ のとき $\widetilde{f}\colon c \to Gd$，$\widetilde{g}\colon Fc \to d$ であり，$\varphi_{cd}(f) = \widetilde{f}$，$\varphi_{cd}(\widetilde{g}) = g$ となる．

今 $q\colon d \to d'$ を D の射とすると，φ_{cd} の自然性から次の図式が可換となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "q\circ -"'] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \arrow[d, "Gq\circ -"] \\
\mathrm{Hom}_D(Fc, d') \arrow[r, "\varphi_{cd'}"'] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd')
\end{tikzcd}
$$

よって $f \in \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ として $g := q \circ f$ と置くと f の行き先を見れば $\widetilde{g} = Gq \circ \widetilde{f}$ が分かる．

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "q\circ -"'] & \widetilde{f} \arrow[d, mapsto, "Gq\circ -"] \\
g \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"'] & \widetilde{g} \ = \ Gq \circ \widetilde{f}
\end{tikzcd}
$$

つまり，次の図式の (0) が可換であれば，(1) も可換になる．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & d \arrow[d, "q"] \arrow[dl, phantom, "(0)" near start] \\
& d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "\widetilde{g}"'] & Gd \arrow[d, "Gq"] \arrow[dl, phantom, "(1)" near start] \\
& Gd'
\end{tikzcd}
$$

逆に，(1) が可換であるとする (即ち，$f\colon Fc \to d$，$g\colon Fc \to d'$，$q\colon d \to d'$ が $Gq \circ \widetilde{f} = \widetilde{g}$ を満たすとする)．このとき先程と同様にして

$$
\begin{tikzcd}
f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "q\circ -"'] & \widetilde{f} \arrow[d, mapsto, "Gq\circ -"] \\
q \circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"] & Gq \circ \widetilde{f} \arrow[d, equal] \\
g \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"] & \widetilde{g}
\end{tikzcd}
$$

となるが，$\varphi_{cd'}$ は全単射だから $g = q \circ f$ が分かる．即ち，(0) が可換となる．

同様のことが次の図式にも成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[d, "Fp"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dr, phantom, "(2)" near start, shift right=3ex] & \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}"] \arrow[dr, phantom, "(3)" near start, shift right=3ex] & \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd'
\end{tikzcd}
$$

即ち，(2) が可換であれば (3) も可換であるし，逆に (3) が可換であれば (2) も可換となる．

この 2 つを合わせて次の命題を得る．

命題 1. $f\colon Fc \to d$, $h\colon Fc' \to d'$, $p\colon c \to c'$, $q\colon d \to d'$ とする．このとき，次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり，右の図式が可換ならば左の図式も可換である[*1]．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"'] & d \arrow[d, "q"] \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & Gd \arrow[d, "Gq"] \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd'
\end{tikzcd}
$$

□

同じような形の命題で，次の命題も成り立つ．

命題 2. $f\colon Fc \to d$, $h\colon Fc' \to d'$, $p\colon c \to c'$, $q\colon d' \to d$ とする．このとき，次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり，右の図式が可換ならば左の図式も可換である

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"'] & d \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d' \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & Gd \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd' \arrow[u, "Gq"']
\end{tikzcd}
$$

証明. $k := h \circ Fp$ と置く．すると次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
Fc \arrow[r, "f"] \arrow[d, "Fp"'] \arrow[dr, "k"] \arrow[dr, phantom, "(0)" near end, shift right=3ex] & d \arrow[dl, phantom, "(1)" near end, shift left=3ex] \\
Fc' \arrow[r, "h"'] & d' \arrow[u, "q"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\widetilde{k}"] \arrow[dr, phantom, "(2)" near end, shift right=3ex] & Gd \arrow[dl, phantom, "(3)" near end, shift left=3ex] \\
c' \arrow[r, "\widetilde{h}"'] & Gd' \arrow[u, "Gq"']
\end{tikzcd}
$$

(0) は定義から可換なので，(2) も可換である．よって「(1) が可換 $\Longleftrightarrow$ (3) が可換」より命題が成り立つ． □

$F \dashv G$ のとき全単射 $\varphi_{cd}\colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ は d について自然である．よって自然変換 $\mathrm{Hom}_D(Fc, -) \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(c, G(-))$ が得られる．この自然変換に米田の補

[*1] 感覚的に言えば，図式の可換性を考えるときには，左側にある F を右側の G へと変えてよい，ということになる

題を適用して得られる $\mathrm{Hom}_C(c, GFc)$ の元を η_c と書く．米田の補題の証明を思い出すと η_c は次のようにして得られる．全単射 φ_{cd} で $d = Fc$ として得られる全単射

$$\mathrm{Hom}_D(Fc, Fc) \cong \mathrm{Hom}_C(c, GFc)$$

で左辺の id_{Fc} に対応する，右辺の元が $\eta_c \in \mathrm{Hom}_C(c, GFc)$ である (つまり上で定義した記法を使えば $\eta_c := \widetilde{\mathrm{id}_{Fc}}$ となる)．この η_c は次のような普遍性を持つ．

定理 3. $F \dashv G \colon C \to D$ を随伴とする．$c \in C$ に対して上のように $\eta_c \colon c \to GFc$ を取ると，$\langle Fc, \eta_c \rangle$ は c から G への普遍射である．

証明. 任意の $g \colon c \to Gd$ を取る．$h \colon Fc \to d$ が一意に存在して $Gh \circ \eta_c = g$ となることを示す．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "g"'] & GFc \arrow[d, dashed, "Gh"] & Fc \arrow[d, dashed, "h"] \\ & Gd & d \end{tikzcd}$$

まず次の左の図式が可換だから，命題 1 の前で説明した通り，右の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fc}"] \arrow[dr, "\widetilde{g}"'] & Fc \arrow[d, "\widetilde{g}"] \\ & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "g"'] & GFc \arrow[d, "G\widetilde{g}"] \\ & Gd \end{tikzcd}$$

よって $G\widetilde{g} \circ \eta_c = g$ であるから，上記の h が存在することが分かる．

h の一意性を示すため，$h \colon Fc \to d$ が $Gh \circ \eta_c = g$ を満たすとする．即ち次の右の図式が可換である．ゆえに左の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd} Fc \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fc}"] \arrow[dr, "\widetilde{g}"'] & Fc \arrow[d, "h"] \\ & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "g"'] & GFc \arrow[d, "Gh"] \\ & Gd \end{tikzcd}$$

よって $h = \widetilde{g}$ となり，h の一意性が分かった． □

※ 「極限」の PDF によれば

$$c \text{ から } G \text{ への普遍射が存在する} \iff \mathrm{Hom}_C(c, G(-)) \text{ が表現可能関手} \tag{4}$$

であった．これの証明を追うことでも $\eta_c \colon c \to GFc$ が普遍射であることが分かる．

系 5. 全単射 $\mathrm{Hom}_D(Fc,d)\to\mathrm{Hom}_C(c,Gd)$ は $f\mapsto Gf\circ\eta_c$ で与えられる．

証明. 定理 3 の証明で見たように $G\widetilde{g}\circ\eta_c=g$ であることから分かる． □

実は，ある意味で定理 3 の逆も成り立つ．

定理 6. $G\colon D\to C$ を関手として，各 $c\in C$ に対して普遍射 $\eta_c\colon c\to Gd_c$ が存在するとする．このとき対応 $c\mapsto d_c$ は関手 $F\colon C\to D$ を定め，$F\dashv G$ となる．

証明. まず関手 $F\colon C\to D$ を定義する．$c\in C$ に対する普遍射 $\eta_c\colon c\to Gd_c$ を使って $Fc:=d_c$ と定める．射 $p\colon c\to c'$ に対して射 $Fp\colon Fc\to Fc'$ を，$\eta_c\colon c\to GFc$ の普遍性から一意に定まる射とする．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p"'] & GFc \arrow[d, dashed, "GFp"] & Fc \arrow[d, dashed, "Fp"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc' & Fc' \end{tikzcd}$$

この F が関手 $F\colon C\to D$ を定めることは η_c の普遍性から容易に分かる．またこの図式の可換性は $\eta\colon\mathrm{id}_C\Rightarrow GF$ が自然変換であることを意味していることに注意しておく．

$F\dashv G$ を示す．$c\in C$，$d\in D$ に対して写像 $\varphi_{cd}\colon\mathrm{Hom}_D(Fc,d)\to\mathrm{Hom}_C(c,Gd)$ を $\varphi_{cd}(f):=Gf\circ\eta_c$ で定める．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\varphi_{cd}(f)"'] & GFc \arrow[d, "Gf"] & Fc \arrow[d, "f"] \\ & Gd & d \end{tikzcd}$$

この φ は自然変換である．

$\because$) まず c に関する自然性，即ち $p\colon c\to c'$ に対する次の可換性を示す．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] & \mathrm{Hom}_C(c,Gd) \\ \mathrm{Hom}_D(Fc',d) \arrow[u, "-\circ Fp"] \arrow[r, "\varphi_{c'd}"'] & \mathrm{Hom}_C(c',Gd) \arrow[u, "-\circ p"'] \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} f\circ Fp \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] & G(f\circ Fp)\circ\eta_c \\ & Gf\circ\eta_{c'}\circ p \\ f \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fp"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{c'd}"'] & Gf\circ\eta_{c'} \arrow[u, mapsto, "-\circ p"'] \end{tikzcd}$$

即ち $\eta_{c'} \circ p = GFp \circ \eta_c$ を示せばよいが，これは Fp の定義

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p"'] & GFc \arrow[d, dashed, "GFp"] & Fc \arrow[d, dashed, "Fp"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc' & Fc' \end{tikzcd}$$

により明らか．次に d に関する自然性，即ち $q\colon d \to d'$ に対する次の可換性であるが，それは φ の定義から明らか．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(Fc,d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, "q\circ-"'] & \mathrm{Hom}_C(c,Gd) \arrow[d, "Gq\circ-"] \\ \mathrm{Hom}_D(Fc,d') \arrow[r, "\varphi_{cd'}"'] & \mathrm{Hom}_C(c,Gd') \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] \arrow[d, mapsto, "q\circ-"'] & Gf\circ\eta_c \arrow[d, mapsto, "Gq\circ-"] \\ q\circ f \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd'}"'] & Gq\circ Gf\circ\eta_c \end{tikzcd}$$

