2-category での極限

alg-d
http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 5 月 18 日

この PDF では 2-category と言えば strict 2-category を表すものとする．またここでは圏 $\mathbb{2}$ の id でない射を $l\colon 0 \to 1$ で表す．

2-category とは $\mathbf{CAT}$-豊穣圏であるから，2-category $\mathcal{C}$ において weighted (co)limit を考えることができる[*1]．

$\mathcal{J}$ を small 2-category，$W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を strict 2-functor，即ち $\mathbf{CAT}$-関手とする．weighted limit とは $a \in \mathcal{C}$ に関して自然な圏同型

$$\varphi_a\colon \mathcal{C}(a, \lim^W T) \to [\mathcal{J}, \mathbf{CAT}](W, \mathcal{C}(a, T-))$$

が存在する対象 $\lim^W T \in \mathcal{C}$ のことであった．また $\lim^W T$ の unit とは $\eta := \varphi(\mathrm{id}_{\lim^W T})$ で定まる $\mathbf{CAT}$-自然変換 $\eta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(\lim^W T, T-)$ のことである (このような形の $\mathbf{CAT}$-自然変換を cylinder と呼ぶのであった)．

$a \mapsto \mathcal{C}(a, T-)$ で定まる $\mathbf{CAT}$-関手を G とする．このとき $\mathbf{CAT}$-豊穣圏の米田の補題によれば，圏同値 φ_a は η を使って $\varphi_a = (G-) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta$ と書ける．

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{C}(\lim^W T, \lim^W T) & \xrightarrow{\varphi} & [\mathcal{J}, \mathbf{CAT}](W, \mathcal{C}(\lim^W T, T-)) \\
{\scriptstyle -\bullet f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Gf)\widehat{\bullet}-} \\
\mathcal{C}(a, \lim^W T) & \xrightarrow[\varphi]{} & [\mathcal{J}, \mathbf{CAT}](W, \mathcal{C}(a, T-))
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
\mathrm{id} & \overset{\varphi}{\longmapsto} & \eta \\
{\scriptstyle -\bullet f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (Gf)\widehat{\bullet}-} \\
f & \underset{\varphi}{\longmapsto} & \sigma
\end{array}$$

逆に cylinder $\eta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(c, T-)$ が与えられたとき，$\varphi_a := (G-) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta$ と定義すれば $\varphi_a\colon \mathcal{C}(a, c) \to [\mathcal{J}, \mathbf{CAT}](W, \mathcal{C}(a, T-))$ は a について自然な関手である．

[*1] nLab[3] ではこれを strict 2-limit と呼んでいる．

そこで φ_a が圏同型となる条件を η を使って表すことを考える．これは通常の圏論と同様に「普遍性」を使って述べることができる．まず次の命題が成り立つ．

命題 1. $\eta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(\lim^W T, T-)$ を unit とするとき任意の cylinder $\sigma\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ に対して，ある 1-morphism $f\colon a \to \lim^W T$ が一意に存在して $(Gf) \mathbin{\widehat{\circ}} \eta = \sigma$ となる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"] \arrow[r, "\mathcal{C}(\lim^W T,T-)" description] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a,T-)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\eta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "Gf\Downarrow"] & \mathbf{CAT} & = & \mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a,T-)"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow"] & \mathbf{CAT}
\end{tikzcd}$$

証明. $\varphi_a = (G-) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta$ が圏同型だから，$f \mapsto (Gf) \mathbin{\widehat{\circ}} \eta$ は全単射

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C}(a, \lim^W T)) \to \mathrm{Ob}([\mathcal{J}, \mathbf{CAT}](W, \mathcal{C}(a, T-)))$$

を与える．故に主張が成り立つ． □

この普遍性をここでは「1 次元的普遍性*2」と呼ぶ．通常の圏論では Hom が集合だから φ は全単射でありこの条件だけでよいが，今回は $\mathcal{C}(a, \lim^W T))$ が圏なので，この圏の射 ($= \mathcal{C}$ の 2-morphism) についても考慮にいれなければならない．そこで次の「2 次元的普遍性」が得られる．

命題 2. $\eta\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(\lim^W T, T-)$ を unit とする．$\sigma, \tau\colon W \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ を cylinder として，それに 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism を $f, g\colon a \to \lim^W T$ とする．このとき任意の modification $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ に対して，ある 2-morphism $\beta\colon f \Rightarrow g$ が一意に存在して $(G\beta) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta = \Gamma$ となる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"] \arrow[r, "\mathcal{C}(\lim^W T,T-)" description] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a,T-)"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\eta\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "Gf\Downarrow \overset{}{\underset{G\beta}{\Rrightarrow}} \Downarrow Gg"] & \mathbf{CAT} & = & \mathcal{J} \arrow[r, bend left=50, "W"] \arrow[r, bend right=50, "\mathcal{C}(a,T-)"'] \arrow[r, phantom, "\sigma\Downarrow \overset{\Gamma}{\Rrightarrow} \Downarrow\tau"] & \mathbf{CAT}
\end{tikzcd}$$

証明. $\varphi_a = (G-) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta$ が圏同型だから，$\beta \mapsto (G\beta) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta$ は全単射

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}(a, \lim^W T)}(f, g) \to \mathrm{Hom}_{[\mathcal{J}, \mathbf{Cat}](W, \mathcal{C}(a, T-))}(Gf, Gg)$$

を与える．故に主張が成り立つ． □

*2 [1] などでは one-dimensional aspect of the universal property と呼んでいる．

定理 3. $\mathcal{J},\mathcal{C}$ を 2-category, $W\colon \mathcal{J}\to\mathbf{CAT}$, $T\colon\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ を strict 2-functor とする．また cylinder $\eta\colon W\Rightarrow\mathcal{C}(c,T-)$ が 1 次元的普遍性と 2 次元的普遍性を満たすとする．このとき $c\cong\lim^W T$ である．

