

2-category での Kan 拡張

alg-d

http://alg-d.com/math/kan_extension/

2021 年 7 月 24 日

この PDF では \mathcal{C} を strict 2-category とする.

目次

1	随伴・Kan 拡張・忠実充満	1
2	コンマ対象を使った各点 Kan 拡張	17
3	米田構造と各点 Kan 拡張	25
3.1	随伴	30
3.2	y-各点左 Kan 拡張	31
3.3	weighted colimit	36
3.4	普遍随伴	38
3.5	y-忠実充満	40

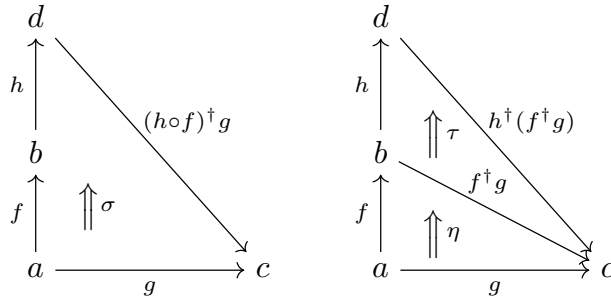
1 随伴・Kan 拡張・忠実充満

定理 1. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$ で, 左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在すると仮定する.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & \uparrow & \searrow f^\dagger g \\ a & \xrightarrow{g} & c \\ & \uparrow \eta & \\ & a & \end{array}$$

このとき $h: b \rightarrow d$ に対して

Kan 拡張 $\langle (h \circ f)^\dagger g, \sigma \rangle$ が存在する \iff Kan 拡張 $\langle h^\dagger(f^\dagger g), \tau \rangle$ が存在する.



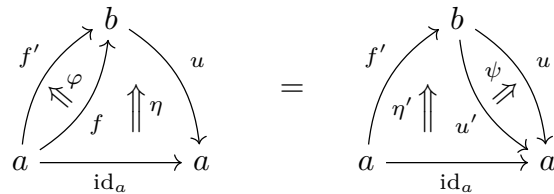
更に, これらが存在するとき $(h \circ f)^\dagger g \cong h^\dagger(f^\dagger g)$, $\sigma = (\tau \bullet f) * \eta$ である.

証明. 略 (通常の手元の Kan 拡張の場合と同様)

□

命題 2. $f \dashv u: a \rightarrow b$, $f' \dashv u': a \rightarrow b$ を随伴とする. このとき 2-morphism $f \Rightarrow f'$ と $u' \Rightarrow u$ は一対一に対応する.

証明. $f \dashv u$, $f' \dashv u'$ の unit をそれぞれ η, η' とする. このとき $u \dashv \text{id}_a = \langle f, \eta \rangle$, $f' \dashv \text{id}_a = \langle u', \eta' \rangle$ である. よって左 Kan 拡張, 左 Kan リフトの普遍性から, 等式



により $\varphi: f \Rightarrow f'$ と $\psi: u' \Rightarrow u$ が一対一に対応する. (即ち, 任意の φ に対して, 一意に ψ が存在して等式が成立し, また任意の ψ に対して一意に φ が存在して等式が成り立つ.)

□

よって圏 $\text{Adj}(a, b)$ を

- 随伴 $f \dashv u: a \rightarrow b$ を対象とする.
- $\text{Hom}_{\text{Adj}(a,b)}(f \dashv u, f' \dashv u') := \text{Hom}_{\mathcal{C}(a,b)}(f, f') = \text{Hom}_{\mathcal{C}(b,a)}(u', u)$

により定義することができる.

命題 3. $f: a_0 \rightarrow b$, $g: a_1 \rightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f \downarrow g$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \end{array}$$

このとき次の条件は同値である.

- (1) 絶対右 Kan リフト $f_{\ddagger}g$ が存在する.
- (2) p_1 が右随伴を持つ.
- (3) 絶対左 Kan 拡張 $p_1^{\dagger}p_0$ が存在する.

証明. (1 \implies 2) $\langle r, \alpha \rangle$ が絶対右 Kan リフト $f_{\ddagger}g$ であるとする.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ & \searrow r & \uparrow f \\ & & a_0 \end{array}$$

コンマ対象の 1 次元的普遍性から次の等式を満たす $u: a_1 \rightarrow f \downarrow g$ を得る.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ \uparrow p_1 & \swarrow \theta & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \\ \uparrow u & & \uparrow r \\ a_1 & & a_0 \end{array} & = & \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ & \swarrow \alpha & \uparrow f \\ & & a_0 \\ \uparrow r & & \uparrow r \\ a_1 & & a_0 \end{array} \end{array}$$

$p_1 \dashv u$ を示せばよい.

$\langle r, \alpha \rangle$ が絶対右 Kan リフトだから, 次の等式を満たす τ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ \uparrow p_1 & \swarrow \alpha & \uparrow f \\ \uparrow \tau & \searrow r & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \end{array} & = & \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ \uparrow p_1 & \swarrow \theta & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \end{array} \end{array}$$

これを書き換えると次の等式を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \alpha \bullet p_1 & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{r \circ p_1} & a_0 \\
 & \uparrow \tau & \\
 & p_0 &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}} & a_0 \\
 & \uparrow & \\
 & p_0 &
 \end{array}$$

$\alpha \bullet p_1$, θ に 1 次元的普遍性で対応する 1-morphism は, 次の図式から $u \circ p_1$, $\text{id}_{f \downarrow g}$ と分かる. (u の取り方から $p_0 \circ u = r$, $p_1 \circ u = \text{id}_{a_1}$ である.)

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \\
 \uparrow u \circ p_1 & & \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{r \circ p_1} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \alpha \bullet p_1 & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{r \circ p_1} & a_0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \\
 \uparrow \text{id}_{f \downarrow g} & & \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}$$

故にコマ対象の 2 次元的普遍性により, 次の等式を満たす $\varepsilon: h \circ p_0 \Rightarrow \text{id}_{f \downarrow g}$ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & & a_1 \\
 p_1 \uparrow & & \uparrow \\
 f \downarrow g & = & p_1 \left(\begin{array}{c} \text{id}_{p_1} \\ \leftarrow \end{array} \right) p_1 \\
 \uparrow u \circ p_1 \left(\begin{array}{c} \eta \\ \leftarrow \end{array} \right) \text{id}_{f \downarrow g} & & \uparrow \\
 f \downarrow g & & f \downarrow g
 \end{array}$$

$$f \downarrow g \xrightarrow{u \circ p_1} f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 = f \downarrow g \xrightarrow{p_0 \circ u \circ p_1} a_0$$

$\varepsilon := \text{id}_{\text{id}_{a_1}} : p_1 \circ u \Rightarrow \text{id}_{a_1}$ として, η, ε が随伴 $p_1 \dashv u$ を与えることを示せばよい.
 まず定義から明らかに

$$\begin{array}{ccc}
 & a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 \\
 p_1 \nearrow & \uparrow \eta & \searrow u & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 & a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 \\
 p_1 \nearrow & \uparrow \text{id}_{p_1} & \searrow p_1 & \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g &
 \end{array}$$

である. 次に

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 u \searrow & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 & \uparrow \eta & \searrow u & \alpha \uparrow & \uparrow p_1 \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 u \searrow & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 & \uparrow \tau & \searrow r & \alpha \uparrow & \uparrow p_1 \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}$$

$$=
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 u \searrow & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 & \uparrow \theta & \uparrow p_1 \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 u \searrow & \uparrow \alpha & \uparrow p_1 \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}$$

だから, α が絶対右 Kan リフトを与えることから

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 \\
 u \searrow & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 & \uparrow \eta & \searrow u \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}
 = \text{id}$$

が分かる. 一方 $p_1 \bullet \eta = \text{id}_{p_1}$ だから明らかに

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 \\
 u \searrow & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 & \uparrow \eta & \searrow u \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g & \xrightarrow{p_1} & a_1
 \end{array}
 = \text{id}$$

である. 従って $f \downarrow g$ の 2 次元的普遍性から

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{\text{id}_{a_1}} & a_1 \\
 u \searrow & \uparrow \varepsilon & \nearrow p_1 & \uparrow \eta & \searrow u \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} & f \downarrow g
 \end{array}
 = \text{id}$$

が分かる.

(2 \implies 3) p_1 が右随伴を持つから, 絶対左 Kan 拡張 $p_1^\dagger p_0$ が存在する.

(3 \implies 1) 絶対左 Kan 拡張 $p_1^\dagger p_0 = \langle l, \eta \rangle$ が存在するから, 次の等式を満たす τ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \searrow \tau & \uparrow f \\
 \uparrow \eta & & \uparrow \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0
 \end{array}$$

$\langle l, \tau \rangle$ が絶対右 Kan リフト $f \downarrow g$ であることを示せばよい. 即ち, 次の右辺のような σ に対して ξ が一意に存在して等式を満たすことを示す.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 k_1 \uparrow & \searrow \tau & \uparrow f \\
 \uparrow \xi & & \uparrow \\
 x & \xrightarrow{k_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 k_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow f \\
 x & \xrightarrow{k_0} & a_0
 \end{array}$$

まず σ に対して $f \downarrow g$ の 1 次元的普遍性から次の $h: x \rightarrow f \downarrow g$ を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 k_1 \uparrow & \searrow \tau & \uparrow f \\
 p_1 \uparrow & & \uparrow \\
 \uparrow \eta & & \uparrow \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \\
 \uparrow h & & \uparrow \\
 x & \xrightarrow{k_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 k_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow f \\
 x & \xrightarrow{k_0} & a_0
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 k_1 \uparrow & \searrow \tau & \uparrow f \\
 p_1 \uparrow & & \uparrow \\
 \uparrow \eta & & \uparrow \\
 f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \\
 \uparrow h & & \uparrow \\
 x & \xrightarrow{k_0} & a_0
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a_1 & \xrightarrow{g} & b \\
 k_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow f \\
 x & \xrightarrow{k_0} & a_0
 \end{array}$$

だから $\xi := \eta \bullet h$ と取ればよい.