普遍射の普遍性から，各 φ_{cd} が全単射であることが容易に分かる．故に c, d に関して自然な全単射 $\mathrm{Hom}_D(Fc,d) \cong \mathrm{Hom}_C(c,Gd)$ が存在する．よって $F \dashv G$ である． □

※ 上で注意した (4) を使えば

$$G \text{ が左随伴を持つ} \iff \text{各 } c \in C \text{ に対して } \mathrm{Hom}_C(c, G(-)) \text{ が表現可能}$$

も分かる．

定理 6 の証明中に注意した通り，随伴 $F \dashv G$ から得られる射 $\eta_c\colon c \to GFc$ は自然変換 $\eta\colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$ を定める．この η を $F \dashv G$ の unit と呼ぶ．

定理 7. $G\colon D \to C$ の左随伴関手は，存在するならば (自然同型を除いて) 一意である．即ち，$F \dashv G\colon C \to D$ かつ $F' \dashv G\colon C \to D$ ならば自然同型 $F \cong F'$ が存在する．

証明. $F \dashv G$ かつ $F' \dashv G$ とすれば，それぞれの unit を η, η' としたときに $\eta_c\colon c \to GFc$ と $\eta'_c\colon c \to GF'c$ が普遍射となる．そこで普遍性によって次の図式により得られる射を $\theta_c\colon Fc \to F'c$ とすれば，これは同型射である．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\eta'_c"'] & GFc \arrow[d, dashed, "G\theta_c"] & Fc \arrow[d, dashed, "\theta_c"] \\ & GF'c & F'c \end{tikzcd}$$

この θ_c が c について自然であることを示せばよい．そのためには $f\colon b \to c$ に対して，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Fb \arrow[r, "\theta_b"] \arrow[d, "Ff"'] & F'b \arrow[d, "F'f"] \\
Fc \arrow[r, "\theta_c"'] & F'c
\end{tikzcd}$$

η が自然変換であることと，θ_c の定義から次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & GFb \arrow[d, "GFf"] \\
b \arrow[ur, "\eta_b"] \arrow[d, "f"'] & \\
 & GFc \arrow[d, "G\theta_c"] \\
c \arrow[ur, "\eta_c"] \arrow[dr, "\eta'_c"'] & \\
 & GF'c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & GFb \arrow[d, "G\theta_b"] \\
b \arrow[ur, "\eta_b"] \arrow[r, "\eta'_b"'] \arrow[d, "f"'] & GF'b \arrow[d, "GF'f"] \\
c \arrow[r, "\eta'_c"'] & GF'c
\end{tikzcd}$$

よって η_b の普遍性により $\theta_c \circ Ff = F'f \circ \theta_b$ である． □

定理 8. 左随伴関手は任意の余極限と交換する．即ち $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手として，関手 $T\colon J \to C$ の余極限 $\operatorname{colim} T$ が存在するとするとき，F は $\operatorname{colim} T$ と交換する．

証明. $\langle c, \mu \rangle$ が $T\colon J \to C$ の余極限であるとする．

$$\begin{tikzcd}
Ti \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[dd, "Tf"'] & \\
 & c \\
Tj \arrow[ur, "\mu_j"'] &
\end{tikzcd}$$

これを F で送った $\langle Fc, F\mu \rangle$ が FT の余極限であることを示せばよい．そのために任意の自然変換 $\theta\colon FT \Rightarrow \Delta d$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
FTi \arrow[dr, "F\mu_i"] \arrow[dd, "FTf"'] \arrow[drr, bend left, "\theta_i"] & & \\
 & Fc & d \\
FTj \arrow[ur, "F\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

この図式の一番外側の三角形に対して命題 1 を使えば，次の図式の一番外側の三角形は可換である．

$$\begin{tikzcd}
Ti \arrow[d, "Tf"'] \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\widetilde{\theta}_i"] & & \\
& c \arrow[r, dashed, "h"] & Gd \\
Tj \arrow[ur, "\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\widetilde{\theta}_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

よって余極限 $\langle c, \mu \rangle$ の普遍性により点線の射 $h\colon c \to Gd$ が一意に存在して可換となる．再び命題 1 により

$$\begin{tikzcd}
FTi \arrow[d, "FTf"'] \arrow[dr, "F\mu_i"] \arrow[drr, bend left, "\theta_i"] & & \\
& Fc \arrow[r, "\widetilde{h}"] & d \\
FTj \arrow[ur, "F\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

が可換となる．あとはこの $\widetilde{h}$ の一意性を示せばよいが，それは h の一意性から明らかである． $\square$

ここで左随伴と右随伴は次の命題の意味で双対である．

命題 9. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴とするとき $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}\colon D^{\mathrm{op}} \to C^{\mathrm{op}}$ となる．

証明. $d \in D$，$c \in C$ について自然に

$$\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(Gd, c) = \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \cong \mathrm{Hom}_D(Fc, d) = \mathrm{Hom}_{D^{\mathrm{op}}}(d, Fc). \qquad \square$$

この随伴 $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$ に対して以上の議論を適用することで次の定理を得る．

定理 10. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴として $d \in D$ とする．$\varepsilon_d := \widetilde{\mathrm{id}_{Gd}}\colon FGd \to d$ とすれば $\langle Gd, \varepsilon_d \rangle$ は F から d への普遍射であり，全単射 $\mathrm{Hom}_C(c, Gd) \to \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ は $g \mapsto \varepsilon_d \circ Fg$ により与えられる．

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "g"'] & Fc \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\widetilde{g}"] & \\
Gd & FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}$$

また ε は自然変換 $FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ となる．（これを counit と呼ぶ．）

逆に $F\colon C \to D$ を関手として，各 $d \in D$ に対して普遍射 $\varepsilon_c\colon Fc_d \to d$ が存在すれば F は右随伴関手 G を持つ．また右随伴は一意的であり，更に右随伴関手は任意の極限と交換する． $\square$

例 11. J, C を圏，$\Delta\colon C \to C^J$ を対角関手とする．$T \in C^J$ の余極限とは T から Δ への普遍射のことであった．故に任意の $T \in C^J$ に対して余極限 $\langle \operatorname{colim} T, \mu\rangle$ が存在するならば，$T \mapsto \operatorname{colim} T$ は Δ の左随伴関手を与える．つまりこの関手を $\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ と書けば $T \in C^J$ と $c \in C$ について自然な全単射

$$\operatorname{Hom}_C(\operatorname{colim} T, c) \cong \operatorname{Hom}_{C^J}(T, \Delta c)$$

が成り立つ．この全単射は，余極限の普遍性による対応 (次の図式での $\theta \mapsto h$) により与えられるものである．

$$\begin{tikzcd}
Ti \arrow[dr, "\mu_i"] \arrow[dd, "Tf"'] \arrow[drr, bend left, "\theta_i"] & & \\
& \operatorname{colim} T \arrow[r, dashed, "h"] & c \\
Tj \arrow[ur, "\mu_j"'] \arrow[urr, bend right, "\theta_j"'] & &
\end{tikzcd}$$

また随伴 $\operatorname{colim} \dashv \Delta$ の unit $\eta\colon \mathrm{id}_{C^J} \Rightarrow \Delta \operatorname{colim}$ は $\eta_T = \mu\colon T \Rightarrow \Delta(\operatorname{colim} T)$ で与えられる自然変換である．

定理 8 によれば関手 $\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ は余極限と交換する．即ち I を圏，$T\colon I \to C^J$ を関手として余極限 $\langle \operatorname{colim} T, \mu\rangle$ が存在するならば $\langle \operatorname{colim}(\operatorname{colim} T), \operatorname{colim}(\mu)\rangle$ は関手 $\operatorname{colim} \circ T\colon I \to C$ の余極限である．T を関手 $I \times J \to C$ と見なしたものを $\widetilde{T}$ とすれば $\operatorname{colim} T = \operatorname{colim}_i Ti = \operatorname{colim}_i \widetilde{T}(i, -)$ であった．よって $\operatorname{colim}(\operatorname{colim} T)$ というのは $\operatorname{colim}_j \operatorname{colim}_i \widetilde{T}(i, j)$ を意味する．一方 $\operatorname{colim} \circ T$ の余極限とは $\operatorname{colim}_i \operatorname{colim}_j \widetilde{T}(i, j)$ の意味である．従って $\operatorname{colim}\colon C^J \to C$ が余極限と交換するというのは「極限」の PDF で示した

$$\operatorname{colim}_i \operatorname{colim}_j \widetilde{T}(i, j) \cong \operatorname{colim}_j \operatorname{colim}_i \widetilde{T}(i, j)$$

ということである．

双対を考えれば極限についても同様のことが分かる．特に任意の $T \in C^J$ に対して極限 $\lim T \in C$ が存在するならば $\lim\colon C^J \to C$ は Δ の右随伴関手である． $\square$

例 12. $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．集合 X で生成される自由アーベル群を FX として標準的な包含写像を $i\colon X \to U(FX)$ とする．このとき，任意のアーベル群 A と写

像 $f\colon X \to U(A)$ に対して，準同型写像 $g\colon FX \to A$ が一意に存在して $Ug \circ i = f$ となることが知られている．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & U(FX) \arrow[d, dashed, "Ug"] & FX \arrow[d, dashed, "g"] \\ & U(A) & A \end{tikzcd}$$

即ち $\langle FX, i\rangle$ は $X \in \mathbf{Set}$ から U への普遍射である．故に $X \mapsto FX$ は U の左随伴関手となる．即ち $X \in \mathbf{Set}$ と $G \in \mathbf{Ab}$ について自然に $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(FX, G) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(X, UG)$ である．このような，忘却関手の左随伴関手を自由関手 (free functor) と呼ぶ．この随伴 $F \dashv U\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Ab}$ に対して定理 8 (の双対) を適用すれば，U は極限と交換することが分かる．特に直積と交換するので，$A, B \in \mathbf{Ab}$ に対して $U(A \times B) \cong U(A) \times U(B)$ である．即ち，A と B の (圏 $\mathbf{Ab}$ における) 直積は，集合 $U(A) \times U(B)$ にアーベル群の構造を入れたものになる．一方で，A と B の余直積も $A \times B$ になることが知られている．つまり一般には $U(A \amalg B) \cong U(A) \amalg U(B)$ は成立せず，U は余直積と交換しない．故に U は右随伴を持たないことが分かる． $\square$

例 13. $U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とすると，この場合は U は左随伴も右随伴も持つことが分かる．実際，関手 $F, G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ を $X \in \mathbf{Set}$ に対して

- FX を「X に離散位相を入れた空間」とする．
- GX を「X に密着位相を入れた空間」とする．

により定義すれば $F \dashv U \dashv G$ となることが分かる．故に定理 8 (とその双対) より，この場合は $X, Y \in \mathbf{Top}$ に対して

$$U(X \amalg Y) \cong U(X) \amalg U(Y), \quad U(X \times Y) \cong U(X) \times U(Y)$$

となることが分かる． $\square$

定義. $f\colon a \to b$ を圏 C の射とする．

(1) f が分裂エピ射 (split epimorphism)
$\iff$ ある $g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．

(2) f が分裂モノ射 (split monomorphism)
$\iff$ ある $g\colon b \to a$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_a$ となる．

命題 14. 分裂エピ射はエピ射であり，分裂モノ射はモノ射である．

証明. 双対を考えればよいので分裂エピ射がエピ射であることを示せばよい.