証明． $\varphi_a := (G-)\,\widehat{\bullet}\,\eta$ が圏同型を与えることを示せばよい．まず 1 次元的普遍性により φ_a は対象について全単射である．次に 2 次元的普遍性により φ_a は忠実充満である．よって φ_a は圏同型である． □

weighted limit の性質より次の定理が成り立つ．

定理 4. $\mathcal{J}$ を small 2-category, $W\colon\mathcal{J}\to\mathbf{CAT}$, $T\colon\mathcal{J}\to\mathcal{C}$ を strict 2-functor, $a\in\mathcal{C}$ とする．このとき $\mathcal{C}(a,\lim^W T)\cong\lim^W(\mathcal{C}(a,T-))$ である． □

例 5. $\mathcal{J}=\mathbb{0}$ の場合の weighted limit を 2-終対象という．$\mathcal{J}=\mathbb{0}$ の場合 $[\mathcal{J},\mathbf{CAT}]=\mathbb{1}$ である．故に $\mathcal{C}$ の 2-終対象とは，任意の $a\in\mathcal{C}$ に対して $\mathcal{C}(a,x)=\mathbb{1}$ となる対象 x のことである．即ち x は次の条件を満たす．

- 任意の $a\in\mathcal{C}$ に対して，1-morphsim $!\colon a\to x$ が一意に存在する．
- $\beta\colon !\Rightarrow !\colon a\to x$ を 2-morphism とするとき $\beta=\mathrm{id}_!$ である． □

例 6. $\mathcal{J}$ が小圏で $W=\Delta\mathbb{1}$ の場合．$\sigma\colon\Delta\mathbb{1}\Rightarrow\mathcal{C}(a,T-)$ を cylinder とすると $j\in\mathcal{J}$ に対して $\sigma_j\colon\mathbb{1}\to\mathcal{C}(a,Tj)$ は関手である．σ の自然性から $\mathcal{J}$ の射 $k\colon i\to j$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & \mathcal{C}(a,Ti) \arrow[d, "Tk\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(a,Tj)
\end{tikzcd}$$

よって $f_j := \sigma_j(*)\colon a\to Tj$ と置けば $Tk\circ f_i = f_j$ である．

$$\begin{tikzcd}
 & Fi \arrow[dd, "Tk"] \\
a \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "\shortparallel"] & \\
 & Fj
\end{tikzcd}$$

このような族 $\{f_j\colon a\to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone と呼ぶことにする．逆に cone があれば cylinder $\sigma\colon\Delta\mathbb{1}\Rightarrow\mathcal{C}(a,T-)$ が得られる．故にこの場合 cylinder を cone と同一視することができる．従ってこの場合の weighted limit とは「普遍性」を持つ cone のことである．

$\lim^{\Delta\mathbb{1}}T$ が存在するとして，その unit を $\eta\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(\lim^{\Delta\mathbb{1}}T, T-)$ とし，η に対応する cone を $\{p_j\colon \lim^{\Delta\mathbb{1}}T \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ とする．$\{f_j\colon a \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone として対応する cylinder を $\sigma\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ とすれば 1 次元的普遍性により $h\colon a \to \lim^{\Delta\mathbb{1}}T$ が一意に存在して $\sigma = (Gh)\,\widehat{\circ}\,\eta$ となる．即ち $j \in \mathcal{J}$ に対して $\sigma_j = (- \bullet h) \circ \eta_j\colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(a, Tj)$ は関手である．故に $* \in \mathbb{1}$ の行き先を考えれば $f_j = \sigma_j(*) = \eta_j(*) \circ h = p_j \circ h$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
 & & Ti \arrow[dd, "Tk"] \\
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[urr, bend left, "f_i"] \arrow[drr, bend right, "f_j"'] & \lim^{\Delta\mathbb{1}}T \arrow[ur, "p_i"'] \arrow[dr, "p_j"] \arrow[r, phantom, "\parallel"] & {} \\
 & & Tj
\end{tikzcd}
$$

次に $\{f_j\colon a \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ と $\{f'_j\colon a \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone として，これら対応する cylinder を $\sigma, \sigma'\colon \Delta\mathbb{1} \Rightarrow \mathcal{C}(a, T-)$ として上の方法で得られる 1-morphism を $h, h'\colon a \to \lim^{\Delta\mathbb{1}}T$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] & \lim^{\Delta\mathbb{1}}T \arrow[d, "p_j"] \\
 & Tj
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h'"] \arrow[dr, bend right, "f'_j"'] & \lim^{\Delta\mathbb{1}}T \arrow[d, "p_j"] \\
 & Tj
\end{tikzcd}
$$

$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \sigma'$ を modification とすると $\Gamma_j\colon \sigma_j \Rightarrow \sigma'_j\colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(a, Tj)$ は自然変換であり，$\theta_j := (\Gamma_j)_*\colon f_j \Rightarrow f'_j\colon a \to Tj$ は C の 2-morphism となる．Γ が modification だから等式

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_i"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{C}(a, Ti) \arrow[d, "Tk\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_j"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(a, Tj)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_i"] \arrow[r, bend right, "\sigma'_i"'] \arrow[r, phantom, "\Gamma_i\Downarrow"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] \arrow[dr, phantom, "="] & \mathcal{C}(a, Ti) \arrow[d, "Tk\bullet-"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, bend right, "\sigma'_j"'] & \mathcal{C}(a, Tj)
\end{tikzcd}
$$

が成り立つ．故に $\theta_j = Tk \bullet \theta_i$ となることが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
 & Ti \arrow[dd, "Tk"] \\
a \arrow[ur, bend left=40, "f'_i"] \arrow[ur, bend right, "f_i"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta_i"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] & \\
 & Tj
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Ti \arrow[dd, "Tk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[dr, bend left, "f'_j"] \arrow[dr, bend right=40, "f_j"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta_j"] & \\
 & Tj
\end{tikzcd}
$$

逆にこのような $\{\theta_j\colon \tau_j \Rightarrow \tau'_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ があれば modification $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \sigma'$ が得られるから，Γ と $\{\theta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が対応することが分かる．このような $\{\theta_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が存在するとき，2 次元的普

遍性から $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して $(G\beta) \mathbin{\widehat{\bullet}} \eta = \Gamma$ となる．このとき $j \in \mathcal{J}$ に対して $(G\beta)_j \bullet \eta_j = \Gamma_j$ となるから $p_j \bullet \beta = \theta_j$ である．

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & \lim^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[r, "p_j"] & Tj
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f'_j"] \arrow[r, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta_j"] & Tj
\end{tikzcd}
$$