ξ の一意性を示すため, ξ が

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ k_1 \uparrow & \swarrow \tau & \uparrow f \\ x & \xrightarrow{k_0} & a_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \xi \\ \uparrow l \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ k_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow f \\ x & \xrightarrow{k_0} & a_0 \end{array}$$

を満たすとする. $\xi := \eta \bullet h$ を示せばよい. 上記の等式を書き換えると次の等式を得る.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ k_1 \uparrow & \swarrow \tau \bullet k_1 & \uparrow f \\ x & \xrightarrow{k_0} & a_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \xi \\ \uparrow l \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ k_1 \uparrow & \swarrow \sigma & \uparrow f \\ x & \xrightarrow{k_0} & a_0 \end{array}$$

$\tau \bullet k_1$ に対して 1 次元的普遍性から得られる 1-morphism を h' とする.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\ x & \xrightarrow{k_0} & a_0 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \xi \\ \uparrow l \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ k_1 \uparrow & \swarrow \tau \bullet k_1 & \uparrow f \\ x & \xrightarrow{k_0} & a_0 \end{array}$$

2 次元的普遍性から次の α を得る.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & \\ p_1 \uparrow & & \\ f \downarrow g & & \\ h' \uparrow \alpha & \leftarrow & h \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_1 & & \\ k_1 \uparrow & \text{id}_{k_1} & k_1 \\ x & & x \end{array} \quad x \xrightarrow{h'} \uparrow \alpha \downarrow f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 \quad = \quad x \xrightarrow{k_0} \uparrow \xi \downarrow l \xrightarrow{p_0} a_0$$

このとき水平合成 $\eta \bullet \alpha$ を 2 通りに考えることで次の等式を得る.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & \\ p_1 \uparrow & & \\ f \downarrow g & & \\ h' \uparrow \alpha & \leftarrow & h \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_1 & & \\ p_1 \uparrow & & \\ f \downarrow g & & \\ h' \uparrow \alpha & \leftarrow & h \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} a_1 & & \\ p_1 \uparrow & & \\ f \downarrow g & & \\ h' \uparrow \alpha & \leftarrow & h \end{array}$$

よって $\eta \bullet h' = \text{id}$ を示せば, $\xi = \eta \bullet h$ が分かる.

τ から $f \downarrow g$ の 1 次元的普遍性で得られる 1-morphism を h'' とする.

明らかに $h'' \circ k_1 = h'$ である. 故に $\eta \bullet h'' = \text{id}$ を示せばよい.

よって $f \downarrow g$ の 2 次元的普遍性から次の β を得る.

$$f \downarrow g \begin{array}{c} \xrightarrow{h'' \circ p_1} \\ \uparrow \beta \\ \xrightarrow{\text{id}_{f \downarrow g}} \end{array} f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 = f \downarrow g \begin{array}{c} \xrightarrow{p_0 \circ h'' \circ p_1} \\ \uparrow \eta \\ \xrightarrow{p_0} \end{array} a_0$$

このとき水平合成 $\eta \bullet \beta$ を 2 通りに考えることで次の等式を得る.

$$\begin{array}{c} a_1 \\ \uparrow p_1 \quad \searrow l \\ f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 \\ \uparrow \eta \\ f \downarrow g \\ \uparrow \text{id} \\ f \downarrow g \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{h'' \circ p_1} \\ \uparrow \beta \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 = \begin{array}{c} a_1 \\ \uparrow p_1 \quad \searrow l \\ f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 \\ \uparrow \eta \\ f \downarrow g \\ \uparrow \text{id} \\ f \downarrow g \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{h'' \circ p_1} \\ \uparrow \beta \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 = \begin{array}{c} a_1 \\ \uparrow p_1 \quad \searrow l \\ f \downarrow g \xrightarrow{p_0} a_0 \\ \uparrow \eta \\ f \downarrow g \\ \uparrow h'' \\ f \downarrow g \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{p_0 \circ h'' \circ p_1} \\ \uparrow \eta \\ \xrightarrow{p_0} \end{array} a_0$$

従って左 Kan 拡張 $p_1^\dagger p_0 = \langle l, \eta \rangle$ の普遍性から $\eta \bullet h'' = \text{id}$ である. □

\mathcal{C}^{co} を考えれば次の命題を得る.

命題 4. 前命題と同じ設定の下, 次の条件は同値である.

- (1) 絶対左 Kan リフト $g_+ f$ が存在する.
- (2) p_0 が左随伴を持つ.
- (3) 絶対右 Kan 拡張 $p_0^\ddagger p_1$ が存在する.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ p_1 \uparrow & \theta \swarrow & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \end{array}$$

□

系 5. $f: a_0 \rightarrow b$, $g: a_1 \rightarrow b$ を 1-morphism としてコマ対象 $f \downarrow g$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{g} & b \\ p_1 \uparrow & \theta \swarrow & \uparrow f \\ f \downarrow g & \xrightarrow{p_0} & a_0 \end{array}$$

このとき f が右随伴を持つならば p_1 も右随伴を持ち, g が左随伴を持つならば p_0 も左随伴を持つ.

証明. f が右随伴を持てば絶対右 Kan リフト $f_{\dagger}\text{id}_b$ が存在する. 故に絶対右 Kan リフト $f_{\dagger}g = (f_{\dagger}\text{id}_b) \circ g$ が存在するから命題 3 により p_1 が右随伴を持つ. g についても同様. \square

系 6. $f: a \rightarrow b$ に対して $p_1: \text{id}_b \downarrow f \rightarrow a$ は右随伴を持つ. $p_0: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow a$ は左随伴を持つ.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow & \uparrow \text{id}_b \\ \text{id}_b \downarrow f & \longrightarrow & b \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\text{id}_b} & b \\ \uparrow & \swarrow & \uparrow f \\ f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \end{array}$$

証明. id_b が右随伴・左随伴を持つから明らか. \square

系 7. $f: a_0 \rightarrow b$ を 1-morphism としてコンマ対象 $f \downarrow \text{id}_b$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \xrightarrow{\text{id}_b} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow \theta & \uparrow f \\ f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a_0 \end{array}$$

このとき

$$f \text{ が右随伴を持つ} \iff p_1 \text{ が右随伴を持つ}$$

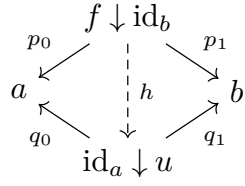
証明. f が右随伴を持つ \iff 絶対右 Kan リフト $f_{\dagger}\text{id}_b$ が存在する $\iff p_1$ が右随伴を持つ. \square

命題 8. $f: a \rightarrow b$, $u: b \rightarrow a$ としてコンマ対象 $f \downarrow \text{id}_b$, $\text{id}_a \downarrow u$ が存在するとする.

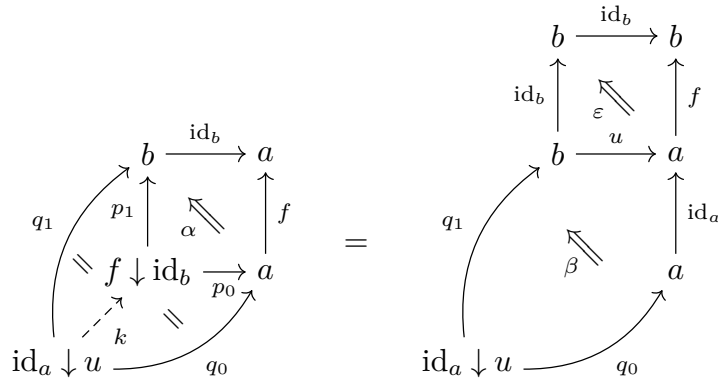
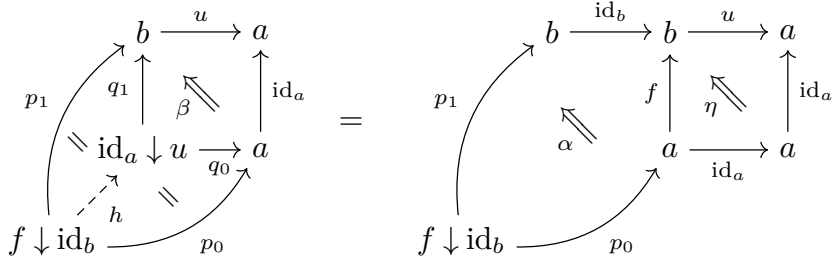
$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{\text{id}_b} & b \\ p_1 \uparrow & \swarrow \alpha & \uparrow f \\ f \downarrow \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{u} & a \\ q_1 \uparrow & \swarrow \beta & \uparrow \text{id}_a \\ \text{id}_a \downarrow u & \xrightarrow{q_0} & a \end{array}$$

このとき

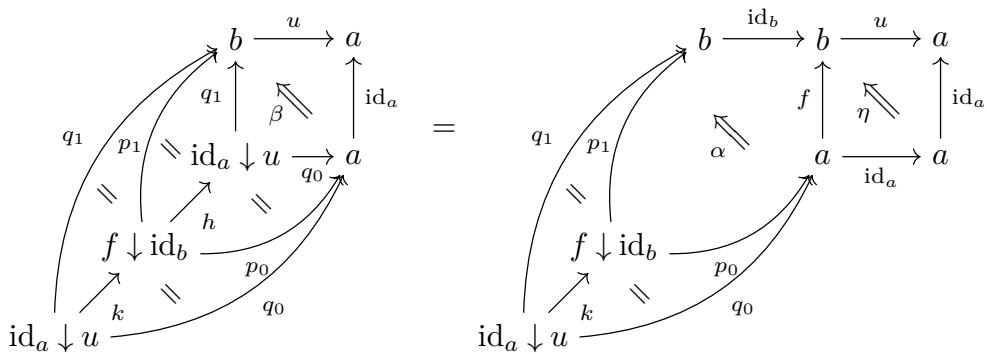
$$f \dashv u \iff \text{次を可換にする同型 } h: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow \text{id}_a \downarrow u \text{ が存在する.}$$



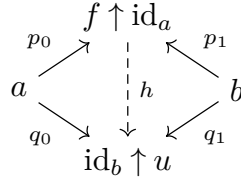
証明. (\implies) $f \dashv u$ の unit, counit を η, ε とする. 1 次元的普遍性により次の h, k を得る.



このとき



$f \dashv u \iff$ 次を可換にする同型 $h: f \uparrow \text{id}_a \rightarrow \text{id}_b \uparrow u$ が存在する.



□

定義. 1-morphism $f: a \rightarrow b$ が忠実充満^{*1}

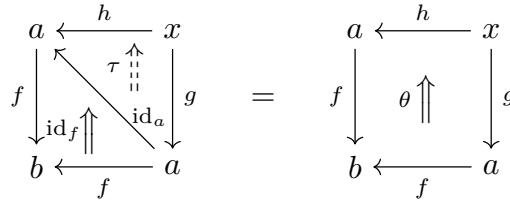
\iff 任意の $x \in \mathcal{C}$ に対して, 関手 $f \bullet -: \mathcal{C}(x, a) \rightarrow \mathcal{C}(x, b)$ が忠実充満関手となる.

命題 10. $f: a \rightarrow b$ が忠実充満

$\iff f \dagger f = \langle \text{id}_b, \text{id}_f \rangle$ で, これが絶対左 Kan リフトになる.

証明. $f \dagger f = \langle \text{id}_b, \text{id}_f \rangle$ が絶対左 Kan リフト

\iff 任意の $x \in \mathcal{C}$ と $g, h: x \rightarrow a$, $\theta: f \circ g \Rightarrow f \circ h$ に対して, $\tau: g \Rightarrow h$ が一意に存在して $f \circ \tau = \theta$ となる.