$f\colon a \to b$ を分裂エピ射とする．つまりある $g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．今 $h, k\colon b \to c$ が $h \circ f = k \circ f$ を満たすとすると

$$h = h \circ \mathrm{id}_b = h \circ f \circ g = k \circ f \circ g = k \circ \mathrm{id}_b = k$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] & b \arrow[l, shift left, "g"] \arrow[r, shift left, "h"] \arrow[r, shift right, "k"'] & c \end{tikzcd}$$

である. □

命題 15. モノ射かつ分裂エピ射ならば同型射である.

証明. $f\colon a \to b$ がモノ射かつ分裂エピ射であるとする．f が分裂エピ射だから，$g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．よって $f \circ g \circ f = \mathrm{id}_b \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_a$ である．今 f がモノ射だから $g \circ f = \mathrm{id}_a$ となり，f が同型射であることが分かった. □

双対を考えれば「エピ射かつ分裂モノ射ならば同型射」も分かる.

命題 16. $F\colon C \to D$ を関手，$f\colon a \to b$ を C の射とする.

(1) f が分裂エピ射ならば，Ff も分裂エピ射である.
(2) F が忠実充満の場合，Ff が分裂エピ射ならば，f も分裂エピ射である.

証明. (1) f が分裂エピ射だとする．つまりある $g\colon b \to a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．このとき $Ff \circ Fg = \mathrm{id}_{Fb}$ だから Ff も分裂エピ射である.

(2) Ff が分裂エピ射だとする．即ちある $h\colon Fb \to Fa$ が存在して $Ff \circ h = \mathrm{id}_{Fb}$ となる．今 F が充満だから，ある $g\colon b \to a$ が存在して $Fg = h$ となる．このとき $F(f \circ g) = Ff \circ Fg = Ff \circ h = \mathrm{id}_{Fb}$ である．今 F が忠実だから $f \circ g = \mathrm{id}_b$ が分かり，f は分裂エピ射である. □

補題 17. C を圏，$f\colon a \to b$ を C の射とするとき

(1) f が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ がエピ射.
(2) f がモノ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ がモノ射.
(3) f が分裂モノ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ が分裂モノ射.

証明. 自然変換 $y(f)\colon \mathrm{Hom}_C(-, a) \Rightarrow \mathrm{Hom}_C(-, b)$ は対象 $x \in C$ に対して

$$y(f)_x\colon \mathrm{Hom}_C(x, a) \ni g \mapsto f \circ g \in \mathrm{Hom}_C(x, b)$$

で与えられるのであった．また，$\widehat{C}$ の射がエピ射 (モノ射) となるのは，全ての成分がエピ射 (モノ射) となるときであった (「極限」の PDF を参照)．

(1) 米田埋込 y が忠実充満 (米田の補題) だから，「f が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ が分裂エピ射」は命題 16 より分かるので「f が分裂エピ射 $\Longleftrightarrow$ $y(f)$ がエピ射」を示せばよい．

f が分裂エピ射，即ち $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる $g\colon b \to a$ が存在するとする．各対象 $x \in C$ に対して $y(f)_x\colon \mathrm{Hom}_C(x,a) \to \mathrm{Hom}_C(x,b)$ が全射になることを示せばよい．それは $h \in \mathrm{Hom}_C(x,b)$ に対して $y(f)_x(g \circ h) = f \circ g \circ h = \mathrm{id}_b \circ h = h$ となるから分かる．

逆に $y(f)$ がエピ射とする．このとき $y(f)_b\colon \mathrm{Hom}_C(b,a) \to \mathrm{Hom}_C(b,b)$ はエピ，即ち全射である．よって $g \in \mathrm{Hom}_C(b,a)$ で $y(f)_b(g) = \mathrm{id}_b$ となるものが存在する．このとき $\mathrm{id}_b = y(f)_b(g) = f \circ g$ である．よって f が分裂エピ射となることが分かった．

(2) $x \in C$ に対して

$$
\begin{aligned}
y(f)_x \text{ が単射} &\Longleftrightarrow g,h \in \mathrm{Hom}_C(x,a) \text{ が } y(f)_x(g) = y(f)_x(h) \text{ を} \\
&\qquad \text{満たすならば } g = h \text{ である} \\
&\Longleftrightarrow g,h \in \mathrm{Hom}_C(x,a) \text{ が } f \circ g = f \circ h \text{ を} \\
&\qquad \text{満たすならば } g = h \text{ である}
\end{aligned}
$$

だから「$y(f)$ がモノ射 $\Longleftrightarrow$ f がモノ射」である．

(3) 米田埋込が忠実充満だから命題 16 の双対より分かる． □

定理 18. 随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ の unit を η，counit を ε とする．

(1) F が忠実 $\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in C$ に対して η_c がモノ射．
(2) F が充満 $\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in C$ に対して η_c が分裂エピ射．
(3) F が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in C$ に対して η_c が同型射．
(4) G が忠実 $\Longleftrightarrow$ 任意の $d \in D$ に対して ε_d がエピ射．
(5) G が充満 $\Longleftrightarrow$ 任意の $d \in D$ に対して ε_d が分裂モノ射．
(6) G が忠実充満 $\Longleftrightarrow$ 任意の $d \in D$ に対して ε_d が同型射．

証明． $y(\eta_c)_b = (\eta_c \circ -)$ は合成 $\mathrm{Hom}_C(b,c) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_D(Fb,Fc) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_C(b,GFc)$ と一致する．

∵) 合成 $\mathrm{Hom}(b,c) \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}(Fb,Fc) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(b,GFc)$ は系 5 より

$$f \mapsto Ff \mapsto GFf \circ \eta_b$$

で与えられる．η の自然性から

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "\eta_b"] \arrow[d, "f"'] & GFb \arrow[d, "GFf"] \\ c \arrow[r, "\eta_c"'] & GFc \end{tikzcd}$$

が可換だから，$f \mapsto GFf \circ \eta_b$ は $f \mapsto \eta_c \circ f$ と一致する．

よって補題 17 を使えば

$$\begin{aligned} F\text{ が忠実} &\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } F\colon \mathrm{Hom}(b,c) \to \mathrm{Hom}(Fb,Fc) \text{ が単射} \\ &\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } y(\eta_c)_b \text{ が単射} \\ &\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } y(\eta_c) \text{ がモノ射} \\ &\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } \eta_c \text{ がモノ射} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F\text{ が充満} &\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } F\colon \mathrm{Hom}(b,c) \to \mathrm{Hom}(Fb,Fc) \text{ が全射} \\ &\iff \text{任意の } b, c \in C \text{ に対して } y(\eta_c)_b \text{ が全射} \\ &\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } y(\eta_c) \text{ がエピ射} \\ &\iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } \eta_c \text{ が分裂エピ射} \end{aligned}$$

であるから F についての証明が終わった．G については，命題 9 より $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$ だから，この $G^{\mathrm{op}} \dashv F^{\mathrm{op}}$ に対して上記の議論を当てはめれば分かる． □

定理 19. $F, H\colon C \to D$，$G\colon D \to C$ で $F \dashv G \dashv H$ とする．このとき

$$F\text{ が忠実充満} \iff H\text{ が忠実充満}.$$

証明. $F \dashv G$ の unit を η，$G \dashv H$ の counit を ε とする．$b, c \in C$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(Fb, Hc) \arrow[r, "G"] & \mathrm{Hom}_C(GFb, GHc) \arrow[r, "\varepsilon_c \circ -"] \arrow[d, "- \circ \eta_b"'] & \mathrm{Hom}_C(GFb, c) \arrow[d, "- \circ \eta_b"] \\ & \mathrm{Hom}_C(b, GHc) \arrow[r, "\varepsilon_c \circ -"'] & \mathrm{Hom}_C(b, c) \end{tikzcd}$$

ここで系 5 (とその双対) を使えば次の可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_D(Fb, Hc) \arrow[rr, "G \dashv H \text{ による同型}"] \arrow[dr, "F \dashv G \text{ による同型}"'] & & \mathrm{Hom}_C(GFb, c) \arrow[d, "- \circ \eta_b"] \\
& \mathrm{Hom}_C(b, GHc) \arrow[r, "\varepsilon_c \circ -"'] & \mathrm{Hom}_C(b, c)
\end{tikzcd}$$

故に

$$\text{任意の } c \in C \text{ に対して } \eta_c \text{ が同型} \iff \text{任意の } c \in C \text{ に対して } \varepsilon_c \text{ が同型}$$

が分かる．よって定理 18 を使えば

$$F \text{ が忠実充満} \iff H \text{ が忠実充満}$$

となる． □

2 図式による定義

$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴関手とすると，unit と呼ばれる自然変換 $\eta\colon \mathrm{id} \Rightarrow GF$ と counit と呼ばれる自然変換 $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ が得られるのであった．これらを図式で表すと次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}$$

従ってこの自然変換の合成を考えることができる (「自然変換・関手圏」の PDF を参照)．この合成は記号で書けば $G\varepsilon \circ \eta_G\colon G \Rightarrow G$ である．合成の定義より，この自然変換の成分は $d \in D$ に対して $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd}\colon Gd \to Gd$ となる．

定理 20. 合成 $G\varepsilon \circ \eta_G\colon G \Rightarrow G$ は $\mathrm{id}_G\colon G \Rightarrow G$ に等しい．つまり図式で描けば，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & C
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
& C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & & C
\end{tikzcd}$$

証明. 両辺の成分が一致することを示せばよい．即ち $d \in D$ に対して $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}_{Gd}$ を示せばよいが, 系 5 より $Gf \circ \eta_c = \widetilde{f}$ だったから, f として ε_d を取れば $G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}_{Gd}$ を得る． □

双対的に，$\varepsilon_F \circ F\eta \colon F \Rightarrow F$ は $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$ に等しいことも分かる[*2].