以上をまとめると，$\mathcal{J}$ が小圏で $W = \Delta\mathbb{1}$ の場合の weighted limit とは，対象 $\lim^{\Delta\mathbb{1}} T$ と cone $p = \{p_j \colon \lim^{\Delta\mathbb{1}} T \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ の組 $\langle \lim^{\Delta\mathbb{1}} T, p\rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

- (1 次元的普遍性) cone $\{f_j \colon a \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ に対して $h\colon a \to \lim^{\Delta\mathbb{1}} T$ が一意に存在して，任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[rr, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\parallel"] & \lim^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[r, "p_j"] & Tj
\end{tikzcd}
$$

  となる．

- (2 次元的普遍性) $\{f_j \colon a \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ と $\{f'_j \colon a \to Tj\}_{j\in\mathcal{J}}$ を cone として，これらから 1 次元的普遍性で得られる 1-morphism を $h, h' \colon a \to \lim^{\Delta\mathbb{1}} T$ とする．2-morphism の族 $\{\theta_j \colon f_j \Rightarrow f'_j\}_{j\in\mathcal{J}}$ が，任意の $k\colon i \to j$ に対して等式

$$
\begin{tikzcd}
 & Ti \arrow[dd, "Tk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[ur, bend right, "f_i"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta_i"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "/\!/"] & \\
 & Tj
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & Ti \arrow[dd, "Tk"] \\
a \arrow[ur, bend left, "f'_i"] \arrow[dr, bend left, "f'_j"] \arrow[dr, bend right, "f_j"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\theta_j"] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "/\!/"] & \\
 & Tj
\end{tikzcd}
$$

  を満たすとき，2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して，任意の $j \in \mathcal{J}$ に対して

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & \lim^{\Delta\mathbb{1}} T \arrow[r, "p_j"] & Tj
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f'_j"] \arrow[r, bend right, "f_j"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta_j"] & Tj
\end{tikzcd}
$$

  となる． $\square$

例 7. 例 6 の特別な場合として，$\mathcal{J}$ が

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[r] & j \\ & i_0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

の場合を考える．(この場合の weighted limit を strict 2-pullback という．) $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$T\colon \begin{tikzcd} i_1 \arrow[r] & j \\ & i_0 \arrow[u] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "g"] & b \\ & a_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

で定義するとき，これの strict 2-pullback とは，図式

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "g"] & b \\ c \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

であって「普遍性」を満たすものである．例 6 によれば，この「普遍性」は次のようになる．

- (1 次元的普遍性) 任意の

$$\begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "g"] & b \\ x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

  に対して，ある 1-morphism $h\colon x \to c$ が一意に存在して $p_i \circ h = q_i$ となる．

$$\begin{tikzcd} & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\ & c \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\ x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] \end{tikzcd}$$

- (2 次元的普遍性) 図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1'"] \arrow[r, "q_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\rotatebox{-45}{$=$}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\rotatebox{-45}{$=$}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

に 1 次元的普遍性により対応する 1-morphism を $h, h' \colon x \to c$ とする．θ, ξ が等式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\rotatebox{-45}{$=$}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "\rotatebox{-45}{$=$}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

を満たすならば $\beta \colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
c \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left, "h'"] \arrow[u, bend right, "h"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
\\
x \arrow[uu, bend left, "q_1'"] \arrow[uu, bend right, "q_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & c \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

$\square$

例 **8.** 2-category $\mathcal{J}$ を

$$
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

とする．strict 2-functor $W \colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$, $T \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$
W \colon
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "1"] & \mathbb{2} \\
& \mathbb{1} \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}
$$

$$
T \colon
\begin{tikzcd}
i_1 \arrow[r] & j \\
& i_0 \arrow[u]
\end{tikzcd}
\longmapsto
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

で定義する．このときの weighted limit を f, g のコンマ対象といい，$f \downarrow g$ で表す．

$x \in \mathcal{C}$ を対象として $\sigma \colon W \Rightarrow \mathcal{C}(x, T-)$ を cylinder とする．すると $\sigma_{i_0} \colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(x, a_0)$，$\sigma_{i_1} \colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(x, a_1)$，$\sigma_j \colon \mathbb{2} \to \mathcal{C}(x, b)$ は関手であり，また σ の自然性から次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] & \mathcal{C}(x, a_0) \arrow[d, "f \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, "\sigma_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] & \mathcal{C}(x, a_1) \arrow[d, "g \bullet -"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, "\sigma_j"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
$$

故に $q_0 := \sigma_{i_0}(*)$，$q_1 := \sigma_{i_1}(*)$ と定義すれば $q_k \colon x \to a_k$ であり，また $\sigma_j(0) = f \circ q_0$，$\sigma_j(1) = g \circ q_1$ である．故に $\tau := \sigma_j(l) \colon f \circ q_0 \Rightarrow g \circ q_1$ とすれば次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \tau"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

これにより σ と τ を同一視することができる．故に $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ のコンマ対象とは，対象 $f \downarrow g \in \mathcal{C}$，1-morphism $p_0 \colon a_0 \to b$，$p_1 \colon a_1 \to b$，2-morphism $\eta \colon f \circ p_0 \Rightarrow g \circ p_1$ の 4 つ組 $\langle f \downarrow g, p_0, p_1, \eta \rangle$，即ち図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

であって「普遍性」を満たすものであると言える．

容易に分かるように，1 次元的普遍性は次のようになる: 別の組 $\langle x, q_0, q_1, \sigma \rangle$ が同じ条件を満たすならば，1-morphism $h \colon x \to f \downarrow g$ が一意に存在して次の等号が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] \sigma & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "q_1"] \arrow[urr, bend right, "q_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

次に 2 次元的普遍性についてみる．$x \in \mathcal{C}$ を対象として $\sigma, \sigma' \colon W \Rightarrow \mathcal{C}(x, T-)$ を cylinder とする．即ち図式

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\Nwarrow}{\sigma}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, "q_1'"] \arrow[r, "q_0'"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\Nwarrow}{\sigma'}"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

である．これらに 1 次元的普遍性で対応する $h, h' \colon x \to f \downarrow g$ を取る．$\Gamma \colon \sigma \Rrightarrow \sigma'$ を modification とする．