\iff 任意の $x \in \mathcal{C}$ と $g, h: x \rightarrow a$ に対して

$$f \bullet -: \text{Hom}_{\mathcal{C}(x, a)}(g, h) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}(x, b)}(f \circ g, f \circ h)$$

が全単射となる.

$\iff f$ が忠実充満.

□

同様にして

命題 11. $f: a \rightarrow b$ が忠実充満

$\iff f \ddagger f = \langle \text{id}_b, \text{id}_f \rangle$ で, これが絶対右 Kan リフトになる.

□

命題 12. 随伴 $f \dashv u: a \rightarrow b$ の unit を η とするとき

^{*1} この意味での忠実充満を representably fully faithful ということがある.

f が忠実充満 $\iff \eta$ が同型.

証明. (\implies) f が忠実充満だから $f \dashv f = \langle \text{id}_a, \text{id}_f \rangle$ が絶対左 Kan リフトである. また $f \dashv u$ より $u \dashv \text{id} = \langle f, \eta \rangle$ も絶対左 Kan リフトである. 故に定理 1 (の絶対左 Kan リフトバージョン) から $(u \circ f) \dashv \text{id}_a = \langle \text{id}_a, \eta \rangle$ も絶対左 Kan リフトである.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \\
 & \nearrow \text{id}_a & \searrow f \\
 a & & b \\
 \nearrow f & & \searrow u \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & a & \\
 & \nearrow \text{id}_a & \searrow f \\
 a & & b \\
 & \nearrow \eta & \searrow u \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a
 \end{array}
 \end{array}$$

故に $\text{id}_a \dashv u \circ f$ である. 一方 $\text{id}_a \dashv \text{id}_a$ だから, 右随伴の一意性より $u \circ f \cong \text{id}_a$ である. よって η が同型であることが分かる.

(\impliedby) 随伴 $f \dashv u: a \rightarrow b$ の unit η が同型であるとする. 任意の $x \in \mathcal{C}$ を取る. $\mathcal{C}(x, -): \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}$ は pseudofunctor だから, $\mathcal{C}(x, f) \dashv \mathcal{C}(x, u): \mathcal{C}(x, a) \rightarrow \mathcal{C}(x, b)$ は随伴関手で, unit は $\mathcal{C}(x, \eta)$ である. 故に unit が自然同型となるから, $\mathcal{C}(x, f)$ は忠実充満関手である. 任意の $x \in \mathcal{C}$ について $\mathcal{C}(x, f)$ が忠実充満だから, f が忠実充満である. \square

命題 13. $f: a \rightarrow b$ を 1-morphism として, コンマ対象 $f \downarrow f, \text{id}_a \downarrow \text{id}_a$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \alpha & \uparrow f \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}
 & &
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 q_1 \uparrow & \swarrow \beta & \uparrow \text{id}_a \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{q_0} & a
 \end{array}
 \end{array}$$

このとき

f が忠実充満 \iff 1 次元的普遍性で得られる $h: \text{id}_a \downarrow \text{id}_a \rightarrow f \downarrow f$ が同型.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & & a & \xrightarrow{f} & b \\
 & & \uparrow p_1 & \swarrow \alpha & \uparrow f \\
 & & f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a \\
 q_1 \curvearrowright & & & & \\
 & & \uparrow h & & \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & & & & \\
 & & & & \uparrow q_0
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccccc}
 & & a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 & & \uparrow q_1 & \swarrow \beta & \uparrow \text{id}_a & \swarrow f \\
 & & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{q_0} & a & \\
 & & & & \uparrow \text{id}_f
 \end{array}
 \end{array}$$

証明. (\implies) f が忠実充満だから命題 10 より $f_+f = \langle \text{id}_b, \text{id}_f \rangle$ で、これが絶対左 Kan リフトだから次の等式を満たす τ が一意に存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \text{id}_f & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{\tau} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \alpha & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{\tau} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}$$

この τ に対して 1 次元の普遍性から次の k が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 p_1 \uparrow & \swarrow q_1 & \uparrow \text{id}_a \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 p_1 \uparrow & \swarrow \tau & \uparrow \text{id}_a \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 q_1 \uparrow & \swarrow p_1 & \uparrow \text{id}_a & \uparrow \text{id}_f & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{q_0} & a \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{q_0} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 q_1 \uparrow & \swarrow p_1 & \uparrow \text{id}_a & \uparrow \text{id}_f & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{\tau} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{q_0} & a \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{q_0} & a
 \end{array}$$

$$=
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 q_1 \uparrow & \swarrow p_1 & \uparrow \alpha & \uparrow \text{id}_f & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{\beta} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{q_0} & a \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{q_0} & a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{f} & b \\
 q_1 \uparrow & \swarrow p_1 & \uparrow \text{id}_a & \uparrow \text{id}_f & \uparrow f \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & a & \xrightarrow{\beta} & a \\
 f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{q_0} & a \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{h} & a & \xrightarrow{q_0} & a
 \end{array}$$

となるから、絶対左 Kan リフト $f_{\dagger}f$ の普遍性により

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \xrightarrow{\text{id}_a} a \\
 & \uparrow q_1 & \swarrow \beta \\
 & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{q_0} a \\
 & \uparrow k & \\
 & f \downarrow f & \\
 & \uparrow h & \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & &
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \xrightarrow{\text{id}_a} a \\
 & \uparrow q_1 & \swarrow \beta \\
 & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{q_0} a \\
 & \uparrow k & \\
 & f \downarrow f & \\
 & \uparrow h & \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & &
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \xrightarrow{\text{id}_a} a \\
 & \uparrow q_1 & \swarrow \beta \\
 & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{q_0} a \\
 & \uparrow k & \\
 & f \downarrow f & \\
 & \uparrow h & \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & &
 \end{array}
 \end{array}$$

である。故に $\text{id}_a \downarrow \text{id}_a$ の 1 次元的普遍性から $k \circ h = \text{id}_{\text{id}_a \downarrow \text{id}_a}$ が分かる。一方

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \xrightarrow{f} b \\
 & \uparrow p_1 & \swarrow \alpha \\
 & f \downarrow f & \xrightarrow{p_0} a \\
 & \uparrow h & \\
 & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \\
 & \uparrow k & \\
 f \downarrow f & &
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \xrightarrow{\text{id}_a} a \xrightarrow{f} b \\
 & \uparrow q_1 & \swarrow \beta \\
 & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{q_0} a \\
 & \uparrow k & \\
 & f \downarrow f & \\
 & \uparrow h & \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & &
 \end{array}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{ccc}
 & a & \xrightarrow{\text{id}_a} a \xrightarrow{f} b \\
 & \uparrow p_1 & \swarrow \tau \\
 & \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \xrightarrow{\text{id}_f} a \\
 & \uparrow k & \\
 & f \downarrow f & \\
 & \uparrow h & \\
 \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & &
 \end{array}
 \end{array}
 = \alpha$$

だから $f \downarrow f$ の 1 次元的普遍性により $h \circ k = \text{id}_{f \downarrow f}$ である。

(\Leftarrow) 命題 10 により絶対左 Kan リフト $f_{\dagger}f$ が存在することを言えばよいが、その為には命題 4 により、 p_0 が左随伴を持つことを示せばよい。今、同型 $\text{id}_a \downarrow \text{id}_a \rightarrow f \downarrow f$ が存在するから、 q_0 が左随伴を持つことを示せばよいが、それは命題 6 から明らか。 \square

2 コンマ対象を使った各点 Kan 拡張

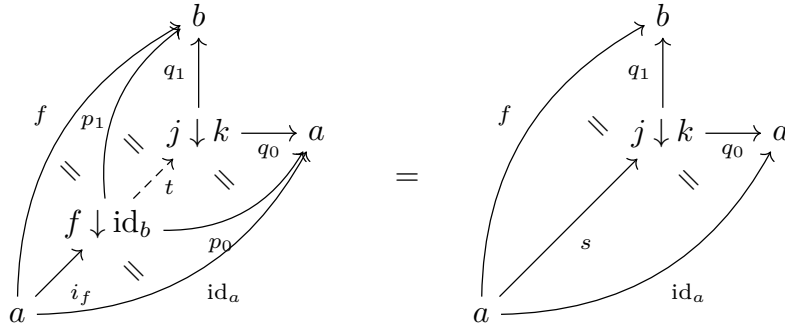
この節では, 任意の $a_0 \xrightarrow{f} b \xleftarrow{g} a_1$ に対してコンマ対象 $f \downarrow g$ が存在すると仮定しておく.

$f: a \rightarrow b$ として, コンマ対象 $\langle f \downarrow \text{id}_b, p_0, p_1, \theta \rangle$ を考える. コンマ対象の 1 次元的普遍性により, 次の 1-morphism $i_f: a \rightarrow f \downarrow \text{id}_b$ が得られる.

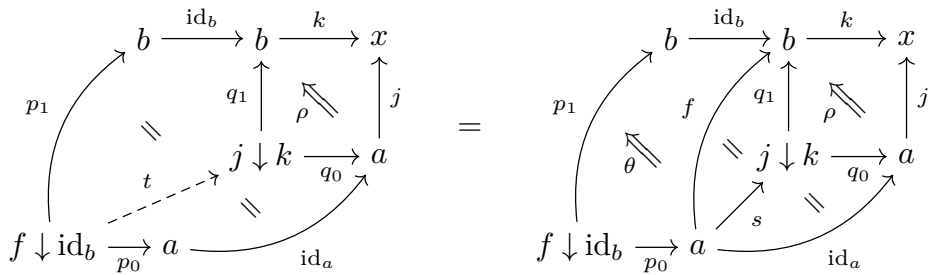
補題 14 (米田の補題). $a \xrightarrow{j} x \xleftarrow{k} b$ のコンマ対象を $\langle j \downarrow k, q_0, q_1, \rho \rangle$ として, 次の図式が可換であるとする.

このとき

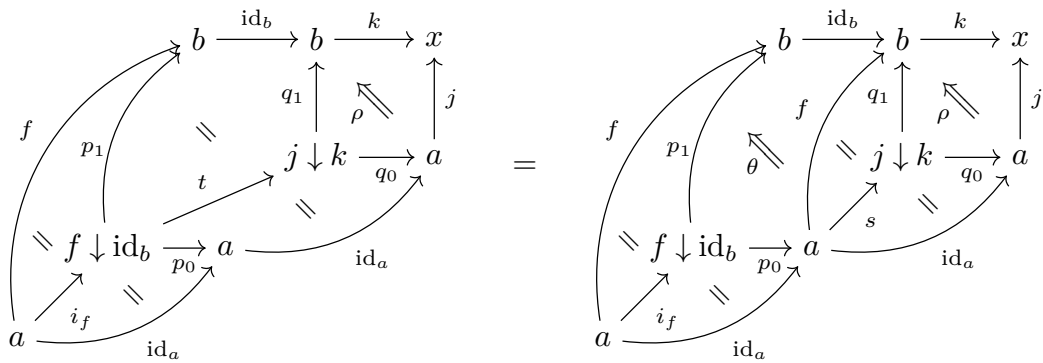
を可換にする $t: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在して $t \circ i_f = s$ を満たす.