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\varepsilon\Uparrow"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow"] & & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] & & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

実は，これもある意味で逆が成り立つ．

定理 21. $F \colon C \to D$，$G \colon D \to C$ を関手，$\eta \colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$，$\varepsilon \colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を自然変換とするとき，等式

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
 & C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & C \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\eta"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & & D \arrow[dr, "G"] & \\
 & C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G"] & & C
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[dr, phantom, shift left=3ex, "\varepsilon\Uparrow"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[r, phantom, "\eta\Uparrow"] & & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] & & C \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

が成り立つならば $F \dashv G$ である．

証明. $c \in C$，$d \in D$ を取る．$\varphi_{cd} \colon \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \to \mathrm{Hom}_C(c, Gd)$ を $\varphi_{cd}(f) := Gf \circ \eta_c$ で定める．また，$\psi_{cd} \colon \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \to \mathrm{Hom}_D(Fc, d)$ を $\psi_{cd}(g) := \varepsilon_d \circ Fg$ で定める．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[dr, "\varphi_{cd}(f)"'] & GFc \arrow[d, "Gf"] & Fc \arrow[d, "f"] \\
 & Gd & d
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "g"'] & Fc \arrow[d, "Fg"'] \arrow[dr, "\psi_{cd}(g)"] & \\
Gd & FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

この φ_{cd}, ψ_{cd} は互いに逆写像である．

[*2] これらの等式を三角恒等式 (triangular identities) と呼ぶ.

$\because$) $f\colon Fc \to d$ とすると，$\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ が自然変換だから次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd} FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"] \arrow[d, "FGf"'] & Fc \arrow[d, "f"] \\ FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d \end{tikzcd}$$

即ち $\varepsilon_d \circ FGf = f \circ \varepsilon_{Fc}$ となる．仮定により $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ だったから，φ, ψ の定義により

$$\begin{aligned} \psi_{cd} \circ \varphi_{cd}(f) &= \psi_{cd}(Gf \circ \eta_c) \\ &= \varepsilon_d \circ F(Gf \circ \eta_c) \\ &= \varepsilon_d \circ FGf \circ F\eta_c \\ &= f \circ \varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c \\ &= f \end{aligned}$$

である．故に $\psi_{cd} \circ \varphi_{cd} = \mathrm{id}$ となる．同様にして $\varphi_{cd} \circ \psi_{cd} = \mathrm{id}$ も成り立つことが分かる．

故に後は φ が自然変換であることを示せばよい．

c について自然であることを示すため，$p\colon c \to c'$ を C の射とする．次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_D(Fc, d) \arrow[r, "\varphi_{cd}"] & \mathrm{Hom}_C(c, Gd) \\ \mathrm{Hom}_D(Fc', d) \arrow[u, "-\circ Fp"] \arrow[r, "\varphi_{c'd}"'] & \mathrm{Hom}_C(c', Gd) \arrow[u, "-\circ p"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f \circ Fp \arrow[r, mapsto, "\varphi_{cd}"] & G(f \circ Fp) \circ \eta_c \\ & Gf \circ \eta_{c'} \circ p \\ f \arrow[uu, mapsto, "-\circ Fp"] \arrow[r, mapsto, "\varphi_{c'd}"'] & Gf \circ \eta_{c'} \arrow[u, mapsto, "-\circ p"'] \end{tikzcd}$$

そのためには $GFp \circ \eta_c = \eta_{c'} \circ p$ を示せばよいが，これは $\eta\colon \mathrm{id}_C \Rightarrow GF$ が自然変換だから次が可換となり分かる．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "\eta_c"] \arrow[d, "p"'] & GFc \arrow[d, "GFp"] \\ c' \arrow[r, "\eta_{c'}"'] & GFc' \end{tikzcd}$$

同様の議論を行うことにより，d についても自然であることが分かる． □

命題 22. 随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ の counit を $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ とする．このとき $FG \cong \mathrm{id}_D$ ならば ε は同型である．

証明. $\sigma\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を自然同型として $\theta := \sigma_{FG} \circ F\eta_G \circ \sigma^{-1}$ と定める．$d \in D$ に対して θ_d が ε_d の逆射であることを示せばよい．まず次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
FGd \arrow[d, "F\eta_{Gd}"'] \arrow[rrr, phantom, ""] \arrow[dddrrrrrr, rounded corners, to path={ -- ([xshift=-4ex]\tikztostart.west) |- ([yshift=-10ex]\tikztotarget.south) \tikztonodes -- (\tikztotarget.south)}, "\mathrm{id}_{FGd}"'] & & d \arrow[ll, "\sigma_d^{-1}"'] \arrow[d, "\theta_d"] & & FGd \arrow[ll, "\sigma_d"'] \arrow[d, "FG\theta_d"'] \arrow[rr, "\varepsilon_d"] & & d \arrow[d, "\theta_d"] \\
FGFGd \arrow[rr, "\sigma_{FGd}"'] & (\theta) & FGd \arrow[rr, "\sigma_{FGd}^{-1}"'] & (\sigma) & FGFGd \arrow[rr, "\varepsilon_{FGd}"'] & (\varepsilon) & FGd \\
& (*) & & & & &
\end{tikzcd}
$$

(θ) の部分は θ の定義より可換である．(σ)，(ε) は σ, ε が自然変換であるから可換である．$(*)$ は定理 20 (の双対) により可換である．以上によりこの図式は可換であり，従って $\theta_d \circ \varepsilon_d = \mathrm{id}_{FGd}$ が分かる．

同様にして

$$
\begin{tikzcd}
d \arrow[r, "\sigma_d^{-1}"] & FGd \arrow[r, "F\eta_{Gd}"] \arrow[dr, bend right, "\mathrm{id}_{FGd}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & FGFGd \arrow[r, "\sigma_{FGd}"] \arrow[d, "FG\varepsilon_d"'] \arrow[dr, phantom, "(\sigma)"] & FGd \arrow[d, "\varepsilon_d"] \\
& & FGd \arrow[r, "\sigma_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

も可換だから $\varepsilon_d \circ \theta_d = \mathrm{id}_d$ が分かる． □

命題 23. $F\colon C \to D$，$G\colon D \to C$，$\eta\colon \mathrm{id}_C \cong GF$，$\sigma\colon FG \cong \mathrm{id}_D$ を圏同値とする．このときを η を unit とするような随伴 $F \dashv G$ が存在する．[*3]

証明. 自然変換 $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_D$ を

$$
\varepsilon \quad := \quad
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "G"'] \arrow[rrrr, bend left=35, "\mathrm{id}_D"] & C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dr, "F"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\Uparrow\sigma"] & & C \arrow[r, "F"] & D \\
& & D \arrow[ur, "G"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[urr, phantom, "\Uparrow\sigma^{-1}"] & &
\end{tikzcd}
$$

*3 故に随伴は圏同値の一般化と考えることができる．

により定義する．このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & {} & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, "G"] \arrow[rrrr, bend left, "\mathrm{id}_D"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[dr, "F"'] & & C \arrow[r, "F"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\sigma"] & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}_C"'] & {} & & D \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma^{-1}", shift left=6] & &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, "G"] \arrow[rrrr, bend left, "\mathrm{id}_D"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & C \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"] & & C \arrow[r, "F"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\sigma"] & D \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[urrrr, "\mathrm{id}_C"] \arrow[rrr, "F"'] & {} & & D \arrow[ur, "G"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\sigma^{-1}", shift left=6] & &
\end{tikzcd}
= \mathrm{id}_F
$$

である．従って

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & {} & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\
 & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} & C
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[rd, "\mathrm{id}_C", rounded corners] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_G", shift left=10] & \\
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & {} & D \arrow[ur, "G"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & C \\
 & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} & C \arrow[ur, "\mathrm{id}_C"', rounded corners] &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dr, "F"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}_C", rounded corners] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon^{-1}"] & & \\
D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & {} & D \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & {} & D \arrow[r, "G"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & C \\
 & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] \arrow[rru, "\mathrm{id}_C"', rounded corners] & {} &
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
 & & & C \arrow[dr, "F"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}_C", rounded corners] & & \\
D \arrow[urrr, "G", rounded corners] \arrow[dr, "G"'] & {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_{FG}"] & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] & {} & D \arrow[r, "G"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & C \\
 & C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_F"] & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[rru, "\mathrm{id}_C"', rounded corners] & {} &
\end{tikzcd}
= \mathrm{id}_G
$$

となり $F \dashv G$ が分かった. $\square$

系 24. 関手 $F\colon C \to D$ が圏同値を与えるとき，F は極限・余極限と交換する. $\square$

系 25. $C \simeq D$ で C が余完備ならば D も余完備である．(即ち余完備性は圏同値で保たれる．)

証明. J を小圏，$T\colon J \to D$ を関手とする．$C \simeq D$ だから定理 23 より $F \dashv G\colon C \to D$ で counit ε が同型なものが取れる．

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "T"] & D \arrow[rr, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\varepsilon \Uparrow \wr"] & D \\ & & C \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

C が余完備だから余極限 $\mathrm{colim}(GT)$ が存在する．定理 8 より $\mathrm{colim}(FGT)$ も存在する．$\varepsilon_T\colon FGT \Rightarrow T$ が同型だから $\mathrm{colim}\, T$ も存在する. $\square$

同様にして有限余完備性，完備性，有限完備性も圏同値で保たれる (省略).