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{i_0} &: \sigma_{i_0} \Rightarrow \sigma'_{i_0} \colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(x, a_0), \\
\Gamma_{i_1} &: \sigma_{i_1} \Rightarrow \sigma'_{i_1} \colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}(x, a_1), \\
\Gamma_j &: \sigma_j \Rightarrow \sigma'_j \colon \mathbb{2} \to \mathcal{C}(x, b)
\end{aligned}
$$

は自然変換である．$\theta := (\Gamma_{i_0})_* \colon q_0 \Rightarrow q_0'$，$\xi := (\Gamma_{i_1})_* \colon q_1 \Rightarrow q_1'$ と置く．また modification の定義より，次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_0}"] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{/\!/}{\sigma_j}"] & \mathcal{C}(x, a_0) \arrow[d, "f\bullet-"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend left, ""{name=U}] \arrow[r, bend right, "\sigma_j'"', ""{name=D}] \arrow[phantom, from=U, to=D, "\Gamma_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_0}", ""{name=U}] \arrow[r, bend right, ""{name=D}] \arrow[phantom, from=U, to=D, "\Gamma_{i_0}\Downarrow"] \arrow[d, "0"'] \arrow[dr, phantom, "\underset{/\!/}{\sigma_{i_0}'}"] & \mathcal{C}(x, a_0) \arrow[d, "f\bullet-"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend right, "\sigma_j'"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_1}"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{/\!/}{\sigma_j}"] & \mathcal{C}(x, a_1) \arrow[d, "g\bullet-"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend left, ""{name=U}] \arrow[r, bend right, "\sigma_j'"', ""{name=D}] \arrow[phantom, from=U, to=D, "\Gamma_j\Downarrow"] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[r, bend left, "\sigma_{i_1}", ""{name=U}] \arrow[r, bend right, ""{name=D}] \arrow[phantom, from=U, to=D, "\Gamma_{i_1}\Downarrow"] \arrow[d, "1"'] \arrow[dr, phantom, "\underset{/\!/}{\sigma_{i_1}'}"] & \mathcal{C}(x, a_1) \arrow[d, "g\bullet-"] \\
\mathbb{2} \arrow[r, bend right, "\sigma_j'"'] & \mathcal{C}(x, b)
\end{tikzcd}
$$

よって $(\Gamma_j)_0 = f \bullet \theta$，$(\Gamma_j)_1 = g \bullet \xi$ である．また $\Gamma_j \colon \sigma_j \Rightarrow \sigma'_j$ が自然変換だから，次の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
\sigma_j(0) \arrow[r, "(\Gamma_j)_0"] \arrow[d, "\sigma_j(l)"'] & \sigma'_j(0) \arrow[d, "\sigma'_j(l)"] \\
\sigma_j(1) \arrow[r, "(\Gamma_j)_1"'] & \sigma'_j(1)
\end{tikzcd}
$$

これは書き換えると

$$
\begin{tikzcd}
f \circ q_0 \arrow[r, "f \bullet \theta"] \arrow[d, "\sigma"'] & f \circ q_0' \arrow[d, "\sigma'"] \\
g \circ q_1 \arrow[r, "g \bullet \xi"'] & g \circ q_1'
\end{tikzcd}
$$

となる．即ち

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[u, bend right, "q_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "q_1'"] \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \theta"] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \sigma'"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

である．このとき 2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して $p_1 \bullet \beta = \xi$，$p_0 \bullet \beta = \theta$ が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left, "h'"] \arrow[u, bend right, "h"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
\\
x \arrow[uu, bend left, "q_1'"] \arrow[uu, bend right, "q_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \beta"] & f \downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "q_0'"] \arrow[r, bend right, "q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

□

命題 9. コンマ圏は **CAT** におけるコンマ対象である．

証明. 関手 $F\colon A_0 \to B$，$G\colon A_1 \to B$ のコンマ圏 $F \downarrow G$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
F \downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow \eta"] & A_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

これが 1 次元的普遍性を持つことは「コンマ圏」の PDF で既に示したから 2 次元的普遍性を示せばよい．

そのために次の等式が成り立つとする．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
X \arrow[u, bend left, "Q'_1"] \arrow[u, bend right, "Q_1"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\xi"] \arrow[r, bend right, "Q_0"'] & A_0 \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
X \arrow[u, bend left, "Q'_1"] \arrow[r, bend left, "Q'_0"] \arrow[r, bend right, "Q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & A_0 \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma'"]
\end{tikzcd}
$$

1 次元的普遍性から $H, H' \colon X \to F\downarrow G$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
 & F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & A_0 \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\eta"] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q_1"] \arrow[ur, dashed, "H"'] \arrow[urr, bend right, "Q_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
 & A_0 \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma"] \\
X \arrow[uu, bend left, "Q_1"] \arrow[ur, bend right, "Q_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
 & F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \arrow[r, "P_0"'] & A_0 \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\eta"] \\
X \arrow[uur, bend left, "Q'_1"] \arrow[ur, dashed, "H'"'] \arrow[urr, bend right, "Q'_0"'] & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B \\
 & A_0 \arrow[u, "F"'] \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow\sigma'"] \\
X \arrow[uu, bend left, "Q'_1"] \arrow[ur, bend right, "Q'_0"'] &
\end{tikzcd}
$$

$x \in X$ に対して $Hx = \langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x\rangle$，$H'x = \langle Q'_0x, Q'_1x, \sigma'_x\rangle$ だった．一方上記の等式から $G\xi_x \circ \sigma_x = \sigma'_x \circ F\theta_x$ である．

$$
\begin{tikzcd}
Q_0x \arrow[d, "\theta_x"'] \\
Q'_0x
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FQ_0x \arrow[r, "\sigma_x"] \arrow[d, "F\theta_x"'] & GQ_1x \arrow[d, "G\xi_x"] \\
FQ'_0x \arrow[r, "\sigma'_x"'] & GQ'_1x
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q_1x \arrow[d, "\xi_x"'] \\
Q'_1x
\end{tikzcd}
$$