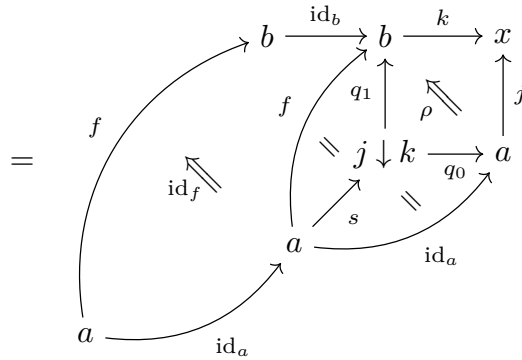


証明. $j \downarrow k$ の 1 次元的普遍性から, 次の等式を満たす $t: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在する.



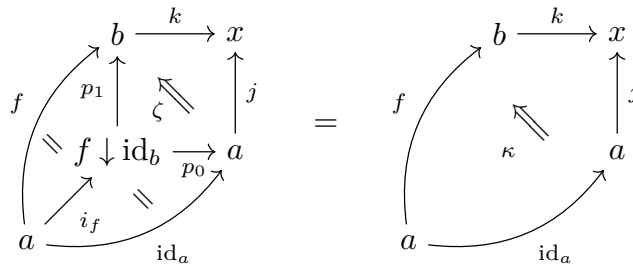
このとき





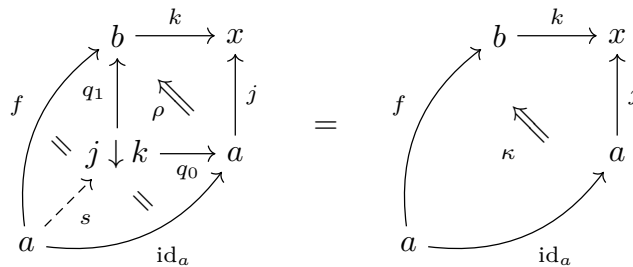
より $t \circ i_f = s$ が分かる. □

補題 15. $j: a \rightarrow x$, $k: b \rightarrow x$ とする. このとき, 任意の $\kappa: j \Rightarrow k \circ f$ に対して, ある $\zeta: j \circ p_0 \Rightarrow k \circ p_1$ が一意に存在して, 次の等式が成り立つ.

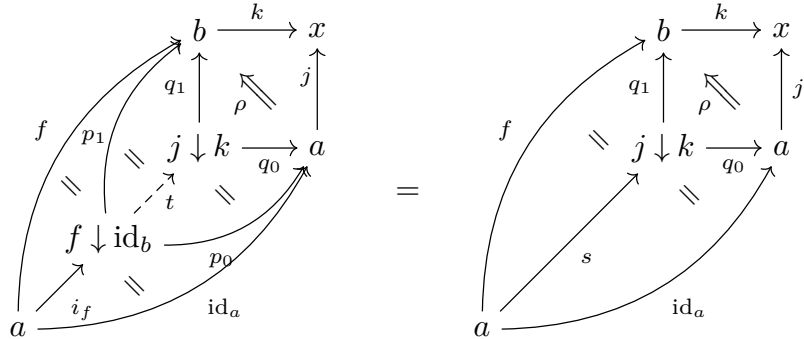


更にこのとき $f^\dagger j = \langle k, \kappa \rangle \iff p_1^\dagger(j \circ p_0) = \langle k, \zeta \rangle$ である.

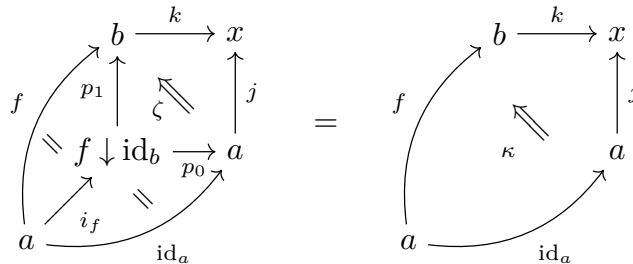
証明. $\kappa: j \Rightarrow k \circ f$ として $\langle j \downarrow k, q_0, q_1, \rho \rangle$ をコンマ対象とする. $j \downarrow k$ の 1 次元的普遍性により, 次の等式を満たす $s: a \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在する.



よって補題 14 により $t: f \downarrow \text{id}_b \rightarrow j \downarrow k$ が一意に存在する.

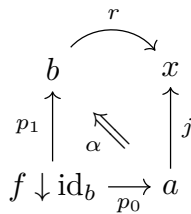


よって $\zeta := \rho \bullet t$ とすれば

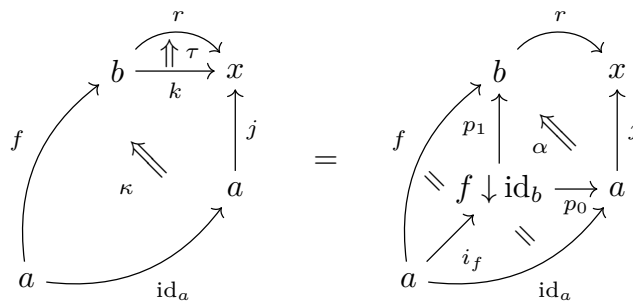


を満たす. このような ζ は明らかに一意である.

次に $f^\dagger j = \langle k, \kappa \rangle$ として, 任意の $\alpha: j \circ p_0 \Rightarrow r \circ p_1$ を取る.



すると $f^\dagger j = \langle k, \kappa \rangle$ の普遍性により, ある $\tau: k \Rightarrow r$ が一意に存在して



て、 $\langle l, \eta \rangle$ を f に沿った g の c -各点左 Kan 拡張とする。このとき

$$\begin{array}{ccccc}
 & b & \xrightarrow{\text{id}_b} & b & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \searrow l \\
 p_1 & \uparrow & \swarrow \theta & f & \uparrow \\
 f \downarrow & \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{g} c
 \end{array}$$

は左 Kan 拡張である。よって補題 15 を

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & b & \xrightarrow{l} & c & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 f & \uparrow & \swarrow \zeta & g & \\
 & j \downarrow & \text{id}_b & \xrightarrow{p_0} & a \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 a & \xrightarrow{i_j} & & & \\
 & \searrow & \text{id}_a & & \\
 & & & &
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccccc}
 & b & \xrightarrow{l} & c & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \\
 f & \uparrow & \swarrow \eta & g & \\
 & & & & \\
 a & \xrightarrow{\text{id}_a} & & & \\
 & & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

に適用すれば $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ である。 □

命題 17. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$ を 1-morphism として f は右随伴を持つとする。このとき既に示したように左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在するが、この左 Kan 拡張は c -各点左 Kan 拡張である。

$$\begin{array}{ccc}
 b & & \\
 \uparrow & \searrow f^\dagger g & \\
 f & & \\
 a & \xrightarrow{g} & c \\
 \uparrow \eta & &
 \end{array}$$

証明. $j: x \rightarrow b$ に対してコンマ対象 $f \downarrow j$ を考えたとき、命題 5 より p_1 は右随伴を持つ。

$$\begin{array}{ccccc}
 & x & \xrightarrow{j} & b & \\
 & \uparrow & & \uparrow & \searrow f^\dagger g \\
 p_1 & \uparrow & \swarrow & f & \uparrow \\
 f \downarrow & j & \xrightarrow{p_0} & a & \xrightarrow{g} c
 \end{array}$$

故に p_1 に沿った $g \circ p_0$ の左 Kan 拡張は存在する。 $p_1 \dashv v$ とすれば $p_1^\dagger(g \circ p_0) = g \circ p_0 \circ v$ である。 $f \dashv u$ とすれば、命題 5 の証明から $u \circ j = p_0 \circ v$ となる。また $f^\dagger g = g \circ u$ だったから $(f^\dagger g) \circ j = g \circ u \circ j = g \circ p_0 \circ v = p_1^\dagger(g \circ p_0)$ となる。 □

命題 18. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$ を 1-morphism として c -各点左 Kan 拡張 $\langle f^\dagger g, \eta \rangle$ が存在するとする.

$$\begin{array}{ccc} & b & \\ & \uparrow f & \searrow f^\dagger g \\ a & \xrightarrow{g} & c \\ & \uparrow \eta & \end{array}$$

f が忠実充満ならば η は同型である.

証明. $f^\dagger g$ が c -各点左 Kan 拡張だから, 次の図式は左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \\ & \uparrow & \swarrow f & \uparrow & \searrow f^\dagger g \\ & f \downarrow f & \longrightarrow & a & \xrightarrow{g} & c \\ & & & \uparrow \eta & \end{array}$$

f が忠実充満だから命題 13 より $f \downarrow f \cong \text{id}_a \downarrow \text{id}_a$ となり, 次の図式も左 Kan 拡張である.

$$\begin{array}{ccccc} & a & \xrightarrow{f} & b & \\ & \uparrow & \swarrow f & \uparrow & \searrow f^\dagger g \\ \text{id}_a \downarrow \text{id}_a & \longrightarrow & a & \xrightarrow{g} & c \\ & & & \uparrow \eta & \end{array}$$

よって補題 15 により $\text{id}_a^\dagger g = \langle f^\dagger g \circ f, \eta \rangle$ である. 一方 $\text{id}_a^\dagger g = \langle g, \text{id}_a \rangle$ だから, η は同型でなければならない. \square

以上のようにコマ対象を使って各点 Kan 拡張を定義したが, 実はこの定義には問題がある. 豊穡圏について, 各点 Kan 拡張を定義したが, この各点 Kan 拡張は V -豊穡圏がなす 2-category $V\text{-Cat}$ における c -各点 Kan 拡張と一致しないのである. それは次の例から分かる.