※ ここで簡単な事実を述べておく．随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ の unit η が同型であるとする．このとき定理 18 より F は忠実充満であるが，一方で任意の $c \in C$ に対して $\eta_c\colon c \to G(Fc)$ が同型であるから G は本質的全射である．同様のことは counit についても言える．従って $F\colon C \to D$ が圏同値のとき，命題 23 のように η, ε を取って随伴 $F \dashv G$ を定めれば，F は忠実充満な本質的全射であることが分かる．また随伴 $F \dashv G$ において F と G が共に忠実充満であれば，F は圏同値となることもわかる．

ここで随伴 $F \dashv G$ において F が本質的全射であるからといって counit が同型であるとは限らないことを注意しておく．実際，$\mathbf{Vect}_k$ を体 k 上の線型空間の圏として，$U\colon \mathbf{Vect}_k \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とすれば U は左随伴 F を持つ ($X \in \mathbf{Set}$ に対して $FX :=$ (X を基底とする線型空間) とすればよい)．任意の線型空間は基底を持つから，F は本質的全射である．一方で U は (忠実だが) 充満ではないので $F \dashv G$ の counit は同型ではない．

命題 26. $F \dashv G\colon A \to B$ と $L \dashv R\colon B \to C$ を随伴とするとき $LF \dashv GR\colon A \to C$ となる．

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & B \arrow[l, shift left, "G"] \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, shift left, "R"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "LF"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C \arrow[l, shift left, "GR"] \end{tikzcd}$$

証明. $a \in A$, $c \in C$ について自然に

$$\mathrm{Hom}_C(LFa, c) \cong \mathrm{Hom}_B(Fa, Rc) \cong \mathrm{Hom}_A(a, GRc). \qquad \square$$

$F\colon C \to D$ を関手, U を圏とするとき, 2 つの関手 $F\colon C^U \to D^U$ と $F^{-1}\colon U^D \to U^C$ が得られるのであった.

命題 27. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴とするとき, 圏 U に対して随伴 $F \dashv G\colon C^U \to D^U$ が成り立つ.

証明. 随伴 $F \dashv G$ の unit, counit を η, ε とする. $K \in C^U$, $L \in D^U$ について自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \cong \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL)$ が存在することを示せばよい.

$\theta \in \mathrm{Hom}(FK, L)$ に対して

$$\beta_{KL}(\theta) \quad := \quad \begin{tikzcd} U \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "K"'] & & D \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\ & C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] & {} & C \end{tikzcd}$$

と定める. このとき $\beta_{KL}\colon \mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \to \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL)$ は K, L について自然である.

$\because$) L についても同様に分かるから, K についての自然性のみ示す.

$K, K' \in C^U$ の間の射 $\tau\colon K \Rightarrow K'$ を考える. 図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \arrow[r, "\beta_{KL}"] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL) \\ \mathrm{Hom}_{D^U}(FK', L) \arrow[r, "\beta_{K'L}"'] \arrow[u, "-\circ F\tau"] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K', GL) \arrow[u, "-\circ\tau"'] \end{tikzcd}$$

が可換であることを示す. 左の縦の射 $-\circ F\tau$ は $\theta \in \mathrm{Hom}_{D^U}(FK', L)$ に対して合成

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "L"] \arrow[dr, "K'"] \arrow[dr, bend right=60, "K"'] \arrow[dr, phantom, bend right=30, "\tau\Nearrow"] & & D \\ & C \arrow[ur, "F"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] & \end{tikzcd}$$

を与える射である．よって θ の行き先は

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{D^U}(FK, L) \arrow[r, "\beta_{KL}"] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL) \\
\mathrm{Hom}_{D^U}(FK', L) \arrow[u, "-\circ F\tau"] \arrow[r, "\beta_{K'L}"'] & \mathrm{Hom}_{C^U}(K', GL) \arrow[u, "-\circ\tau"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\theta \circ F\tau \arrow[r, mapsto, "\beta_{KL}"] & G(\theta \circ F\tau) \circ \eta_K \\
 & G\theta \circ \eta_{K'} \circ \tau \\
\theta \arrow[uu, mapsto, "-\circ F\tau"] \arrow[r, mapsto, "\beta_{K'L}"'] & G\theta \circ \eta_{K'} \arrow[u, mapsto, "-\circ\tau"']
\end{tikzcd}
$$

となるが，自然変換の水平合成の性質により

$$G\theta \circ \eta_{K'} \circ \tau = G\theta \circ GF\tau \circ \eta_K = G(\theta \circ F\tau) \circ \eta_K$$

であるから可換である．

よって β_{KL} が全単射であることを言えばよいが，それは逆写像が次の σ_{KL} によって与えられることから分かる．$\theta \in \mathrm{Hom}_{C^U}(K, GL)$ に対して

$$
\sigma_{KL}(\theta) \quad := \quad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, "\mathrm{id}_D"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & D \arrow[d, phantom, "\varepsilon\Uparrow"] \\
U \arrow[ur, "L"] \arrow[rr, "K"'] & & C \arrow[u, phantom] \arrow[ur, "F"']
\end{tikzcd}
$$

とする．この σ が β の逆になっていることは定理 20 から分かる． □

命題 28. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴，U を圏とすると，随伴 $G^{-1} \dashv F^{-1}\colon U^C \to U^D$ が成り立つ．

証明. $F \dashv G$ の unit を η とする．$K\colon C \to U$，$L\colon D \to U$，$\theta \in \mathrm{Hom}_{U^D}(KG, L)$ に対して

$$
\beta_{KL}(\theta) \quad := \quad
\begin{tikzcd}
 & D \arrow[r, "L"] \arrow[dr, "G"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] \\
C \arrow[ur, "F"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_C"'] & & C \arrow[ur, "K"']
\end{tikzcd}
$$

と定める．この β が自然同型 $\mathrm{Hom}_{U^D}(KG, L) \cong \mathrm{Hom}_{U^C}(K, LF)$ を与えることが命題 27 と同様にして分かる． □

系 29. $F \dashv G\colon C \to D$ のとき $(F^{\mathrm{op}})^{-1} \dashv (G^{\mathrm{op}})^{-1}\colon \widehat{D} \to \widehat{C}$ が成り立つ．

証明. $\widehat{C} = \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ だったから，命題 9 と命題 28 を組み合わせればよい． □

3 冪等随伴

$F \dashv G\colon C \to D$ を随伴，η を unit，ε を counit とする．充満部分圏 $C_0, C_1 \subset C$ と $D_0, D_1 \subset D$ を以下のように定める．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ob}(C_0) &:= \{c \in C \mid \eta_c\colon c \to GFc \text{ が同型 }\} \\
\mathrm{Ob}(C_1) &:= \{c \in C \mid \text{ある } d \in D \text{ が存在して } Gd \cong c \text{ となる }\} \\
\mathrm{Ob}(D_0) &:= \{c \in D \mid \varepsilon_d\colon FGd \to d \text{ が同型 }\} \\
\mathrm{Ob}(D_1) &:= \{c \in D \mid \text{ある } c \in C \text{ が存在して } Fc \cong d \text{ となる }\}
\end{aligned}$$

定義から明らかに $C_0 \subset C_1 \subset C$ かつ $D_0 \subset D_1 \subset D$ である．

定理 30. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴，η を unit，ε を counit とするとき圏同値 $C_0 \simeq D_0$ が得られる．

証明．まず $c \in C_0$ に対して $Fc \in D_0$ である．

$\because$) $c \in C_0$ とすれば $\eta_c\colon c \to GFc$ は同型である．よって $F\eta_c\colon Fc \to FGFc$ も同型である．定理 20 (の双対) より $\varepsilon_F \circ F\eta = \mathrm{id}_F$ だったから $\varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c = \mathrm{id}_{Fc}$ となり ε_{Fc} も同型である．よって $Fc \in D_0$ が分かった．

よって F は関手 $F_0\colon C_0 \to D_0$ を定める．同様にして G から関手 $G_0\colon D_0 \to C_0$ が得られる．定義から明らかに $G_0 \circ F_0 \cong \mathrm{id}_{C_0}$，$F_0 \circ G_0 \cong \mathrm{id}_{D_0}$ である． □

定理 31. $F \dashv G\colon C \to D$ を随伴，η を unit，ε を counit とする．このとき以下の条件は同値である．(これらの条件を満たす随伴を冪等随伴 (idempotent adjunction) という．)

(1) $F\eta\colon F \Rightarrow FGF$ は自然同型.
(2) $\eta_G\colon G \Rightarrow GFG$ は自然同型.
(3) $F\eta_G\colon FG \Rightarrow FGFG$ は自然同型.
(4) $GF\eta = \eta_{GF}$.
(5) $GF\eta_G = \eta_{GFG}$.
(6) $C_0 = C_1$.
(7) $G\varepsilon\colon GFG \Rightarrow G$ は自然同型.
(8) $\varepsilon_F\colon FGF \Rightarrow F$ は自然同型.
(9) $G\varepsilon_F\colon GFGF \Rightarrow GF$ は自然同型.
(10) $FG\varepsilon = \varepsilon_{FG}$.

(11) $FG\varepsilon_F = \varepsilon_{FGF}$.

(12) $D_0 = D_1$.

証明. 次の図式の通りに同値性を証明する.

$$
\begin{tikzcd}
(1) \arrow[r] & (3) \arrow[d] & (2) \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] & (7) \arrow[r] & (9) \arrow[d] & (8) \arrow[l] \arrow[d, leftrightarrow] \\
(11) \arrow[u] \arrow[rrrrru, bend left=60] & (10) \arrow[l] & (6) & (5) \arrow[u] \arrow[ul] & (4) \arrow[l] & (12)
\end{tikzcd}
$$

$(1 \Longrightarrow 3)$ 明らか.

$(3 \Longrightarrow 10)$ 定理 20 とその直後の等式により

$$FG\varepsilon \circ F\eta_G = \mathrm{id}_{GF} = \varepsilon_{FG} \circ F\eta_G$$

が分かる. 仮定 (3) より $F\eta_G$ が同型だから $FG\varepsilon = \varepsilon_{FG}$ となる.

$(10 \Longrightarrow 11)$ 明らか.

$(11 \Longrightarrow 1$ かつ $8)$ $c \in C$ に対して $F\eta_c$ と ε_{Fc} が互いに逆射であることを示せばよい. まず定理 20 の直後の等式から $\varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c = \mathrm{id}$ である. 次に ε が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"] \arrow[d, "FGF\eta_c"'] & Fc \arrow[d, "F\eta_c"] \\
FGFGFc \arrow[r, "\varepsilon_{FGFc}"'] & FGFc
\end{tikzcd}
$$

は可換である. これと仮定 (11) を合わせれば

$$F\eta_c \circ \varepsilon_{Fc} = \varepsilon_{FGFc} \circ FGF\eta_c = FG\varepsilon_{Fc} \circ FGF\eta_c = FG(\varepsilon_{Fc} \circ F\eta_c) = \mathrm{id}$$

となる.

$(8 \Longrightarrow 12)$ $D_1 \subset D_0$ を示せばよい. そのために任意の $d \in D_1$ を取る. 定義より $c \in C$ と同型射 $f\colon Fc \to d$ が存在する. ε が自然変換だから

$$
\begin{tikzcd}
FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"] \arrow[d, "FGf"'] & Fc \arrow[d, "f"] \\
FGd \arrow[r, "\varepsilon_d"'] & d
\end{tikzcd}
$$

が可換である. 仮定 (8) より ε_{Fc} が同型だから ε_d も同型であり $d \in D_0$ が分かる.

(12 $\Longrightarrow$ 8) 任意の $c \in C$ を取る．$Fc \in D_1 = D_0$ だから ε_{Fc} は同型である．

(8 $\Longrightarrow$ 9) 明らか.

(9 $\Longrightarrow$ 4) 3$\Longrightarrow$10 と同様で,

$$G\varepsilon_F \circ GF\eta = \mathrm{id}_{GF} = G\varepsilon_F \circ \eta_{GF}$$

と仮定 (9) より $GF\eta = \eta_{GF}$ となる.

(4 $\Longrightarrow$ 5) 明らか.

(5 $\Longrightarrow$ 7 かつ 2) 11$\Longrightarrow$1 かつ 8 と同様で，$G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd} = \mathrm{id}$ であり，かつ

$$\begin{tikzcd}
GFGd \arrow[r, "\eta_{GFGd}"] \arrow[d, "G\varepsilon_d"'] & GFGFGd \arrow[d, "GFG\varepsilon_d"] \\
Gd \arrow[r, "\eta_{Gd}"'] & GFGd
\end{tikzcd}$$

の可換性を仮定 (5) と組み合わせれば

$$\eta_{Gd} \circ G\varepsilon_d = GFG\varepsilon_d \circ \eta_{GFGd} = GFG\varepsilon_d \circ GF\eta_{Gd} = GF(G\varepsilon_d \circ \eta_{Gd}) = \mathrm{id}$$

となる.

(7 $\Longrightarrow$ 9) 明らか.

(2 $\Longrightarrow$ 6) 8$\Longrightarrow$12 と同様で，$C_1 \subset C_0$ を示せばよいがそれは

$$\begin{tikzcd}
Gd \arrow[r, "\eta_{Gd}"] \arrow[d, "\wr"'] & GFGd \arrow[d, "\wr"] \\
c \arrow[r, "\eta_c"'] & GFc
\end{tikzcd}$$

の可換性から分かる.

(6 $\Longrightarrow$ 2) 任意の $d \in D$ を取る．$Fd \in C_1 = C_0$ だから η_{Fd} は同型である.

(2 $\Longrightarrow$ 3) 明らか. □

定理 32. 随伴 $F \dashv G \colon C \to D$ が冪等随伴
$\Longleftrightarrow$ 圏 X と忠実充満関手 $K_0 \colon X \to C$，$K_1 \colon X \to D$ と，随伴 $L \dashv K_0$，$K_1 \dashv R$ が存在

して $F \cong K_1 L$, $G \cong K_0 R$ となる．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[r, phantom, "\perp"] \arrow[rr, bend left=60, "F"] & X \arrow[l, shift left, "K_0"] \arrow[r, shift left, "K_1"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left, "R"] \arrow[ll, bend left=60, "G"] \end{tikzcd}$$

証明．($\Longrightarrow$) まず D_1 の定義から明らかに，F は関手 $F\colon C \to D_1$ とみなすことができる．今，定理 31 より $D_0 = D_1$ だから $F\colon C \to D_0$ である．よって G を D_0 に制限した関手を $G'\colon D_0 \to C$ とすれば随伴 $F \dashv G'\colon C \to D_0$ を得る．定義から明らかにこの随伴の counit は自然同型である．故に定理 18 より G' は忠実充満である．

同様にして随伴 $F' \dashv G\colon C_0 \to D$ も得られる．この F' は忠実充満である．

次に定理 30 における F_0, G_0 が圏同値 $C_0 \simeq D_0$ を与えるが，命題 23 を適用すれば $G_0 \dashv F_0\colon D_0 \to C_0$ とみなすことができる．以上を組み合わせると次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D_0 \arrow[l, shift left, "G'"] \arrow[r, shift left, "G_0"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & C_0 \arrow[l, shift left, "F_0"] \arrow[r, shift left, "F'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

そこで $X := D_0$, $K_0 := G'$, $K_1 := F'G_0$, $L := F$, $R := F_0 G$ と定めればよい (命題 26 も参照)．

($\Longleftarrow$) $F \dashv G$, $L \dashv K_0$, $K_1 \dashv R$ の unit をそれぞれ η, σ, τ とする．$c \in C$ に対して $\eta_c\colon c \to GFc$ は合成

$$c \xrightarrow{\sigma_c} K_0 Lc \xrightarrow{K_0 \tau_{Lc}} K_0 R K_1 Lc \xrightarrow{\sim} GFc$$

で与えられる．$d \in D$ に対して η_{Gd} が同型であることを示せばよい．今 K_1 が忠実充満だから τ は同型である．よって σ_{Gd} が同型であることを示せばよい．そこで $x := Rd$ とする．$G \cong K_0 R$ だから，同型射 $f\colon Gd \to K_0 x$ が存在する．このとき

$$\begin{tikzcd} Gd \arrow[r, "\sigma_{Gd}"] \arrow[d, "f", "\wr"'] & K_0 L Gd \arrow[d, "K_0 L f", "\wr"'] \\ K_0 x \arrow[r, "\sigma_{K_0 x}"'] & K_0 L K_0 x \end{tikzcd}$$

は可換である．故に $\sigma_{K_0 x}$ が同型であることを示せばよい．そこで ε を $L \dashv K_0$ の counit とする．このとき定理 20 より $K_0 \varepsilon_x \circ \sigma_{K_0 x} = \mathrm{id}_{K_0 x}$ である．定理 18 より ε は自然同型だから $\sigma_{K_0 x} = (K_0 \varepsilon_x)^{-1}$ も同型である． □

系 33. 随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ が冪等随伴ならば包含関手 $U\colon C_0 \to C$ は左随伴を持つ．

証明. 定理 32 の記号を使うと，定義より $G'F_0 \cong U$ である．よって命題 26 より U は左随伴 G_0F を持つ． □

系 34. 随伴 $F \dashv G\colon C \to D$ が冪等随伴ならば定理 32 の記号で $X \simeq C_0\,(\simeq D_0)$ となる．

証明. 定理 32 により次の図式が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "L"] \arrow[rr, bend left=50, "F"] & X \arrow[l, shift left, "K_0"] \arrow[r, shift left, "K_1"] \arrow[l, phantom, "\perp"] & D \arrow[l, shift left, "R"] \arrow[l, phantom, "\perp"] \arrow[ll, bend left=50, "G"]
\end{tikzcd}
$$

K_1 が忠実充満だから R は本質的全射である．よって K_0 は本質的全射 $K_0\colon X \to C_0$ を定める．この K_0 は忠実充満だから圏同値 $X \simeq C_0$ を与える． □

4 Cartesian 閉圏

定義. C を直積を持つ圏とする．すると対象 $a \in C$ に対して $-\times a\colon C \to C$ は関手となる．このとき $-\times a$ から $b \in C$ への普遍射 $\langle b^a, \mathrm{ev}\rangle$ を exponential object という．

$$
\begin{tikzcd}
b^a & b^a \times a \arrow[r, "\mathrm{ev}"] & b \\
x \arrow[u, dashed, "g"] & x \times a \arrow[u, dashed, "g\times \mathrm{id}_a"] \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{ev}\colon b^a \times a \to b$ を evaluation map という．また b^a は $[a,b]$ などと書くこともある．

例 35. $C = \mathbf{Set}$ の場合，b^a は集合としての冪 $b^a = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}}(a,b)$ であり，$\mathrm{ev}\colon b^a \times a \to b$ は $\mathrm{ev}(f,x) = f(x)$ で与えられる． □

定理 6 により

命題 36. C を有限直積を持つ圏として，任意の $a, b \in C$ に対して b^a が存在するとする．このとき $C \ni b \mapsto b^a \in C$ は関手 $(-)^a\colon C \to C$ を定め，随伴 $-\times a \dashv (-)^a$ が成り立つ．よって $b, c \in C$ について自然に $\mathrm{Hom}_C(b \times a, c) \cong \mathrm{Hom}_C(b, c^a)$ となる． □

このような圏を Cartesian 閉圏という．

定義. Cartesian 閉圏 (Cartesian Closed Category, CCC) とは次の条件を満たす圏 C のことである.

(1) C は有限直積を持つ.
(2) 任意の $a \in C$ に対して $- \times a$ は右随伴を持つ.

※ C を Cartesian 閉圏, $a \in C$ として $- \times a$ の右随伴を G_a とする. 定理 3 から, $- \times a$ から $b \in C$ への普遍射, つまり exponential object (b^a, ev) が存在することが分かる. すると命題 36 から $- \times a \dashv (-)^a$ である. 故に右随伴の一意性 (定理 7 の双対) から $G_a \cong (-)^a$ となる. よって Cartesian 閉圏の定義の「$- \times a$ の右随伴」は最初から $(-)^a$ と思ってよい.

定理 8 とその双対から次が分かる.

命題 37. C を Cartesian 閉圏とすると, $a \in C$ に対して $- \times a$ は余極限と交換し, $(-)^a$ は極限と交換する. 特に $b, c \in C$ に対して

$$(b \amalg c) \times a \cong (b \times a) \amalg (c \times a)$$
$$(b \times c)^a \cong b^a \times c^a$$

が成り立つ. また $0 \times c \cong 0$, $1^c \cong 1$ である. □

命題 38. Cartesian 閉圏 C において $(a^b)^c \cong a^{b \times c}$ である.

証明. $(a^b)^c$ が $- \times (b \times c)$ から a への普遍射を与えることを示せばよい (そうすれば普遍射の一意性から $(a^b)^c \cong a^{b \times c}$ が分かる). そのためには, 自然同型

$$\mathrm{Hom}_C(- \times (b \times c), a) \cong \mathrm{Hom}_C(-, (a^b)^c)$$

を示せばよい. それは, $x \in C$ について自然に

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_C(x \times (b \times c), a) &\cong \mathrm{Hom}_C(x \times (c \times b), a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C((x \times c) \times b, a) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x \times c, a^b) \\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x, (a^b)^c) \end{aligned}$$

となるから成り立つ. □

命題 39. Cartesian 閉圏 C において $a^b \times a^c \cong a^{b \amalg c}$ である.

証明. 命題 38 と同様で，$x \in C$ について自然に

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_C(x \times (b \amalg c), a) &\cong \mathrm{Hom}_C((x \times b) \amalg (x \times c), a)\\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x \times b, a) \times \mathrm{Hom}_C(x \times c, a)\\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x, a^b) \times \mathrm{Hom}_C(x, a^c)\\ &\cong \mathrm{Hom}_C(x, a^b \times a^c)\end{aligned}$$

となるから $a^b \times a^c \cong a^{b \amalg c}$ である． □

命題 40. Cartesian 閉圏 C において $a^0 \cong 1$，$a^1 \cong a$ である．

証明. $x \in C$ について自然に

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_C(x \times 0, a) \cong \mathrm{Hom}_C(0, a) \cong 1 \cong \mathrm{Hom}_C(x, 1)\\ &\mathrm{Hom}_C(x \times 1, a) \cong \mathrm{Hom}_C(x, a)\end{aligned}$$

である． □

以上により，Cartesian 閉圏においては，いわゆる「指数法則」が成り立つと言える．

さて，Cartesian 閉圏において成り立つ同型 $\mathrm{Hom}_C(b \times a, c) \cong \mathrm{Hom}_C(b, c^a)$ は $b, c \in C$ について自然であったが，この場合，一見 a も変数のように見える．実は一般に次の定理が成り立つ．

定理 41. $F\colon C \times X \to D$ を関手として，各 $x \in X$ に対して関手 $F(-, x)\colon C \to D$ は右随伴関手 $G_x\colon D \to C$ を持つとする．このとき，関手 $G\colon X^{\mathrm{op}} \times D \to C$ が一意に存在して次を満たす．

(1) $G(x, -) = G_x$ である．

(2) 随伴 $F(-, x) \dashv G(x, -)$ が与える，c, d について自然な同型全単射

$$\varphi_{cxd}\colon \mathrm{Hom}_D(F(c, x), d) \to \mathrm{Hom}_C(c, G(x, d))$$

は x についても自然である．

証明. 随伴 $F(-, x) \dashv G_x\colon C \to D$ の counit を $\varepsilon^x\colon F(G_x-, x) \Rightarrow \mathrm{id}_D$ とする．定理 10 より，$d \in D$ に対して $\varepsilon^x_d\colon F(G_x(d), x) \to d$ は普遍射である．X の射 $k\colon u \to v$ に対し

て $G_k(d)\colon G_v(d) \to G_u(d)$ を，ε_d^u の普遍性を使って次のように定める．

$$\begin{tikzcd}
G_u(d) & F(G_u(d),u) \arrow[rr, "\varepsilon_d^u"] & & d \\
G_v(d) \arrow[u, dashed, "G_k(d)"] & F(G_v(d),u) \arrow[u, dashed, "F(G_k(d),u)"'] \arrow[rr, "F(\mathrm{id},k)"'] & & F(G_v(d),v) \arrow[u, "\varepsilon_d^v"']
\end{tikzcd}$$

このとき G を

- $x \in X$，$d \in D$ に対して $G(x,d) := G_x(d)$ とする．
- X の射 $k\colon u \to v$ と D の射 $f\colon a \to b$ に対して，C の射 $G(k,f)$ を合成

  $$G(v,a) \xrightarrow{G_v(f)} G(v,b) \xrightarrow{G_k(b)} G(u,b)$$

  で定義する．

と定めると，これは関手 $G\colon X^{\mathrm{op}} \times D \to C$ を与える．

∵) まず $G_k(d)$ の定義 (ε_d^x の普遍性) と次の図式より，$G_{\mathrm{id}_x}(d) = \mathrm{id}$ である．

$$\begin{tikzcd}
G_x(d) & F(G_x(d),x) \arrow[rr, "\varepsilon_d^x"] & & d \\
G_x(d) \arrow[u, "\mathrm{id}"] & F(G_x(d),x) \arrow[u, "F(\mathrm{id},x)"'] \arrow[rr, "F(\mathrm{id},\mathrm{id})=\mathrm{id}"'] & & F(G_x(d),x) \arrow[u, "\varepsilon_d^x"']
\end{tikzcd}$$

よって $G(\mathrm{id}_x, \mathrm{id}_d) = G_{\mathrm{id}_x}(d) \circ G_x(\mathrm{id}_d) = \mathrm{id} \circ \mathrm{id} = \mathrm{id}$ となり恒等射についてはよい．

G が合成と交換することを示す．即ち $u \xrightarrow{k} v \xrightarrow{l} w$ を X の射，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ を D の射として $G(l \circ k, g \circ f) = G(k,g) \circ G(l,f)$ を示す．そのためには次の図式が可換で

あることを示せばよい．

$$
\begin{tikzcd}
G(w,a) \arrow[r, "G_w(f)"] \arrow[dr, "G_w(g\circ f)"'] \arrow[rr, bend left=50, "G(l,f)"] \arrow[ddrr, bend right=40, "G(l\circ k,g\circ f)"'] \arrow[ddrr, phantom, bend right=20, "(G)"] & G(w,b) \arrow[r, "G_l(b)"] \arrow[d, "G_w(g)"] \arrow[u, phantom, "(G)"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & G(v,b) \arrow[d, "G_v(g)"] \arrow[dd, bend left=70, "G(k,g)"] \arrow[dd, phantom, bend left=35, "(G)"] \\
\arrow[ur, phantom, "(G_w)"] & G(w,c) \arrow[r, "G_l(c)"] \arrow[dr, "G_{l\circ k}(c)"'] & G(v,c) \arrow[d, "G_k(c)"] \arrow[dl, phantom, "(*)"] \\
 & & G(u,c)
\end{tikzcd}
$$

(G) は G の定義より可換である．(G_w) は G_w が関手であるから可換である．$(*)$ は普遍性により，次の 2 つの可換図式から分かる．

$$
\begin{tikzcd}
G_u(c) & F(G_u(c),u) \arrow[r, "\varepsilon_c^u"] & c & \\
G_v(c) \arrow[u, "G_k(c)"] & F(G_v(c),u) \arrow[u, "F(G_k(c){,}u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id}{,}k)"'] & F(G_v(c),v) \arrow[u, "\varepsilon_c^v"'] & \\
G_w(c) \arrow[u, "G_l(c)"] & F(G_w(c),u) \arrow[u, "F(G_l(c){,}u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id}{,}k)"'] & F(G_w(c),v) \arrow[u, "F(G_l(c){,}v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id}{,}l)"'] & F(G_w(c),w) \arrow[uul, "\varepsilon_c^w"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_u(c) & F(G_u(c),u) \arrow[r, "\varepsilon_c^u"] & c \\
G_w(c) \arrow[u, "G_{l\circ k}(c)"] & F(G_w(c),u) \arrow[u, "F(G_{l\circ k}(c){,}u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id}{,}l\circ k)"'] & F(G_w(c),w) \arrow[u, "\varepsilon_c^w"']
\end{tikzcd}
$$

$(**)$ は再び普遍性により，次の 2 つの可換図式から分かる．(ε^x が自然変換であるこ

とに注意する．）

$$
\begin{tikzcd}
G_v(c) & F(G_v(c),v) \arrow[r, "\varepsilon_c^v"] & c & \\
G_v(b) \arrow[u, "G_v(g)"] & F(G_v(b),v) \arrow[u, "F(G_v(g),v)"'] \arrow[rr, "\varepsilon_b^v"'] & & b \arrow[ul, "g"'] \\
G_w(b) \arrow[u, "G_l(b)"] & F(G_w(b),v) \arrow[u, "F(G_l(b),v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(b),w) \arrow[ur, "\varepsilon_b^w"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
G_v(c) & F(G_v(c),v) \arrow[r, "\varepsilon_c^v"] & c & \\
G_w(c) \arrow[u, "G_l(c)"] & F(G_w(c),v) \arrow[u, "F(G_l(c),v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(c),w) \arrow[u, "\varepsilon_c^w"'] & b \arrow[ul, "g"'] \\
G_w(b) \arrow[u, "G_w(g)"] & F(G_w(b),v) \arrow[u, "F(G_w(g),v)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},l)"'] & F(G_w(b),w) \arrow[u, "F(G_w(g),w)"'] \arrow[ur, "\varepsilon_b^w"'] &
\end{tikzcd}
$$

このとき明らかに $G(x,-)=G_x$ である．

また全単射 $\varphi_{cxd}\colon \mathrm{Hom}_D(F(c,x),d)\to\mathrm{Hom}_C(c,G(x,d))$ は x について自然である．

∵）φ_{cxd}^{-1} が x について自然であることを示せばよい．即ち $k\colon u\to v$ に対して次の図式が可換であることを示す．

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(c,G(u,d)) \arrow[r, "\varphi_{cud}^{-1}"] & \mathrm{Hom}_D(F(c,u),d) \\
\mathrm{Hom}_C(c,G(v,d)) \arrow[u, "G(k,d)\circ-"] \arrow[r, "\varphi_{cvd}^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_D(F(c,v),d) \arrow[u, "-\circ F(c,k)"']
\end{tikzcd}
$$

φ_{cxd}^{-1} は合成

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_C(c,G(x,d)) &\xrightarrow{F(-,x)} \mathrm{Hom}_D(F(c,x),F(G(x,d),x)) \\
&\xrightarrow{\varepsilon_d^x\circ-} \mathrm{Hom}_D(F(c,x),d)
\end{aligned}
$$

で与えられるのであった (定理 10)．よって $f\in\mathrm{Hom}_C(c,G(v,d))$ に対して左回りと

右回りを計算すると

$$\begin{aligned}
\varphi_{cud}^{-1}(G(k,d)\circ f) &= \varepsilon_d^u \circ F(G(k,d)\circ f, u)\\
&= \varepsilon_d^u \circ F(G(k,d),u)\circ F(f,u)\\
\varphi_{cvd}^{-1}(f)\circ F(c,k) &= \varepsilon_d^v \circ F(f,v)\circ F(c,k) = \varepsilon_d^v \circ F(f,k)\\
&= \varepsilon_d^v \circ F(\mathrm{id},k)\circ F(f,u)
\end{aligned}$$

となる．G の定義より次の図式が可換であるから，x についての自然性が分かった．

$$\begin{tikzcd}
G(u,d) & F(G(u,d),u) \arrow[rr, "\varepsilon_d^u"] & & d \\
G(v,d) \arrow[u, dashed, "G(k,d)"] & F(G(v,d),u) \arrow[u, dashed, "F(G(k,d),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},k)"'] & F(G(v,d),v) \arrow[ur, "\varepsilon_d^v"'] &
\end{tikzcd}$$

以上により，条件を満たす G は存在することが分かった．

G の一意性を示すため, G が条件を満たすとする．一意性を示すには, X の射 $k\colon u\to v$ に対して

$$\begin{tikzcd}
G(u,d) & F(G(u,d),u) \arrow[rr, "\varepsilon_d^u"] & & d \\
G(v,d) \arrow[u, dashed, "G(k,d)"] & F(G(v,d),u) \arrow[u, dashed, "F(G(k,d),u)"'] \arrow[r, "F(\mathrm{id},k)"'] & F(G(v,d),v) \arrow[ur, "\varepsilon_d^v"'] &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい (そうすれば，普遍性から $G_k(d)=G(k,d)$ となり G の一意性が分かる)．今 φ_{cxd}^{-1} が x について自然だから，次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(G(v,d),G(u,d)) \arrow[r, "\varphi^{-1}"] & \mathrm{Hom}_D(F(G(v,d),u),d) \\
\mathrm{Hom}_C(G(v,d),G(v,d)) \arrow[u, "G(k,d)\circ -"] \arrow[r, "\varphi^{-1}"'] & \mathrm{Hom}_D(F(G(v,d),v),d) \arrow[u, "-\circ F(G(v,d),k)"']
\end{tikzcd}$$

よって $\mathrm{id}\in\mathrm{Hom}_C(G(v,d),G(v,d))$ の行き先を考えれば

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(G(k,d)) &= \varepsilon_d^u\circ F(G(k,d),u)\\
\varphi^{-1}(\mathrm{id})\circ F(G(v,d),k) &= \varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},v)\circ F(G(v,d),k)\\
&= \varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},k)
\end{aligned}$$

より $\varepsilon_d^u\circ F(G(k,d),u)=\varepsilon_d^v\circ F(\mathrm{id},k)$ が分かり，示したかった可換性を得る． □

c, x, d についての自然性から次の系が分かる．

系 42. 定理 41 の状況において，C の射 $p\colon c \to c'$，D の射 $q\colon d' \to d$，$f\colon F(c,x) \to d$，$g\colon F(c',x') \to d'$，X の射 $k\colon x \to x'$ に対して，次の左の図式が可換ならば右の図式も可換であり，右の図式が可換ならば左の図式も可換である．

$$\begin{tikzcd} F(c,x) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "F(p,k)"'] & d \\ F(c',x') \arrow[r, "g"'] & d' \arrow[u, "q"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} c \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & G(x,d) \\ c' \arrow[r, "\widetilde{g}"'] & G(x',d') \arrow[u, "G(k,q)"'] \end{tikzcd}$$

□

例 43. Cartesian 閉圏では，$\langle a, b\rangle \mapsto b^a$ は関手 $C^{\mathrm{op}} \times C \to C$ を与える．更に全単射 $\mathrm{Hom}_C(b \times a, c) \cong \mathrm{Hom}_C(b, c^a)$ は $a, b, c \in C$ について自然である． □

例 44. **Ab** は Cartesian 閉圏ではない．

∵) **Ab** の終対象は自明なアーベル群 0 である．よってアーベル群 $A \in \mathbf{Ab}$ に対して $0 \times A \cong A$ となる．故に命題 37 から **Ab** が Cartesian 閉圏でないことが分かる．

しかし，**Ab** のような圏であれば Cartesian 閉圏のような「良い」圏であって欲しいであろう．ところで **Ab** の場合，C^A となりそうな対象を定義することができる．つまり集合としては $C^A := \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(A, C)$ として，演算を各点ごとに入れる (即ち $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ とする)．この $\langle A, C\rangle \mapsto C^A$ は関手 $\mathbf{Ab}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ を与えることが分かる．そこで関手 $(-)^A\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ の左随伴 (これは存在することが分かる) を $- \otimes A$ と書き, $B \otimes A$ を B と A のテンソル積と呼ぶ．定理 41 と同様, これは関手 $\otimes\colon \mathbf{Ab} \times \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ を与え，$A, B, C \in \mathbf{Ab}$ について自然な全単射 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B \otimes A, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}}(B, C^A)$ が存在する．この $\langle \mathbf{Ab}, \otimes \rangle$ は Cartesian 閉圏を一般化した「モノイダル閉圏」になっている (モノイダル閉圏については「豊穣圏」の PDF を参照). □

5 随伴の例

最後に随伴の例を証明なしに列挙する．

例 45. **Grp** を群の圏，$U\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$ を集合 X に対して X で生成される自由群を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． □

例 46. $\mathbf{Ab}$ をアーベル群の圏とする．$\mathbf{Ab} \subset \mathbf{Grp}$ は充満部分圏である．この包含関手を $U\colon \mathbf{Ab} \to \mathbf{Grp}$ として，$F\colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Ab}$ をアーベル化 $FG := G/[G,G]$ とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例 47. R を可換環，R-$\mathbf{Mod}$ を R 加群の圏とする．$U\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$ を忘却関手とする．$F, G\colon \mathbf{Ab} \to R\text{-}\mathbf{Mod}$ を $F(A) := R \otimes_{\mathbb{Z}} A$，$G(A) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, A)$ とすれば $F \dashv U \dashv G$ である． $\square$

例 48. $\mathbf{Top}$ を位相空間の圏，$U\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ を集合 X に対して離散位相空間 X を与える関手，$G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ を集合 X に対して密着位相空間 X を与える関手とすれば $F \dashv U \dashv G$ である． $\square$

例 49. $\mathbf{Monoid}$ をモノイドの圏，$\mathbf{Ring}$ を環の圏とする．$U\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Monoid}$ を忘却関手 (環に対して乗法モノイドを与える関手) とする．$F\colon \mathbf{Monoid} \to \mathbf{Ring}$ を $M \in \mathbf{Monoid}$ に対して $\mathbb{Z}[M]$ を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例 50. $\mathbf{Ring}_*$ を基点付き環の圏とする．即ち対象は環 A と $a \in A$ の組 $\langle A, a\rangle$ で，射 $\langle A, a\rangle \to \langle B, b\rangle$ は環準同型 $f\colon A \to B$ で $f(a) = b$ を満たすもの，とする．$U\colon \mathbf{Ring}_* \to \mathbf{Ring}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Ring}_*$ を環 R に対して多項式環 $R[x]$ を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例 51. $\mathbf{Dom}$ を整域の圏，$\mathbf{Field}$ を体の圏とする．$U\colon \mathbf{Field} \to \mathbf{Dom}$ を忘却関手，$\mathrm{Quot}\colon \mathbf{Dom} \to \mathbf{Field}$ を整域 D に対して商体 $\mathrm{Quot}(D)$ を与える関手とすれば $\mathrm{Quot} \dashv U$ である． $\square$

例 52. $\mathbf{LocRing}$ を局所環の圏，$\mathbf{Hensel}$ を Hensel 環の圏とする．$U\colon \mathbf{Hensel} \to \mathbf{LocRing}$ を忘却関手，$F\colon \mathbf{LocRing} \to \mathbf{Hensel}$ を Hensel 化とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例 53. $\mathbf{Latt}$ を束の圏とする．$U\colon \mathbf{Latt} \to \mathbf{Set}$ を忘却関手とする．$F\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Latt}$ を $X \in \mathbf{Set}$ に対して X で生成される自由束を与える関手とすれば $F \dashv U$ である． $\square$

例 54. $\mathbf{CptHaus}$ をコンパクト Hausdorff 空間の圏，$U\colon \mathbf{CptHaus} \to \mathbf{Top}$ を忘却関手とする．U の左随伴関手 $SC\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{CptHaus}$ が Stone-Čech コンパクト化である． $\square$

例 55. $\mathbf{Ban}_1$ を Banach 空間と linear contraction がなす圏とする．$B\colon \mathbf{Ban}_1 \to \mathbf{Set}$

を単位球体を与える関手とする．B は左随伴関手を持つ． □

例 56. 圏 **Idem** を次のように定める．$\mathrm{Ob}(\mathbf{Idem}) := \{\langle X, v\rangle \mid X$ は集合，$v\colon X \to X$ は冪等 $\}$ として $\langle X, v\rangle$，$\langle Y, w\rangle$ の間の射は $f\colon X \to Y$ で $w \circ f = f \circ v$ を満たすものとする．$F\colon \mathbf{Idem} \to \mathbf{Set}$ を $F(\langle X, v\rangle) := X$，$G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Idem}$ を $G(X) := \langle X, \mathrm{id}_X\rangle$ で定めれば $F \dashv G$ かつ $G \dashv F$ である． □

参考文献

[1] Saunders Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, Springer, 2nd ed. 1978 版 (1998)