よって $F\downarrow G$ の射 $\langle\theta_x, \xi_x\rangle \colon Hx = \langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x\rangle \to \langle Q'_0x, Q'_1x, \sigma'_x\rangle = H'x$ が得られる．$\beta_x := \langle\theta_x, \xi_x\rangle$ と置けばこれは自然変換 $\beta \colon H \Rightarrow H'$ を与える．

$\because$) $f\colon x \to x'$ を X の射とする．定義から，図式

$$\begin{tikzcd}
\langle Q_0x, Q_1x, \sigma_x\rangle \arrow[r, "\langle \theta_x, \xi_x\rangle"] \arrow[d, "\langle Q_0f, Q_1f\rangle"'] & \langle Q'_0x, Q'_1x, \sigma'_x\rangle \arrow[d, "\langle Q'_0f, Q'_1f\rangle"] \\
\langle Q_0x', Q_1x', \sigma_{x'}\rangle \arrow[r, "\langle \theta_{x'}, \xi_{x'}\rangle"'] & \langle Q'_0x', Q'_1x', \sigma'_{x'}\rangle
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．その為には

$$\begin{tikzcd}
Q_0x \arrow[r, "\theta_x"] \arrow[d, "Q_0f"'] & Q'_0x \arrow[d, "Q'_0f"] \\
Q_0x' \arrow[r, "\theta_{x'}"'] & Q'_0x'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Q_1x \arrow[r, "\xi_x"] \arrow[d, "Q_1f"'] & Q'_1x \arrow[d, "Q'_1f"] \\
Q_1x' \arrow[r, "\xi_{x'}"'] & Q'_1x'
\end{tikzcd}$$

が可換であればよいが，それは θ, ξ が自然変換だから明らか．

$P_1(\beta)_x = P_1(\beta_x) = \xi_x$，$P_0(\beta)_x = P_0(\beta_x) = \theta_x$ だから等式

$$\begin{tikzcd}
A_1 \\
F\downarrow G \arrow[u, "P_1"] \\
X \arrow[u, bend left, "H'"] \arrow[u, bend right, "H"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
A_1 \\
\\
X \arrow[uu, bend left, "Q'_1"] \arrow[uu, bend right, "Q_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "H'"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & F\downarrow G \arrow[r, "P_0"] & A_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left, "Q'_0"] \arrow[r, bend right, "Q_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & A_0
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．このような β が一意であることは明らかである． $\square$

従って定理 4 により

命題 10. $f\colon a_0 \to b$，$g\colon a_1 \to b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $\langle f\downarrow g, p_0, p_1, \theta\rangle$ が存在するとする．このとき任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して圏同型 $\mathcal{C}(x, f\downarrow g) \cong \mathcal{C}(x,f)\downarrow\mathcal{C}(x,g)$ が成り立つ．(右辺はコンマ圏である．) $\square$

例 11. $\mathcal{J} = \mathbb{1}$ の場合の weighted limit を power object というのであった．$W\colon \mathbb{1} \to$ **CAT**，$T\colon \mathbb{1} \to \mathcal{C}$ を strict 2-functor として $X := W(*)$，$c := T(*) \in \mathcal{C}$ とする．このとき power object $X \pitchfork c$ とは，$a \in \mathcal{C}$ について自然な同型 $\mathcal{C}(a, X \pitchfork c) \cong \mathbf{CAT}(X, \mathcal{C}(a,c))$ を満たすものである．この場合の cylinder とは関手 $X \to \mathcal{C}(a,c)$ のことである．

$X = \mathbb{2}$ の場合を考える．この場合の cylinder は 2-mophism $\sigma\colon q_0 \Rightarrow q_1\colon a \to c$ と同

一視できる．故に power object $\mathbb{2} \pitchfork c$ とは，2-mophism $\eta\colon p_0 \Rightarrow p_1\colon \mathbb{2} \pitchfork c \to c$ であって次の普遍性を満たすものである．

- (1 次元的普遍性) 任意の 2-mophism $\sigma\colon q_0 \Rightarrow q_1\colon a \to c$ に対して $h\colon a \to \mathbb{2} \pitchfork c$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, dashed, "h"] & \mathbb{2} \pitchfork c \arrow[r, bend left, "p_1"] \arrow[r, bend right, "p_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta"] & c \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "q_1"] \arrow[rr, bend right, "q_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\sigma"] & & c \end{tikzcd}$$

  となる．

- (2 次元的普遍性) 任意の 2-mophism $\sigma\colon q_0 \Rightarrow q_1\colon a \to c$, $\sigma'\colon q_0' \Rightarrow q_1'\colon a \to c$ を取り，これらに 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism を $h, h'\colon a \to \mathbb{2} \pitchfork c$ とする．2-morphism $\theta\colon q_0 \Rightarrow q_0'$ と $\xi\colon q_1 \Rightarrow q_1'$ が

$$\begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left=50, "q_1'"] \arrow[rr, "q_1"] \arrow[rr, bend right=50, "q_0"'] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Uparrow\xi"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Uparrow\sigma"] & & c \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left=50, "q_1'"] \arrow[rr, "q_0'"] \arrow[rr, bend right=50, "q_0"'] \arrow[rr, phantom, bend left=25, "\Uparrow\sigma'"] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Uparrow\theta"] & & c \end{tikzcd}$$

  を満たすならば，$\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & \mathbb{2} \pitchfork c \arrow[r, "p_0"] & c \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "q_0'"] \arrow[rr, bend right, "q_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta"] & & c \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & \mathbb{2} \pitchfork c \arrow[r, "p_1"] & c \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "q_1'"] \arrow[rr, bend right, "q_1"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\xi"] & & c \end{tikzcd}$$

  となる．

従って $\mathbb{2} \pitchfork c = \mathrm{id}_c \downarrow \mathrm{id}_c$ である． $\square$

命題 12. $\langle f \downarrow g, p_0, p_1, \eta \rangle$ をコンマ対象とする．このとき次の図式において

左の四角が strict 2-pullback $\Longleftrightarrow$ 外側の四角がコンマ対象．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\ d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

証明. ($\Longrightarrow$) まず 1 次元的普遍性を示すため，次の図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & \arrow[r, phantom, "\sigma\,\Nwarrow"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