例 19. Cat -豊穡圏 (即ち strict 2-category) \mathcal{A}, \mathcal{B} を次の図式で定義する.

$$\mathcal{A} := \begin{array}{ccc} & i & \xrightarrow{k} & j \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & i & \xrightarrow{l} & j \end{array}, \quad \mathcal{B} := \begin{array}{ccc} & a & \xrightarrow{f} & b \\ & \downarrow & & \downarrow \\ & a & \xrightarrow{g} & b \end{array}.$$

Cat-関手 $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ は次の 4 つである.

$$\begin{array}{ccc}
 G_a: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & a \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_a} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{\text{id}_a} \end{array} a \\
 G_b: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & b \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}_b} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{\text{id}_b} \end{array} b \\
 G_f: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & a \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{f} \end{array} b \\
 G_g: i \begin{array}{c} \xrightarrow{k} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{l} \end{array} j & \mapsto & a \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \Downarrow \text{id} \\ \xrightarrow{g} \end{array} b
 \end{array}$$

これらの間の Cat-自然変換は, $G_a \Rightarrow G_f, G_g$ と $G_f, G_g \Rightarrow G_b$ の 4 つと, その合成である. $\mathbb{1} := \{*\}$ として Cat-関手 $F: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{A}$, $E: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{B}$ を $F(*) := i$, $E(*) := a$ で定める. このとき左 Kan 拡張 $F^\dagger E$ が存在し $F^\dagger E = G_a$ である. また

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, i), \mathcal{B}(a, a)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{1}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{1} \\
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, i), \mathcal{B}(a, b)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{1}, \{f, g\}) \cong \{f, g\} \\
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, j), \mathcal{B}(a, a)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \mathbb{1}) \cong \mathbb{1} \\
 \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, j), \mathcal{B}(a, b)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathbb{2}, \{f, g\}) \cong \{f, g\}
 \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned}
 \widehat{\mathbb{1}}(\mathcal{A}(F-, d), \mathcal{B}(E-, u)) &\cong \mathbf{Cat}(\mathcal{A}(i, d), \mathcal{B}(a, u)) \\
 &\cong \mathcal{B}(a, u) \\
 &\cong \mathcal{B}(F^\dagger E(d), u)
 \end{aligned}$$

となり $F^\dagger E$ は (Cat-関手の意味で) 各点 Kan 拡張である.

一方, $K: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{A}$ を $K(*) := b$ で定める.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{1} & \xrightarrow{K} & \mathcal{A} \\
 P_1 \uparrow & \swarrow F & \uparrow F^\dagger E \\
 F \downarrow K & \xrightarrow{P_0} & \mathbb{1} \xrightarrow{E} \mathcal{B} \\
 & & \uparrow \eta
 \end{array}$$

ここで $F \downarrow K$ は

- $\text{Ob}(F \downarrow K) = \{k, l\}$.
- 1-morphism は $k \Rightarrow l$ と id のみ.
- 2-morphism は id のみ.

である. $S: \mathbb{1} \rightarrow \mathcal{B}$ を $S(*) := b$ で定める. \mathbf{Cat} -自然変換 $\theta: E \circ P_0 \Rightarrow S \circ P_1$ を $\theta_k := f$, $\theta_l := g$ で定めれば, この図式が左 Kan 拡張でないことが分かる. 即ち $F^\dagger E$ は c -各点 Kan 拡張ではない. \square

3 米田構造と各点 Kan 拡張

\mathcal{C} の 1-morphism からなる集まり A で, 次の条件を満たすものを取り固定する:

$$f: a \rightarrow b, g: b \rightarrow c, g \in A \text{ ならば } g \circ f \in A.$$

A に含まれる 1-morphism は admissible であるという. また id_a が admissible なとき, 対象 $a \in \mathcal{C}$ は admissible であるという. 以下では, f が admissible であることを強調するために f のように赤字で表すことがある.

一つ注意しておく, $f: a \rightarrow b$ で b が admissible とすると, $f = \text{id}_b \circ f$ だから f も admissible である.

定義. admissible な対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して, 対象 $\hat{a} \in \mathcal{C}$ と admissible な $y_a: a \rightarrow \hat{a}$ が与えられ, 以下の条件を満たすとき, これを米田構造という.

- (1) $f: a \rightarrow b$ を 1-morphism として, a, f が admissible とするとき, $f^\dagger y_a$ が存在する. $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ と書く.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 & \swarrow^{b(f,1)} & \\
 f \uparrow & & \searrow \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \uparrow \chi^f & \\
 & & \uparrow
 \end{array}$$

- (2) 条件 1 で得られた $\langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ に対して $b(f, 1) \dagger y_a = \langle f, \chi^f \rangle$ であり, 更にこれは

絶対左 Kan リフトである.

$$\begin{array}{ccc}
 & & b \\
 & \nearrow f & \downarrow b(f,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

$\chi^f \Uparrow$

(3) admissible な対象 $a \in \mathcal{C}$ に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \text{id}_{\hat{a}}, \text{id}_{y_a} \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 \hat{a} & & \\
 \uparrow y_a & \searrow \text{id}_{\hat{a}} & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

$\text{id}_{y_a} \Uparrow$

(4) $f: a \rightarrow b$, $g: b \rightarrow c$ を 1-morphism として, a, b, g が admissible とする. y_b が admissible だから $y_b \circ f$ も admissible であり, よって $f^{-1} := \widehat{b}(y_b \circ f, 1)$ が定まる. このとき, 次の図式が $(g \circ f)^\dagger y_a$ を定める. よって $c(g \circ f, 1) \cong f^{-1} \circ c(g, 1)$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 c & & \\
 \uparrow g & \searrow c(g,1) & \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 \uparrow f & \searrow \chi^{y_b \circ f} \Uparrow & \downarrow f^{-1} := \widehat{b}(y_b \circ f, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

例 20. locally small とは限らない圏がなす 2-category において

- $F: C \rightarrow D$ が admissible
 \iff 任意の $c \in C$, $d \in D$ に対して $\text{Hom}_D(Fc, d)$ が small
- admissible (即ち locally small) な圏 C に対して $\widehat{C} := \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$.
- $y_C: C \rightarrow \widehat{C}$ を米田埋込とする.

と定めれば米田構造となる. この場合 admissible な関手 $F: C \rightarrow D$ に対して関手 $D(F, 1): D \rightarrow \widehat{C}$ は $D(F, 1)(\square) = \text{Hom}_D(F-, \square)$ で与えられる. \square

以下, 米田構造を一つ取って考える. $\text{id}_a^\dagger y_a \cong y_a$ だから $a(\text{id}_a, 1) = y_a$, $\chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a}$

としてよい.

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 \text{id}_a \uparrow & \searrow a(\text{id}_a, 1) = y_a & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a}
 \end{array}$$

$f, g: a \rightarrow b$ で a, f, g を admissible とする. $\alpha: f \Rightarrow g$ を 2-morphism とするとき左 Kan 拡張の普遍性から 2-morphism $b(\alpha, 1): b(g, 1) \Rightarrow b(f, 1)$ が一意に定まる.

$$\begin{array}{ccc}
 b & & b \\
 \uparrow g & \searrow b(f, 1) & \uparrow b(f, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} \hat{a} & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 \uparrow \chi^g & \nearrow b(\alpha, 1) & \uparrow \chi^f \\
 & b(g, 1) &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & & b \\
 \uparrow g & \searrow b(f, 1) & \uparrow b(f, 1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} \hat{a} & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 \uparrow \chi^g & \nearrow b(\alpha, 1) & \uparrow \chi^f \\
 & b(g, 1) &
 \end{array}$$

任意の $\beta: s \Rightarrow t: x \rightarrow b$ に対して $b(f, s) := b(f, 1) \circ s$, $b(\alpha, \beta) := b(\alpha, 1) \bullet \beta$ と定義する.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{b(f, s)} & & \xrightarrow{b(f, 1)} \\ \Downarrow b(\alpha, \beta) & & \Downarrow b(\alpha, 1) \\ \xrightarrow{b(g, t)} & & \xrightarrow{b(g, 1)} \end{array} & \hat{a} & := & x & \begin{array}{ccc} \xrightarrow{s} & b & \xrightarrow{b(f, 1)} \\ \Downarrow \beta & & \Downarrow b(\alpha, 1) \\ \xrightarrow{t} & & \xrightarrow{b(g, 1)} \end{array} & \hat{a}
 \end{array}$$

このとき $b(f, \text{id}_b) = b(f, 1)$, $b(\alpha, \text{id}_{\text{id}_b}) = b(\alpha, 1)$ だから, この記号に現れる「1」は id のことだと思ってよい. また条件 3 より $\hat{a}(y_a, 1) \cong \text{id}_{\hat{a}}$ となるから $f: c \rightarrow \hat{a}$ に対して $\hat{a}(y_a, f) = \hat{a}(y_a, 1) \circ f \cong f$ となり「米田の補題」が成り立つことが分かる.

a から b への admissible な 1-morphism 全体を $\text{Adm}(a, b)$ と書けば, $b(-, \square)$ は関手 $\text{Adm}(a, b)^{\text{op}} \times \mathcal{C}(x, b) \rightarrow \mathcal{C}(x, \hat{a})$ を定める.

命題 21. $a \in \mathcal{C}$ を admissible とするとき, $y_a: a \rightarrow \hat{a}$ は忠実充満である.

証明. $a(\text{id}_a, 1) = y_a$, $\chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a}$ だから, 条件 2 より $(y_a)_\dagger y_a = \langle \text{id}_a, \text{id}_{y_a} \rangle$ は絶対左 Kan リフトである.

$$\begin{array}{ccc}
 & a & \\
 \text{id}_a \nearrow & & \downarrow y_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \uparrow \text{id}_{y_a} &
 \end{array}$$

よって命題 10 より y_a は忠実充満である. □

ここで米田構造について次の条件を考える.

(5) $a \in \mathcal{C}$ と $f: a \rightarrow b$ が admissible で, 図式

$$\begin{array}{ccc} & & b \\ & \nearrow f & \downarrow g \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

が絶対左 Kan リフトであるとする. このとき $\langle g, \eta \rangle$ は f に沿った y_a の c -各点左 Kan 拡張である.

次の命題は米田構造において基本となる命題である.

命題 22. $f: a \rightarrow b$, $g: a \rightarrow c$, $l: b \rightarrow c$ で, a, f, g が admissible であるとする. 等式

$$\begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{l} & c \\ \uparrow f & \nearrow \eta & \downarrow c(g,1) \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} \quad = \quad \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{l} & c \\ \uparrow f & \nearrow b(f,1) & \downarrow c(g,1) \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

により, η と η' が一対一に対応する. (即ち, 任意の η に対して, 一意に η' が存在して等式が成立し, また任意の η' に対して一意に η が存在して等式が成り立つ.) 更に

- (1) η' が同型ならば $l \dagger g = \langle f, \eta \rangle$ であり, これは絶対左 Kan リフトとなる.
- (2) 条件 5 が成り立つならば 1 の逆も成り立つ. 即ち $\langle f, \eta \rangle$ が l に沿った g の絶対左 Kan リフトならば, η' は同型である.
- (3) $f \dagger g = \langle l, \eta \rangle \iff c(g, 1) \dagger b(f, 1) = \langle l, \eta' \rangle$

証明. 一対一対応は $c(g, 1) \dagger y_a = \langle g, \chi^g \rangle$ と $f \dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ の普遍性から得られる.

(1) η' が同型であるとする. このとき f は $c(g, 1) \circ l$ に沿った y_a の絶対左 Kan リフトである. 故に命題 1 から, $l \dagger g = \langle f, \eta \rangle$ で, これは絶対左 Kan リフトである.

(2) $l \dagger g = \langle f, \eta \rangle$ が絶対左 Kan リフトだとすると, 米田構造の条件 2 と定理 1 (の絶対左 Kan リフトバージョン) より $f \dagger y_a = c(g, l)$ も絶対左 Kan リフトである. 従って条件 5 より $f \dagger y_a = c(g, l)$ である. 故に左 Kan 拡張の普遍性から η' は同型となる.

(3) 同様なので \implies のみ示す. $f \dagger g = \langle l, \eta \rangle$ とする. 任意の 1-morphism $k: b \rightarrow c$ と

2-morphism $\theta': b(f, 1) \Rightarrow c(g, 1) \circ k$ を取り, 更に θ' に対応する θ を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta \Uparrow g & c \\
 \uparrow f & & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow b(f,1) \theta' \Uparrow & c \\
 \uparrow f & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

$f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ の普遍性により, 次の図式の σ が存在して等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 \uparrow f & \eta \Uparrow & \\
 a & \nearrow g & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta \Uparrow & c \\
 \uparrow f & & \\
 a & \nearrow g & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

このとき

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 \uparrow f & b(f,1) \eta' \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 a & \nearrow \chi^f \Uparrow g & \hat{a} \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 \uparrow f & \eta \Uparrow & \\
 a & \nearrow g & \\
 & \chi^g \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \\
 \\
 = & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta \Uparrow g & c \\
 \uparrow f & & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow b(f,1) \theta' \Uparrow & c \\
 \uparrow f & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

となるから, $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ の普遍性により次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \xrightarrow{l \Uparrow \sigma} & c \\
 & b(f,1) \eta' \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & \\
 b & \nearrow \theta' \Uparrow & c \\
 & b(f,1) & \downarrow c(g,1) \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

このような σ は一意だから $c(g, 1) \dagger b(f, 1) = \langle l, \eta' \rangle$ である. □

3.1 随伴

命題 23. $f: a \rightarrow b$, $u: b \rightarrow a$, $\eta: \text{id}_a \Rightarrow u \circ f$ で a, f が admissible だとする. このとき

$f \dashv u$ で, η がこの随伴の unit \iff 命題 22 で η に対応する η' が同型となる.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \eta \Uparrow & \text{id}_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a} \Uparrow & \\
 & & \downarrow y_a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \chi^f \Uparrow & \eta' \Uparrow \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & & \downarrow y_a
 \end{array}$$

証明. (\implies) $f \dashv u$ で η を unit とすれば $f^\dagger \text{id}_a = \langle u, \eta \rangle$ で, これは絶対左 Kan 拡張である. 故に次の左辺の合成は左 Kan 拡張になる.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \eta \Uparrow & \text{id}_a \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a} \Uparrow & \\
 & & \downarrow y_a
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 \uparrow f & \chi^f \Uparrow & \eta' \Uparrow \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & & \downarrow y_a
 \end{array}$$

よって右辺全体も左 Kan 拡張である. 右辺の η' は左 Kan 拡張 $b(f, 1)$ の普遍性から得られていたから, η' は同型である.

(\impliedby) η' が同型だから命題 22 により $u \dashv \text{id}_a = \langle f, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトであり, よって $f \dashv u$ となる. \square

命題 24. $f: a \rightarrow b$, $u: b \rightarrow a$ で a, f が admissible のとき

$$f \dashv u \iff b(f, 1) \cong a(\text{id}, u).$$

証明. $y_a \circ u = a(\text{id}, 1) \circ u = a(\text{id}, u)$ だから前命題よりわかる. \square

命題 25. $f \dashv u: a \rightarrow b$ とする. $s: x \rightarrow a$, $t: x' \rightarrow b$ で x, a, f が admissible ならば, $b(f \circ s, t) \cong a(s, u \circ t)$ が成り立つ.

証明. $f \dashv u: a \rightarrow b$ とすれば前命題より $b(f, 1) \cong a(\text{id}, u)$ である. 故に

$$\begin{aligned}
 b(f \circ s, t) &= b(f \circ s, 1) \circ t \\
 &\cong s^{-1} \circ b(f, 1) \circ t \\
 &\cong s^{-1} \circ a(\text{id}, u) \circ t \\
 &= s^{-1} \circ a(\text{id}, 1) \circ u \circ t \\
 &\cong a(s, 1) \circ u \circ t \\
 &= a(s, u \circ t)
 \end{aligned}$$

□

3.2 y -各点左 Kan 拡張

定義. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 f \uparrow & \nearrow l & \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

命題 22 で η に対応する η' を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \nearrow \eta & \uparrow g \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \nearrow \chi^g & \downarrow c(g,1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \nearrow b(f,1) & \uparrow \eta' \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \nearrow \chi^f & \downarrow c(g,1)
 \end{array}$$

この η' に対して, 更に命題 22 で対応する η'' を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g,1)} & \hat{a} \\
 l \uparrow & \nearrow \eta' & \uparrow b(f,1) \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 & \nearrow \chi^{b(f,1)} & \downarrow \hat{a}(b(f,1),1)
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g,1)} & \hat{a} \\
 l \uparrow & \nearrow \eta'' & \uparrow c(l,1) \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \\
 & \nearrow \chi^l & \downarrow \hat{a}(b(f,1),1)
 \end{array}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の y -各点左 Kan 拡張とは, $\eta'': c(l, 1) \Rightarrow \hat{a}(b(f, 1), c(g, 1))$ が同型になることをいう.

命題 26. y -各点左 Kan 拡張は左 Kan 拡張である.

証明. $\langle l, \eta \rangle$ が f に沿った g の y -各点左 Kan 拡張であるとする.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \eta \Uparrow & \nearrow g \\
 a & & \widehat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 & & \widehat{a}
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \chi^f \Uparrow & \nearrow b(f,1) \\
 a & & \widehat{a} \\
 & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 & & \widehat{a}
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g,1)} & \widehat{a} \\
 l \uparrow & \eta' \Uparrow & \nearrow b(f,1) \\
 b & & \widehat{b} \\
 & \chi^{b(f,1)} \Uparrow & \downarrow \widehat{a}(b(f,1),1) \\
 & & \widehat{b}
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(g,1)} & \widehat{a} \\
 l \uparrow & \chi^l \Uparrow & \nearrow c(l,1) \\
 b & & \widehat{b} \\
 & \chi^l \Uparrow & \downarrow \widehat{a}(b(f,1),1) \\
 & & \widehat{b}
 \end{array}
 \end{array}$$

定義より η' が同型である. よって命題 22 の (1) により $c(g,1) \dagger b(f,1) = \langle l, \eta' \rangle$ となる. このとき命題 22 の (3) により $f^\dagger g = \langle l, \eta \rangle$ である. \square

命題 27. 米田構造の条件 5 を仮定する. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f,1)$ が admissible だとする.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 & \uparrow f & \nearrow l \\
 & a & c \\
 & & \downarrow g
 \end{array}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が c -各点左 Kan 拡張ならば y -各点左 Kan 拡張である.

証明. 命題 22 の (2) より, y -各点左 Kan 拡張であることを示すには等式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \eta \Uparrow & \nearrow g \\
 a & & \widehat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 & & \widehat{a}
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \chi^f \Uparrow & \nearrow b(f,1) \\
 a & & \widehat{a} \\
 & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 & & \widehat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

において η' が絶対左 Kan リフトであることを示せばよい.

そのために任意の図式

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{k} & c \\
 h \downarrow & \theta \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a}
 \end{array}$$

を取る. コンマ対象 $f \downarrow h$ を考える. $\langle g, \chi^g \rangle$ が絶対左 Kan リフトだから, 2-morphism τ が存在して等式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \nearrow & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \tau \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \xrightarrow{h} b & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \theta \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \uparrow f & \nearrow b(f,1) \\
 & \chi^f \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

が成り立つ. $\langle l, \eta \rangle$ が c -各点 Kan 拡張であるから, 2-morphism ρ が存在して等式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \xrightarrow{h} b & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \rho \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \uparrow f & \nearrow l \\
 & \eta \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \nearrow & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \tau \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \xrightarrow{h} b & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \rho \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \uparrow f & \nearrow b(f,1) \\
 & \chi^f \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array} & = & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \xrightarrow{h} b & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \rho \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \uparrow f & \nearrow l \\
 & \eta \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array} \\
 & = & \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{k} & c \\
 x & \nearrow & \downarrow c(g,1) \\
 \uparrow & \tau \Uparrow & \\
 f \downarrow h & \longrightarrow & a \xrightarrow{y_a} \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow & \\
 & & \hat{a}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$= \begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \curvearrowright & & \\ x & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\theta} & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow f & \uparrow \chi^f & \downarrow c(g,1) \\ f \downarrow h & \longrightarrow & a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

となる. $\langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ が c -各点 Kan 拡張だから

$$\begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \curvearrowright & & \\ x & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\rho} & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \eta' & \uparrow \eta' & \downarrow c(g,1) \\ f \downarrow h & \longrightarrow & a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} = \begin{array}{ccccc} & & k & & \\ & & \curvearrowright & & \\ x & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\theta} & c \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \eta' & \uparrow \eta' & \downarrow c(g,1) \\ f \downarrow h & \longrightarrow & a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array}$$

が分かる. この ρ の一意性も容易に分かるから, η' が絶対左 Kan リフトであることが分かった. \square

定義. $a \in \mathcal{C}$ が small $\iff a$ と \hat{a} が admissible.

命題 28. $f: a \rightarrow b$ で a が small であり, b が (従って f も) admissible だとする. このとき $f^\dagger y_a = \langle b(f, 1), \chi^f \rangle$ は y -各点左 Kan 拡張である. 特に $y_a^\dagger y_a$ は y -各点左 Kan 拡張である.

証明. 次の等式と y -各点左 Kan 拡張の定義より分かる.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\ \uparrow f & \uparrow \chi^f & \uparrow y_a \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} b & \xrightarrow{b(f,1)} & \hat{a} \\ \uparrow f & \uparrow \chi^f & \uparrow y_a \\ a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} \hat{a} & \xrightarrow{\text{id}} & \hat{a} \\ \uparrow \text{id} & \uparrow b(f,1) & \uparrow \hat{a}(b(f,1),1) \\ b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \end{array} & = & \begin{array}{ccc} \hat{a} & \xrightarrow{\text{id}} & \hat{a} \\ \uparrow b(f,1) & \uparrow \chi^{b(f,1)} & \uparrow \hat{a}(b(f,1),1) \\ b & \xrightarrow{y_b} & \hat{b} \end{array} \end{array}$$

\square

定理 29. $f: a \rightarrow b$ で $a, b, b(f, 1)$ が admissible とするとき, $f^{-1}: \widehat{b} \rightarrow \widehat{a}$ は右随伴 $\forall f: \widehat{a} \rightarrow \widehat{b}$ を持つ.

証明. $\forall f := \widehat{a}(b(f, 1), 1)$ とおく.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{b} & \xrightarrow{f^{-1}} & \widehat{a} \\
 \uparrow y_a & \nearrow b(f, 1) & \downarrow \forall f \\
 b & \xrightarrow{y_a} & \widehat{b} \\
 & \nearrow \chi^{b(f, 1)} & \uparrow
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \widehat{b} & \xrightarrow{f^{-1}} & \widehat{a} \\
 \uparrow y_a & \nearrow \text{id}_{\widehat{b}} & \downarrow \forall f \\
 b & \xrightarrow{y_a} & \widehat{b} \\
 & \nearrow \text{id} & \uparrow \eta
 \end{array}$$

$\forall f := \widehat{a}(f^{-1} \circ y_b, 1)$ とおく. すると次の図式で $(f^{-1} \circ y_b)^\dagger y_b = \langle \forall f, \chi^{f^{-1} \circ y_b} \rangle$, $y_b^\dagger y_b = \langle \text{id}_b, \text{id}_{y_b} \rangle$ である.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{a} & & \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f := \widehat{a}(f^{-1} \circ y_b, 1) & \\
 \widehat{b} & & \\
 \uparrow y_b & \nearrow \chi^{f^{-1} \circ y_b} & \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \widehat{b}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \widehat{a} & & \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f & \\
 \widehat{b} & & \\
 \uparrow y_b & \nearrow \text{id}_{\widehat{b}} & \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \widehat{b} \\
 & \nearrow \text{id}_{y_b} & \uparrow
 \end{array}$$

故に定理 1 から, ある η が存在して $(f^{-1})^\dagger \text{id}_b = \langle \forall f, \eta \rangle$ となり, この二つの図式は等しくなる. 故に次の等式が成り立つ.

$$\begin{array}{ccc}
 \widehat{a} & & \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f & \\
 \widehat{b} & & \\
 \uparrow y_b & \nearrow \chi^{f^{-1} \circ y_b} & \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \widehat{b} \\
 \uparrow f & \nearrow \chi^{y_b \circ f} & \downarrow f^{-1} \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \widehat{a} & & \\
 \uparrow f^{-1} & \searrow \forall f & \\
 \widehat{b} & & \\
 \uparrow y_b & \nearrow \text{id}_{\widehat{b}} & \\
 b & \xrightarrow{y_b} & \widehat{b} \\
 \uparrow f & \nearrow \chi^{y_b \circ f} & \downarrow f^{-1} \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \nearrow \text{id}_{y_b} & \uparrow
 \end{array}$$

米田構造の条件 4 より左辺全体と, 右辺の $(y_b \circ f)^\dagger y_b = f^{-1} \circ \text{id}_b$ は左 Kan 拡張になる. よって再び定理 1 により $(f^{-1})^\dagger (f^{-1} \circ \text{id}_b) = f^{-1} \circ \forall f$ が左 Kan 拡張になる. 即ち, 左 Kan 拡張 $(f^{-1})^\dagger \text{id}_b = \langle \forall f, \text{id}_b \rangle$ は f^{-1} と交換する. 故に定理??より $f^{-1} \dashv \forall f$ である. \square

$y_b = b(\text{id}, 1)$ だから $f^{-1} \circ y_b = b(f, 1)$ である。故に $\forall f \cong \widehat{a}(b(f, 1), 1)$ となる。

系 30. $a \in \mathcal{C}$ が small のとき $y_a^{-1} \dashv y_{\widehat{a}}: \widehat{\widehat{a}} \rightarrow \widehat{a}$.

証明. $y_a^{-1} \dashv \forall y_a$ で $\forall y_a \cong \widehat{a}(\widehat{a}(y_a, 1), 1) = \widehat{a}(\text{id}_{\widehat{a}}, 1) \cong y_{\widehat{a}}$ となる。□

定理 31. $f: a \rightarrow b$ で a, b が admissible とする。y-各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger(y_b \circ f)$ が存在するならば $f^{-1}: \widehat{b} \rightarrow \widehat{a}$ は左随伴 $\exists f: \widehat{a} \rightarrow \widehat{b}$ を持つ。

証明. $\exists f := y_a^\dagger(y_b \circ f)$ とすれば定理 38 より $\exists f \dashv \widehat{b}(y_b \circ f, 1) = f^{-1}$ である。□

3.3 weighted colimit

定義. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$ を 1-morphism で^{*2}, a, x, s, j が admissible とする。s の j-weighted colimit とは admissible な $\text{colim}^j s: x \rightarrow c$ で $c(\text{colim}^j s, 1) \cong \widehat{a}(j, c(s, 1))$ となるものをいう (下記図式参照)。

$\text{colim}^j s$ が存在するとき、命題 22 で同型 $c(\text{colim}^j s, 1) \cong \widehat{a}(j, c(s, 1))$ に対応する η を取れば $c(s, 1) \dagger j = \langle \text{colim}^j s, \eta \rangle$ は絶対左 Kan リフトである。

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(s,1)} & \widehat{a} \\
 \uparrow \text{colim}^j s & \nearrow \eta & \downarrow \widehat{a}(j,1) \\
 x & \xrightarrow{y_x} & \widehat{x} \\
 & \nearrow \chi^j & \uparrow j
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 c & \xrightarrow{c(s,1)} & \widehat{a} \\
 \uparrow \text{colim}^j s & \nearrow c(\text{colim}^j s, 1) & \downarrow \widehat{a}(j,1) \\
 x & \xrightarrow{y_x} & \widehat{x} \\
 & \nearrow \chi^{\text{colim}^j s} & \uparrow j
 \end{array}
 \end{array}$$

故に $\text{colim}^j s$ は同型を除いて一意である。

例 32. $s: a \rightarrow c$ を 1-morphism で a, s を admissible とする。このとき $\text{colim}^{y_a} s$ は存在して $\text{colim}^{y_a} s \cong s$ である。実際 s は admissible で $\widehat{a}(y_a, c(s, 1)) \cong c(s, 1)$ となる。□

定理 33. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする。

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 & \uparrow f & \searrow l \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

^{*2} j は \widehat{a} の generalized element だと思ふとよい

このとき

$$l \text{ が } f \text{ に沿った } g \text{ の } y\text{-各点左 Kan 拡張} \iff l \cong \operatorname{colim}^{b(f,1)} g$$

証明. l が f に沿った g の y -各点左 Kan 拡張 $\iff c(l, 1) \cong \widehat{a}(b(f, 1), c(g, 1))$ だから明らか. \square

例 34. small な a に対して $y_a^\dagger y_a = \langle \operatorname{id}_{\widehat{a}}, \operatorname{id}_{y_a} \rangle$ は y -各点左 Kan 拡張である (命題 28). 従って $\operatorname{colim}^{\operatorname{id}_{\widehat{a}}} y_a = \operatorname{id}_{\widehat{a}}$ である. \square

定義. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$ で a, x, s, j が \mathfrak{s} admissible として $\operatorname{colim}^j s: x \rightarrow c$ が存在するとする. 更に $f: c \rightarrow d$ として, $f \circ s$ と $f \circ \operatorname{colim}^j s$ が \mathfrak{s} admissible とする. このとき

$$f \text{ が } \mathfrak{s} \operatorname{colim}^j s \text{ と交換する} \iff f \circ \operatorname{colim}^j s \text{ が } f \circ s \text{ の } j\text{-weighted colimit となる.}$$

定理 35. 左随伴は weighted colimit と交換する.

証明. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$ を 1-morphism で, a, x, s, j が \mathfrak{s} admissible として, $\operatorname{colim}^j s$ が存在するとする. $f \dashv u: c \rightarrow d$ を随伴とするとき

$$\begin{aligned} \widehat{a}(j, d(f \circ s, 1)) &\cong \widehat{a}(j, c(s, u)) \\ &\cong \widehat{a}(j, c(s, 1) \circ u) \\ &\cong \widehat{a}(j, c(s, 1)) \circ u \\ &\cong c(\operatorname{colim}^j s, 1) \circ u \\ &\cong c(\operatorname{colim}^j s, u) \\ &\cong c(f \circ \operatorname{colim}^j s, 1) \end{aligned}$$

となるから, $f \circ \operatorname{colim}^j s \cong \operatorname{colim}^j (f \circ s)$ である. \square

命題 36. $s: a \rightarrow c$, $j: x \rightarrow \widehat{a}$, $i: x' \rightarrow \widehat{x}$ で a, x, x', s, j, i が \mathfrak{s} admissible だとする. また $\operatorname{colim}^j s$ と $\operatorname{colim}^i j$ が存在するとする. このとき $\operatorname{colim}^i (\operatorname{colim}^j s) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^i j} s$ である. (但し, 等式はどちらか一方が存在すればもう一方も存在し同型となることを意味する.)

証明.

$$\begin{aligned}
\widehat{a}(\operatorname{colim}^i j, c(s, 1)) &= \widehat{a}(\operatorname{colim}^i j, 1) \circ c(s, 1) \\
&\cong \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, 1)) \circ c(s, 1) \\
&= \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, 1) \circ c(s, 1)) \\
&= \widehat{x}(i, \widehat{a}(j, c(s, 1))) \\
&\cong \widehat{x}(i, c(\operatorname{colim}^j s, 1)).
\end{aligned}$$

よって $\operatorname{colim}^i(\operatorname{colim}^j s) \cong \operatorname{colim}^{\operatorname{colim}^i j} s$ である. \square

定義. 対象 c が余完備

$\iff s: a \rightarrow c, j: x \rightarrow \widehat{a}$ として a が small で x, s, j が admissible のとき $\operatorname{colim}^j s: x \rightarrow c$ が存在する.

定理 37. 対象 c が余完備

$\iff f: a \rightarrow b, g: a \rightarrow c$ で a が small で $b, g, b(f, 1)$ が admissible のとき y -各点左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在する.

証明. (\implies) 余完備だから $\operatorname{colim}^{b(f, 1)} g$ が存在し, 故に定理 33 により y -各点左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在する.

(\impliedby) $s: a \rightarrow c, j: x \rightarrow \widehat{a}$ として a が small で x, s, j が admissible とする. 仮定より y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger s$ が存在する. このとき

$$\begin{aligned}
c(y_a^\dagger s \circ j, 1) &\cong j^{-1} \circ c(y_a^\dagger s, 1) \\
&\cong j^{-1} \circ \widehat{a}(\widehat{a}(y_a, 1), c(s, 1)) \\
&\cong j^{-1} \circ \widehat{a}(\operatorname{id}, c(s, 1)) \\
&\cong \widehat{a}(j, c(s, 1))
\end{aligned}$$

だから $\operatorname{colim}^j s$ が存在して $\operatorname{colim}^j s \cong y_a^\dagger s \circ j$ である. \square

3.4 普遍随伴

定理 38. $f: a \rightarrow b$ で a を small, f を admissible だとする. y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在するならば $y_a^\dagger f \dashv b(f, 1): \widehat{a} \rightarrow b$ である.

証明. y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在するから, 定義より次の図式の同型 η'' が存在する.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \widehat{a} \\
 \uparrow y_a^\dagger f & \nearrow \eta' & \text{id}_{\widehat{a}} \\
 \widehat{a} & \xrightarrow{y_{\widehat{a}}} & \widehat{\widehat{a}} \\
 & \nearrow \chi^{\text{id}} & \downarrow \widehat{a}(\text{id},1)
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \widehat{a} \\
 \uparrow y_a^\dagger f & \nearrow b(y_a^\dagger f,1) & \downarrow \widehat{a}(\text{id},1) \\
 \widehat{a} & \xrightarrow{y_{\widehat{a}}} & \widehat{\widehat{a}} \\
 & \nearrow \chi^{y_a^\dagger f} & \downarrow \eta''
 \end{array}
 \end{array}$$

よって命題 23 より $y_a^\dagger f \dashv b(f,1)$ となる. □

定理 39. a が small で $l: \widehat{a} \rightarrow b$ が admissible かつ余連続であるとする. このとき $f := l \circ y_a$ とすると y -各点 Kan 拡張 $y_a^\dagger f$ が存在して $l \cong y_a^\dagger f$ となる.

証明. l が $\text{colim}^{\text{id}_{\widehat{a}}} y_a (= \text{id}_{\widehat{a}})$ と交換するから同型 $\eta'': (l,1) \Rightarrow \widehat{a}(\text{id}_{\widehat{a}}, b(f,1))$ が存在する. 命題 22 により η'' に対応する η' を取り, 更に η' に対応する η を取れば, y -各点左 Kan 拡張 $y_a^\dagger f = \langle l, \eta \rangle$ を得る.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \widehat{a} \\
 \uparrow l & \nearrow \eta' & \text{id} \\
 \widehat{a} & \xrightarrow{y_{\widehat{a}}} & \widehat{\widehat{a}} \\
 & \nearrow \text{id} & \downarrow \widehat{a}(\text{id}_{\widehat{a}},1)
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{b(f,1)} & \widehat{a} \\
 \uparrow l & \nearrow b(l,1) & \downarrow \widehat{a}(\text{id}_{\widehat{a}},1) \\
 \widehat{a} & \xrightarrow{y_{\widehat{a}}} & \widehat{\widehat{a}} \\
 & \nearrow \chi^l & \downarrow \eta''
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 \widehat{a} & \xrightarrow{l} & b \\
 \uparrow y_a & \nearrow \eta & f \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \nearrow \text{id} & \downarrow b(f,1)
 \end{array} & = &
 \begin{array}{ccc}
 \widehat{a} & \xrightarrow{l} & b \\
 \uparrow y_a & \nearrow \text{id} & \downarrow b(f,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \nearrow \eta' & \downarrow \eta''
 \end{array}
 \end{array}$$

□

定理 40. a が small で $l \dashv r: \widehat{a} \rightarrow b$ かつ l が admissible ならば, ある $f: a \rightarrow b$ が存在して $l \cong y_a^\dagger f$, $r \cong b(f,1)$ となる.

証明. $l \dashv r: \widehat{a} \rightarrow b$ とすると l は余連続だから定理 39 より, $f := l \circ y_a$ とすれば $l \cong y_a^\dagger f \dashv b(f,1)$ となる. 右随伴の一意性から $r \cong b(f,1)$ である. □

定義. $f: a \rightarrow b$ が total

$\iff a, f$ が admissible で, $b(f,1): b \rightarrow \widehat{a}$ が admissible な左随伴を持つ.

定理 41. $s: a \rightarrow b$ が total で, $j: x \rightarrow \hat{a}$ を 1-morphism, a を small, x, s を admissible とする. このとき $\text{colim}^j s$ が存在して $\text{colim}^j s \cong y_a^\dagger s \circ j$ となる.

証明. $y_a^\dagger s \circ j$ は admissible なので $b(y_a^\dagger s \circ j, 1) \cong \hat{a}(j, b(s, 1))$ を示せばよいが, それは

$$b(y_a^\dagger s \circ j, 1) \cong j^{-1} \circ b(y_a^\dagger s, 1) \cong j^{-1} \circ \hat{a}(\text{id}_{\hat{a}}, b(s, 1)) \cong \hat{a}(j, b(s, 1))$$

となり成り立つ. □

定理 42. a が small で $f: a \rightarrow b$ が total のとき, $b(f, 1)$ の admissible な左随伴 h_f は存在し, y_a に沿った f の y -各点左 Kan 拡張となる.

証明. $h_f \dashv b(f, 1): \hat{a} \rightarrow b$ で h_f が admissible だとすると, $\hat{a}(y_a, 1) \cong \text{id}_{\hat{a}}$ だったから, 命題 24 より $b(h_f, 1) \cong \hat{a}(\text{id}_{\hat{a}}, b(f, 1)) \cong \hat{a}(\hat{a}(y_a, 1), b(f, 1))$ となり, h_f は y_a に沿った f の y -各点左 Kan 拡張である. □

定理 43. a を small, b を admissible とする. $\text{Tot}(a, b) \subset \mathcal{C}(a, b)$ を total な 1-morphism からなる充満部分圏とする. このとき圏同値 $\text{Tot}(a, b)^{\text{op}} \simeq \text{Adj}(\hat{a}, b)$ が成り立つ. この圏同値は $f \mapsto (y_a^\dagger f \dashv b(f, 1))$ で与えられる.

証明. $\text{Adj}(\hat{a}, b) \subset \mathcal{C}(b, \hat{a})$ とみなす. このとき $f \mapsto b(f, 1)$ は忠実充満である. 故に $b(-, 1)$ が本質的全射であればよいがそれは定理 42 から分かる. □

3.5 y -忠実充満

定義. $f: a \rightarrow b$ で a, f が admissible とするとき f が y -忠実充満 $\iff \chi^f$ が同型.

$$\begin{array}{ccc}
 & b & \\
 & \nearrow^{b(f,1)} & \\
 f \uparrow & & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \uparrow \chi^f & \\
 & &
 \end{array}$$

$a(\text{id}_a, 1) = y_a$ だったから, f が y -忠実充満ならば同型 $a(\text{id}_a, 1) \cong b(f, 1)$ が得られる.

命題 44. $f: a \rightarrow b$ が y -忠実充満ならば忠実充満である. 米田構造の条件 5 が成り立つならば逆も成り立つ.

証明. 等式

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \text{id}_a \uparrow & \text{id} \uparrow \uparrow f & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \chi^f \uparrow \uparrow & \\
 & & b(f,1) \downarrow
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{f} & b \\
 \text{id}_a \uparrow & \text{id} \uparrow \uparrow & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \chi^f \uparrow \uparrow & \\
 & & a(\text{id}_a, 1) \downarrow \\
 & & b(f,1) \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

と命題 10, 22 から分かる. □

f が左随伴であれば, y -忠実充満と忠実充満は一致する.

命題 45. $f \dashv u: a \rightarrow b$ を \mathcal{B} における随伴として a, f, u が admissible とする. このとき, f が忠実充満ならば f は y -忠実充満である.

証明. $f \dashv u$ の unit を η とする. 命題 22 で η に対応する η' を取る.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 f \uparrow & \eta \uparrow \uparrow \text{id}_a & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \chi^{\text{id}_a} = \text{id}_{y_a} \uparrow \uparrow & \\
 & & a(\text{id}_a, 1) \downarrow
 \end{array}
 & = &
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 f \uparrow & \text{id} \uparrow \uparrow & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \chi^f \uparrow \uparrow & \\
 & & b(f,1) \downarrow \\
 & & \eta' \uparrow \uparrow \\
 & & a(\text{id}_a, 1) \downarrow
 \end{array}
 \end{array}$$

命題 23 より η' は同型である. 故に

$$\chi^f = \begin{array}{ccc}
 & & \widehat{a} \\
 & b(f,1) \nearrow & \\
 b & \xrightarrow{u} & a \\
 f \uparrow & \eta \uparrow \uparrow & \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \widehat{a} \\
 & \text{id}_a \nearrow & \\
 & & a(\text{id}_a, 1) = y_a \downarrow \\
 & & \eta'^{-1} \uparrow \uparrow
 \end{array}$$

となる. 命題 12 より η は同型だから χ^f も同型である. □

命題 46. 次の図式で, $a, b, g, l, b(f, 1)$ が admissible だとする.

$$\begin{array}{ccc}
 b & & \\
 f \uparrow & \eta \uparrow \uparrow & l \searrow \\
 a & \xrightarrow{g} & c
 \end{array}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が y -各点左 Kan 拡張で, f が y -忠実充満ならば, η は同型である.

証明. $\langle l, \eta \rangle$ が y -各点左 Kan 拡張だから

$$\begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \eta \Uparrow g & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & \chi^g \Uparrow &
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 b & \xrightarrow{l} & c \\
 f \uparrow & \chi^f \Uparrow & \downarrow c(g,1) \\
 a & \xrightarrow{y_a} & \hat{a} \\
 & b(f,1) \Uparrow \eta' \Uparrow &
 \end{array}$$

としたとき, $\langle l, \eta' \rangle$ は絶対左 Kan リフトである. 今 f が y -忠実充満だから χ^f は同型であり, よって右の四角全体は絶対左 Kan リフトとなる. 一方で左の $\langle g, \chi^g \rangle$ は絶対左 Kan リフトであるから η が同型となる. \square

参考文献

- [1] Ross Street, Fibrations and Yoneda's Lemma in a 2-category, Lecture Notes in Mathematics 420, Springer-Verlag (1974), 104–133
- [2] Ross Street and R.F.C. Walters, Yoneda Structures on 2-categories, J. Algebra 50 (1978), 350–379
- [3] Mark Weber, Yoneda structures from 2-toposes, Applied Categorical Structures, Vol. 15 (2007), 259–323, <https://sites.google.com/site/markwebersmaths/home/yoneda-structures-from-2-toposes>
- [4] R. Street and W. Tholen and M. Wischnewsky and H. Wolff, Semi-Topological Functors III: Lifting of Monads and Adjoint Functors, Journal of Pure and Applied Algebra 16 (1980), 299-314, [http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049\(80\)90035-3](http://dx.doi.org/10.1016/0022-4049(80)90035-3)