$f \downarrow g$ の 1 次元的普遍性から，次の s が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\eta\,\Nwarrow"] & b \\
 & \arrow[r, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, dashed, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & \arrow[r, phantom, "\sigma\,\Nwarrow"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

strict 2-pullback の 1 次元的普遍性から，次の t が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] \arrow[dr, phantom, "="] & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[dr, phantom, "\eta\,\Nwarrow"] & b \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "t"] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & &
\end{tikzcd}
$$

この t の一意性も容易に分かるから，1 次元的普遍性が分かった．2 次元的普遍性を示すため，次の等式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\sigma\,\Nwarrow"] & b \\
x \arrow[u, bend left=40, "k_1'"] \arrow[u, bend right=40, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[rr, bend right, "k_0"'] & & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, phantom, "\Nwarrow\,\sigma'"] & b \\
x \arrow[u, bend left, "k_1'"] \arrow[rr, bend left, "k_0'"] \arrow[rr, bend right, "k_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta"] & & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

σ, σ' から上記のように s, t, s', t' を取ると次の等式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\xi"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & \arrow[u, phantom, "="] & \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "s'"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & \arrow[u, phantom, "="] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] &
\end{tikzcd}
$$

左辺を書き換えて次の等式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& \arrow[u, phantom, "\Uparrow k\bullet\xi"] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[urr, bend right, "s"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & & \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
& d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "s'"'] \arrow[urrr, bend right, "k_0"'] & \arrow[u, phantom, "="] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\theta"] &
\end{tikzcd}
$$

よって $f\downarrow g$ の 2 次元的普遍性から，$\beta\colon s \Rightarrow s'$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \\
f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \\
x \arrow[u, bend left=50, "s'"] \arrow[u, bend right=50, "s"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a_1 \\
\\
x \arrow[uu, bend left=40, "k\circ k_1'"] \arrow[uu, bend right=40, "p_1\circ s"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{k\bullet\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "s'"] \arrow[r, bend right, "s"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

このとき次の等式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
& d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\xi"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[urr, bend right, "s"'] & \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
& d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1'"] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "s"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\beta"] &
\end{tikzcd}
$$

よって strict 2-pullback の普遍性から $\gamma\colon t \Rightarrow t'$ が存在して次の等式を満たす.

$$
\begin{tikzcd}
c \\
d \arrow[u, "q_1"] \\
x \arrow[u, bend left=40, "t'"] \arrow[u, bend right=40, "t"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\gamma}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \\
\\
x \arrow[uu, bend left=30, "k_1'"] \arrow[uu, bend right=30, "k_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\gamma"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "s'"] \arrow[r, bend right, "s"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\gamma"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

である. このような γ の一意性も分かるから, 2 次元的普遍性が成り立つことが分かった.

($\Longleftarrow$) まず strict 2-pullback の 1 次元的普遍性を示すため, 次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="]
\end{tikzcd}
$$

コンマ対象 d の 1 次元的普遍性から次の t を得る.

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urrr, bend right, "p_0\circ k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[urr, phantom, "="]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
 & & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="]
\end{tikzcd}
$$

このときコンマ対象 $f{\downarrow}g$ の 1 次元的普遍性から $q_0 \circ t = k_0$ となるから，次の図式を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, "t"'] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] \arrow[u, phantom, "="] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "="] & &
\end{tikzcd}
$$

コンマ対象 d の 1 次元的普遍性から，このような t の一意性も分かる．故に strict 2-pullback の 1 次元的普遍性が成り立つことが分かった．

2 次元的普遍性を示すため，次の等式が成り立つとする．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[u, bend left=40, "k'_1"] \arrow[u, bend right=40, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[u, bend left=40, "k'_1"] \arrow[r, bend left, "k'_0"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
$$

上記で示した通り次の t, t' を得る．

$$
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k_1"] \arrow[ur, dashed, "t"'] \arrow[urr, bend right, "k_0"'] & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
 & d \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \\
x \arrow[uur, bend left, "k'_1"] \arrow[ur, dashed, "t'"'] \arrow[urr, bend right, "k'_0"'] & &
\end{tikzcd}
$$

等式

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left=40, "k'_1"] \arrow[u, bend right=40, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\Leftarrow}{\xi}"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \arrow[r, "g"] & b \\
x \arrow[u, bend left=40, "k'_1"] \arrow[r, bend left, "k'_0"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow g \arrow[u, "p_1"'] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow\eta"] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

が成り立つから，コンマ対象 d の 2 次元的普遍性により $\beta \colon s \Rightarrow s'$ が存在して次の等式が

成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
c \\
d \arrow[u, "q_1"] \\
x \arrow[u, bend left=40, "t'"] \arrow[u, bend right=40, "t"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\beta}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
c \\
\\
x \arrow[uu, bend left=30, "k_1'"] \arrow[uu, bend right=30, "k_1"'] \arrow[uu, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "k_0'"] \arrow[rr, bend right, "k_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta"] & & f\downarrow g \arrow[r, "p_0"] & a_0
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$
\begin{tikzcd}
 & & a_1 \\
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & d \arrow[r, "q_0"'] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & d \arrow[u, "q_1"]
\end{tikzcd}
$$

$$
=
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "k"] & a_1 \\
x \arrow[u, bend left=40, "k_1'"] \arrow[u, bend right=40, "k_1"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\xi}{\Leftarrow}"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & a_1 \\
x \arrow[r, bend left, "k_0'"] \arrow[r, bend right, "k_0"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] & f\downarrow g \arrow[u, "p_1"']
\end{tikzcd}
$$

となるから $f\downarrow g$ の 2 次元的普遍性より

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "t'"] \arrow[r, bend right, "t"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & d \arrow[r, "q_0"] & f\downarrow g
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "k_0'"] \arrow[rr, bend right, "k_0"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta"] & & f\downarrow g
\end{tikzcd}
$$

が分かる．β の一意性も分かるので，strict 2-pullback の 2 次元的普遍性が成り立つことが分かった． □

系 13. 任意の strict 2-pullback が存在し，また任意の $a \in \mathcal{C}$ に対して $\mathbb{2} \pitchfork a$ が存在するとする．このとき任意のコンマ対象が存在する．

証明. $\mathbb{2} \pitchfork a = \mathrm{id}_a \downarrow \mathrm{id}_a$ だからコンマ対象 $\mathrm{id}_a \downarrow \mathrm{id}_a$ が存在する．$f\colon a_0 \to b$，$g\colon a_1 \to b$ とする．$p_0\colon \mathrm{id}_b \downarrow \mathrm{id}_b \to b$ と f の strict 2-pullback を取ればそれはコンマ対象 $f \downarrow \mathrm{id}_b$ と

なる．更に $p_1 \circ q_1$ と g の strict 2-pullback を取れば $f \downarrow g$ を得る．

$$
\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[r, "g"] & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
 & \mathrm{id}_b \downarrow \mathrm{id}_b \arrow[u, "p_1"] \arrow[r, "p_0"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow"] & b \arrow[u, "\mathrm{id}_b"'] \\
f \downarrow g \arrow[uu] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "="] & f \downarrow \mathrm{id}_b \arrow[u, "q_1"] \arrow[r, "q_0"'] \arrow[ur, phantom, "="] & a_0 \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

例 14. **CAT** では $\mathrm{id}_B \downarrow \mathrm{id}_B = \mathbb{2} \pitchfork B = \mathrm{Mor}(B)$ であった．よって関手 $F\colon A_0 \to B$, $G\colon A_1 \to B$ のコンマ圏 $F \downarrow G$ は次の図式の極限として得られる．

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "G"] & B & \\
 & \mathrm{Mor}(B) \arrow[u, "\mathrm{cod}"] \arrow[r, "\mathrm{dom}"'] & B \\
 & & A_0 \arrow[u, "F"']
\end{tikzcd}
$$

$\square$

例 15. 2-category $\mathcal{J}$ を

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & j
\end{tikzcd}
$$

とする．strict 2-functor $W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$, $T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$
W\colon\ i \rightrightarrows j \quad \longmapsto \quad \mathbb{1} \underset{1}{\overset{0}{\rightrightarrows}} \mathbb{2}
$$

$$
T\colon\ i \rightrightarrows j \quad \longmapsto \quad a \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} b
$$

で定義する．このときの weighted limit を f, g の strict inserter という．即ち，f, g の strict inserter とは対象 $c \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $p\colon c \to a$，2-morphism $\eta\colon f \circ p \Rightarrow g \circ p$

の 3 つ組 $\langle c, p, \eta\rangle$，即ち図式

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "g"] & b \\
c \arrow[u, "p"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\eta"] & a \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

であって以下の「普遍性」を満たすものである．

- (1 次元的普遍性) 任意の

  $$\begin{tikzcd}
  a \arrow[r, "g"] & b \\
  x \arrow[u, "q"] \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\sigma"] & a \arrow[u, "f"']
  \end{tikzcd}$$

  に対して，1-morphism $h\colon x \to c$ が一意に存在して次の等号が成り立つ．

  $$\begin{tikzcd}
  & a \arrow[r, "g"] & b \\
  & c \arrow[u, "p"] \arrow[r, "p"'] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\eta"] & a \arrow[u, "f"'] \\
  x \arrow[uur, bend left, "q"] \arrow[ur, dashed, "h"'] \arrow[urr, bend right, "q"'] & &
  \end{tikzcd}
  =
  \begin{tikzcd}
  & a \arrow[r, "g"] & b \\
  & & a \arrow[u, "f"'] \arrow[ul, phantom, "\nwarrow\sigma"] \\
  x \arrow[uur, bend left, "q"] \arrow[urr, bend right, "q"'] & &
  \end{tikzcd}$$

- (2 次元的普遍性) 任意の図式

  $$\begin{tikzcd}
  a \arrow[r, "g"] & b \\
  x \arrow[u, "q"] \arrow[r, "q"'] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\sigma"] & a \arrow[u, "f"']
  \end{tikzcd}
  \qquad
  \begin{tikzcd}
  a \arrow[r, "g"] & b \\
  x \arrow[u, "q'"] \arrow[r, "q'"'] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\sigma'"] & a \arrow[u, "f"']
  \end{tikzcd}$$

  を取り，これらに 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism を $h, h'\colon x \to c$ とする．このとき 2-morphism θ が等式

  $$\begin{tikzcd}
  a \arrow[r, "g"] & b \\
  x \arrow[u, bend left, "q'"] \arrow[u, bend right, "q"'] \arrow[u, phantom, "\Leftarrow\theta"] \arrow[r, bend right, "q"'] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\sigma"] & a \arrow[u, "f"']
  \end{tikzcd}
  =
  \begin{tikzcd}
  a \arrow[r, "g"] & b \\
  x \arrow[u, bend left, "q'"] \arrow[r, bend left, "q'"] \arrow[r, bend right, "q"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\theta"] \arrow[ur, phantom, "\nwarrow\sigma'"] & a \arrow[u, "f"']
  \end{tikzcd}$$

を満たすならば，2-morphism $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, bend left, "h'"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta"] & c \arrow[r, "p"] & a
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, bend left, "q'"] \arrow[rr, bend right, "q"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow\theta"] & & a
\end{tikzcd}
$$

となる． □

例 16. 2-category $\mathcal{J}$ を

$$
\begin{tikzcd}
i \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\quad\Downarrow"] & & j
\end{tikzcd}
$$

とする．strict 2-functor $W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$
W\colon \begin{tikzcd}
i \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\quad\Downarrow"] & & j
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[rr, bend right, "1"'] \arrow[rr, phantom, "l\Downarrow\quad\Downarrow l"] & & \mathbb{2}
\end{tikzcd}
$$

$$
T\colon \begin{tikzcd}
i \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\quad\Downarrow"] & & j
\end{tikzcd}
\quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\sigma\Downarrow\quad\Downarrow\tau"] & & b
\end{tikzcd}
$$

で定義する．このときの weighted limit を σ, τ の strict equifier という．即ち，σ, τ の strict equifier とは対象 $c \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $p\colon c \to a$ の 2 つ組 $\langle c, p\rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

- 次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
c \arrow[r, "p"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & b
\end{tikzcd}
$$

- (1 次元的普遍性) $q\colon x \to a$ が 1-morphism で

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "q"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
x \arrow[r, "q"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & b
\end{tikzcd}
$$

  ならば，$h\colon x \to c$ が一意に存在して $p \circ h = q$ となる．

$$
\begin{tikzcd}
& c \arrow[r, "p"] & a \\
x \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "q"'] & &
\end{tikzcd}
$$

- (2 次元的普遍性) $q, q' \colon x \to a$ が 1-morphism で

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "q"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, "q"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & b \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "q'"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} x \arrow[r, "q'"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & b \end{tikzcd}$$

を満たすとする．これらに 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism を h, h' とする．このとき 2-morphism $\theta \colon q \Rightarrow q'$ に対して 2-morphsim $\beta \colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[r, "p"] & b \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "q"] \arrow[r, bend right, "q'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & b \end{tikzcd}$$

となる． □

以下 **Iso** で次の圏を表す．

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, bend left, "k"] & 1 \arrow[l, bend left, "k^{-1}"] \end{tikzcd}$$

例 17. 2-category $\mathcal{J}$ を

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j \end{tikzcd}$$

とする．strict 2-functor $W \colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$，$T \colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$W \colon \begin{tikzcd} i \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, bend left, "0"] \arrow[r, bend right, "1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow k"] & \mathbf{Iso} \end{tikzcd}$$

$$T \colon \begin{tikzcd} i \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & j \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b \end{tikzcd}$$

で定義する．このときの weighted limit を σ の strict inverter という．即ち，σ の strict inverter とは対象 $c \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $p \colon c \to a$ の 2 つ組 $\langle c, p \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

- 合成 $\sigma \bullet p$ は同型な 2-morphism である．

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "p"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b \end{tikzcd}$$

- (1 次元的普遍性) $q\colon x \to a$ が 1-morphism で $\sigma \bullet q$ が同型ならば，$h\colon x \to c$ が一意に存在して $p \circ h = q$ となる．

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[r, "p"] & a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & b \\ x \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[urr, "q"'] & & & \end{tikzcd}$$

- (2 次元的普遍性) $q, q'\colon x \to a$ が 1-morphism で $\sigma \bullet q$，$\sigma \bullet q'$ が同型であるとする．これらに 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism を h, h' とする．このとき 2-morphism $\theta\colon q \Rightarrow q'$ に対して 2-morphsim $\beta\colon h \Rightarrow h'$ が一意に存在して

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, bend right, "h'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & a \arrow[r, "p"] & b \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} a \arrow[rr, bend left, "q"] \arrow[rr, bend right, "q'"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\theta"] & & b \end{tikzcd}$$

となる． □

例 18. 2-category $\mathcal{J}$ を

$$\begin{tikzcd} i_1 \arrow[r] & j \\ & i_0 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

とする．strict 2-functor $W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$W\colon \begin{tikzcd} i_1 \arrow[r] & j \\ & i_0 \arrow[u] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "1"] & \mathbf{Iso} \\ & \mathbb{1} \arrow[u, "0"'] \end{tikzcd}$$

$$T\colon \begin{tikzcd} i_1 \arrow[r] & j \\ & i_0 \arrow[u] \end{tikzcd} \longmapsto \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r, "g"] & b \\ & a_0 \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

で定義する．このときの weighted limit を f, g の iso-comma object といい，$f \downarrow^{\cong} g$ で表す． $\square$

例 19. 2-category $\mathcal{J}$ を

$$i \rightrightarrows j$$

とする．strict 2-functor $W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を

$$W\colon\ i \rightrightarrows j \quad \longmapsto \quad \mathbb{1} \overset{0}{\underset{1}{\rightrightarrows}} \mathbf{Iso}$$

$$T\colon\ i \rightrightarrows j \quad \longmapsto \quad a \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} b$$

で定義する．このときの weighted limit を f, g の strict iso-inserter という． $\square$

weighted colimit についても同様である．weighted colimit とは a について自然な同型 $\mathcal{C}(\mathrm{colim}^W T, a) \cong \widehat{\mathcal{J}}(W, \mathcal{C}(T-, a))$ が成り立つ $\mathrm{colim}^W T$ であり，1 次元的普遍性と 2 次元的普遍性を満たす cylinder のことである．

また $\mathbf{CAT}(\mathrm{colim}^W T, C) \cong \lim^W(\mathbf{CAT}(T-, C))$ が成り立つ．

weighted limit の定義に使っている $[\mathcal{J}, \mathbf{CAT}]$ は $\mathbf{CAT}$-豊穣圏としての関手圏，つまり strict 2-functor，strict natural transformation，modification がなす 2-category である．この部分を別の関手圏に変えたものを考えることができる．つまり $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{J}, \mathbf{CAT})$，$\mathrm{Fun}_{\ell}(\mathcal{J}, \mathbf{CAT})$ である．

定義. $\mathcal{J}$ を small 2-category，$W\colon \mathcal{J} \to \mathbf{CAT}$，$T\colon \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ を strict 2-functor，即ち $\mathbf{CAT}$-関手とする．

(1) pseudo limit とは $a \in \mathcal{C}$ に関して自然な圏同型

$$\varphi_a\colon \mathcal{C}(a, \lim^W_{\mathrm{ps}} T) \to \mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{J}, \mathbf{CAT})(W, \mathcal{C}(a, T-))$$

が存在する対象 $\lim^W_{\mathrm{ps}} T \in \mathcal{C}$ である．

(2) lax limit とは $a \in \mathcal{C}$ に関して自然な圏同型

$$\varphi_a\colon \mathcal{C}(a, \lim^W_{\ell} T) \to \mathrm{Fun}_{\ell}(\mathcal{J}, \mathbf{CAT})(W, \mathcal{C}(a, T-))$$

が存在する対象 $\lim^W_{\ell} T \in \mathcal{C}$ である．

pseudo colimit，lax colimit も同様に定義される．

参考文献

[1] G. M. Kelly, elementary observations on 2-Categorical Limits, Bull. Austral. Math. Soc. vol. 39 (1989), 301–317, `http://dx.doi.org/10.1017/S0004972700002781`

[2] G.M. Kelly, Basic Concepts of Enriched Category Theory, Cambridge University Press, Lecture Notes in Mathematics 64 (1982), `http://tac.mta.ca/tac/reprints/articles/10/tr10abs.html`

[3] nLab, `https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage`