# 2-category

alg-d

`http://alg-d.com/math/kan_extension/`

2022 年 11 月 9 日

圏の圏 $\mathbf{CAT}$ では，対象 $C, D \in \mathbf{CAT}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}}(C, D)$ も圏になるのであった (関手が対象，自然変換が射)．このように Hom がまた圏になっているような圏のことを「2 次元の圏」や「2-圏 (2-category)」と呼ぶ．このような「2 次元の圏」にはいくつかの定義があるのだが，その中でもよく使われているのが「bicategory (もしくは weak 2-category)」と「strict 2-category」である[1]．

## 目次

---

[1] 論文等で単に 2-category と書かれているときは strict 2-category を意味していることが多い．

# 1 定義

まずは定義を述べ，詳しい説明は追々していくことにする．

**定義．** bicategory $\mathcal{B}$ とは，以下を満たすことをいう．

(1) 集まり $\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ が与えられている．$\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ の元を対象 (もしくは 0-cell) と呼ぶ．圏の場合と同様，$a \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ を $a \in \mathcal{B}$ とも書く．

(2) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して圏 $\mathcal{B}(a, b)$ が与えられている．

(3) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して関手 $M^{abc} \colon \mathcal{B}(b, c) \times \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{B}(a, c)$ が与えられている．

(4) 各対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して関手 $I^a \colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}(a, a)$ が与えられている[*2]．

(5) 各対象 $a, b, c, d \in \mathcal{B}$ に対して次の自然同型 $\alpha^{abcd}$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(c,d) \times \mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "M^{bcd} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times M^{abc}"] & \\
\mathcal{B}(b,d) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha^{abcd}"'] \arrow[dr, "M^{abd}"'] & & \mathcal{B}(c,d) \times \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "M^{acd}"] \\
& \mathcal{B}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

(6) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して次の自然同型 $\lambda^{ab}, \rho^{ab}$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b \times \mathrm{id}"'] & {} & \mathcal{B}(a,b) & \mathcal{B}(a,b) \times \mathbb{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times I^a"'] & {} & \mathcal{B}(a,b) \\
& \mathcal{B}(b,b) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[ur, "M^{abb}"'] \arrow[u, Rightarrow, "\lambda^{ab}", "\wr"'] & & & \mathcal{B}(a,b) \times \mathcal{B}(a,a) \arrow[ur, "M^{aab}"'] \arrow[u, Rightarrow, "\rho^{ab}", "\wr"'] &
\end{tikzcd}$$

(7) 次の自然変換の等式が成り立つ．(スペースの都合上，$\mathcal{B}cba := \mathcal{B}(b, c) \times \mathcal{B}(a, b)$ 等

---

[*2] $\mathbb{1}$ は対象が 1 つだけの離散圏.

の略記を行った．)

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{B}edcba \arrow[lld, "M^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[rrd, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times M^{abc}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}\times M^{bcd}\times\mathrm{id}"] & & \\
\mathcal{B}ecba \arrow[dd, "M^{bce}\times\mathrm{id}"'] & & & & \mathcal{B}edca \arrow[dd, "\mathrm{id}\times M^{acd}"] \\
 & \overset{\alpha^{bcde}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}edba \arrow[lld, "M^{bde}\times\mathrm{id}"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}\times M^{abd}"'] & \overset{\mathrm{id}\times\alpha^{abcd}}{\Longrightarrow} & \\
\mathcal{B}eba \arrow[rrd, "M^{abe}"'] & & \overset{\alpha^{abde}}{\Longrightarrow} & & \mathcal{B}eda \arrow[lld, "M^{ade}"] \\
 & & \mathcal{B}ea & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{B}edcba \arrow[lld, "M^{cde}\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"'] \arrow[rrd, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}\times M^{abc}"] & & \\
\mathcal{B}ecba \arrow[dd, "M^{bce}\times\mathrm{id}"'] \arrow[rrd, "\mathrm{id}\times M^{abc}"] & & = & & \mathcal{B}edca \arrow[dd, "\mathrm{id}\times M^{acd}"] \arrow[lld, "M^{cde}\times\mathrm{id}"'] \\
 & & \mathcal{B}eca \arrow[dd, "M^{ace}"] & & \\
\mathcal{B}eba \arrow[rrd, "M^{abe}"'] & \overset{\alpha^{abce}}{\Longrightarrow} & & \overset{\alpha^{acde}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}eda \arrow[lld, "M^{ade}"] \\
 & & \mathcal{B}ea & &
\end{tikzcd}$$

(8) 次の自然変換の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{B}cba \arrow[lldd, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrdd, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\times I^{b}\times\mathrm{id}"] & & \\
 & \overset{(\rho^{bc})^{-1}\times\mathrm{id}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}cbba \arrow[lld, "M^{bbc}\times\mathrm{id}"] \arrow[rrd, "\mathrm{id}\times M^{abb}"'] & \overset{\mathrm{id}\times\lambda^{ab}}{\Longrightarrow} & \\
\mathcal{B}cba \arrow[rrd, "M^{abc}"'] & & \overset{\alpha^{abbc}}{\Longrightarrow} & & \mathcal{B}cba \arrow[lld, "M^{abc}"] \\
 & & \mathcal{B}ca & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathcal{B}cba \arrow[lldd, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[rrdd, bend left, "\mathrm{id}"] & & \\
 & & = & & \\
\mathcal{B}cba \arrow[rrd, "M^{abc}"'] & & & & \mathcal{B}cba \arrow[lld, "M^{abc}"] \\
 & & \mathcal{B}ca & &
\end{tikzcd}$$

$\alpha^{abcd}$ を associator，$\lambda^{ab}$ を left unitor，$\rho^{ab}$ を right unitor と呼ぶ．また $\alpha^{abcd}, \lambda^{ab}, \rho^{ab}$ が全て恒等変換となる bicategory を strict 2-category という．

$\mathcal{B}$ を bicategory，$a, b \in \mathcal{B}$ を対象とするとき $\mathcal{B}(a,b)$ は圏である．この圏の対象 $f$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism (もしくは 1-cell) と呼ぶ．このとき $a$ を $f$ のドメイン，$b$ を $f$ のコドメインと呼び，記号では $f\colon a \to b$ と表す．また圏 $\mathcal{B}(a,b)$ の射 $\beta$ を $\mathcal{B}$ の 2-morphism (もしくは 2-cell) と呼ぶ[*3]．$\beta$ の (圏 $\mathcal{B}(a,b)$ の射としての) ドメインが $f$，コドメインが $g$ のとき記号では $\beta\colon f \Rightarrow g$ と書く．$f, g\colon a \to b$ であることも明示する場合は $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$

---

[*3] $\alpha$ は常に associator を表すことにして，2-morphism の記号は $\beta, \gamma$ などのギリシャ文字を基本的には使うことにする．

と書く．図式では次のように書く．

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] a \arrow[r, bend left, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right, "g"', ""{name=D}] & b \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\beta"] \end{tikzcd}$$

$f, g, h\colon a \to b$ を 1-morphism，$\beta\colon f \Rightarrow g$，$\gamma\colon g \Rightarrow h$ を 2-morphism とする．$\beta, \gamma$ は圏 $\mathcal{B}(a, b)$ の射だから合成することができる．この合成を垂直合成 (vertical composition) と呼び，ここでは $\gamma * \beta$ と書く[*4]．図式で書くと次のようになる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=40, "f", ""{name=F, below}] \arrow[r, "g" near end, ""{name=G1, above}, ""{name=G2, below}] \arrow[r, bend right=40, "h"', ""{name=H, above}] & b \arrow[Rightarrow, from=F, to=G1, "\beta"'] \arrow[Rightarrow, from=G2, to=H, "\gamma"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=40, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=40, "h"', ""{name=D}] & b \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\gamma*\beta"'] \end{tikzcd}$$

$\mathcal{B}(a, b)$ は圏だから，垂直合成は結合的である．即ち $\beta\colon f \Rightarrow g$，$\gamma\colon g \Rightarrow h$，$\sigma\colon h \Rightarrow k$ を 2-morphism としたとき $(\sigma * \gamma) * \beta = \sigma * (\gamma * \beta)$ が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=60, "f", ""{name=F, below}] \arrow[r, bend left=10, "g"' near end, ""{name=G1, above}, ""{name=G2, below}] \arrow[r, bend right=60, "k"', ""{name=K, above}] & b \arrow[Rightarrow, from=F, to=G1, "\beta"'] \arrow[Rightarrow, from=G2, to=K, "\sigma*\gamma"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=60, "f", ""{name=F, below}] \arrow[r, bend right=10, "h" near end, ""{name=H1, above}, ""{name=H2, below}] \arrow[r, bend right=60, "k"', ""{name=K, above}] & b \arrow[Rightarrow, from=F, to=H1, "\gamma*\beta"'] \arrow[Rightarrow, from=H2, to=K, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

また $\mathcal{B}(a, b)$ は圏だから $f\colon a \to b$ の恒等射となる 2-morphism $\mathrm{id}_f\colon f \Rightarrow f$ も存在する．このとき $\beta\colon f \Rightarrow g$ に対して $\mathrm{id}_g * \beta = \beta$，$\beta * \mathrm{id}_f = \beta$ である．

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=40, "f", ""{name=F, below}] \arrow[r, "g" near end, ""{name=G1, above}, ""{name=G2, below}] \arrow[r, bend right=40, "g"', ""{name=G, above}] & b \arrow[Rightarrow, from=F, to=G1, "\beta"'] \arrow[Rightarrow, from=G2, to=G, "\mathrm{id}_g"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=40, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=40, "g"', ""{name=D}] & b \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=40, "f", ""{name=F, below}] \arrow[r, "f" near end, ""{name=F1, above}, ""{name=F2, below}] \arrow[r, bend right=40, "g"', ""{name=G, above}] & b \arrow[Rightarrow, from=F, to=F1, "\mathrm{id}_f"'] \arrow[Rightarrow, from=F2, to=G, "\beta"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd}[column sep=huge] a \arrow[r, bend left=40, "f", ""{name=U, below}] \arrow[r, bend right=40, "g"', ""{name=D}] & b \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "\beta"'] \end{tikzcd}$$

---

[*4] 垂直合成 (や後に述べる水平合成) の決まった記号というのは特に無いようで，論文によっても記号が異なる．

今度は $f, g\colon a \to b$ と $k, l\colon b \to c$ を 1-morphism，$\beta\colon f \Rightarrow g$，$\gamma\colon k \Rightarrow l$ を 2-morphism とする．関手 $M^{abc}$ により $M^{abc}(\gamma, \beta)\colon M^{abc}(k, f) \Rightarrow M^{abc}(l, g)$ を考えることができる．これを水平合成 (horizontal composition) と呼ぶ．$k \circ f := M^{abc}(k, f)$，$\gamma \bullet \beta := M^{abc}(\gamma, \beta)$ と書く．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"{name=U1}] \arrow[r, bend right, "g"'{name=D1}] & b \arrow[r, bend left, "k"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "l"'{name=D2}] & c & = & a \arrow[r, bend left, "k\circ f"{name=U3}] \arrow[r, bend right, "l\circ g"'{name=D3}] & c
\arrow[Rightarrow, from=U1, to=D1, "\beta"]
\arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\gamma"]
\arrow[Rightarrow, from=U3, to=D3, "\gamma\bullet\beta"]
\end{tikzcd}$$

また $M^{abc}(k, -)\colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{B}(a, c)$ と $M^{abc}(-, f)\colon \mathcal{B}(b, c) \to \mathcal{B}(a, c)$ も関手である．これらの関手をそれぞれ記号で $k \bullet -$，$- \bullet f$ と書くことにする[*5]．この記号を使えば $k \bullet \beta = \mathrm{id}_k \bullet \beta$，$\gamma \bullet f = \gamma \bullet \mathrm{id}_f$ である[*6]．

$M^{abc}(\gamma, -)\colon M^{abc}(k, -) \Rightarrow M^{abc}(l, -)$，$M^{abc}(-, \beta)\colon M^{abc}(-, f) \Rightarrow M^{abc}(-, g)$ は自然変換である．これも $\gamma \bullet - := M^{abc}(\gamma, -)$，$- \bullet \beta := M^{abc}(-, \beta)$ のように書くことにする．$(\gamma \bullet -)_f = \gamma \bullet f$，$(- \bullet \beta)_k = k \bullet \beta$ である．

また次の図式の状況のとき

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "f"{name=U1}] \arrow[r, "g"{name=M1, near end}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=D1}] & b \arrow[r, bend left=50, "k"{name=U2}] \arrow[r, "l"{name=M2, near end}] \arrow[r, bend right=50, "m"'{name=D2}] & c
\arrow[Rightarrow, from=U1, to=M1, "\beta"']
\arrow[Rightarrow, from=M1, to=D1, "\gamma"']
\arrow[Rightarrow, from=U2, to=M2, "\sigma"']
\arrow[Rightarrow, from=M2, to=D2, "\tau"']
\end{tikzcd}$$

$M^{abc}\colon \mathcal{B}(b, c) \times \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{B}(a, c)$ が関手であることから $(\tau * \sigma) \bullet (\gamma * \beta) = (\tau \bullet \gamma) * (\sigma \bullet \beta)$ が成り立つことが分かる．（これを interchange law という．）

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "f"{name=U1}] \arrow[r, bend right=50, "h"'{name=D1}] & b \arrow[r, bend left=50, "k"{name=U2}] \arrow[r, bend right=50, "m"'{name=D2}] & c & = & a \arrow[r, bend left=40, "k\circ f"{name=U3}] \arrow[r, "l\circ g"{name=M3, near end}] \arrow[r, bend right=40, "m\circ h"'{name=D3}] & c
\arrow[Rightarrow, from=U1, to=D1, "\gamma*\beta"']
\arrow[Rightarrow, from=U2, to=D2, "\tau*\sigma"']
\arrow[Rightarrow, from=U3, to=M3, "\sigma\bullet\beta"']
\arrow[Rightarrow, from=M3, to=D3, "\tau\bullet\gamma"']
\end{tikzcd}$$

---

[*5] $k \circ -$，$- \circ f$ という記法を採用しても良かったが，ここでは $\bullet$ を使うことにした．その方が以下の証明を書く際に混乱が少ないと感じたためである．

[*6] $k \bullet \beta$ や $\gamma \bullet f$ のような，1-morphism と 2-morphism の合成を whiskering と呼ぶ．

次に自然同型 $\alpha^{abcd}$ について考える．これは次のような自然同型であった．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[ld, "M^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[rd, "\mathrm{id}\times M^{abc}"] & \\
\mathcal{B}(b,d)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[rd, "M^{abd}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha^{abcd}"'] & & \mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(a,c) \arrow[ld, "M^{acd}"] \\
& \mathcal{B}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

故にその成分は対象 $\langle h,g,f\rangle\in\mathcal{B}(c,d)\times\mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b)$ (即ち図式 $a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c\xrightarrow{h}d$) に対して圏 $\mathcal{B}(a,d)$ の射 (即ち 2-morphism) $\alpha^{abcd}_{hgf}\colon(h\circ g)\circ f\Rightarrow h\circ(g\circ f)$ となる．$\alpha^{abcd}$ が自然同型だから，この $\alpha^{abcd}_{hgf}$ は同型な 2-morphism となる．一般に bicategory における 1-morphism の合成では，結合律は成り立つとは限らない．つまり $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$ とは限らないが，代わりに $\alpha^{abcd}_{hgf}$ によって同型 $(h\circ g)\circ f\cong h\circ(g\circ f)$ が与えられることになる．

次に自然同型 $\lambda^{ab}$ は次のような自然同型であった．

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[rd, "I^b\times\mathrm{id}"'] & & \mathcal{B}(a,b) \\
& \mathcal{B}(b,b)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[ru, "M^{abb}"'] \arrow[u, phantom, "\lambda^{ab}\Uparrow\wr"] &
\end{tikzcd}$$

よって $\mathrm{Ob}(\mathbb{1})=\{*\}$ として $\mathrm{id}_b:=I^b(*)$ と書けば，$\lambda^{ab}$ の成分は $f\colon a\to b$ に対して同型な 2-morphism $\lambda^{ab}_{*f}\colon\mathrm{id}_b\circ f\Rightarrow f$ となる．(以下では $\lambda^{ab}_{*f}$ を単に $\lambda^{ab}_{f}$ と書く．) 同様に $\rho^{ab}$ については同型 $\rho^{ab}_{f}\colon f\circ\mathrm{id}_a\Rightarrow f$ を与える．よってこの id は bicategory において (弱い意味での) 恒等射を与える．

さて，bicategory の定義の条件 (7) は自然変換の等式だから，自然変換の各成分が等しいという条件と同等である．即ち，任意の図式 $a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c\xrightarrow{h}d\xrightarrow{k}e$ に対して，圏 $\mathcal{B}(a,e)$ における射の等式

$$\begin{aligned}
&M^{ade}(\mathrm{id}_k,\alpha^{abcd}_{hgf})\circ\alpha^{abde}_{k,M^{bcd}(h,g),f}\circ M^{abe}(\alpha^{bcde}_{khg},\mathrm{id}_f)\\
&\quad=\alpha^{acde}_{k,h,M^{abc}(g,f)}\circ\alpha^{abce}_{M^{cde}(k,h),g,f}
\end{aligned}$$

が成り立つという条件と同等である．これは上記の記号を使うと

$$(k\bullet\alpha^{abcd}_{hgf})*\alpha^{abde}_{k,h\circ g,f}*(\alpha^{bcde}_{khg}\bullet f)=\alpha^{acde}_{k,h,g\circ f}*\alpha^{abce}_{k\circ h,g,f}$$

となる．これは圏 $\mathcal{B}(a,e)$ における図式として書けば，次の可換性を示している．

$$\begin{tikzcd}
 & & ((k\circ h)\circ g)\circ f \arrow[dll, "\alpha^{bcde}_{khg}\bullet f"'] \arrow[drr, "\alpha^{abce}_{k\circ h,g,f}"] & & \\
(k\circ(h\circ g))\circ f \arrow[dr, "\alpha^{abde}_{k,h\circ g,f}"'] & & & & (k\circ h)\circ(g\circ f) \arrow[dl, "\alpha^{acde}_{k,h,g\circ f}"] \\
 & k\circ((h\circ g)\circ f) \arrow[rr, "k\bullet\alpha^{abcd}_{hgf}"'] & & k\circ(h\circ(g\circ f)) &
\end{tikzcd}$$

同様に，条件 (8) は

$$(g\bullet\lambda^{ab}_f)*\alpha^{abbc}_{g,\mathrm{id}_b,f}=\rho^{bc}_g\bullet f$$

となり，図式として書けば次の可換性を示している．

$$\begin{tikzcd}
(g\circ\mathrm{id}_b)\circ f \arrow[rr, "\alpha^{abbc}_{g,\mathrm{id}_b,f}"] \arrow[dr, "\rho^{bc}_g\bullet f"'] & & g\circ(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[dl, "g\bullet\lambda^{ab}_f"] \\
 & g\circ f &
\end{tikzcd}$$

bicategory では，$\alpha$ により同型 $(h\circ g)\circ f\cong h\circ(g\circ f)$ 等が与えられることになる．この $\alpha$ により，例えば同型 $((l\circ k)\circ(h\circ g))\circ f\cong l\circ(k\circ((h\circ g)\circ f))$ などが得られるのであるが，一般にこのような同型を $\alpha$ から得る方法は複数あることになる．というのも，射が 4 つの場合でも既に，同型 $((k\circ h)\circ g)\circ f\cong k\circ(h\circ(g\circ f))$ は上記の五角形の図式から分かるように複数あるからである．つまり，何も条件が無ければこのような同型は標準的には定まらないことになる．$\lambda$ と $\rho$ についても同様である．そこで bicategory の条件として「$\alpha,\lambda,\rho$ によって複数の同型が得られる場合，それらは常に一致する」という条件を付け加えたいわけである．これを coherence 条件という．ところが実は，coherence 条件は上記の (五角形と三角形の) 二つの図式の可換性さえ認めてしまえば，証明できることが分かっている (coherence 定理)．そこで bicategory の条件としてこの二つを入れているのである．coherence 定理は後で証明する (定理 41)．

**例 1.** **CAT** は strict 2-category になる．まず圏 $A,B$ に対して $\mathbf{CAT}(A,B):=B^A$ と定義して，圏 $A,B,C$ に対して関手 $M^{ABC}\colon\mathbf{CAT}(B,C)\times\mathbf{CAT}(A,B)\to\mathbf{CAT}(A,C)$

を自然変換の水平合成で定義する．即ち

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & B \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\gamma"] & C \end{tikzcd}$$

のとき，$a \in A$ に対して $M^{ABC}(\gamma, \beta)_a := \gamma_{Ga} \circ K(\beta_a)$ である．このとき次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd} & D^C \times C^B \times B^A \arrow[dl, "M^{BCD}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times M^{ABC}"] & \\ D^B \times B^A \arrow[dr, "M^{ABD}"'] & & D^C \times C^A \arrow[dl, "M^{ACD}"] \\ & D^A & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \times B^A \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^B\times\mathrm{id}"'] & & B^A & B^A \times \mathbb{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^A"'] & & B^A \\ & B^B \times B^A \arrow[ur, "M^{ABB}"'] & & & B^A \times A^A \arrow[ur, "M^{AAB}"'] & \end{tikzcd}$$

よって $\alpha^{ABCD}, \lambda^{AB}, \rho^{AB}$ として恒等変換を取ることができる．故に bicategory の定義の条件 (7), (8) は明らかに成り立つから **CAT** は bicategory である．$\alpha^{ABCD}, \lambda^{AB}, \rho^{AB}$ が恒等変換だから **CAT** は strict 2-category である． □

**例 2.** 圏は Hom を離散圏と見なすことで strict 2-category になる． □

**例 3.** $\mathcal{B}$ を bicategory とする．このとき，次のように定めた $\langle \mathcal{B}^{\mathrm{op}}, M^{\mathrm{op}}, \alpha^{\mathrm{op}}, \lambda^{\mathrm{op}}, \rho^{\mathrm{op}} \rangle$ は bicategory を与える．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.
- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a, b) := \mathcal{B}(b, a)$.
- $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して，関手 $(M^{\mathrm{op}})^{abc} \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b, c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a, b) \to \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a, c)$ を

$$\mathcal{B}(c, b) \times \mathcal{B}(b, a) \cong \mathcal{B}(b, a) \times \mathcal{B}(c, b) \xrightarrow{M^{cba}} \mathcal{B}(c, a)$$

  で定める．

- $a,b,c,d\in\mathcal{B}$ に対して，自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(c,d)\times\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c)\times\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "(M^{\mathrm{op}})^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times(M^{\mathrm{op}})^{abc}"] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,d)\times\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dr, "(M^{\mathrm{op}})^{abd}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "(\alpha^{\mathrm{op}})^{abcd}"'] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(c,d)\times\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "(M^{\mathrm{op}})^{acd}"] \\
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

を

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,a)\times\mathcal{B}(c,b)\times\mathcal{B}(d,c) \arrow[dl, "\mathrm{id}\times M^{dcb}"'] \arrow[dr, "M^{cba}\times\mathrm{id}"] & \\
\mathcal{B}(b,a)\times\mathcal{B}(d,b) \arrow[dr, "M^{dba}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "(\alpha^{dcba})^{-1}"'] & & \mathcal{B}(c,a)\times\mathcal{B}(d,c) \arrow[dl, "M^{dca}"] \\
& \mathcal{B}(d,a) &
\end{tikzcd}$$

で定義する．
- $(\lambda^{\mathrm{op}})^{ab}:=\rho^{ba}$，$(\rho^{\mathrm{op}})^{ab}:=\lambda^{ba}$ とする．

また，次のように定めた $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}$ も bicategory である．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{co}}):=\mathrm{Ob}(\mathcal{B})$
- $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}(a,b):=\mathcal{B}(a,b)^{\mathrm{op}}$

よって $\mathcal{B}^{\mathrm{coop}}:=(\mathcal{B}^{\mathrm{co}})^{\mathrm{op}}$ も bicategory である． □

**例 4.** bicategory **Mod** を以下のように定めることができる．

- 単位的環を対象とする．
- $R$ から $S$ への 1-morphism は左 $S$ 右 $R$ 加群とする．
- 2-morphism は準同型写像とする．即ち $\mathbf{Mod}(R,S)$ は左 $S$ 右 $R$ 加群の圏である．
- $M\colon R\to S$ と $N\colon S\to T$ の合成はテンソル積 $N\otimes_S M\colon R\to T$ とする．これは関手 $\mathbf{Mod}(S,T)\times\mathbf{Mod}(R,S)\to\mathbf{Mod}(R,T)$ を定める．
- $M\colon R\to S$，$N\colon S\to T$，$L\colon T\to U$ に対して，テンソル積の普遍性により得られ

る射を $\alpha^{RSTU}_{LNM}\colon (L \otimes_T N) \otimes_S M \to L \otimes_T (N \otimes_S M)$ とする．これにより自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Mod}(T,U) \times \mathbf{Mod}(S,T) \times \mathbf{Mod}(R,S) \arrow[dl, "M^{STU}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times M^{RST}"] & \\
\mathbf{Mod}(R,U) \times \mathbf{Mod}(R,S) \arrow[dr, "M^{RSU}"'] \arrow[rr, Rightarrow, shorten=20mm, "\sim", "\alpha^{RSTU}"'] & & \mathbf{Mod}(T,U) \times \mathbf{Mod}(R,T) \arrow[dl, "M^{RTU}"] \\
 & \mathbf{Mod}(R,U) &
\end{tikzcd}$$

が得られる．

- $\mathrm{id}_R\colon R \to R$ を，$R$ を積で左 $R$ 右 $R$ 加群とみなしたものとする．
- $M\colon R \to S$ に対して，テンソル積の普遍性により得られる射を $\lambda^{RS}_M\colon S \otimes_S M \to M$，$\rho^{RS}_M\colon M \otimes_R R \to M$ とする．これにより自然同型

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times \mathbf{Mod}(R,S) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^S\times\mathrm{id}"'] & & \mathbf{Mod}(R,S) \\
 & \mathbf{Mod}(S,S) \times \mathbf{Mod}(R,S) \arrow[ur, "M^{RSS}"'] \arrow[u, phantom, "\lambda^{RS}\Uparrow\wr"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbf{Mod}(R,S) \times \mathbb{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^R"'] & & \mathbf{Mod}(R,S) \\
 & \mathbf{Mod}(R,S) \times \mathbf{Mod}(R,R) \arrow[ur, "M^{RRS}"'] \arrow[u, phantom, "\rho^{RS}\Uparrow\wr"] &
\end{tikzcd}$$

が得られる．

- これらは条件 (7)，(8) を満たす． □

**例 5.** profunctor がなす bicategory **Prof** を以下のように定めることができる．

- Ob(**Prof**) := Ob(**Cat**) とする．
- 圏 $A$ から圏 $B$ への 1-morphism は profunctor $F\colon A \nrightarrow B$ とする．
- 2-morphism は自然変換とする．即ち $\mathbf{Prof}(A,B) = \mathbf{Set}^{B^{\mathrm{op}}\times A}$ である．
- 合成は profunctor の合成とする．即ち $F\colon A \nrightarrow B$，$K\colon B \nrightarrow C$ に対して

$$M^{ABC}(K,F) := KF = y^{\dagger}K \circ F$$

は profunctor の合成とする．そして自然変換 $\beta\colon F \Rightarrow G$，$\gamma\colon K \Rightarrow L$ に対して $M^{ABC}(\gamma,\beta)\colon LG \Rightarrow KF$ を

$$M^{ABC}(\gamma,\beta) := y^{\dagger}\gamma \bullet \beta$$

で定める．この $M^{ABC}$ は明らかに関手である．

- 自然変換

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{Prof}(C,D)\times\mathbf{Prof}(B,C)\times\mathbf{Prof}(A,B) \arrow[dl, "M^{BCD}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times M^{ABC}"] & \\
\mathbf{Prof}(B,D)\times\mathbf{Prof}(A,B) \arrow[dr, "M^{ABD}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha^{ABCD}"'] & & \mathbf{Prof}(C,D)\times\mathbf{Prof}(A,C) \arrow[dl, "M^{ACD}"] \\
 & \mathbf{Prof}(A,D) &
\end{tikzcd}$$

を定義する．まず $F\colon A \mathrel{-\mkern-6mu\circ\mkern-6mu\rightarrow} B$，$G\colon B \mathrel{-\mkern-6mu\circ\mkern-6mu\rightarrow} C$，$H\colon C \mathrel{-\mkern-6mu\circ\mkern-6mu\rightarrow} D$ に対して

$$(HG)F = y^\dagger(y^\dagger H\circ G)\circ F,\quad H(GF) = y^\dagger H\circ(y^\dagger G\circ F)$$

$$\begin{tikzcd}
 & \widehat{B} \arrow[r, "y^\dagger G"] \arrow[rr, bend left, "y^\dagger(y^\dagger H\circ G)"] & \widehat{C} \arrow[r, "y^\dagger H"] & \widehat{D} \\
A \arrow[ur, "F"] & B \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "G"'] & C \arrow[u, "y"] \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

である．$y^\dagger H$ は左随伴だから左 Kan 拡張 $y^\dagger G$ と交換する．故に自然同型

$$\alpha'_{HG}\colon y^\dagger(y^\dagger H\circ G)\Rightarrow y^\dagger H\circ y^\dagger G$$

が存在する．そこで $\alpha_{HGF} := (\alpha'_{HG})_F$ と定める．

- 自然同型 $y^\dagger y\Rightarrow\mathrm{id}$ を $\lambda'$ とする．$F\colon A \mathrel{-\mkern-6mu\circ\mkern-6mu\rightarrow} B$ に対して $\lambda_F\colon(y^\dagger y)\circ F\Rightarrow F$ を $\lambda'_F$ で定める．
- $F\colon A \mathrel{-\mkern-6mu\circ\mkern-6mu\rightarrow} B$ に対して自然同型 $y^\dagger F\circ y\Rightarrow F$ を $\rho_F$ とする．
- これらは条件 (7)，(8) を満たす． □

**例 6.** $C$ を pullback を持つ圏とするとき，$C$ の span がなす bicategory $\mathrm{Span}(C)$ を以下のように定めることができる．

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{Span}(C)) := \mathrm{Ob}(C)$ とする．
- $a$ から $b$ への 1-morphism は $a$ から $b$ への span，即ち図式 $a\xleftarrow{f_0} f\xrightarrow{f_1} b$ とする．
- 2-morphism は span の射とする．これにより対象 $a,b\in C$ に対して $\mathrm{Span}(C)(a,b)$ は圏になる．

- $a \xleftarrow{f_0} f \xrightarrow{f_1} b$ と $b \xleftarrow{g_0} g \xrightarrow{g_1} c$ の合成 $a \leftarrow g \circ f \rightarrow c$ を，pullback を使って次の図式で定める．

$$\begin{tikzcd}
& & g \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& f \arrow[dl, "f_0"'] \arrow[dr, "f_1"'] & \text{p.b.} & g \arrow[dl, "g_0"] \arrow[dr, "g_1"] & \\
a & & b & & c
\end{tikzcd}$$

これは関手 $M^{abc}\colon \mathrm{Span}(C)(b,c) \times \mathrm{Span}(C)(a,b) \to \mathrm{Span}(C)(a,c)$ を与える．

∵) $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b,\ \gamma\colon k \Rightarrow l\colon b \to c$ に対して $M^{abc}(\gamma,\beta)$ を pullback の普遍性で得られる次の点線の射で定義する．

$$\begin{tikzcd}
& & k \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dddd, dashed, bend left] & & \\
& f \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\beta"] & & k \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "\gamma"] & \\
a & & b & & c \\
& g \arrow[ul] \arrow[ur] & & l \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
& & l \circ g \arrow[ul] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

pullback の普遍性から，この $M^{abc}$ が関手となることは容易に分かる．

- $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ とする．$\alpha_{hgf}\colon (h \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f)$ を pullback の普遍性により定める．

$$\begin{tikzcd}
& & (h \circ g) \circ f \arrow[rr, dashed, "\alpha_{hgf}"] \arrow[d, dashed] \arrow[ddl] \arrow[drr] & & h \circ (g \circ f) \arrow[dll] \arrow[ddr] & & \\
& & g \circ f \arrow[dl] \arrow[dr] & & h \circ g \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& f \arrow[dl] \arrow[dr] & & g \arrow[dl] \arrow[dr] & & h \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b & & c & & d
\end{tikzcd}$$

これは $f, g, h$ について自然である．

∵) $\beta\colon f \Rightarrow f',\ \gamma\colon g \Rightarrow g',\ \delta\colon h \Rightarrow h'$ として

$$(\delta \bullet (\gamma \bullet \beta)) * \alpha_{hgf} = \alpha_{h'g'f'} * ((\delta \bullet \gamma) \bullet \beta)$$

を示せばよいが，それは普遍性により分かる．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & (h \circ g) \circ f \arrow[rrrrrr, "\alpha_{hgf}"] \arrow[ddl] \arrow[drrrrr] \arrow[dddddd, "(\delta\bullet\gamma)\bullet\beta"] & & & & & & h \circ (g \circ f) \arrow[dlllll] \arrow[ddr] \arrow[dddddd, bend left, "\delta\bullet(\gamma\bullet\beta)"] & & & \\
 & & & & g \circ f \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dddd, bend left, "\gamma\bullet\beta"] & & & & h \circ g \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dddd, bend left, "\delta\bullet\gamma"] & & & & \\
 & & f \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dd, "\beta"'] & & & & g \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dd, "\gamma"] & & & & h \arrow[dll] \arrow[drr] \arrow[dd, "\delta"] & & \\
a & & & & b & & & & c & & & & d \\
 & & f' \arrow[ull] \arrow[urr] & & & & g' \arrow[ull] \arrow[urr] & & & & h' \arrow[ull] \arrow[urr] & & \\
 & & & & g' \circ f' \arrow[ull] \arrow[urr] & & & & h' \circ g' \arrow[ull] \arrow[urr] & & & & \\
 & & & (h' \circ g') \circ f' \arrow[uul] \arrow[urrrrr] \arrow[rrrrrr, "\alpha_{h'g'f'}"'] & & & & & & h' \circ (g' \circ f') \arrow[ulllll] \arrow[uur] & & &
\end{tikzcd}$$

また普遍性から明らかに，$\alpha_{hgf}$ は同型である．

- $a \xleftarrow{\mathrm{id}_a} a \xrightarrow{\mathrm{id}_a} a$ を $\mathrm{id}_a$ とする．
- $f\colon a \to b$ に対して $\lambda_f\colon \mathrm{id}_b \circ f \Rightarrow f$ と $\rho_f\colon f \circ \mathrm{id}_a \Rightarrow f$ を pullback の射影により定める．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{id}_b \circ f \arrow[dl, "\lambda_f"'] \arrow[dr] & & \\
 & f \arrow[dl] \arrow[dr] & & \mathrm{id}_b \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & b & & b
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & & f \circ \mathrm{id}_a \arrow[dl] \arrow[dr, "\rho_f"] & & \\
 & \mathrm{id}_a \arrow[dl] \arrow[dr] & & f \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a & & a & & b
\end{tikzcd}$$

  $\lambda_f$，$\rho_f$ は $f$ について自然な同型である．
- pullback の普遍性により，条件 (7)，(8) が成り立つ．

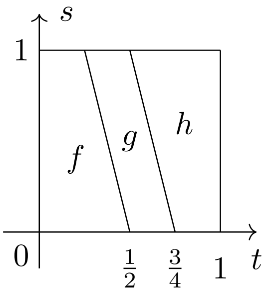
以上により $\mathrm{Span}(C)$ は bicategory である． □

**例 7** (fundamental 2-groupoid)**.** 位相空間 $X$ に対して以下のように定めると bicategory $\Pi_2(X)$ が得られる．この bicategory を fundamental 2-groupoid という．

- 点 $a \in X$ を対象とする．即ち $\mathrm{Ob}(\Pi_2(X)) := X$ である．
- $a \in X$ から $b \in X$ への道 $f\colon [0,1] \to X$ を $a$ から $b$ への 1-morphism とする．
- 道 $f\colon a \to b$ から $g\colon a \to b$ へのホモトピーを 2-morphism とする (但しホモトピックな 2-morphism は同じものと見なす)．これにより $a, b \in X$ に対して圏

$\Pi_2(X)(a,b)$ が定まる．

- $f\colon a\to b,\ \ g\colon b\to c$ に対して合成 $g\circ f\colon a\to c$ を
$$g\circ f(t):=\begin{cases} f(2t) & \left(0\le t\le \dfrac{1}{2}\right)\\ g(2t-1) & \left(\dfrac{1}{2}<t\le 1\right)\end{cases}$$
で定義する．これは関手 $M^{abc}\colon \Pi_2(X)(b,c)\times\Pi_2(X)(a,b)\to\Pi_2(X)(a,c)$ を与える．
- $a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c\xrightarrow{h}d$ とする．連続写像 $\alpha_{hgf}\colon[0,1]\times[0,1]\to X$ を
$$\alpha_{hgf}(s,t):=\begin{cases} f\left(\dfrac{4t}{2-s}\right) & \left(0\le t\le\dfrac{2-s}{4}\right)\\ g(4t-2+s) & \left(\dfrac{2-s}{4}<t\le\dfrac{3-s}{4}\right)\\ h\left(\dfrac{4t-3+s}{1+s}\right) & \left(\dfrac{3-s}{4}<t\le 1\right)\end{cases}$$
により定める．



これは $\alpha_{hgf}\colon(h\circ g)\circ f\Rightarrow h\circ(g\circ f)$ である．この $\alpha_{hgf}$ は $f,g,h$ について自然な同型である．
- $a\in X$ に対して $\mathrm{id}_a\colon a\to a$ は $\mathrm{id}_a(t):=a$ で定まる道 $\mathrm{id}_a\colon[0,1]\to X$ とする．

- $f\colon a\to b$ に対して $\lambda_f\colon \mathrm{id}_b\circ f\Rightarrow f$ と $\rho_f\colon f\circ\mathrm{id}_a\Rightarrow f$ を

$$\lambda_f(s,t):=\begin{cases} f\left(\dfrac{2t}{1+s}\right) & \left(0\le t\le \dfrac{1+s}{2}\right)\\ b & \left(\dfrac{1+s}{2}<t\le 1\right)\end{cases}$$

$$\rho_f(s,t):=\begin{cases} a & \left(0\le t\le \dfrac{1-s}{2}\right)\\ f\left(\dfrac{2t-1+s}{1+s}\right) & \left(\dfrac{1-s}{2}<t\le 1\right)\end{cases}$$

  により定める．これは $f$ について自然な同型である．
- これらは条件 (7)，(8) を満たす． □

さて，後で必要となる補題をいくつか証明しておく．（これらの補題は coherence 条件の例である．）

**補題 8.** bicategory $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a\to b$，$g\colon b\to c$ に対して，圏 $\mathcal{B}(a,c)$ における次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
(g\circ f)\circ\mathrm{id}_a \arrow[rr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}"] \arrow[dr, "\rho^{ac}_{g\circ f}"'] & & g\circ(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[dl, "g\bullet\rho^{ab}_f"] \\
& g\circ f &
\end{tikzcd}$$

**証明.** $\rho^{ac}$ が自然同型だから，次の三角柱の図式で側面となる四角は全て可換である．

$$\begin{tikzcd}
((g\circ f)\circ\mathrm{id}_a)\circ\mathrm{id}_a \arrow[rr, "\rho^{ac}_{g\circ f}\bullet\mathrm{id}_a"] \arrow[dr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}\bullet\mathrm{id}_a"] \arrow[dd, "\rho^{ac}_{(g\circ f)\circ\mathrm{id}_a}"'] & & (g\circ f)\circ\mathrm{id}_a \arrow[dd, "\rho^{ac}_{g\circ f}"] \\
& (g\circ(f\circ\mathrm{id}_a))\circ\mathrm{id}_a \arrow[ur, "(g\bullet\rho^{ab}_f)\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[dd, "\rho^{ac}_{g\circ(f\circ\mathrm{id}_a)}" near end] & \\
(g\circ f)\circ\mathrm{id}_a \arrow[rr, crossing over, "\rho^{ac}_{g\circ f}" near start] \arrow[dr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}"'] & & g\circ f \\
& g\circ(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[ur, "g\bullet\rho^{ab}_f"'] &
\end{tikzcd}$$

今示したいのは底面部分の三角形の可換性だから，上面部分の三角形の可換性を示せばよ

い．そのために次の図式を考える．((∗) が今可換性を示したい部分である．)

$$\begin{tikzcd}
 & & (g \circ f) \circ (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \arrow[rrd, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a}"] \arrow[ddl, "(g \circ f) \bullet \lambda^{aa}_{\mathrm{id}_a}"] & & \\
((g \circ f) \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a \arrow[urr, "\alpha^{aaac}_{g \circ f,\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a}"] \arrow[dr, "\rho^{ac}_{g \circ f} \bullet \mathrm{id}_a"] \arrow[dddr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a"'] & (8) & & (\alpha) & g \circ (f \circ (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a)) \arrow[dl, "g \bullet (f \bullet \lambda^{aa}_{\mathrm{id}_a})"'] \\
(\ast) & (g \circ f) \circ \mathrm{id}_a \arrow[rr, "\alpha^{aabc}_{g,f,\mathrm{id}_a}"] & & g \circ (f \circ \mathrm{id}_a) & (8) \\
 & & (\alpha) & & \\
 & (g \circ (f \circ \mathrm{id}_a)) \circ \mathrm{id}_a \arrow[uu, "(g \bullet \rho^{ab}_f) \bullet \mathrm{id}_a"] \arrow[rr, "\alpha^{aabc}_{g,f \circ \mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a}"'] & & g \circ ((f \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a) \arrow[uu, "g \bullet (\rho^{ab}_f \bullet \mathrm{id}_a)"'] \arrow[uuur, "g \bullet \alpha^{aaab}_{f,\mathrm{id}_a,\mathrm{id}_a}"'] &
\end{tikzcd}$$

$(\alpha)$ の部分は $\alpha$ が自然変換だから可換である．また (8) の部分は bicategory の定義の条件 (8) により可換である．また一番外側の五角形は bicategory の定義の条件 (7) により可換である．故に (∗) の部分も可換である． □

また，同様にして次の補題が成り立つ．

**補題 9.** $f\colon a \to b$, $g\colon b \to c$ に対して次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_c \circ g) \circ f \arrow[rr, "\alpha^{abcc}_{\mathrm{id}_c,g,f}"] \arrow[dr, "\lambda^{bc}_g \bullet f"'] & & \mathrm{id}_c \circ (g \circ f) \arrow[dl, "\lambda^{ac}_{g \circ f}"] \\
 & g \circ f &
\end{tikzcd}$$

**証明**. 補題 8 と同じように次の図式から分かる．(ここで，上付きの添え字は省略した．以降，上付きの添え字は省略することがある．)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_c \circ ((\mathrm{id}_c \circ g) \circ f) \arrow[rr, "\mathrm{id}_c \bullet \alpha_{\mathrm{id}_c,g,f}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_c \bullet (\lambda_g \bullet f)"] \arrow[dd, "\lambda_{(\mathrm{id}_c \circ g) \circ f}"'] & & \mathrm{id}_c \circ (\mathrm{id}_c \circ (g \circ f)) \arrow[dl, "\lambda_{\mathrm{id}_c \circ (g \circ f)}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_c \bullet \lambda_{g \circ f}"] \\
 & \mathrm{id}_c \circ (g \circ f) \arrow[dd, "\lambda_{g \circ f}"] & \\
(\mathrm{id}_c \circ g) \circ f \arrow[rr, crossing over, "\alpha_{\mathrm{id}_c,g,f}"] \arrow[dr, "\lambda_g \bullet f"'] & & \mathrm{id}_c \circ (g \circ f) \arrow[dl, "\lambda_{g \circ f}"] \\
 & g \circ f &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathrm{id}_c \circ \mathrm{id}_c) \circ (g \circ f) \arrow[drr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c, g \circ f}"] \arrow[ddr, "\rho_{\mathrm{id}_c} \bullet (g \circ f)"] & & \\
((\mathrm{id}_c \circ \mathrm{id}_c) \circ g) \circ f \arrow[urr, "\alpha_{\mathrm{id}_c \circ \mathrm{id}_c, g, f}"] \arrow[dr, "(\rho_{\mathrm{id}_c} \bullet g) \bullet f"] \arrow[ddr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c, g} \bullet f"'] & & & & \mathrm{id}_c \circ (\mathrm{id}_c \circ (g \circ f)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_c \bullet \lambda_{g \circ f}"'] \\
 & (\mathrm{id}_c \circ g) \circ f \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, g, f}"] & & \mathrm{id}_c \circ (g \circ f) & \\
 & (\mathrm{id}_c \circ (\mathrm{id}_c \circ g)) \circ f \arrow[u, "(\mathrm{id}_c \bullet \lambda_g) \bullet f"'] \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{id}_c, \mathrm{id}_c \circ g, f}"'] & & \mathrm{id}_c \circ ((\mathrm{id}_c \circ g) \circ f) \arrow[u, "\mathrm{id}_c \bullet (\lambda_g \bullet f)"] \arrow[uur, "\mathrm{id}_c \bullet \alpha_{\mathrm{id}_c, g, f}"'] &
\end{tikzcd}$$

□

**補題 10.** $\lambda_{\mathrm{id}_a} = \rho_{\mathrm{id}_a} \colon \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \Rightarrow \mathrm{id}_a$ である．

**証明**. 補題 8 と同様に，$\mathrm{id}_a \bullet \lambda_{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_a \bullet \rho_{\mathrm{id}_a}$ を示せばよい．まず $\rho$ の自然性から

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \arrow[d, "\rho_{\mathrm{id}_a}"] & (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a \arrow[r, "\rho_{\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "\rho_{\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a"'] & \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \arrow[d, "\rho_{\mathrm{id}_a}"] \\
\mathrm{id}_a & \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a \arrow[r, "\rho_{\mathrm{id}_a}"'] & \mathrm{id}_a
\end{tikzcd}$$

が可換となるが，$\rho_{\mathrm{id}_a}$ は同型だから $\rho_{\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a} = \rho_{\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a$ が分かる．よって，bicategory の定義の条件 (8) と補題 8 を使えば

$$\begin{tikzcd}
 & (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_a \arrow[dl, "\alpha_{\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a}"'] \arrow[dr, "\alpha_{\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a}"] \arrow[dd, bend right, "\rho_{\mathrm{id}_a} \bullet \mathrm{id}_a"'] \arrow[dd, bend left, "\rho_{\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a}"] & \\
\mathrm{id}_a \circ (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \arrow[dr, "\mathrm{id}_a \bullet \lambda_{\mathrm{id}_a}"'] & & \mathrm{id}_a \circ (\mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a) \arrow[dl, "\mathrm{id}_a \bullet \rho_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & \mathrm{id}_a \circ \mathrm{id}_a &
\end{tikzcd}$$

が可換となる．$\alpha_{\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a, \mathrm{id}_a}$ が同型であることから $\mathrm{id}_a \bullet \lambda_{\mathrm{id}_a} = \mathrm{id}_a \bullet \rho_{\mathrm{id}_a}$ が分かる． □

次に関手の bicategory 版である pseudofunctor を定義しよう．

**定義.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory とする．pseudofunctor (もしくは weak 2-functor[*7]) $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ とは以下を満たすことである．

---

[*7] 古い文献では homomorphism と呼んでいる場合もある．

(1) 関数 $F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられている．

(2) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $F^{ab}\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ が与えられている．

(3) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して次の自然同型 $\varphi^{abc}$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "F^{bc}\times F^{ab}"'] \arrow[dr, "M^{abc}"] & \\
\mathcal{C}(Fb,Fc)\times\mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dr, "M^{Fa,Fb,Fc}"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi^{abc}}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "F^{ac}"] \\
& \mathcal{C}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}$$

（よって $\langle g, f\rangle \in \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b)$ に対して $\varphi^{abc}_{gf}\colon Fg\circ Ff \Rightarrow F(g\circ f)$ は $\mathcal{C}$ の同型な 2-morphism である．）

(4) 各対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の同型な 2-morphism $\psi^a\colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow F^{aa}(\mathrm{id}_a)$ が与えられている．

(5) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ に対して次の $\mathcal{C}(Fa, Fd)$ の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(Fh\circ Fg)\circ Ff \arrow[r, "\varphi^{bcd}_{hg}\bullet Ff"] \arrow[d, "\alpha^{FaFbFcFd}_{Fh,Fg,Ff}"'] & F(h\circ g)\circ Ff \arrow[r, "\varphi^{abd}_{h\circ g,f}"] & F((h\circ g)\circ f) \arrow[d, "F(\alpha^{abcd}_{hgf})"] \\
Fh\circ(Fg\circ Ff) \arrow[r, "Fh\bullet\varphi^{abc}_{gf}"'] & Fh\circ F(g\circ f) \arrow[r, "\varphi^{acd}_{h,g\circ f}"'] & F(h\circ(g\circ f))
\end{tikzcd}$$

これは，$\alpha$ を省略して書けば，次の $\mathcal{C}$ の図式で表される．

$$\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[r, "Fg"] & Fc \arrow[dr, "Fh"] & & & & Fb \arrow[r, "Fg"] \arrow[drr, "F(h\circ g)"' {name=HG}] & Fc \arrow[dr, "Fh"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[urr, "F(g\circ f)"' {name=GF}] \arrow[rrr, "F(h\circ(g\circ f))"' {name=L}] & & & Fd & = & Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rrr, "F((h\circ g)\circ f)"' {name=R}] & & & Fd
\arrow[Rightarrow, from=1-2, to=GF, "\varphi^{abc}_{gf}"]
\arrow[Rightarrow, from=1-3, to=L, "\varphi^{acd}_{h,g\circ f}"']
\arrow[Rightarrow, from=1-8, to=HG, "\varphi^{bcd}_{hg}"']
\arrow[Rightarrow, from=1-7, to=R, "\varphi^{abd}_{h\circ g,f}"]
\end{tikzcd}$$

(6) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ に対して次の $\mathcal{C}(Fa, Fb)$ の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fb}\circ Ff \arrow[r, "\lambda^{FaFb}_{Ff}"] \arrow[d, "\psi^b\bullet Ff"'] & Ff & Ff\circ\mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho^{FaFb}_{Ff}"] \arrow[d, "Ff\bullet\psi^a"'] & Ff \\
F(\mathrm{id}_b)\circ Ff \arrow[r, "\varphi^{abb}_{\mathrm{id}_b,f}"'] & F(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[u, "F(\lambda^{ab}_f)"'] & Ff\circ F(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^{aab}_{f,\mathrm{id}_a}"'] & F(f\circ\mathrm{id}_a) \arrow[u, "F(\rho^{ab}_f)"']
\end{tikzcd}$$

これは$\mathcal{C}$の図式で書けば次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[rd, "F(\mathrm{id}_b)"] \arrow[rd, bend left=50, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varphi^{abb}_{\mathrm{id}_b, f}"] \arrow[rd, phantom, bend left=25, "\psi^b \Downarrow"] & \\
Fa \arrow[ru, "Ff"] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_b \circ f)"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow F(\lambda_f)"] & & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[rd, bend left=50, "\mathrm{id}_{Fb}"] & \\
Fa \arrow[ru, "Ff"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \lambda_{Ff}"] & & Fb
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
Fa \arrow[rru, "F(\mathrm{id}_a)"] \arrow[rru, bend left=50, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[rru, phantom, bend left=25, "\Downarrow \psi^a"] \arrow[rr, "F(f \circ \mathrm{id}_a)"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, shift right=4ex, "\Downarrow F(\rho_f)"] & & Fb \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\varphi^{aab}_{f, \mathrm{id}_a} \Downarrow"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & & Fa \arrow[d, "Ff"] \\
Fa \arrow[rru, bend left=50, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[rr, bend right=40, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow \rho_{Ff}"] & & Fb
\end{tikzcd}$$

更に，各$\varphi^{abc}$と$\psi^a$がidとなるとき，$F$をstrict 2-functorと呼ぶ．

$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$をpseudofunctorとする．$\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$を$\mathcal{B}$の2-morphismとすると，$F^{ab}\colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$が関手だから$F\beta\colon Ff \Rightarrow Fg\colon Fa \to Fb$は$\mathcal{C}$の2-morphismである．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, bend right, "g"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & b \arrow[r, phantom, ""{name=A}] & {} & Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta"] & Fb \\
 & {} \arrow[rr, mapsto, bend left, "F"] & & {} &
\end{tikzcd}$$

また$F^{ab}$が関手であることから，$\mathcal{B}$の2-morphism $\beta\colon f \Rightarrow g$，$\gamma\colon g \Rightarrow h$に対して$F(\gamma * \beta) = F\gamma * F\beta$，$F(\mathrm{id}_f) = \mathrm{id}_{Ff}$となる．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left=50, "Ff"] \arrow[r, bend right=50, "Fh"'] \arrow[r, phantom, "F(\gamma * \beta) \Downarrow"] & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left=50, "Ff"] \arrow[r, "F\beta \Downarrow Fg"] \arrow[r, bend right=50, "Fh"'] \arrow[r, phantom, shift right=2.5ex, "F\gamma \Downarrow"] & Fb
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "Ff"{name=U}] \arrow[r, bend right, "Ff"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "F(\mathrm{id}_f)\Downarrow"] & Fb \end{tikzcd} \quad = \quad \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, bend left, "Ff"{name=U}] \arrow[r, bend right, "Ff"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, phantom, "\mathrm{id}_{Ff}\Downarrow"] & Fb \end{tikzcd}$$

pseudofunctor では，関手の条件 ($F(g \circ f) = Fg \circ Ff$，$F(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$) が同型であればよいというように弱められており，代わりに条件 (5), (6) が追加されている．条件 (5) は，bicategory の構造の 1 つである $\alpha$ を $F$ が保つという条件である．つまり，$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism としたとき $\alpha$ は 2-morphism $\alpha_{hgf} \colon (h \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f)$ を与えるが，これを $F$ で写した $F(\alpha_{hgf})$ が $\alpha_{Fh,Fg,Ff} \colon (Fh \circ Fg) \circ Ff \Rightarrow Fh \circ (Fg \circ Ff)$ と一致するという条件である．但し，$F(\alpha_{hgf})$ と $\alpha_{Fh,Fg,Ff}$ では domain と codomain が一致していないので $\varphi$ を使った調整が必要で，結果として条件 (5) が得られる．特に strict 2-functor の場合，条件 (5) は $F(\alpha_{hgf}) = \alpha_{Fh,Fg,Ff}$ となる．

条件 (6) についても同様で，また strict 2-functor の場合は $F(\lambda_f) = \lambda_{Ff}$, $F(\rho_f) = \rho_{Ff}$ となる．

**例 11.** 単位的環と環準同型がなす圏 **Ring** を strict 2-category とみなす (例 2)．また **Mod** を例 4 で定義した bicategory とする．このとき pseudofunctor $F \colon \mathbf{Ring} \to \mathbf{Mod}$ を次のように定義することができる．

- $R \in \mathbf{Ring}$ に対して $FR := R \in \mathbf{Mod}$ とする．
- 環準同型 $f \colon R \to S$ に対して，$S$ を $f$ により左 $S$ 右 $R$-加群とみなしたものを $Ff$ と書く．$\mathbf{Ring}(R, S)$ が離散圏だから $F^{RS} \colon \mathbf{Ring}(R, S) \to \mathbf{Mod}(FR, FS)$ は関手になる．
- **Ring** の 1-morphism $f \colon R \to S$, $g \colon S \to T$ に対して $\varphi^{RST}_{gf} \colon Fg \otimes Ff \to F(g \circ f)$ を，テンソル積の普遍性により得られる射とする．これは自然同型

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathbf{Ring}(S,T) \times \mathbf{Ring}(R,S) \arrow[dl, "F^{ST} \times F^{RS}"'] \arrow[dr, "M^{RST}"] & \\ \mathbf{Mod}(FS,FT) \times \mathbf{Mod}(FR,FS) \arrow[dr, "M^{FR,FS,FT}"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi^{RST}}{\Longrightarrow}} & \mathbf{Ring}(R,T) \arrow[dl, "F^{RT}"] \\ & \mathbf{Mod}(FR,FT) & \end{tikzcd}$$

を定める．
- $R \in \mathbf{Ring}$ に対して $\mathrm{id}_{FR} = F(\mathrm{id}_R)$ である．よって $\psi^R := \mathrm{id} \colon \mathrm{id}_{FR} \Rightarrow F(\mathrm{id}_R)$ とすることができる．

- このとき $F$ は pseudofunctor の条件 (5)，(6) を満たすことが分かる．

次に pseudofunctor $G\colon \mathbf{Mod} \to \mathbf{CAT}$ を次のように定義することができる．

- $R \in \mathbf{Mod}$ に対して $GR := R\text{-}\mathbf{Mod}$ (右 $R$-加群がなす圏) とする．
- $M\colon R \to S$ に対して関手 $GM\colon R\text{-}\mathbf{Mod} \to S\text{-}\mathbf{Mod}$ を $-\otimes_R M$ (右から $M$ をテンソルする関手) で定める．これは明らかに関手 $G^{RS}\colon \mathbf{Mod}(R,S) \to \mathbf{CAT}(GR,GS)$ を定める．
- $R,S,T \in \mathbf{Mod}$，$X \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ に対して $\varphi_X^{RST}\colon (X\otimes_R S)\otimes_S T \to X\otimes_R (S\otimes_S T)$ を，テンソル積の普遍性により得られる射とする．これは自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Mod}(S,T) \times \mathbf{Mod}(R,S) \arrow[dl, "G^{ST}\times G^{RS}"'] \arrow[dr, "M^{RST}"] & \\
\mathbf{CAT}(GS,GT) \times \mathbf{CAT}(GR,GS) \arrow[dr, "M^{GR,GS,GT}"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi^{RST}}{\Longrightarrow}} & \mathbf{Mod}(R,S) \arrow[dl, "G^{RT}"] \\
& \mathbf{CAT}(GR,GT) &
\end{tikzcd}$$

  を定める．
- $R \in \mathbf{Ring}$，$X \in R\text{-}\mathbf{Mod}$ に対して $\psi_X^R\colon X \to X \otimes_R R$ を，テンソル積の普遍性により得られる射とする．これは同型 $\psi^R\colon \mathrm{id}_{FR} \Rightarrow F(\mathrm{id}_R)$ を与える．
- このとき $F$ は pseudofunctor の条件 (5)，(6) を満たすことが分かる． □

**例 12.** $\mathcal{B},\mathcal{C}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．$F^{\mathrm{op}}$ を次のように定義する．

- $a \in \mathcal{B}$ に対して $F^{\mathrm{op}}(a) := F(a)$.
- $a,b \in \mathcal{B}$ に対して $(F^{\mathrm{op}})^{ab}$ を

$$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) = \mathcal{B}(b,a) \xrightarrow{F^{ba}} \mathcal{C}(Fb,Fa) = \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fa,Fb)$$

  により定める．

- $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して，自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "(F^{\mathrm{op}})^{bc} \times (F^{\mathrm{op}})^{ab}"'] \arrow[dr, "(M^{\mathrm{op}})^{abc}"] & \\
\mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fb,Fc) \times \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fa,Fb) \arrow[dr, "(M^{\mathrm{op}})^{Fa,Fb,Fc}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "(\varphi^{\mathrm{op}})^{abc}"'] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "(F^{\mathrm{op}})^{ac}"] \\
& \mathcal{C}^{\mathrm{op}}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}$$

  を

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,a) \times \mathcal{B}(c,b) \arrow[dl, "F^{ba} \times F^{cb}"'] \arrow[dr, "M^{cba}"] & \\
\mathcal{C}(Fb,Fa) \times \mathcal{C}(Fc,Fb) \arrow[dr, "M^{Fc,Fb,Fa}"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\varphi^{cba}"'] & & \mathcal{B}(c,a) \arrow[dl, "F^{ca}"] \\
& \mathcal{C}(Fc,Fa) &
\end{tikzcd}$$

  により定める．
- $a \in \mathcal{A}$ に対して $(\psi^{\mathrm{op}})^a := \psi^a$ とする．

この $F^{\mathrm{op}}$ は pseudofunctor $\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{op}}$ を定める． □

自然変換の bicategory 版となるのが pseudonatural transformation である．

**定義．** $F, G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．$F$ から $G$ への pseudonatural transformation $\theta \colon F \Rightarrow G$ とは以下を満たすことである．

(1) 各 $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 1-morphism $\theta_a \colon Fa \to Ga$ が与えられている．

(2) 各 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して，次の自然同型 $\theta^{ab}$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G^{ab}"'] \arrow[dr, "F^{ab}"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dr, "- \bullet \theta_a"'] \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\theta^{ab}"'] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\theta_b \bullet -"] \\
& \mathcal{C}(Fa,Gb) &
\end{tikzcd}$$

故に $f\colon a\to b$ のとき $\theta^{ab}_f\colon Gf\circ\theta_a\Rightarrow\theta_b\circ Ff$ は同型な 2-morphism である.

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\wr}{\Swarrow}\,\theta^{ab}_f"] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

(3) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c$ に対して，次の $\mathcal{C}(Fa,Gc)$ の図式は可換である.

$$\begin{tikzcd}
(Gg\circ Gf)\circ\theta_a \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[ddd, "\varphi_{gf}\bullet\theta_a"'] & Gg\circ(Gf\circ\theta_a) \arrow[r, "Gg\bullet\theta^{ab}_f"'] & Gg\circ(\theta_b\circ Ff) \arrow[r, "\sim", "\alpha^{-1}"'] & (Gg\circ\theta_b)\circ Ff \arrow[d, "\theta^{bc}_g\bullet Ff"'] \\
 & & & (\theta_c\circ Fg)\circ Ff \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] \\
 & & & \theta_c\circ(Fg\circ Ff) \arrow[d, "\theta_c\bullet\varphi_{gf}"'] \\
G(g\circ f)\circ\theta_a \arrow[rrr, "\theta^{ac}_{g\circ f}"'] & & & \theta_c\circ F(g\circ f)
\end{tikzcd}$$

これは，$\alpha$ を省略して書けば，次の $\mathcal{C}$ の図式で表される.

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, "\theta_a"] \arrow[dr, "Ff"'] \arrow[dddd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Leftarrow}"] & & Ga \arrow[dr, "Gf"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta^{ab}_f}{\Swarrow}"] & & & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[dddd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] \arrow[dddd, phantom, "\overset{\theta^{ac}_{g\circ f}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[dr, "Gf"] \arrow[dddd, bend right=60, "G(g\circ f)"'] & \\
 & Fb \arrow[rr, "\theta_b"] \arrow[ddl, "Fg"'] & & Gb \arrow[ddl, "Gg"] \arrow[ddl, phantom, "\overset{\theta^{bc}_g}{\Swarrow}"] & = & & & Gb \arrow[ddl, "Gg"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Leftarrow}"] \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
Fc \arrow[rr, "\theta_c"'] & & Gc & & & Fc \arrow[r, "\theta_c"'] & Gc &
\end{tikzcd}$$

(4) $a\in\mathcal{B}$ に対して次の等式が成り立つ.

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\theta_a"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda_{\theta_a}}{\Swarrow}"] & {} \arrow[d, phantom, "="] & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta^{aa}_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \\
Fa \arrow[r, "\theta_a"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\rho^{-1}_{\theta_a}}{\Swarrow}"] & Ga & {} & Fa \arrow[r, "\theta_a"'] & Ga
\end{tikzcd}$$

更に，各 $\theta^{ab}$ が恒等変換となるとき，$\theta$ を strict natural transformation と呼ぶ.

pseudonatural transformation も，自然変換の条件となる可換図式が同型であればよいというように弱められていて，代わりに $\theta^{ab}$ が合成等と可換になるという条件が付け加わっている．また定義より $\theta^{ab}_f$ は $f \in \mathcal{B}(a,b)$ について自然であるから，2-morphism $\beta\colon f \Rightarrow g$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Gf \circ \theta_a \arrow[r, "\theta^{ab}_f"] \arrow[d, "G\beta \bullet \theta_a"'] & \theta_b \circ Ff \arrow[d, "\theta_b \bullet F\beta"] \\
Gg \circ \theta_a \arrow[r, "\theta^{ab}_g"'] & \theta_b \circ Fg
\end{tikzcd}$$

が可換である．これは $\mathcal{C}$ の図式で描けば次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "Fg"'] \arrow[d, bend left=20, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\overset{F\beta}{\Leftarrow}"] & Ga \arrow[d, bend left=40, "Gf"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta^{ab}_f}{\swarrow}"] & & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=40, "Fg"'] & Ga \arrow[d, bend right=20, "Gg"'] \arrow[d, bend left=60, "Gf"] \arrow[d, phantom, "\overset{G\beta}{\Leftarrow}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\theta^{ab}_g}{\swarrow}"] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb & & Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb
\arrow[from=1-2, to=2-4, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

**命題 13.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory，$F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．pseudonatural transformation $\theta\colon F \Rightarrow G$，$\sigma\colon G \Rightarrow H$ に対して垂直合成 $\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta$ [*8]を，対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して $(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta)_a := \sigma_a \circ \theta_a$ で定めれば，$\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta$ は pseudonatural transformation $F \Rightarrow H$ となる．

**証明.**

※ 証明をする前に注意をしておく．まずこの命題の証明の手順自体は非常に単純である．$\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta$ が pseudonatural transformation となることを示すためには，$f \in \mathcal{B}(a,b)$ について自然な 2-morphism $(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta)_f$ を定義して条件 (3)，(4) を満たすことを示さなければならないが，それは

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ha \arrow[d, "Hf"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow (\sigma\widehat{\circ}\theta)_f"] & & Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow \theta^{ab}_f"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow \sigma^{ab}_f"] \\
Fb \arrow[r, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_b"'] & Hb & & Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\arrow[from=1-2, to=2-4, phantom, ":="]
\end{tikzcd} \tag{14}$$

---

[*8] この命題や以降の命題で定義する合成の記号は，この後定義する bicategory $\widehat{\mathcal{B}}$ における $\circ, \bullet, *$ が $\widehat{\circ}, \widehat{\bullet}, \widehat{*}$ となるように定義している．このように $\widehat{\ }$ を付けて区別しなければいけない理由はない (文脈から判断できるため) が，明示して区別した方が分かりやすいという主観的な感想からこのようにしている．

と定義すればよい．これが $f$ について自然であることは

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=50, "Fg"'] \arrow[d, bend left=50, "Ff"] \arrow[d, phantom, "\overset{F\beta}{\Leftarrow}"] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend left=50, "Gf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_f"'] & Ha \arrow[d, bend left=50, "Hf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_f"'] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=50, "Fg"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=50, "Gg"'] \arrow[d, bend left=50, "Gf"] \arrow[d, phantom, "\overset{G\beta}{\Leftarrow}"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_g"'] & Ha \arrow[d, bend left=50, "Hf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_f"'] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=50, "Fg"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=50, "Gg"'] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_g"'] & Ha \arrow[d, bend right=50, "Hg"'] \arrow[d, bend left=50, "Hf"] \arrow[d, phantom, "\overset{H\beta}{\Leftarrow}"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_g"'] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

から分かり，また条件 (3)，(4) についても

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[dd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "Gf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_f"'] & Ha \arrow[d, "Hf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_f"'] \\
Fb \arrow[r, "\theta_b"] \arrow[d, "Fg"'] & Gb \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[d, "Gg"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_g"'] & Hb \arrow[d, "Hg"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_g"'] \\
Fc \arrow[r, "\theta_c"'] & Gc \arrow[r, "\sigma_c"'] & Hc
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[dd, bend right=50, "F(g\circ f)"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=50, "G(g\circ f)"'] \arrow[d, "Gf"] \arrow[ddl, Rightarrow, shorten=8mm, "\theta_{g\circ f}"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_f"'] \\
 & Gb \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[d, "Gg"] & Hb \arrow[d, "Hg"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_g"'] \\
Fc \arrow[r, "\theta_c"'] & Gc \arrow[r, "\sigma_c"'] & Hc
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[dd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] \arrow[from=2-1, to=2-2, phantom, "\overset{\theta_{g\circ f}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "G(g\circ f)"'] \arrow[from=2-2, to=2-3, phantom, "\overset{\sigma_{g\circ f}}{\Swarrow}"] & Ha \arrow[dr, "Hf"] \arrow[dd, bend right=60, "H(g\circ f)"'] \arrow[from=2-3, to=2-4, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & \\ & & & Hb \arrow[dl, "Hg"] \\ Fc \arrow[r, "\theta_c"'] & Gc \arrow[r, "\sigma_c"'] & Hc & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[d, bend right=90, "F(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\lambda_{\theta_a}\Swarrow", "\theta_a"', "\rho^{-1}_{\theta_a}\Swarrow"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[dr, "\lambda_{\sigma_a}\Swarrow", "\sigma_a"', "\rho^{-1}_{\sigma_a}\Swarrow"'] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ha}"] \\ Fa \arrow[r, "\theta_a"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ha \end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\lambda_{\sigma_a}\Swarrow", "\sigma_a"', "\rho^{-1}_{\sigma_a}\Swarrow"'] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ha}"] \\ Fa \arrow[r, "\theta_a"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ha \end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd} Fa \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ha}"] \arrow[d, bend right=60, "H(\mathrm{id}_a)"', "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \\ Fa \arrow[r, "\theta_a"'] & Ga \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ha \end{tikzcd}$$

から分かる．と言いたいところだが，この証明には一見問題がある．それは 3 つ以上の 1-morphism の合成を行っているのに，図式の中に合成の順序や $\alpha$ が反映されていないことである．実はこの証明は問題ないことが第 5 節で分かるのだが，ここでは $\alpha$ をきちんと書き下すことで証明を行う．(以下，第 5 節の前まではこのような状況が度々登場する．)

まず $\theta, \sigma$ が pseudonatural transformation だから，次の自然同型が与えられている．

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dr, "-\bullet\theta_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}"', "\theta^{ab}" below] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\theta_b\bullet-"] \\ & \mathcal{C}(Fa,Gb) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "H"'] \arrow[dr, "G"] & \\ \mathcal{C}(Ha,Hb) \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}"', "\sigma^{ab}" below] & & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dl, "\sigma_b\bullet-"] \\ & \mathcal{C}(Ga,Hb) & \end{tikzcd}$$

次に bicategory $\mathcal{C}$ の定義から次の自然同型が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[ld, "\sigma_b\bullet-"'] \arrow[rd, "-\bullet\theta_a"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Hb) \arrow[rd, "-\bullet\theta_a"'] & \underset{\alpha_{\sigma_b,-,\theta_a}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{C}(Fa,Gb) \arrow[ld, "\sigma_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{C}(Fa,Hb) &
\end{tikzcd}$$

これらをあわせて次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathcal{B}(a,b) \arrow[llld, "H"'] \arrow[d, "G"] \arrow[rrrd, "F"] & & & \\
\mathcal{C}(Ha,Hb) \arrow[rrd, "-\bullet\sigma_a"'] \arrow[rrrdd, rounded corners, "-\bullet(\sigma_a\circ\theta_a)"'] & \underset{\sigma^{ab}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[ld, "\sigma_b\bullet-"] \arrow[rd, "-\bullet\theta_a"'] & & \underset{\theta^{ab}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[lld, "\theta_b\bullet-"] \arrow[llldd, rounded corners, "(\sigma_b\circ\theta_b)\bullet-"] \\
 & \underset{\alpha^{-1}_{-,\sigma_a,\theta_a}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{C}(Ga,Hb) \arrow[rd, "-\bullet\theta_a"'] & \underset{\alpha_{\sigma_b,-,\theta_a}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{C}(Fa,Gb) \arrow[ld, "\sigma_b\bullet-"] & \underset{\alpha^{-1}_{\sigma_b,\theta_b,-}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \\
 & & & \mathcal{C}(Fa,Hb) & & &
\end{tikzcd}$$

この合成により $(\sigma\,\widehat{\circ}\,\theta)^{ab}$ を定める．即ち $f \in \mathcal{B}(a,b)$ に対して

$$(\sigma\,\widehat{\circ}\,\theta)^{ab}_f := \alpha^{-1}_{\sigma_b,\theta_b,Ff} * (\sigma_b \bullet \theta^{ab}_f) * \alpha_{\sigma_b,Gf,\theta_a} * (\sigma^{ab}_f \bullet \theta_a) * \alpha^{-1}_{Hf,\sigma_a,\theta_a}$$

である (上で注意した図式 (14) も参照)．この $\sigma\,\widehat{\circ}\,\theta$ が pseudonatural transformation となることを示そう．まず条件 (3) を示す．そのためには次の図式が可換であることを示せ

ばよい．

$$\begin{tikzcd}
H(g\circ f)\circ(\sigma_a\circ\theta_a) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (Hg\circ Hf)\circ(\sigma_a\circ\theta_a) \arrow[l, "\varphi\bullet(\sigma_a\circ\theta_a)"'] \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & Hg\circ(Hf\circ(\sigma_a\circ\theta_a)) \arrow[dd, "Hg\bullet\alpha^{-1}"] \\
(H(g\circ f)\circ\sigma_a)\circ\theta_a \arrow[ddddd, "\sigma_{g\circ f}\bullet\theta_a"'] \arrow[dddddr, phantom, "(\sigma)"] & ((Hg\circ Hf)\circ\sigma_a)\circ\theta_a \arrow[l, "(\varphi\bullet\sigma_a)\bullet\theta_a"] \arrow[d, "\alpha\bullet\theta_a"] & \\
& (Hg\circ(Hf\circ\sigma_a))\circ\theta_a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(Hg\bullet\sigma_f)\bullet\theta_a"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & Hg\circ((Hf\circ\sigma_a)\circ\theta_a) \arrow[d, "Hg\bullet(\sigma_f\bullet\theta_a)"] \\
& (Hg\circ(\sigma_b\circ Gf))\circ\theta_a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet\theta_a"] & Hg\circ((\sigma_b\circ Gf)\circ\theta_a) \arrow[d, "Hg\bullet\alpha"] \\
& ((Hg\circ\sigma_b)\circ Gf)\circ\theta_a \arrow[d, "(\sigma_g\bullet Gf)\bullet\theta_a"] & Hg\circ(\sigma_b\circ(Gf\circ\theta_a)) \arrow[d, "Hg\bullet(\sigma_b\bullet\theta_f)"] \\
& ((\sigma_c\circ Gg)\circ Gf)\circ\theta_a \arrow[d, "\alpha\bullet\theta_a"] & Hg\circ(\sigma_b\circ(\theta_b\circ Ff)) \arrow[d, "Hg\bullet\alpha^{-1}"] \\
(\sigma_c\circ G(g\circ f))\circ\theta_a \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\sigma_c\circ(Gg\circ Gf))\circ\theta_a \arrow[l, "(\sigma_c\bullet\varphi)\bullet\theta_a"'] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & Hg\circ((\sigma_b\circ\theta_b)\circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
\sigma_c\circ(G(g\circ f)\circ\theta_a) \arrow[ddddd, "\sigma_c\bullet\theta_{g\circ f}"'] \arrow[dddddr, phantom, "(\theta)"] & \sigma_c\circ((Gg\circ Gf)\circ\theta_a) \arrow[l, "\sigma_c\bullet(\varphi\bullet\theta_a)"] \arrow[d, "\sigma_c\bullet\alpha"] & (Hg\circ(\sigma_b\circ\theta_b))\circ Ff \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet Ff"] \\
& \sigma_c\circ(Gg\circ(Gf\circ\theta_a)) \arrow[d, "\sigma_c\bullet(Gg\bullet\theta_f)"] & ((Hg\circ\sigma_b)\circ\theta_b)\circ Ff \arrow[d, "(\sigma_g\bullet\theta_b)\bullet Ff"] \\
& \sigma_c\circ(Gg\circ(\theta_b\circ Ff)) \arrow[d, "\sigma_c\bullet\alpha^{-1}"] & ((\sigma_c\circ Gg)\circ\theta_b)\circ Ff \arrow[d, "\alpha\bullet Ff"] \\
& \sigma_c\circ((Gg\circ\theta_b)\circ Ff) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\sigma_c\bullet(\theta_g\bullet Ff)"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\sigma_c\circ(Gg\circ\theta_b))\circ Ff \arrow[d, "(\sigma_c\bullet\theta_g)\bullet Ff"] \\
& \sigma_c\circ((\theta_c\circ Fg)\circ Ff) \arrow[r, "\alpha^{-1}"'] \arrow[d, "\sigma_c\bullet\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & (\sigma_c\circ(\theta_c\circ Fg))\circ Ff \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet Ff"] \\
\sigma_c\circ(\theta_c\circ F(g\circ f)) \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \sigma_c\circ(\theta_c\circ(Fg\circ Ff)) \arrow[l, "\sigma_c\bullet(\theta_c\bullet\varphi)"'] \arrow[dr, "\alpha^{-1}"] & ((\sigma_c\circ\theta_c)\circ Fg)\circ Ff \arrow[d, "\alpha"] \\
(\sigma_c\circ\theta_c)\circ F(g\circ f) & & (\sigma_c\circ\theta_c)\circ(Fg\circ Ff) \arrow[ll, "(\sigma_c\circ\theta_c)\bullet\varphi"]
\end{tikzcd}$$

$(\alpha)$ は $\alpha$ が自然変換であるから可換である．$(\mathcal{B})$ は bicategory の定義より可換である．$(\theta)$，$(\sigma)$ は $\theta, \sigma$ が pseudonatural transformation であるから可換である．$(*)$ は次の図式により可換であると分かる．($(\alpha)$，$(\mathcal{B})$ は上記と同じで，$(\bullet)$ は水平合成の関手性から

可換である．）

$$\begin{tikzcd}
(Hg \circ (\sigma_b \circ Gf)) \circ \theta_a \arrow[rrrr, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1} \bullet \theta_a"'] & & \arrow[d, phantom, "(\mathcal{B})"] & & Hg \circ ((\sigma_b \circ Gf) \circ \theta_a) \arrow[d, "Hg \bullet \alpha"] \\
((Hg \circ \sigma_b) \circ Gf) \circ \theta_a \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, "(\sigma_g \bullet Gf) \bullet \theta_a"'] & & (Hg \circ \sigma_b) \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[ddl, "\sigma_g \bullet (Gf \circ \theta_a)"'] \arrow[dddr, "(Hg \circ \sigma_b) \bullet \theta_f"] & & Hg \circ (\sigma_b \circ (Gf \circ \theta_a)) \arrow[d, "Hg \bullet (\sigma_b \bullet \theta_f)"] \\
((\sigma_c \circ Gg) \circ Gf) \circ \theta_a \arrow[d, "\alpha \bullet \theta_a"'] \arrow[dr, "\alpha"] & (\alpha) & & (\alpha) & Hg \circ (\sigma_b \circ (\theta_b \circ Ff)) \arrow[d, "Hg \bullet \alpha^{-1}"] \\
(\sigma_c \circ (Gg \circ Gf)) \circ \theta_a \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & (\sigma_c \circ Gg) \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[dddr, "(\sigma_c \circ Gg) \bullet \theta_f"'] & \arrow[d, phantom, "(\bullet)"] & \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & Hg \circ ((\sigma_b \circ \theta_b) \circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
\sigma_c \circ ((Gg \circ Gf) \circ \theta_a) \arrow[d, "\sigma_c \bullet \alpha"'] & & & (Hg \circ \sigma_b) \circ (\theta_b \circ Ff) \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ddl, "\sigma_g \bullet (\theta_b \circ Ff)"'] \arrow[dr, "\alpha^{-1}"'] & (Hg \circ (\sigma_b \circ \theta_b)) \circ Ff \arrow[d, "\alpha^{-1} \bullet Ff"] \\
\sigma_c \circ (Gg \circ (Gf \circ \theta_a)) \arrow[d, "\sigma_c \bullet (Gg \bullet \theta_f)"'] \arrow[uur, "\alpha^{-1}"'] & (\alpha) & & \arrow[d, phantom, "(\alpha)"] & ((Hg \circ \sigma_b) \circ \theta_b) \circ Ff \arrow[d, "(\sigma_g \bullet \theta_b) \bullet Ff"] \\
\sigma_c \circ (Gg \circ (\theta_b \circ Ff)) \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, "\sigma_c \bullet \alpha^{-1}"'] & & (\sigma_c \circ Gg) \circ (\theta_b \circ Ff) \arrow[rr, "\alpha^{-1}"] \arrow[d, phantom, "(\mathcal{B})"] & & ((\sigma_c \circ Gg) \circ \theta_b) \circ Ff \arrow[d, "\alpha \bullet Ff"] \\
\sigma_c \circ ((Gg \circ \theta_b) \circ Ff) \arrow[rrrr, "\alpha^{-1}"'] & & \; & & (\sigma_c \circ (Gg \circ \theta_b)) \circ Ff
\end{tikzcd}$$

次に条件 4 を示す．即ち，$a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a"' near start] \arrow[dr, phantom, bend left=25, "\lambda_{(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a} \Swarrow"] \arrow[dr, phantom, bend right=25, "\rho^{-1}_{(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a} \Swarrow"] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ha}"] \\
Fa \arrow[r, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a"'] & Ha
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a"] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_{\mathrm{id}_a} \Swarrow"] & Ha \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ha}"] \arrow[d, bend right=70, "H(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\psi}{\Leftarrow}"] \\
Fa \arrow[r, "(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a"'] & Ha
\end{tikzcd}$$

を示す．そのためには次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
H(\mathrm{id}_a)\circ(\sigma_a\circ\theta_a) \arrow[dd, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\alpha)"] & \mathrm{id}_{Ha}\circ(\sigma_a\circ\theta_a) \arrow[l, "\psi\bullet(\sigma_a\circ\theta_a)"'] \arrow[dd, "\alpha^{-1}"] \arrow[dddddr, bend left, "\lambda_{\sigma_a\circ\theta_a}"] \arrow[dddddr, phantom, "(9)"] & \\
 & & \\
(H(\mathrm{id}_a)\circ\sigma_a)\circ\theta_a \arrow[dd, "\sigma_{\mathrm{id}_a}\bullet\theta_a"'] \arrow[ddr, phantom, "(\sigma)"] & (\mathrm{id}_{Ha}\circ\sigma_a)\circ\theta_a \arrow[l, "(\psi\bullet\sigma_a)\bullet\theta_a"] \arrow[dddr, bend left, "\lambda_{\sigma_a}\bullet\theta_a"] & \\
 & & \\
(\sigma_a\circ G(\mathrm{id}_a))\circ\theta_a \arrow[dd, "\alpha"'] \arrow[ddr, phantom, "(\alpha)"] & (\sigma_a\circ\mathrm{id}_{Ga})\circ\theta_a \arrow[l, "(\sigma_a\bullet\psi)\bullet\theta_a"'] \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{B})"] & \\
 & & \sigma_a\circ\theta_a \arrow[ul, "\rho_{\sigma_a}^{-1}\bullet\theta_a"'] \arrow[dddl, bend left, "\sigma_a\bullet\rho_{\theta_a}^{-1}"'] \arrow[dddddl, bend left, "\rho_{\sigma_a\circ\theta_a}^{-1}"] \arrow[dddddl, phantom, "(8)"] \\
\sigma_a\circ(G(\mathrm{id}_a)\circ\theta_a) \arrow[dd, "\sigma_a\bullet\theta_{\mathrm{id}_a}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\theta)"] & \sigma_a\circ(\mathrm{id}_{Ga}\circ\theta_a) \arrow[l, "\sigma_a\bullet(\psi\bullet\theta_a)"] \arrow[ur, "\sigma_a\bullet\lambda_{\theta_a}"'] & \\
 & & \\
\sigma_a\circ(\theta_a\circ F(\mathrm{id}_a)) \arrow[dd, "\alpha^{-1}"'] \arrow[ddr, phantom, "(\alpha)"] & \sigma_a\circ(\theta_a\circ\mathrm{id}_{Fa}) \arrow[l, "\sigma_a\bullet(\theta_a\bullet\psi)"'] \arrow[dd, "\alpha^{-1}"] & \\
 & & \\
(\sigma_a\circ\theta_a)\circ F(\mathrm{id}_a) & (\sigma_a\circ\theta_a)\circ\mathrm{id}_{Fa} \arrow[l, "(\sigma_a\circ\theta_a)\bullet\psi"] &
\end{tikzcd}$$

$(\alpha)$ は $\alpha$ が自然変換であるから可換である．$(\mathcal{B})$ は bicategory の定義より可換である．$(\theta)$，$(\sigma)$ は $\theta,\sigma$ が pseudonatural transformation であるから可換である．(8) は補題 8 から，(9) は補題 9 から可換である．□

bicategory の場合には，更に pseudonatural transformation の間の射である modification を定義することができる．

**定義.** $F,G\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\theta,\sigma\colon F\Rightarrow G$ を pseudonatural transformation とする．$\theta$ から $\sigma$ への modification $\Gamma\colon\theta\Rrightarrow\sigma$ とは以下を満たすことである．

(1) 各 $a\in\mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 2-morphism $\Gamma_a\colon\theta_a\Rightarrow\sigma_a$ が与えられている．

(2) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a\to b$ に対して，$\mathcal{C}$ の 2-morphism に関する次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=6mm, "\theta_f"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & Fa \arrow[r, bend left, "\theta_a"] \arrow[r, bend right, "\sigma_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "Ff"'] & Ga \arrow[d, "Gf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=6mm, "\sigma_f"'] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\theta_b"] \arrow[r, bend right, "\sigma_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_b"] & Gb & {} & Fb \arrow[r, bend right, "\sigma_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

**命題 15.** $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\theta, \sigma, \tau\colon F \Rightarrow G$ を pseudonatural transformation，$\Gamma\colon \theta \Rrightarrow \sigma$，$\Delta\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ を modification とする．modification の垂直合成 $\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma)_a := \Delta_a * \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ は modification $\theta \Rrightarrow \tau$ となる．

**証明**. $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left=40, "\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\theta_f \Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, "\sigma_b"'] \arrow[r, bend left=40, "\theta_b"] \arrow[r, bend right=40, "\tau_b"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Gamma_b"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\Delta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] \arrow[r, bend left=40, "\theta_a"] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\sigma_f \Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[r, bend right=40, "\tau_b"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\Delta_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a" description] \arrow[r, bend left=40, "\theta_a"] \arrow[r, bend right=40, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\Delta_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\tau_f \Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend right=40, "\tau_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

である． □

**定義.** pseudonatural transformation $F \Rightarrow G$ を対象，modification を射として，垂直合成を射の合成とすれば圏となることが分かる．($\theta\colon F \Rightarrow G$ の恒等射 $\mathrm{id}_\theta$ は $(\mathrm{id}_\theta)_a := \mathrm{id}_{\theta_a}$ で与えられる．）この圏を $\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F, G)$ と書くことにする．

**命題 16.** $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\theta, \sigma\colon F \Rightarrow G$，$\tau, \xi\colon G \Rightarrow H$ を pseudonatural transformation，$\Gamma\colon \theta \Rrightarrow \sigma$，$\Delta\colon \tau \Rrightarrow \xi$ を modification とする．modification の水平合成 $\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma)_a := \Delta_a \bullet \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ は modification $\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \Rrightarrow \xi \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma$ となる．

**証明**. 次の等式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left=20, "(\tau\widehat{\circ}\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\tau\widehat{\circ}\theta)_f^{ab} \Swarrow"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, bend left=20, "(\tau\widehat{\circ}\theta)_b"] \arrow[r, bend right=20, "(\xi\widehat{\circ}\sigma)_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\Delta\widehat{\bullet}\Gamma)_b"] & Hb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left=20, "(\tau\widehat{\circ}\theta)_a"] \arrow[r, bend right=20, "(\xi\widehat{\circ}\sigma)_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\Delta\widehat{\bullet}\Gamma)_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\xi\widehat{\circ}\sigma)_f^{ab} \Swarrow"] & Ha \arrow[d, "Hf"] \\
Fb \arrow[r, bend right=20, "(\xi\widehat{\circ}\sigma)_b"'] & Hb
\end{tikzcd}$$

即ち

$$\begin{aligned}
&((\Delta_b \bullet \Gamma_b) \bullet Ff) * \alpha^{-1}_{\tau_b, \theta_b, Ff} * (\tau_b \bullet \theta_f^{ab}) * \alpha_{\tau_b, Gf, \theta_a} * (\tau_f^{ab} \bullet \theta_a) * \alpha^{-1}_{Hf, \tau_a, \theta_a} \\
&= \alpha^{-1}_{\xi_b, \sigma_b, Ff} * (\xi_b \bullet \sigma_f^{ab}) * \alpha_{\xi_b, Gf, \sigma_a} * (\xi_f^{ab} \bullet \sigma_a) * \alpha^{-1}_{Hf, \xi_a, \sigma_a} * (Hf \bullet (\Delta_a \bullet \Gamma_a))
\end{aligned}$$

を示す．そのためには次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Hf \circ (\tau_a \circ \theta_a) \arrow[r, "Hf \bullet (\Delta_a \bullet \theta_a)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & Hf \circ (\xi_a \circ \theta_a) \arrow[r, "Hf \bullet (\xi_a \bullet \Gamma_a)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & Hf \circ (\xi_a \circ \sigma_a) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(Hf \circ \tau_a) \circ \theta_a \arrow[r, "(Hf \bullet \Delta_a) \bullet \theta_a"] \arrow[d, "\tau_f \bullet \theta_a"'] \arrow[dr, phantom, "(\Delta)"] & (Hf \circ \xi_a) \circ \theta_a \arrow[r, "(Hf \circ \xi_a) \bullet \Gamma_a"] \arrow[d, "\xi_f \bullet \theta_a"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & (Hf \circ \xi_a) \circ \sigma_a \arrow[d, "\xi_f \bullet \sigma_a"] \\
(\tau_b \circ Gf) \circ \theta_a \arrow[r, "(\Delta_b \bullet Gf) \bullet \theta_a"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\xi_b \circ Gf) \circ \theta_a \arrow[r, "(\xi_b \circ Gf) \bullet \Gamma_a"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & (\xi_b \circ Gf) \circ \sigma_a \arrow[d, "\alpha"] \\
\tau_b \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[r, "\Delta_b \bullet (Gf \circ \theta_a)"] \arrow[d, "\tau_b \bullet \theta_f"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \xi_b \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[r, "\xi_b \bullet (Gf \bullet \Gamma_a)"] \arrow[d, "\xi_b \bullet \theta_f"] \arrow[dr, phantom, "(\Gamma)"] & \xi_b \circ (Gf \circ \sigma_a) \arrow[d, "\xi_b \bullet \sigma_f"] \\
\tau_b \circ (\theta_b \circ Ff) \arrow[r, "\Delta_b \bullet (\theta_b \circ Ff)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \xi_b \circ (\theta_b \circ Ff) \arrow[r, "\xi_b \bullet (\Gamma_b \bullet Ff)"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[dr, phantom, "(\alpha)"] & \xi_b \circ (\sigma_b \circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(\tau_b \circ \theta_b) \circ Ff \arrow[r, "(\Delta_b \bullet \theta_b) \bullet Ff"'] & (\xi_b \circ \theta_b) \circ Ff \arrow[r, "(\xi_b \bullet \Gamma_b) \bullet Ff"'] & (\xi_b \circ \sigma_b) \circ Ff
\end{tikzcd}$$

$(\alpha)$ は $\alpha$ が自然変換であるから可換である．$(\Delta)$，$(\Gamma)$ は $\Delta, \Gamma$ が modification であるから可換である．$(*)$ は明らかに可換である． □

**命題 17.** $F, G, H \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とするとき，pseudonatural transformation の垂直合成は関手 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(G, H) \times \mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F, G) \to \mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F, H)$ を与える．

*証明．* $\Gamma \colon \theta \Rrightarrow \sigma \colon F \Rightarrow G$ と $\Delta \colon \tau \Rrightarrow \xi \colon G \Rightarrow H$ に対して $M(\Delta, \Gamma) := \Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ と定める．この $M$ が関手になることを示せばよい．

まず $\mathrm{id}_\tau \mathbin{\widehat{\bullet}} \mathrm{id}_\theta = \mathrm{id}_{\tau \widehat{\circ} \theta}$ を示す．それは $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$(\mathrm{id}_\tau \mathbin{\widehat{\bullet}} \mathrm{id}_\theta)_a = \mathrm{id}_{\tau_a} \bullet \mathrm{id}_{\theta_a} = \mathrm{id}_{\tau_a \circ \theta_a} = \mathrm{id}_{(\tau \widehat{\circ} \theta)_a}$$

だから成り立つ．

後は $(\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Delta') \mathbin{\widehat{\bullet}} (\Gamma \mathbin{\widehat{*}} \Gamma') = (\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma) \mathbin{\widehat{*}} (\Delta' \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma')$ を示せばよい．それは $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned}
\big((\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Delta') \mathbin{\widehat{\bullet}} (\Gamma \mathbin{\widehat{*}} \Gamma')\big)_a &= (\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Delta')_a \bullet (\Gamma \mathbin{\widehat{*}} \Gamma')_a = (\Delta_a * \Delta'_a) \bullet (\Gamma_a * \Gamma'_a) \\
&= (\Delta_a \bullet \Gamma_a) * (\Delta'_a \bullet \Gamma'_a) = (\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma)_a * (\Delta' \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma')_a \\
&= \big((\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma) \mathbin{\widehat{*}} (\Delta' \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma')\big)_a
\end{aligned}$$

だから成り立つ． □

**定理 18.** bicategory $\mathcal{B},\mathcal{C}$ に対して bicategory $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ を以下のように定義することができる．

- pseudofunctor $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を対象とする．
- $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{C})(F,G) := \mathrm{Nat}_{\mathrm{ps}}(F,G)$ とする．即ち pseudonatural transformation が 1-morphism で modification が 2-morphism である．また 1-morphism の合成は $\mathbin{\widehat{\circ}}$ であり，2-morphism の水平合成・垂直合成は $\widehat{\bullet}, \widehat{*}$ である．

*証明*. $F,G,H,K\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor，$\theta\colon F\Rightarrow G$，$\sigma\colon G\Rightarrow H$，$\tau\colon H\Rightarrow K$ を pseudonatural transformation とする．対象 $a\in\mathcal{B}$ に対して $\theta_a,\sigma_a,\tau_a$ は 1-morphism である．よって同型な 2-morphism $\alpha_{\tau_a,\sigma_a,\theta_a}\colon (\tau_a\circ\sigma_a)\circ\theta_a \Rightarrow \tau_a\circ(\sigma_a\circ\theta_a)$ が得られる．$(\Gamma_{\tau\sigma\theta})_a := \alpha_{\tau_a,\sigma_a,\theta_a}$ とすれば，これは modification $\Gamma_{\tau\sigma\theta}\colon (\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)\mathbin{\widehat{\circ}}\theta \Rrightarrow \tau\mathbin{\widehat{\circ}}(\sigma\mathbin{\widehat{\circ}}\theta)$ を与える．

∵) $f\colon a\to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
Fa \arrow[r, bend left, "(\tau_a\circ\sigma_a)\circ\theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "((\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)\mathbin{\widehat{\circ}}\theta)_f\ \swarrow"] & Ka \arrow[d, "Kf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "(\tau_b\circ\sigma_b)\circ\theta_b"] \arrow[r, bend right, "\tau_b\circ(\sigma_b\circ\theta_b)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\Gamma_{\tau\sigma\theta})_b"] & Kb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
Fa \arrow[r, bend left, "(\tau_a\circ\sigma_a)\circ\theta_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a\circ(\sigma_a\circ\theta_a)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow(\Gamma_{\tau\sigma\theta})_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\tau\mathbin{\widehat{\circ}}(\sigma\mathbin{\widehat{\circ}}\theta))_f\ \swarrow"] & Ka \arrow[d, "Kf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "\tau_b\circ(\sigma_b\circ\theta_b)"'] & Kb
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．定義より (但し，演算子の優先順位は $*$ が一番低いものとしておく)

$$\begin{aligned}
&((\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)\mathbin{\widehat{\circ}}\theta)_f \\
&= \alpha^{-1}_{(\tau\widehat{\circ}\sigma)_b,\theta_b,Ff} * (\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)_b \bullet \theta_f * \alpha_{(\tau\widehat{\circ}\sigma)_b,Gf,\theta_a} * (\tau\mathbin{\widehat{\circ}}\sigma)_f \bullet \theta_a * \alpha^{-1}_{Kf,(\tau\widehat{\circ}\sigma)_a,\theta_a} \\
&= \alpha^{-1}_{\tau_b\circ\sigma_b,\theta_b,Ff} * (\tau_b\circ\sigma_b)\bullet\theta_f * \alpha_{\tau_b\circ\sigma_b,Gf,\theta_a} \\
&\qquad * [\alpha^{-1}_{\tau_b,\sigma_b,Gf} * (\tau_b\bullet\sigma_f) * \alpha_{\tau_b,Hf,\sigma_a} * (\tau_f\bullet\sigma_a) * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a,\sigma_a}] \bullet \theta_a \\
&\qquad * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a\circ\sigma_a,\theta_a} \\
&= \alpha^{-1}_{\tau_b\circ\sigma_b,\theta_b,Ff} * (\tau_b\circ\sigma_b)\bullet\theta_f * \alpha_{\tau_b\circ\sigma_b,Gf,\theta_a} * \alpha^{-1}_{\tau_b,\sigma_b,Gf}\bullet\theta_a * (\tau_b\bullet\sigma_f)\bullet\theta_a \\
&\qquad * \alpha_{\tau_b,Hf,\sigma_a}\bullet\theta_a * (\tau_f\bullet\sigma_a)\bullet\theta_a * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a,\sigma_a}\bullet\theta_a * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a\circ\sigma_a,\theta_a}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(\tau \mathbin{\widehat{\circ}} (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta))_f \\
&= \alpha^{-1}_{\tau_b,(\sigma\widehat{\circ}\theta)_b,Ff} * \tau_b \bullet (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta)_f * \alpha_{\tau_b,Hf,(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a} * \tau_f \bullet (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta)_a * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a,(\sigma\widehat{\circ}\theta)_a} \\
&= \alpha^{-1}_{\tau_b,\sigma_b\circ\theta_b,Ff} \\
&\qquad * \tau_b \bullet [\alpha^{-1}_{\sigma_b,\theta_b,Ff} * (\sigma_b \bullet \theta_f) * \alpha_{\sigma_b,Gf,\theta_a} * (\sigma_f \bullet \theta_a) * \alpha^{-1}_{Hf,\sigma_a,\theta_a}] \\
&\qquad * \alpha_{\tau_b,Hf,\sigma_a\circ\theta_a} * \tau_f \bullet (\sigma_a \circ \theta_a) * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a,\sigma_a\circ\theta_a} \\
&= \alpha^{-1}_{\tau_b,\sigma_b\circ\theta_b,Ff} * \tau_b \bullet \alpha^{-1}_{\sigma_b,\theta_b,Ff} * \tau_b \bullet (\sigma_b \bullet \theta_f) * \tau_b \bullet \alpha_{\sigma_b,Gf,\theta_a} * \tau_b \bullet (\sigma_f \bullet \theta_a) \\
&\qquad * \tau_b \bullet \alpha^{-1}_{Hf,\sigma_a,\theta_a} * \alpha_{\tau_b,Hf,\sigma_a\circ\theta_a} * \tau_f \bullet (\sigma_a \circ \theta_a) * \alpha^{-1}_{Kf,\tau_a,\sigma_a\circ\theta_a}
\end{aligned}
$$

である．故に次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Kf \circ ((\tau_a \circ \sigma_a) \circ \theta_a) \arrow[r, "Kf\bullet\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & Kf \circ (\tau_a \circ (\sigma_a \circ \theta_a)) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(Kf \circ (\tau_a \circ \sigma_a)) \circ \theta_a \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet\theta_a"'] & (Kf \circ \tau_a) \circ (\sigma_a \circ \theta_a) \arrow[d, "\tau_f\bullet(\sigma_a\circ\theta_a)"] \\
((Kf \circ \tau_a) \circ \sigma_a) \circ \theta_a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "(\tau_f\bullet\sigma_a)\bullet\theta_a"'] & (\tau_b \circ Hf) \circ (\sigma_a \circ \theta_a) \arrow[d, "\alpha"] \\
((\tau_b \circ Hf) \circ \sigma_a) \circ \theta_a \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha\bullet\theta_a"'] & \tau_b \circ (Hf \circ (\sigma_a \circ \theta_a)) \arrow[d, "\tau_b\bullet\alpha^{-1}"] \\
(\tau_b \circ (Hf \circ \sigma_a)) \circ \theta_a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\tau_b\bullet\sigma_f)\bullet\theta_a"'] & \tau_b \circ ((Hf \circ \sigma_a) \circ \theta_a) \arrow[d, "\tau_b\bullet(\sigma_f\bullet\theta_a)"] \\
(\tau_b \circ (\sigma_b \circ Gf)) \circ \theta_a \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}\bullet\theta_a"'] & \tau_b \circ ((\sigma_b \circ Gf) \circ \theta_a) \arrow[d, "\tau_b\bullet\alpha"] \\
((\tau_b \circ \sigma_b) \circ Gf) \circ \theta_a \arrow[d, "\alpha"'] & \tau_b \circ (\sigma_b \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[d, "\tau_b\bullet(\sigma_b\bullet\theta_f)"] \\
(\tau_b \circ \sigma_b) \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "(\tau_b\circ\sigma_b)\bullet\theta_f"'] & \tau_b \circ (\sigma_b \circ (\theta_b \circ Ff)) \arrow[d, "\tau_b\bullet\alpha^{-1}"] \\
(\tau_b \circ \sigma_b) \circ (\theta_b \circ Ff) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"'] & \tau_b \circ ((\sigma_b \circ \theta_b) \circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
((\tau_b \circ \sigma_b) \circ \theta_b) \circ Ff \arrow[r, "\alpha\bullet Ff"'] & (\tau_b \circ (\sigma_b \circ \theta_b)) \circ Ff
\end{tikzcd}$$

これは $\alpha$ の自然性と bicategory の条件 (7) により明らか.

この $\Gamma_{\tau\sigma\theta}$ は $\tau, \sigma, \theta$ について自然である．

$\because$) $\Theta\colon \theta \Rrightarrow \theta'$，$\Sigma\colon \sigma \Rrightarrow \sigma'$，$\Phi\colon \tau \Rrightarrow \tau'$ を modification としたとき，次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
(\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma) \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \arrow[r, "\Gamma_{\tau\sigma\theta}"] \arrow[d, "\Phi\widehat{\bullet}(\Sigma\widehat{\bullet}\Theta)"'] & \tau \mathbin{\widehat{\circ}} (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta) \arrow[d, "\Phi\widehat{\bullet}(\Sigma\widehat{\bullet}\Theta)"] \\
(\tau' \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma') \mathbin{\widehat{\circ}} \theta' \arrow[r, "\Gamma_{\tau'\sigma'\theta'}"'] & \tau' \mathbin{\widehat{\circ}} (\sigma' \mathbin{\widehat{\circ}} \theta')
\end{tikzcd}$$

即ち $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
(\tau_a \circ \sigma_a) \circ \theta_a \arrow[r, "\alpha_{\tau_a\sigma_a\theta_a}"] \arrow[d, "(\Phi_a\bullet\Sigma_a)\bullet\Theta_a"'] & \tau_a \circ (\sigma_a \circ \theta_a) \arrow[d, "\Phi_a\bullet(\Sigma_a\bullet\Theta_a)"] \\
(\tau'_a \circ \sigma'_a) \circ \theta'_a \arrow[r, "\alpha_{\tau'_a\sigma'_a\theta'_a}"'] & \tau'_a \circ (\sigma'_a \circ \theta'_a)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは $\alpha$ が自然変換であるから明らか．

次に $\mathrm{id}_F$ を

- $a \in \mathcal{B}$ に対して $(\mathrm{id}_F)_a := \mathrm{id}_{Fa}$.
- $f\colon a \to b$ に対して $(\mathrm{id}_F)_f := (Ff \circ \mathrm{id}_{Fa} \xrightarrow{\rho_{Ff}} Ff \xrightarrow{\lambda_{Fb}^{-1}} \mathrm{id}_{Fb} \circ Ff)$.

と定義するとこれは pseudonatural transformation $\mathrm{id}_F\colon F \Rightarrow F$ を与える．

$\because$) まず $(\mathrm{id}_F)_f$ が自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "F"'] \arrow[dr, "F"] & \\
\mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\mathrm{id}_F"'] \arrow[dr, "-\bullet\mathrm{id}_{Fa}"'] & & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dl, "\mathrm{id}_{Fb}\bullet-"] \\
& \mathcal{C}(Fa,Fb) &
\end{tikzcd}$$

を与えることを示そう．そのためには $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Ff \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{Ff}"] \arrow[d, "F\beta\bullet\mathrm{id}_{Fa}"'] & Ff \arrow[r, "\lambda^{-1}_{Ff}"] \arrow[d, "F\beta"] & \mathrm{id}_{Fb} \circ Ff \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fb}\bullet F\beta"] \\
Fg \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{Fg}"'] & Fg \arrow[r, "\lambda^{-1}_{Fg}"'] & \mathrm{id}_{Fb} \circ Fg
\end{tikzcd}$$

が可換となればよいが，それは $\lambda, \rho$ の自然性より明らか．

さて，この $\mathrm{id}_F$ が pseudonatural transformation の条件を満たすことを示そう．まず条件 (3)，即ち $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して次の図式が可換であることを示す．

$$\begin{tikzcd}
(Fg \circ Ff) \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dddddd, "\varphi_{gf}\bullet\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[dddrrr, "\rho_{Fg\circ Ff}"'] & Fg \circ (Ff \circ \mathrm{id}_{Fa}) \arrow[rr, "Fg\bullet\rho_{Ff}"] & & Fg \circ Ff \arrow[d, "Fg\bullet\lambda^{-1}_{Ff}"] \arrow[ddd, bend right=60, "\mathrm{id}_{Fg\circ Ff}"'] \\
& (8) & & Fg \circ (\mathrm{id}_{Fb} \circ Ff) \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
& & (*) & (Fg \circ \mathrm{id}_{Fb}) \circ Ff \arrow[d, "\rho_{Fg}\bullet Ff"] \\
& & & Fg \circ Ff \arrow[d, "\lambda^{-1}_{Fg}\bullet Ff"] \arrow[ddd, "\varphi_{gf}"'] \arrow[dd, bend right=60, "\lambda^{-1}_{Fg\circ Ff}"'] \\
& (\rho) & (9) & (\mathrm{id}_{Fc} \circ Fg) \circ Ff \arrow[d, "\alpha"'] \\
& & (\lambda) & \mathrm{id}_{Fc} \circ (Fg \circ Ff) \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fc}\bullet\varphi_{gf}"'] \\
F(g \circ f) \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{F(g\circ f)}"'] & F(g \circ f) \arrow[rr, "\lambda^{-1}_{F(g\circ f)}"'] & & \mathrm{id}_{Fc} \circ F(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

$(\lambda)$，$(\rho)$ は $\lambda, \rho$ の自然性により可換である．(8)，(9) は補題 8, 9 より可換である．$(*)$ は bicategory の条件 (8) により可換である．以上により条件 (3) は成り立つ．

最後に条件 4 を示す．即ち $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
Fa \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\lambda_{\mathrm{id}_{Fa}}\ \Swarrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\rho^{-1}_{\mathrm{id}_{Fa}}\ \Swarrow"'] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \\
Fa \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & Fa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
Fa \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=50, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, bend right=20, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, "\lambda^{-1}_{F(\mathrm{id}_a)}\ \Swarrow"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\rho_{F(\mathrm{id}_a)}\ \Swarrow"] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=50, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=25, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \\
Fa \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & Fa
\end{tikzcd}$$

を示す．まず補題 10 により (左辺) $= \mathrm{id}_{Fa} \bullet \psi^a$ である．一方，$\lambda, \rho$ は自然同型だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fa} \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{\mathrm{id}_{Fa}}"] \arrow[d, "\psi^a \bullet \mathrm{id}_{Fa}"'] & \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\lambda^{-1}_{\mathrm{id}_{Fa}}"] \arrow[d, "\psi^a"] & \mathrm{id}_{Fa} \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa} \bullet \psi^a"] \\
F(\mathrm{id}_a) \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{F(\mathrm{id}_a)}"'] & F(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\lambda^{-1}_{F(\mathrm{id}_a)}"'] & \mathrm{id}_{Fa} \circ F(\mathrm{id}_{Fa})
\end{tikzcd}$$

は可換である．故に

$$(右辺) = \begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
Fa \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[d, bend right=70, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=35, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\rho_{\mathrm{id}_{Fa}}\ \Swarrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\lambda^{-1}_{\mathrm{id}_{Fa}}\ \Swarrow"'] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \\
Fa \arrow[r, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & Fa
\end{tikzcd} = \mathrm{id}_{Fa} \bullet \psi^a = (左辺)$$

が分かる．

次に $(\Lambda_\theta)_a := \lambda_{\theta_a} \colon \mathrm{id}_{Ga} \circ \theta_a \Rightarrow \theta_a$，$(\Psi_\theta)_a := \rho_{\theta_a} \colon \theta_a \circ \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow \theta_a$ と定義する．これらは modification $\Lambda_\theta \colon \mathrm{id}_G \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \Rrightarrow \theta$，$\Psi_\theta \colon \theta \mathbin{\widehat{\circ}} \mathrm{id}_F \Rrightarrow \theta$ を与える．

∵) $f \colon a \to b$ に対して等式

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
Fa \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{Ga} \circ \theta_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathrm{id}_G \widehat{\circ} \theta)_f\ \Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{Gb} \circ \theta_b"] \arrow[r, bend right, "\theta_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Lambda_\theta)_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
Fa \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}_{Ga} \circ \theta_a"] \arrow[r, bend right, "\theta_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Lambda_\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\theta_f\ \Swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "\theta_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\theta_a \circ \mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "(\theta\hat{\circ}\mathrm{id}_F)_f \swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] & & Fa \arrow[r, bend left, "\theta_a \circ \mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[r, bend right, "\theta_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Psi_\theta)_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\theta_f \swarrow"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\theta_b \circ \mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[r, bend right, "\theta_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Psi_\theta)_b"] & Gb & = & Fb \arrow[r, bend right, "\theta_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．つまり

$$\begin{aligned}
&(\lambda_{\theta_b} \bullet Ff) * \alpha^{-1}_{\mathrm{id}_{Gb},\theta_b,Ff} * (\mathrm{id}_{Gb} \bullet \theta_f) * \alpha_{\mathrm{id}_{Gb},Gf,\theta_a} * ((\mathrm{id}_G)_f \bullet \theta_a) * \alpha^{-1}_{Gf,\mathrm{id}_{Ga},\theta_a} \\
&\qquad = \theta_f * (Gf \bullet \lambda_{\theta_a}) \\
&(\rho_{\theta_b} \bullet Ff) * \alpha^{-1}_{\theta_b,\mathrm{id}_{Fb},Ff} * (\theta_b \bullet (\mathrm{id}_F)_f) * \alpha_{\theta_b,Ff,\mathrm{id}_{Fa}} * (\theta_f \bullet \mathrm{id}_{Fa}) * \alpha^{-1}_{Gf,\theta_a,\mathrm{id}_{Fa}} \\
&\qquad = \theta_f * (Gf \bullet \rho_{\theta_a})
\end{aligned}$$

を示せばよい．そのためには次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Gf \circ (\mathrm{id}_{Ga} \circ \theta_a) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "Gf\bullet\lambda_{\theta_a}"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathcal{C})"] & (Gf \circ \mathrm{id}_{Ga}) \circ \theta_a \arrow[d, "(\mathrm{id}_G)_f\bullet\theta_a"] \arrow[ddl, bend right, "\rho_{Gf}\bullet\theta_a"'] \\
& (\mathrm{id}_{Gb} \circ Gf) \circ \theta_a \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dl, "\lambda_{Gf}\bullet\theta_a"'] \arrow[l, phantom, "(\mathrm{id})"] \\
Gf \circ \theta_a \arrow[d, "\theta_f"'] & \mathrm{id}_{Gb} \circ (Gf \circ \theta_a) \arrow[l, "\lambda_{Gf\circ\theta_a}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Gb}\bullet\theta_f"] \arrow[ul, phantom, "(9)"] \arrow[dl, phantom, "(\lambda)"] \\
\theta_b \circ Ff & \mathrm{id}_{Gb} \circ (\theta_b \circ Ff) \arrow[l, "\lambda_{\theta_b\circ Ff}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
& (\mathrm{id}_{Gb} \circ \theta_b) \circ Ff \arrow[ul, bend left, "\lambda_{\theta_b}\bullet Ff"] \arrow[u, phantom, "(9)"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Gf \circ (\theta_a \circ \mathrm{id}_{Fa}) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] \arrow[dd, "Gf\bullet\rho_{\theta_a}"'] \arrow[dr, phantom, "(8)"] & (Gf \circ \theta_a) \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[d, "\theta_f\bullet\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[ddl, bend right, "\rho_{Gf\circ\theta_a}"'] \\
& (\theta_b \circ Ff) \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddl, bend right, "\rho_{\theta_b\circ Ff}"'] \arrow[l, phantom, "(\rho)"] \\
Gf \circ \theta_a \arrow[d, "\theta_f"'] & \theta_b \circ (Ff \circ \mathrm{id}_{Fa}) \arrow[d, "\theta_b\bullet(\mathrm{id}_F)_f"] \arrow[dl, "\theta_b\bullet\rho_{Ff}"'] \arrow[u, phantom, "(8)"] \\
\theta_b \circ Ff & \theta_b \circ (\mathrm{id}_{Fb} \circ Ff) \arrow[l, "\theta_b\bullet\lambda_{Ff}"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \arrow[u, phantom, "(\mathrm{id})"] \\
& (\theta_b \circ \mathrm{id}_{Fb}) \circ Ff \arrow[ul, bend left, "\rho_{\theta_b}\bullet Ff"] \arrow[u, phantom, "(\mathcal{C})"]
\end{tikzcd}$$

$(\lambda)$, $(\rho)$ は $\lambda, \rho$ の自然性から可換である．(id) は $\mathrm{id}_F$ の定義により可換である．(8), (9) は補題 8, 9 から可換である．$(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ が bicategory だから可換である．

この $\Lambda_\theta, \Psi_\theta$ は $\theta$ について自然である．

$\because$) $\Theta\colon \theta \Rrightarrow \sigma$ を modification としたとき, 次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_G \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \arrow[r, "\Lambda_\theta"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \widehat{\bullet} \Theta"'] & \theta \arrow[d, "\Theta"] \\
\mathrm{id}_G \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma \arrow[r, "\Lambda_\sigma"'] & \sigma
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\theta \mathbin{\widehat{\circ}} \mathrm{id}_F \arrow[r, "\Psi_\theta"] \arrow[d, "\Theta \widehat{\bullet} \mathrm{id}_F"'] & \theta \arrow[d, "\Theta"] \\
\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \mathrm{id}_F \arrow[r, "\Psi_\sigma"'] & \sigma
\end{tikzcd}$$

即ち $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Ga} \circ \theta_a \arrow[r, "\lambda_{\theta_a}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga} \bullet \Theta_a"'] & \theta_a \arrow[d, "\Theta_a"] \\
\mathrm{id}_{Ga} \circ \sigma_a \arrow[r, "\lambda_{\sigma_a}"'] & \sigma_a
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\theta_a \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{\theta_a}"] \arrow[d, "\Theta_a \bullet \mathrm{id}_{Fa}"'] & \theta_a \arrow[d, "\Theta_a"] \\
\sigma_a \circ \mathrm{id}_{Fa} \arrow[r, "\rho_{\sigma_a}"'] & \sigma_a
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，それは $\lambda, \rho$ が自然変換であるから明らか.

最後に $\Gamma, \Lambda, \Psi$ が bicategory の条件 (7), (8) を満たすことを示せばよい.

まず条件 (7) を示すためには

$$\begin{tikzcd}
 & & ((\beta \mathbin{\widehat{\circ}} \tau) \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma) \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \arrow[dll, "\Gamma_{\beta\tau\sigma} \widehat{\bullet} \theta"'] \arrow[drr, "\Gamma_{\beta \widehat{\circ} \tau, \sigma, \theta}"] & & \\
(\beta \mathbin{\widehat{\circ}} (\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma)) \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \arrow[dr, "\Gamma_{\beta, \tau \widehat{\circ} \sigma, \theta}"'] & & & & (\beta \mathbin{\widehat{\circ}} \tau) \mathbin{\widehat{\circ}} (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta) \arrow[dl, "\Gamma_{\beta, \tau, \sigma \widehat{\circ} \theta}"] \\
 & \beta \mathbin{\widehat{\circ}} ((\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma) \mathbin{\widehat{\circ}} \theta) \arrow[rr, "\beta \bullet \Gamma_{\tau\sigma\theta}"'] & & \beta \mathbin{\widehat{\circ}} (\tau \mathbin{\widehat{\circ}} (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta)) &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．即ち $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
 & & ((\beta_a \circ \tau_a) \circ \sigma_a) \circ \theta_a \arrow[dll, "\alpha_{\beta_a, \tau_a, \sigma_a} \bullet \theta_a"'] \arrow[drr, "\alpha_{\beta_a \circ \tau_a, \sigma_a, \theta_a}"] & & \\
(\beta_a \circ (\tau_a \circ \sigma_a)) \circ \theta_a \arrow[dr, "\alpha_{\beta_a, \tau_a \circ \sigma_a, \theta_a}"'] & & & & (\beta_a \circ \tau_a) \circ (\sigma_a \circ \theta_a) \arrow[dl, "\alpha_{\beta_a, \tau_a, \sigma_a \circ \theta_a}"] \\
 & \beta_a \circ ((\tau_a \circ \sigma_a) \circ \theta_a) \arrow[rr, "\beta_a \bullet \alpha_{\tau_a, \sigma_a, \theta_a}"'] & & \beta_a \circ (\tau_a \circ (\sigma_a \circ \theta_a)) &
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，これは $\mathcal{C}$ が bicategory であるから可換である.

条件 (8) についても

$$\begin{tikzcd}
(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \mathrm{id}_G) \mathbin{\widehat{\circ}} \theta \arrow[rr, "\Gamma_{\sigma,\mathrm{id}_G,\theta}"] \arrow[dr, "\Psi_\sigma \widehat{\bullet} \theta"'] & & \sigma \mathbin{\widehat{\circ}} (\mathrm{id}_G \mathbin{\widehat{\circ}} \theta) \arrow[dl, "\sigma \widehat{\bullet} \Lambda_\theta"] \\
& \sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta &
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよいが，これも $a \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
(\sigma_a \circ \mathrm{id}_{Ga}) \circ \theta_a \arrow[rr, "\alpha_{\sigma_a,\mathrm{id}_{Ga},\theta_a}"] \arrow[dr, "\rho_{\sigma_a} \bullet \theta_a"'] & & \sigma_a \circ (\mathrm{id}_{Ga} \circ \theta_a) \arrow[dl, "\sigma_a \bullet \lambda_{\theta_a}"] \\
& \sigma_a \circ \theta_a &
\end{tikzcd}$$

が可換であるからよい． □

**定理 19.** $\mathcal{C}$ が strict 2-category ならば $\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ も strict 2-category である．

**証明**. 定理 18 の証明から明らか． □

**系 20.** bicategory $\mathcal{B}$ に対して $\widehat{\mathcal{B}} := \mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathbf{CAT})$ は strict 2-category である． □

最後に，以降で使う言葉を定義しておく．

**定義.** $\mathcal{B}$ を bicategory， $a, b \in \mathcal{B}$ を対象とする．

(1) 1-morphism $f\colon a \to b$ が同値 (equivalence)
$\Longleftrightarrow$ ある 1-morphism $g\colon b \to a$ と同型 $\mathrm{id}_a \cong g \circ f$，$f \circ g \cong \mathrm{id}_b$ が存在する．

(2) $a$ と $b$ が同値 $\Longleftrightarrow$ ある同値 $f\colon a \to b$ が存在する．

$a$ と $b$ が同値であることを記号で $a \simeq b$ と書くことにする．

**例 21.** strict 2-category **CAT** における同値とは圏同値のことである． □

**定義.** $P$ を圏に関する性質とするとき，bicategory $\mathcal{B}$ が局所 $P$ (locally $P$) とは，任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して圏 $\mathcal{B}(a, b)$ が $P$ を満たすことをいう．

**定義.** $P$ を関手に関する性質とするとき，pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が局所 $P$ (locally $P$) とは，任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $F^{ab}\colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ が $P$ を満たすことをいう．

**例 22.** bicategory $\mathcal{B}$ が局所離散 (locally discrete) とは，任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して圏 $\mathcal{B}(a, b)$ が離散圏になっていることである． □

**例 23.** bicategory $\mathcal{B}$ が locally ordered とは，任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して圏 $\mathcal{B}(a, b)$ が順序集合になっていることである． □

**例 24.** pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が局所忠実充満 (locally fuly faithful) とは，任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $F^{ab}$ が忠実充満関手になっていることである． □

**例 25.** pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が局所圏同値とは，任意の $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $F^{ab}$ が圏同値を与える関手になっていることである． □

**定義.** pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が本質的全射
$\Longleftrightarrow$ 任意の $c \in \mathcal{C}$ に対して，ある $b \in \mathcal{B}$ が存在して $Fb \simeq c$ となる．

**定義.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory とする．

(1) pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が biequivalence $\Longleftrightarrow$ $F$ が本質的全射かつ局所圏同値.
(2) $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ が biequivalence $\Longleftrightarrow$ ある biequivalence $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が存在する．

**定義.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory とする．$\mathcal{B}$ が $\mathcal{C}$ の部分 bicategory (subbicategory) とは以下の条件を満たすことである．

(1) $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \subset \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ である．
(2) $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}(a, b) \subset \mathcal{C}(a, b)$ は部分圏である．
(3) $\mathcal{B}$ における $M, I, \alpha, \lambda, \rho$ は $\mathcal{C}$ におけるそれと一致している．

部分 bicategory を $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ で表す．また $\mathcal{C}$ が strict 2-category のときは部分 bicategory のことを部分 2-category と呼ぶ．

**定義.** 充満部分 bicategory (full subbicategory) とは，$a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}(a, b) = \mathcal{C}(a, b)$ となる部分 bicategory $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ のことである．

**定義.** 局所充満部分 bicategory (locally full subbicategory) とは，$a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{B}(a, b) \subset \mathcal{C}(a, b)$ が充満部分圏となる部分 bicategory $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ のことである．

**補題 26.** $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が pseudofunctor で $a, b \in \mathcal{B}$ が $a \simeq b$ を満たすならば $Fa \simeq Fb$ である．

**証明**．1-morphism $f\colon a\to b$，$g\colon b\to a$ と同型 $\mathrm{id}_a\cong g\circ f$，$f\circ g\cong\mathrm{id}_b$ が存在したとすると，pseudofunctor の定義より

$$Fg\circ Ff\cong F(g\circ f)\cong F(\mathrm{id}_a)\cong\mathrm{id}_{Fa},\quad Ff\circ Fg\cong F(f\circ g)\cong F(\mathrm{id}_b)\cong\mathrm{id}_{Fb}$$

だから $Fa\simeq Fb$ である． □

**補題 27.** pseudofunctor $F\colon\mathcal{B}\to\mathcal{C}$ が局所圏同値で $a,b\in\mathcal{B}$ に対して $Fa\simeq Fb$ ならば，$a\simeq b$ である．

**証明**．$Fa\simeq Fb$ とする．即ち $f\colon Fa\to Fb$，$g\colon Fb\to Fa$ を $\mathcal{C}$ の 1-morphism として同型 $\mathrm{id}_{Fa}\cong g\circ f$，$f\circ g\cong\mathrm{id}_{Fb}$ が成り立つとする．$F\colon\mathcal{B}(a,b)\to\mathcal{C}(Fa,Fb)$ が本質的全射だから，$\mathcal{B}$ の 1-morphism $f_0\colon a\to b$ が存在して $Ff_0\cong f$ とできる．同様にして $g_0\colon b\to a$ を $Fg_0\cong g$ となるように取る．このとき同型

$$F(g_0\circ f_0)\cong Fg_0\circ Ff_0\cong g\circ f\cong\mathrm{id}_{Fa}\cong F(\mathrm{id}_a)$$

が成り立つから，$F\colon\mathcal{B}(a,a)\to\mathcal{C}(Fa,Fa)$ が忠実充満 (従って conservative) であることより $\mathrm{id}_a\cong g_0\circ f_0$ が分かる．同様にして

$$F(f_0\circ g_0)\cong Ff_0\circ Fg_0\cong f\circ g\cong\mathrm{id}_{Fb}\cong F(\mathrm{id}_b)$$

だから $f_0\circ g_0\cong\mathrm{id}_b$ も分かり，$a\simeq b$ となる． □

## 2　米田

※ この節では，合成に関して以下の 2 つの記法を使用する．

- 関手，自然変換の合成を緑色の記号 $\circ$，$\bullet$，$*$ で表す．
- $P\colon\mathcal{B}^{\mathrm{op}}\to\mathbf{CAT}$ を pseudofunctor とするとき，$a\in\mathcal{B}$ に対して $Pa$ は圏である．このような圏における合成を赤色の記号 $\circ$ で表す．

これらの合成の記号は区別しなくても文脈からどの合成であるかは判断可能だが，区別しないと混乱すると思ったためこのような記法を採用した．

さて，$\widehat{\mathcal{B}}$ が定義できたので，米田埋込 $y\colon\mathcal{B}\to\widehat{\mathcal{B}}$ も定義できるのではないか，という期待が出てくるが，実際これは定義できて「米田の補題」が成り立つ (定理 33)．それを示すのがこの節の目的である．まず米田埋込 $y$ を定義しよう．

※ ここで先にこの節の大まかな流れを説明しておく．通常の圏の場合と同じように，$a \in \mathcal{B}$ に対して $y(a) := \mathcal{B}(-, a)$ とすると pseudofunctor $y(a) \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$ であり，pseudofunctor $y \colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ となる．すると $P \in \widehat{\mathcal{B}}$ に対して関手 $\theta_a \colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P) \to Pa$ が，通常の圏論の場合と同様 $\theta_a(\sigma) := \sigma_a(\mathrm{id}_a)$ で定まる．これが圏同値になるというのが bicategory 版の米田の補題である．

流れとしては以上であるが，これを実際に実行するには上記の定義が各種条件を満たしていることを示さなければならない．それ自体は単純で難しいものではないが，とにかく条件の数が多いので，証明としては非常に長くなる．なので細かい証明に興味がなければ，定理 33 と系 34 を認めたうえで第 3 節まで飛ばしてよいと思う．

$\mathcal{B}$ を bicategory として $a \in \mathcal{B}$ を対象とする．$s \in \mathcal{B}$ に対して $Fs := \mathcal{B}(s, a) \in \mathbf{CAT}$ とする．随伴 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}}(A \times B, C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{CAT}}(B, C^A)$ を思い出せば，$t \in \mathcal{B}$ に対して関手 $M^{tsa} \colon \mathcal{B}(s, a) \times \mathcal{B}(t, s) \to \mathcal{B}(t, a)$ から

$$F^{st} \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s, t) = \mathcal{B}(t, s) \to \mathbf{CAT}(\mathcal{B}(s, a), \mathcal{B}(t, a)) = \mathbf{CAT}(Fs, Ft)$$

が得られる．$f \colon t \to s$ とするとき，定義より $F^{st}(f) = - \bullet f \colon \mathcal{B}(s, a) \to \mathcal{B}(t, a)$ である．即ち，$\mathcal{B}$ の $\delta \colon k \Rightarrow l \colon s \to a$ に対して $F^{st}(f)(k) = k \circ f$，$F^{st}(f)(\delta) = \delta \bullet f$ となる．また $\beta \colon f \Rightarrow g \colon t \to s$ とするとき $F^{st}(\beta) = - \bullet \beta \colon - \bullet f \Rightarrow - \bullet g$ は自然変換であって，これは $F^{st}(\beta)_k = k \bullet \beta \colon k \bullet f \Rightarrow k \bullet g$ となる．

**命題 28.** 上記の $F^{st}$ により pseudofunctor $F \colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$ が得られる．

**証明.**

※ そのためには $s, t, r \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(t, r) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s, t) \arrow[dl, "F^{tr} \times F^{st}"'] \arrow[dr, "M^{str}"] & \\
\mathbf{CAT}(Ft, Fr) \times \mathbf{CAT}(Fs, Ft) \arrow[dr, "M^{FsFtFr}"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s, r) \arrow[dl, "F^{sr}"] \\
 & \mathbf{CAT}(Fs, Fr) &
\end{tikzcd}$$

を定義しなければならない．このような $\varphi$ がもし存在すれば，$r \xrightarrow{q} t \xrightarrow{p} s$ に対して

$$\varphi_{qp} \colon (- \bullet q) \circ (- \bullet p) \Rightarrow - \bullet (p \circ q) \colon Fs \to Fr$$

は自然同型である．即ち $g \in Fs = \mathcal{B}(s,a)$ に対して

$$(\varphi_{qp})_g \colon (g \circ p) \circ q \Rightarrow g \circ (p \circ q) \colon r \to a$$

は $\mathcal{B}$ の同型な 2-morphism である．

また $\psi^s \colon \mathrm{id}_{Fs} \Rightarrow F(\mathrm{id}_s) \colon Fs \to Fs$ も定義する必要がある．これは即ち自然変換 $\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,a)} \Rightarrow - \bullet \mathrm{id}_s$ である．

$s, t, r \in \mathcal{B}$ を対象，$r \xrightarrow{q} t \xrightarrow{p} s \xrightarrow{g} a$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism としたとき $(\varphi_{qp})_g := \alpha_{gpq}$ と定義する．$\alpha$ が自然同型だから $\varphi_{qp} = \alpha_{-pq} \colon (- \bullet q) \circ (- \bullet p) \Rightarrow - \bullet (p \circ q)$ も自然同型である．更に $\varphi$ も自然同型である．

また $\psi^s := (\rho^{sa})^{-1}$ と定める．

条件 (5) を示す．即ち次の可換図式を示す．

$$\begin{tikzcd}
(Fh \circ Fq) \circ Fp \arrow[r, "\varphi_{hq} \bullet Fp"] \arrow[d, "\alpha_{Fh,Fq,Fp}"'] & F(q \circ h) \circ Fp \arrow[r, "\varphi_{q \circ h, p}"] & F(p \circ (q \circ h)) \arrow[d, "F(\alpha^{-1}_{pqh})"] \\
Fh \circ (Fq \circ Fp) \arrow[r, "Fh \bullet \varphi_{qp}"'] & Fh \circ F(p \circ q) \arrow[r, "\varphi_{h, p \circ q}"'] & F((p \circ q) \circ h)
\end{tikzcd}$$

つまり，$g \colon s \to a$ に対して次の可換図式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
((g \circ p) \circ q) \circ h \arrow[r, "\alpha_{g \circ p, q, h}"] \arrow[d, equal] & (g \circ p) \circ (q \circ h) \arrow[r, "\alpha_{g,p,q \circ h}"] & g \circ (p \circ (q \circ h)) \arrow[d, "g \bullet \alpha^{-1}_{pqh}"] \\
((g \circ p) \circ q) \circ h \arrow[r, "\alpha_{gpq} \bullet h"'] & (g \circ (p \circ q)) \circ h \arrow[r, "\alpha_{g, p \circ q, h}"'] & g \circ ((p \circ q) \circ h)
\end{tikzcd}$$

これは bicategory の定義の条件 (7) から成り立つ．

条件 (6) を示す．即ち $p \colon t \to s$ に対して次の二つが可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Ft} \circ Fp \arrow[r, "\lambda_{Fp}"] \arrow[d, "\psi \bullet Fp"'] & Fp \\
F(\mathrm{id}_t) \circ Fp \arrow[r, "\varphi_{\mathrm{id}_t, p}"'] & F(p \circ \mathrm{id}_t) \arrow[u, "F(\rho_p)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Fp \circ \mathrm{id}_{Fs} \arrow[r, "\rho_{Fp}"] \arrow[d, "Fp \bullet \psi"'] & Fp \\
Fp \circ F(\mathrm{id}_s) \arrow[r, "\varphi_{p, \mathrm{id}_s}"'] & F(\mathrm{id}_s \circ p) \arrow[u, "F(\lambda_p)"']
\end{tikzcd}$$

定義から $g\colon s \to a$ に対して次の図式の可換性を示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
g \circ p \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho^{-1}_{g\circ p}"'] & g \circ p & g \circ p \arrow[r, equal] \arrow[d, "\rho_g^{-1}\bullet p"'] & g \circ p \\
(g \circ p) \circ \mathrm{id}_t \arrow[r, "\alpha_{g,p,\mathrm{id}_t}"'] & g \circ (p \circ \mathrm{id}_t) \arrow[u, "g\bullet\rho_p"'] & (g \circ \mathrm{id}_s) \circ p \arrow[r, "\alpha_{g,\mathrm{id}_s,p}"'] & g \circ (\mathrm{id}_s \circ p) \arrow[u, "g\bullet\lambda_p"']
\end{tikzcd}$$

右の図式は bicategory の定義の条件 (8) であり，左の図式は補題 8 である. □

命題 28 の $F$ を $y(a)$ もしくは $\mathcal{B}(-,a)$ で表す．証明から明らかに

**系 29.** $\mathcal{B}$ が strict 2-category のとき $y(a)\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$ は strict 2-functor である. □

今度は $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ と $s \in \mathcal{B}$ を取る．$M^{sab}\colon \mathcal{B}(a,b) \times \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$ は関手だから $y(f)_s := M^{sab}(f,-) = f \bullet -\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$ も関手である.

**命題 30.** $y(f)\colon y(a) \Rightarrow y(b)$ は pseudonatural transformation を与える.

証明.

※ そのためには $s,t \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(s,t) \arrow[dl, "y(b)"'] \arrow[dr, "y(a)"] & \\
\mathbf{CAT}(\mathcal{B}(s,b),\mathcal{B}(t,b)) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "y(f)^{st}"'] \arrow[dr, "-\bullet y(f)_s"'] & & \mathbf{CAT}(\mathcal{B}(s,a),\mathcal{B}(t,a)) \arrow[dl, "y(f)_t\bullet -"] \\
& \mathbf{CAT}(\mathcal{B}(s,a),\mathcal{B}(t,b)) &
\end{tikzcd}$$

を定義しなければならない．もしこのような $y(f)^{st}$ が存在すれば，$p\colon t \to s$ に対して $y(f)^{st}_p\colon (-\bullet p) \circ (f \bullet -) \Rightarrow (f \bullet -) \circ (-\bullet p)$ は自然同型である．よって $g\colon s \to a$ に対して $(y(f)^{st}_p)_g\colon (f \circ g) \circ p \Rightarrow f \circ (g \circ p)$ は $\mathcal{B}$ の 2-morphism である.

$s,t \in \mathcal{B}$ を対象，$t \xrightarrow{p} s \xrightarrow{g} a$ を 1-morphism とする．$(y(f)_p)_g := \alpha_{fgp}$ と置く．$\alpha$ が自然同型だから $y(f)_p$ は自然同型であり，$y(f)$ も自然同型である.

条件 (3) を示す．$r \xrightarrow{q} t \xrightarrow{p} s$ に対して次の自然変換の等式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "f\bullet -"] \arrow[dr, "-\bullet p"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] & & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "-\bullet p"] \arrow[d, phantom, "\overset{y(f)_p}{\Swarrow}"] & \\
\overset{\varphi_{qp}}{\Longleftarrow} & \mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, "f\bullet -"] \arrow[dl, "-\bullet q"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{y(f)_q}{\Swarrow}"] & \mathcal{B}(t,b) \arrow[dl, "-\bullet q"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[rr, "f\bullet -"'] & & \mathcal{B}(r,b) &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet -"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dd, phantom, "\overset{y(f)_{p\circ q}}{\Swarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] \arrow[dr, "-\bullet p"] & \\
& \overset{\varphi_{qp}}{\Longleftarrow} & \mathcal{B}(t,b) \arrow[dl, "-\bullet q"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[r, "f\bullet -"'] & \mathcal{B}(r,b) &
\end{tikzcd}$$

即ち，$g\colon s \to a$ に対して $\mathcal{B}$ での等式

$$(f \bullet \alpha_{gpq}) * \alpha_{f,g\circ p,q} * (\alpha_{fgp} \bullet q) = \alpha_{f,g,p\circ q} * \alpha_{f\circ g,p,q}$$

を示せばよいが，これは bicategory の定義の条件 (7) から成り立つ．

条件 (4) を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet -"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, bend right=70, "-\bullet\mathrm{id}_s"'] \arrow[dr, "f\bullet -"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho^{-1}}{\Leftarrow}", shift right=4ex] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet -"'] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet -"] \arrow[d, bend right=70, "-\bullet\mathrm{id}_s"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{y(f)_{\mathrm{id}_s}}{\Swarrow}"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[d, bend right=70, "-\bullet\mathrm{id}_s"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, "\overset{\rho^{-1}}{\Leftarrow}", shift right=2ex] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "f\bullet -"'] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $g\colon s \to a$ に対して $f \bullet \rho_g^{-1} = \alpha_{f,g,\mathrm{id}_s} * \rho_{f\circ g}^{-1}$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
(f\circ g)\circ \mathrm{id}_s \arrow[rr, "\alpha_{f,g,\mathrm{id}_s}"] \arrow[dr, "\rho_{f\circ g}"'] & & f\circ(g\circ\mathrm{id}_s) \arrow[dl, "f\bullet\rho_g"] \\
& f\circ g &
\end{tikzcd}$$

これは補題 8 より成り立つ． □

更に $\beta\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ の 2-morphism とすると，$s \in \mathcal{B}$ に対して

$$y(\beta)_s := M^{sab}(\beta, -) = \beta \bullet -\colon f \bullet - \Rightarrow g \bullet -$$

は自然変換である．

**命題 31.** $y(\beta)\colon y(f) \Rrightarrow y(g)\colon y(a) \Rightarrow y(b)$ は modification である．

**証明.** 1-morphism $p\colon t \to s$ に対して次の自然変換の等式を示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "y(f)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "y(f)_p \Swarrow"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "y(f)_t"] \arrow[r, bend right, "y(g)_t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow y(\beta)_t"] & \mathcal{B}(t,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "y(f)_s"] \arrow[r, bend right, "y(g)_s"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow y(\beta)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "y(g)_p \Swarrow"] & \mathcal{B}(s,b) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "y(g)_t"'] & \mathcal{B}(t,b)
\end{tikzcd}$$

即ち $h \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して $\mathcal{B}$ での等式

$$(\beta \bullet (h \circ p)) * \alpha_{fhp} = \alpha_{ghp} * ((\beta \bullet h) \bullet p)$$

を示せばよいが，これは $\alpha$ が自然変換であるから

$$\begin{tikzcd}
(f \circ h) \circ p \arrow[r, "\alpha_{fhp}"] \arrow[d, "(\beta\bullet h)\bullet p"'] & f \circ (h \circ p) \arrow[d, "\beta\bullet(h\circ p)"] \\
(g \circ h) \circ p \arrow[r, "\alpha_{ghp}"'] & g \circ (h \circ p)
\end{tikzcd}$$

が可換となり，成り立つ. □

**定理 32.** 上記で定めた $y(a), y(f), y(\beta)$ は pseudofunctor $y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ を与える．これを米田埋込と呼ぶ.

**証明.** まず $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $y\colon \mathcal{B}(a,b) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b))$ は明らかに関手となる．そこで pseudofunctor の残りの条件を確認していく.

※ そのためにはまず $\varphi^{abc}$ と $\psi^{a}$ を定義しなければならない．$\varphi^{abc}$ は次の自然同型であった.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "y\times y"'] \arrow[dr, "M^{abc}"] & \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(b),y(c)) \times \widehat{\mathcal{B}}(y(a),y(b)) \arrow[dr, "M^{y(a)y(b)y(c)}"'] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\varphi^{abc}}"] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "y"] \\
 & \widehat{\mathcal{B}}(y(a),y(c)) &
\end{tikzcd}$$

よって $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して $\varphi^{abc}_{gf}\colon y(g) \circ y(f) \Rrightarrow y(g \circ f)$ は

modification である．$y$ の定義より，$s \in \mathcal{B}$ に対して

$$(\varphi^{abc}_{gf})_s \colon (g \bullet -) \circ (f \bullet -) \Rightarrow (g \circ f) \bullet - \colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,c)$$

は自然変換で，$h \colon s \to a$ に対して

$$((\varphi^{abc}_{gf})_s)_h \colon g \circ (f \circ h) \Rightarrow (g \circ f) \circ h \colon s \to c$$

は $\mathcal{B}$ の 2-morphism である．また $\psi^a \colon \mathrm{id}_{y(a)} \Rrightarrow y(\mathrm{id}_a) \colon y(a) \Rightarrow y(a)$ は modification $\mathrm{id}_{y(a)} \Rrightarrow \mathrm{id}_a \bullet -$ である．よって $s \in \mathcal{B}$ に対して $\psi^a_s \colon \mathrm{id} \Rightarrow \mathrm{id}_a \bullet - \colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,a)$ は自然変換である．

$s \xrightarrow{h} a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して $((\varphi_{gf})_s)_h := (\alpha_{gfh})^{-1}$ と定義する．$\alpha$ が自然同型だから $(\varphi_{gf})_s$ も自然同型である．

$\varphi_{gf} \colon y(g) \mathbin{\hat{\circ}} y(f) \Rrightarrow y(g \circ f) \colon y(a) \Rightarrow y(c)$ は同型な modification である．

$\because$) 1-morphism $p \colon t \to s$ に対して次の自然変換の等式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "g\bullet-"] \arrow[d, "-\bullet p"] & & & & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "g\bullet-"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow (\varphi_{gf})_s"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[dd, "-\bullet p"'] \arrow[r, phantom, "y(f)_p \Swarrow"] & \mathcal{B}(t,b) \arrow[dr, "g\bullet-"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow (\varphi_{gf})_t"] & \mathcal{B}(s,c) \arrow[dd, "-\bullet p"] \arrow[l, phantom, "y(g)_p \Swarrow"'] & & \mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "f\bullet-"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)\bullet-"'] \arrow[dd, "-\bullet p"'] \arrow[ddrr, phantom, "y(g\circ f)_p \Swarrow"] & & \mathcal{B}(s,c) \arrow[dd, "-\bullet p"] \\
& {} & & = & & & \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[uur, "f\bullet-"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)\bullet-"'] & & \mathcal{B}(t,c) & & \mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)\bullet-"'] & & \mathcal{B}(t,c)
\end{tikzcd}$$

即ち $h \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して $\alpha^{-1}_{g,f,h\circ p} * (g \bullet \alpha_{fhp}) * \alpha_{g,f\circ h,p} = \alpha_{g\circ f,h,p} * (\alpha^{-1}_{gfh} \bullet p)$ を示せばよいが，それは bicategory の定義の条件 (7) から成り立つ．

$\varphi$ は自然同型である．

$\because$) $\beta \colon f \Rightarrow f' \colon a \to b$，$\gamma \colon g \Rightarrow g' \colon b \to c$ とする．次が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
y(g) \mathbin{\hat{\circ}} y(f) \arrow[r, "\varphi_{gf}"] \arrow[d, "y(\gamma)\mathbin{\hat{\bullet}}y(\beta)"'] & y(g \circ f) \arrow[d, "y(\gamma\bullet\beta)"] \\
y(g') \mathbin{\hat{\circ}} y(f') \arrow[r, "\varphi_{g'f'}"'] & y(g' \circ f')
\end{tikzcd}$$

即ち $s \in \mathcal{B}$ に対して，自然変換の図式

$$\begin{tikzcd}
(g \bullet -) \circ (f \bullet -) \arrow[r, "(\varphi_{gf})_s"] \arrow[d, "y(\gamma)_s \bullet y(\beta)_s"'] & (g \circ f) \bullet - \arrow[d, "y(\gamma \bullet \beta)_s"] \\
(g' \bullet -) \circ (f' \bullet -) \arrow[r, "(\varphi_{g'f'})_s"'] & (g' \circ f') \bullet -
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよい．故に，$k \colon s \to a$ に対して

$$\begin{tikzcd}
g \circ (f \circ k) \arrow[r, "\alpha_{gfk}^{-1}"] \arrow[d, "\gamma \bullet (\beta \bullet k)"'] & (g \circ f) \circ k \arrow[d, "(\gamma \bullet \beta) \bullet k"] \\
g' \circ (f' \circ k) \arrow[r, "\alpha_{g'f'k}^{-1}"'] & (g' \circ f') \circ k
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよい．これは $\alpha$ が自然同型であることから明らか.

$f \colon s \to a$ に対して $(\psi_s^a)_f := \lambda_f^{-1} \colon f \Rightarrow \mathrm{id} \circ f$ と置く．$\lambda$ が自然同型だから，$\psi_s^a$ も自然同型である．$\psi^a \colon \mathrm{id}_{y(a)} \Rrightarrow \mathrm{id}_a \bullet -$ は modification である.

$\because$) $p \colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "- \bullet p"'] & \mathcal{B}(s,a) \arrow[d, "- \bullet p"] \arrow[dl, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & & \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}", ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a \bullet -"', ""{name=B, above}] \arrow[d, "- \bullet p"'] & \mathcal{B}(s,a) \arrow[d, "- \bullet p"] \arrow[dl, Rightarrow, "(\mathrm{id}_a \bullet -)_p"'] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}", ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a \bullet -"', ""{name=D, above}] & \mathcal{B}(t,a) & & \mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}_a \bullet -"'] & \mathcal{B}(t,a)
\arrow[from=A, to=B, Rightarrow, "\psi_s^a"]
\arrow[from=C, to=D, Rightarrow, "\psi_t^a"]
\arrow[from=1-2, to=2-4, phantom, "="]
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $g \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して $\lambda_{g \circ p}^{-1} = \alpha_{\mathrm{id}_a, g, p} * (\lambda_g^{-1} \bullet p)$ を示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_a \circ g) \circ p \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{id}_a, g, p}"] \arrow[dr, "\lambda_g \bullet p"'] & & \mathrm{id}_a \circ (g \circ p) \arrow[dl, "\lambda_{g \circ p}"] \\
& g \circ p &
\end{tikzcd}$$

これは補題 9 より成り立つ.

条件 (5) を示す．$a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ に対して

$$\begin{tikzcd}
(y(h) \mathbin{\widehat{\circ}} y(g)) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \arrow[r, "\varphi_{hg} \widehat{\bullet} y(f)"] \arrow[d, "\alpha"'] & y(h \circ g) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f) \arrow[r, "\varphi_{h \circ g, f}"] & y((h \circ g) \circ f) \arrow[d, "y(\alpha)"] \\
y(h) \mathbin{\widehat{\circ}} (y(g) \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) \arrow[r, "y(h) \widehat{\bullet} \varphi_{gf}"'] & y(h) \mathbin{\widehat{\circ}} y(g \circ f) \arrow[r, "\varphi_{h, g \circ f}"'] & y(h \circ (g \circ f))
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．即ち $s \in \mathcal{B}$，$k \colon s \to a$ に対して

$$\begin{tikzcd}
h \circ (g \circ (f \circ k)) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{h,g,f \circ k}"] \arrow[d, equal] & (h \circ g) \circ (f \circ k) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{h \circ g, f, k}"] & ((h \circ g) \circ f) \circ k \arrow[d, "\alpha_{hgf} \bullet k"] \\
h \circ (g \circ (f \circ k)) \arrow[r, "h \bullet \alpha^{-1}_{gfk}"'] & h \circ ((g \circ f) \circ k) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{h, g \circ f, k}"'] & (h \circ (g \circ f)) \circ k
\end{tikzcd}$$

が可換となればよいが，それは bicategory の定義の条件 (7) から分かる．

条件 (6) を示す．まず $f \colon a \to b$ に対して次の等号を示す．

$$\begin{tikzcd}
& y(b) \arrow[dr, "y(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(b)}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \varphi_{\mathrm{id}_b, f}"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\psi \Swarrow"] & & & y(b) \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(b)}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow \lambda_{y(f)}"] & \\
y(a) \arrow[ur, "y(f)"] \arrow[rr, "y(\mathrm{id}_b \circ f)"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow y(\lambda_f)"] & & y(b) \arrow[r, phantom, "="] & y(a) \arrow[ur, "y(f)"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] & & y(b)
\end{tikzcd}$$

そのためには $s \in \mathcal{B}$ に対して次の自然変換の等式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, "\mathrm{id}_b \bullet -"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,b)}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow (\varphi_{\mathrm{id}_b, f})_s"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\psi_s \Swarrow"] & & & \mathcal{B}(s,b) \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,b)}"] \arrow[d, phantom, "\Vert"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "f \bullet -"] \arrow[rr, "(\mathrm{id}_b \circ f) \bullet -"] \arrow[rr, bend right=50, "f \bullet -"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow \lambda_f \bullet -"] & & \mathcal{B}(s,b) \arrow[r, phantom, "="] & \mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, "f \bullet -"] \arrow[rr, bend right=50, "f \bullet -"'] & & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}$$

即ち，$g\colon s \to a$ に対して $(\lambda_f \bullet g) * \alpha^{-1}_{\mathrm{id}_b, f, g} * \lambda^{-1}_{f\circ g} = \mathrm{id}$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{id}_b \circ f) \circ g \arrow[rr, "\alpha_{\mathrm{id}_b, f, g}"] \arrow[dr, "\lambda_f \bullet g"'] & & \mathrm{id}_b \circ (f \circ g) \arrow[dl, "\lambda_{f\circ g}"] \\
& f \circ g &
\end{tikzcd}$$

これは補題 9 より成り立つ．$\rho$ についても同様で，$f\colon a \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
& y(a) \arrow[dr, "y(f)"] & & & & y(a) \arrow[dr, "y(f)"] & \\
y(a) \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(a)}"] \arrow[ur, "y(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Downarrow \psi"] \arrow[rr, "y(f\circ \mathrm{id}_a)"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow y(\rho_f)"] & \arrow[phantom, "\varphi_{f,\mathrm{id}_a} \Downarrow"] & y(b) & = & y(a) \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{y(a)}"] \arrow[rr, bend right=50, "y(f)"'] & \arrow[phantom, "\Downarrow \rho_{y(f)}"] & y(b)
\end{tikzcd}$$

即ち $s \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(s,a) \arrow[dr, "f\bullet -"] & & & & \mathcal{B}(s,a) \arrow[dr, "f\bullet -"] & \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,a)}"] \arrow[ur, "\mathrm{id}_a \bullet -"'] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Downarrow \psi_s"] \arrow[rr, "(f\circ \mathrm{id}_a)\bullet -"] \arrow[rr, bend right=50, "f\bullet -"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow \rho_f \bullet -"] & \arrow[phantom, "(\varphi_{f,\mathrm{id}_a})_s \Downarrow"] & \mathcal{B}(s,b) & = & \mathcal{B}(s,a) \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{\mathcal{B}(s,a)}"] \arrow[rr, bend right=50, "f\bullet -"'] & \arrow[phantom, "\parallel"] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．従って $g\colon s \to a$ に対して $(\rho_f \bullet g) * \alpha^{-1}_{f, \mathrm{id}_a, g} * (f \bullet \lambda_g^{-1}) = \mathrm{id}$ を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
(f \circ \mathrm{id}_a) \circ g \arrow[rr, "\alpha_{f, \mathrm{id}_a, g}"] \arrow[dr, "\rho_f \bullet g"'] & & f \circ (\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[dl, "f \bullet \lambda_g"] \\
& f \circ g &
\end{tikzcd}$$

これは bicategory の定義の条件 (8) である． □

米田埋込が定義できたので米田の補題を証明する．

**定理 33** (米田の補題)**.** $\mathcal{B}$ を bicategory，$P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$ を pseudofunctor とするとき，$a \in \mathcal{B}$ に対して圏同値 $\theta_a\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P) \to Pa$ が存在する．

**証明**. 関手 $\theta_a\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)\to Pa$ を以下のように定める．

- $\sigma\colon y(a)\Rightarrow P$ に対して $\theta_a(\sigma):=\sigma_a(\mathrm{id}_a)$.
- $\Gamma\colon \sigma\Rrightarrow\tau\colon y(a)\Rightarrow P$ に対して $\theta_a(\Gamma):=(\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a}$.

$$\begin{tikzcd}
y(a) \arrow[r, Rightarrow, shift left=2, "\sigma"] \arrow[r, Rightarrow, shift right=2, "\tau"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma"] & P
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, shift left=2, "\sigma_a"] \arrow[r, shift right=2, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] & Pa
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\sigma_a(\mathrm{id}_a) \arrow[d, "(\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a}"] \\
\tau_a(\mathrm{id}_a)
\end{tikzcd}$$

これが圏同値を与えることを示せばよい．そこで関手 $\omega_a\colon Pa\to\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ を定義する．

> ※ $\omega_a\colon Pa\to\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ を関手とすると対象 $u\in Pa$ に対して $\omega_a(u)\colon y(a)\Rightarrow P$ は pseudonatural transformation である．即ち $\mathcal{B}$ の 1-morphism $p\colon t\to s$ に対して $\omega_a(u)_s\colon \mathcal{B}(s,a)\to Ps$ は関手で，$\omega_a(u)_p$ は自然同型
>
> $$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(s,a) \arrow[ld, "\omega_a(u)_s"'] \arrow[rd, "-\bullet p"] & \\
Ps \arrow[rd, "Pp"'] & \underset{\omega_a(u)_p}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}(t,a) \arrow[ld, "\omega_a(u)_t"] \\
& Pt &
\end{tikzcd}$$
>
> である．つまり $g\colon s\to a$ に対して $(\omega_a(u)_p)_g\colon Pp(\omega_a(u)_s(g))\to\omega_a(u)_t(g\circ p)$ は $Pt$ の射である．

まず $a,s\in\mathcal{B}$，$u\in Pa$ に対して関手 $\omega_a(u)_s\colon\mathcal{B}(s,a)\to Ps$ を

- $g\colon s\to a$ に対して $\omega_a(u)_s(g):=Pg(u)$.
- $\beta\colon g\Rightarrow h\colon s\to a$ に対して $\omega_a(u)_s(\beta):=(P\beta)_u$.

$$\begin{tikzcd}
a & s \arrow[l, bend right, "g"'] \arrow[l, bend left, "h"] \arrow[l, phantom, "\Downarrow\beta"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
u\in Pa \arrow[r, bend left, "Pg"] \arrow[r, bend right, "Ph"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow P\beta"] & Ps
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Pg(u) \arrow[d, "(P\beta)_u"] \\
Ph(u)
\end{tikzcd}$$

により定義することができる．

> $\because$) $P$ が pseudofunctor だから $P\colon\mathcal{B}(s,a)\to\mathbf{CAT}(Pa,Ps)$ は関手である．故に $P(\gamma*\beta)=P\gamma*P\beta$，$P(\mathrm{id})=\mathrm{id}$ となるので $\omega_a(u)_s(\gamma*\beta)=\omega_a(u)_s(\gamma)\circ\omega_a(u)_s(\beta)$ と $\omega_a(u)_s(\mathrm{id})=\mathrm{id}$ が分かる．

これにより $\omega_a(u)\colon y(a) \Rightarrow P$ は pseudonatural transformation になる．

∵) 1-morphism $g\colon s \to a$ と $p\colon t \to s$ に対して $(\omega_a(u)_p)_g := (\varphi_{pg})_u$ と定義する．このとき $\omega_a(u)_p\colon Fp \circ \omega_a(u)_s \Rightarrow \omega_a(u)_t \circ (- \bullet p)$ は自然変換である．

∵) $\beta\colon g \Rightarrow h\colon s \to a$ に対して，圏 $Pt$ の図式

$$\begin{tikzcd}
Pp(\omega_a(u)_s(g)) \arrow[r, "(\omega_a(u)_p)_g"] \arrow[d, "Pp(\omega_a(u)_b(\beta))"'] & \omega_a(u)_t(g \circ p) \arrow[d, "\omega_a(u)_c(\beta \bullet p)"] \\
Pp(\omega_a(u)_s(h)) \arrow[r, "(\omega_a(u)_p)_h"'] & \omega_a(u)_t(h \circ p)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．そのためには定義より

$$\begin{tikzcd}
Pp(Pg(u)) \arrow[r, "(\varphi_{pg})_u"] \arrow[d, "Pp((F\beta)_u)"'] & P(g \circ p)(u) \arrow[d, "P(\beta \bullet p)_u"] \\
Pp(Ph(u)) \arrow[r, "(\varphi_{ph})_u"'] & P(h \circ p)(u)
\end{tikzcd}$$

の可換性，即ち

$$\begin{tikzcd}
Pp \circ Pg \arrow[r, "\varphi_{pg}"] \arrow[d, "Pp \bullet P\beta"'] & P(g \circ p) \arrow[d, "P(\beta \bullet p)"] \\
Pp \circ Ph \arrow[r, "\varphi_{ph}"'] & P(h \circ p)
\end{tikzcd}$$

の可換性を示せばよいが，これは $\varphi$ が自然変換だから成り立つ．

pseudonatural transformation の条件 (3) を示す．つまり $r \xrightarrow{q} t \xrightarrow{p} s$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_s"] \arrow[dr, "-\bullet p"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] & & Ps \arrow[dr, "Pp"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=12pt, "\omega_a(u)_p"] & \\
\overset{\alpha_{-pq}}{\Longleftarrow} & \mathcal{B}(t,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_t"] \arrow[dl, "-\bullet q"'] & & Pt \arrow[dl, "Pq"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_r"'] & & Pr \arrow[from=2-4, to=3-1, phantom, "\overset{\omega_a(u)_q}{\Leftarrow}"] &
\end{tikzcd}$$

$$=$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_s"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(p\circ q)"'] & & Ps \arrow[dr, "Pp"] \arrow[dd, bend right=40, "P(p\circ q)"'] \arrow[from=1-3, to=3-1, Rightarrow, shorten=30pt, "\omega_a(u)_{p\circ q}"'] & \\
& & \overset{\varphi_{qp}}{\Longleftarrow} & Pt \arrow[dl, "Pq"] \\
\mathcal{B}(r,a) \arrow[rr, "\omega_a(u)_r"'] & & Pr &
\end{tikzcd}$$

を示す．即ち $g \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して，圏 $Pr$ での等式

$$\omega_a(u)_r(\alpha_{gpq}) \circ (\omega_a(u)_q)_{g \circ p} \circ Pq((\omega_a(u)_p)_g) = (\omega_a(u)_{p \circ q})_g \circ (\varphi_{qp})_{\omega_a(u)_s(g)}$$

を示す．定義より

$$\begin{aligned} \omega_a(u)_r(\alpha_{gpq}) &= (P\alpha_{gpq})_u \\ (\omega_a(u)_q)_{g \circ p} &= (\varphi_{q,g \circ p})_u \\ Pq((\omega_a(u)_p)_g) &= Pq((\varphi_{pg})_u) \\ (\omega_a(u)_{p \circ q})_g &= (\varphi_{p \circ q,g})_u \\ (\varphi_{qp})_{\omega_a(u)_s(g)} &= (\varphi_{qp})_{Pg(u)} \end{aligned}$$

であるが，$P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Cat}$ が pseudofunctor だから条件 (5) より

$$P(\alpha_{gpq}) * \varphi_{q,g \circ p} * (Pq \bullet \varphi_{pg}) = \varphi_{p \circ q,g} * (\varphi_{qp} \bullet Pg)$$

となるので (3) が成り立つ．

条件 (4) を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して次の自然変換の等式

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, bend right=70, "-\bullet\mathrm{id}_s"', ""{name=L}] \arrow[dr, "\omega_a(u)_s"] & Ps \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ps}"] \arrow[dl, phantom, "/\!/" near start] \\ \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/" near start] \arrow[u, phantom, shift right=4ex, "\overset{\psi^s}{\Leftarrow}"] & Ps \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, bend right=70, "-\bullet\mathrm{id}_s"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\omega_a(u)_{\mathrm{id}_s}}{\swarrow}"] & Ps \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ps}"] \arrow[d, bend right=70, "P(\mathrm{id}_s)"'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi^s}{\Leftarrow}"] \\ \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\omega_a(u)_s"'] & Ps \end{tikzcd}$$

を示す．即ち $g\colon s \to a$ に対して $\omega_a(u)_s(\rho_g^{-1}) = (\omega_a(u)_{\mathrm{id}_s})_g \circ \psi^s_{\omega_a(u)_s(g)}$ を示す．定義より

$$\begin{aligned} \omega_a(u)_s(\rho_g^{-1}) &= (F\rho_g^{-1})_u \\ (\omega_a(u)_{\mathrm{id}_a})_g &= (\varphi_{\mathrm{id}_a,g})_u \\ \psi^s_{\omega_a(u)_s(g)} &= \psi^s_{Fg(u)} \end{aligned}$$

であるが，$P$ が pseudofunctor だから条件 (6) より $P(\rho_g) * \varphi_{\mathrm{id},g} * (\psi^s \bullet Fg) = \mathrm{id}$ となり，(4) が成り立つ．

$\omega_a\colon Pa \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ が関手となることを示そう．そのためには $Pa$ の射 $k\colon u \to v$ に対して modification $\omega_a(k)\colon \omega_a(u) \Rrightarrow \omega_a(v)\colon y(a) \Rightarrow P$ を定義する必要がある．

$g\colon s \to a$ に対して，$Ps$ の射 $(\omega_a(k)_s)_g\colon (\omega_a(u)_s)(g) = Pg(u) \to Pg(v) = (\omega_a(v)_s)(g)$ を $(\omega_a(k)_s)_g := Pg(k)$ で定める．$\omega_a(k)_s\colon \omega_a(u)_s \Rightarrow \omega_a(v)_s\colon \mathcal{B}(s,a) \to Ps$ は自然変換

である．

∵) $\beta\colon g \Rightarrow h$ に対して次が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\omega_a(u)_s(g) \arrow[r, "(\omega_a(k)_s)_g"] \arrow[d, "\omega_a(u)_s(\beta)"'] & \omega_a(v)_s(g) \arrow[d, "\omega_a(v)_s(\beta)"] \\
\omega_a(u)_s(h) \arrow[r, "(\omega_a(k)_s)_h"'] & \omega_a(v)_s(h)
\end{tikzcd}$$

これは定義より

$$\begin{tikzcd}
Pg(u) \arrow[r, "Pg(k)"] \arrow[d, "(P\beta)_u"'] & Pg(v) \arrow[d, "(P\beta)_v"] \\
Ph(u) \arrow[r, "Pg(h)"'] & Ph(v)
\end{tikzcd}$$

となるから，$P\beta\colon Pg \Rightarrow Ph$ が自然変換であることより可換である．

これにより $\omega_a(k)\colon \omega_a(u) \Rrightarrow \omega_a(v)\colon y(a) \Rightarrow P$ は modification となる．

∵) $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\omega_a(u)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] & Ps \arrow[d, "Pp"] \arrow[dl, Rightarrow, "\omega_a(u)_p"'] & & \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\omega_a(u)_s", ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, "\omega_a(v)_s"', ""{name=B}] \arrow[d, "-\bullet p"'] & Ps \arrow[d, "Pp"] \arrow[dl, Rightarrow, "\omega_a(v)_p"'] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "\omega_a(u)_t", ""{name=C, below}] \arrow[r, bend right, "\omega_a(v)_t"', ""{name=D}] & Pt & = & \mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "\omega_a(v)_t"'] & Pt
\arrow[Rightarrow, from=C, to=D, "\omega_a(k)_t"]
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\omega_a(k)_s"]
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $g \in \mathcal{B}(s,a)$ に対して，圏 $Pt$ での等式

$$(\omega_a(k)_t)_{g \circ p} \circ (\omega_a(u)_p)_g = (\omega_a(v)_p)_g \circ Pp((\omega_a(k)_s)_g)$$

を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}
(\omega_a(k)_t)_{g \circ p} &= P(g \circ p)(k) \\
(\omega_a(u)_p)_g &= (\varphi_{pg})_u \\
(\omega_a(v)_p)_g &= (\varphi_{pg})_v \\
Pp((\omega_a(k)_s)_g) &= Pp(Pg(k))
\end{aligned}$$

だから $P(g \circ p)(k) \circ (\varphi_{pg})_u = (\varphi_{pg})_v \circ (Pp(Pg(k)))$ を示せばよいが，これは $P$ が pseudofunctor だからよい．

このとき定義から明らかに $\omega_a \colon Pa \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P)$ は関手となる．

よって後は自然同型 $\mathrm{id} \cong \theta_a \circ \omega_a$ と $\omega_a \circ \theta_a \cong \mathrm{id}$ を定義すればよい．

※ そのような自然同型 $\Delta_a \colon \mathrm{id} \Rightarrow \theta_a \circ \omega_a \colon Pa \to Pa$ が存在したとすると，対象 $u \in Pa$ に対して $(\Delta_a)_u \colon u \to \theta_a(\omega_a(u))$ は $Pa$ の射である．定義より $\theta_a(\omega_a(u)) = \omega_a(u)_a(\mathrm{id}_a) = P(\mathrm{id}_a)(u)$ となる．

まず $a \in \mathcal{B}$，$u \in Pa$ に対して $(\Delta_a)_u := \psi_u \colon u \to P(\mathrm{id}_a)(u)$ と定義する．$\psi$ は自然同型だから $\Delta_a \colon \mathrm{id} \Rightarrow \theta_a \circ \omega_a$ も自然同型である．

次に自然同型 $\Sigma_a \colon \omega_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id}$ を定義する．

※ そのような自然同型 $\Sigma_a \colon \omega_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id} \colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P)$ が存在したとする．$\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P)$ に対して

$$(\Sigma_a)_\sigma \colon \omega_a \circ \theta_a(\sigma) \Rrightarrow \sigma \colon y(a) \Rightarrow P$$

は modification である．よって $s \in \mathcal{B}$ に対して

$$((\Sigma_a)_\sigma)_s \colon (\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s \Rightarrow \sigma_s \colon \mathcal{B}(s, a) \to Ps$$

は自然変換である．従って $g \colon s \to a$ に対して

$$(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g \colon (\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s(g) \to \sigma_s(g)$$

は圏 $Ps$ の射である．$\theta_a$ の定義より $\omega_a \circ \theta_a(\sigma) = \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))$ であるから

$$(\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s(g) = \omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))(g) = Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a))$$

となる．また $\sigma$ は pseudonatural transformation だから自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(a,a) \arrow[ld, "\sigma_a"'] \arrow[rd, "-\bullet g"] & \\
Pa \arrow[rd, "Pg"'] & \overset{\sim}{\underset{\sigma_g}{\Rrightarrow}} & \mathcal{B}(s,a) \arrow[ld, "\sigma_s"] \\
& Ps &
\end{tikzcd}$$

が与えられている．

$a, s \in \mathcal{B}$, $g\colon s \to a$, $\sigma\colon y(a) \Rightarrow P$ に対して $(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g$ を合成

$$(\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s(g) = Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \xrightarrow{(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}} \sigma_s(\mathrm{id}\circ g) \xrightarrow{\sigma_s(\lambda_g)} \sigma_s(g)$$

で定義する．$((\Sigma_a)_\sigma)_s\colon (\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s \Rightarrow \sigma_s$ は自然同型である．

$\because)$ $(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g$ は同型射である．よって $\beta\colon g \Rightarrow h\colon s \to a$ に対して，圏 $Ps$ の図式

$$\begin{tikzcd}
(\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s(g) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g"] \arrow[d, "\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a))_s(\beta)"'] & \sigma_s(g) \arrow[d, "\sigma_s(\beta)"] \\
(\omega_a \circ \theta_a(\sigma))_s(h) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_h"'] & \sigma_s(h)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．それには定義より

$$\begin{tikzcd}
Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "(P\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}\circ g) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_g)"] \arrow[d, "\sigma_s(\mathrm{id}\bullet\beta)"] & \sigma_s(g) \arrow[d, "\sigma_s(\beta)"] \\
Ph(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_h)_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}\circ h) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_h)"'] & \sigma_s(h)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよいが，これは $\sigma_g$ と $\lambda_g$ が $g$ について自然だから明らか．

$(\Sigma_a)_\sigma\colon \omega_a \circ \theta_a(\sigma) \Rrightarrow \sigma$ は同型な modification である．

$\because)$ $p\colon t \to s$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "(\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] & Ps \arrow[d, "Pp"] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow (\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_p"] & & \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "(\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_s"] \arrow[r, bend right, "\sigma_s"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow((\Sigma_a)_\sigma)_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] & Ps \arrow[d, "Pp"] \arrow[dl, phantom, "\sigma_p \Swarrow"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "(\omega_a\circ\theta_a(\sigma))_t"] \arrow[r, bend right, "\sigma_t"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow((\Sigma_a)_\sigma)_t"] & Pt & = & \mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend right, "\sigma_t"'] & Pt
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $g\colon s \to a$ に対して，圏 $Pt$ での等式

$$(((\Sigma_a)_\sigma)_t)_{g\circ p} \circ ((\omega_a(\theta_a(\sigma)))_p)_g = (\sigma_p)_g \circ Pp((((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g)$$

を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}(((\Sigma_a)_\sigma)_t)_{g\circ p} &= \sigma_t(\lambda_{g\circ p}) \circ (\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a}\\ ((\omega_a(\theta_a(\sigma)))_p)_g &= ((\omega_a(\sigma_a(\mathrm{id}_a)))_p)_g = (\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}\\ Pp((((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g) &= Pp(\sigma_s(\lambda_g) \circ (\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})\end{aligned}$$

だから，圏 $Pt$ での等式

$$\sigma_t(\lambda_{g\circ p}) \circ (\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)} = (\sigma_p)_g \circ Pp(\sigma_s(\lambda_g)) \circ Pp((\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})$$

を示せばよい．まず $\sigma_p \colon Pp \circ \sigma_s \Rightarrow \sigma_t \circ (- \bullet p)$ が自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
Pp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a\circ g}"] \arrow[d, "Pg(\sigma_s(\lambda_g))"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ g) \circ p) \arrow[d, "\sigma_t(\lambda_g \bullet p)"] \\
Pp(\sigma_s(g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_g"'] & \sigma_t(g \circ p)
\end{tikzcd}$$

が可換である．次に $\sigma \colon y(a) \Rightarrow P$ が pseudonatural transformation だから自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet g"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(g\circ p)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_g}{\Swarrow}"] & Pa \arrow[d, "Pg"] & & \mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(g\circ p)"'] \arrow[ddr, phantom, "\overset{\sigma_{g\circ p}}{\Swarrow}"] & Pa \arrow[dr, "Pg"] \arrow[dd, bend right=60, "P(g\circ p)"'] & \\
\overset{\alpha_{-gp}}{\Leftarrow}\ \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, "\sigma_s"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_p}{\Swarrow}"] & Ps \arrow[d, "Pp"] & = & & \overset{\varphi_{pg}}{\Leftarrow} & Ps \arrow[dl, "Pp"] \\
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] & Pt & & \mathcal{B}(t,a) \arrow[r, "\sigma_t"'] & Pt &
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．よって $\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば

$$\begin{tikzcd}
Pp(Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[r, "(\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Pp((\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})"'] & P(g \circ p)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{g\circ p})_{\mathrm{id}_a}"] \\
 & \sigma_t(\mathrm{id}_a \circ (g \circ p)) \\
Pp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a\circ g}"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ g) \circ p) \arrow[u, "\sigma_t(\alpha_{\mathrm{id}_a,g,p})"']
\end{tikzcd}$$

が可換となる．この二つと補題 9 を組み合わせて可換図式

$$\begin{tikzcd}
Pp(Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[rr, "(\varphi_{pg})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Pp((\sigma_g)_{\mathrm{id}_a})"'] & & P(g \circ p)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{g \circ p})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& & \sigma_t(\mathrm{id}_a \circ (g \circ p)) \arrow[dd, "\sigma_t(\lambda_{g \circ p})"] \\
Pp(\sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g)) \arrow[r, "(\sigma_p)_{\mathrm{id}_a \circ g}"] \arrow[d, "Pg(\sigma_s(\lambda_g))"'] & \sigma_t((\mathrm{id}_a \circ g) \circ p) \arrow[ur, "\sigma_t(\alpha_{\mathrm{id}_a, g, p})"] \arrow[dr, "\sigma_t(\lambda_g \circ p)"'] & \\
Pp(\sigma_s(g)) \arrow[rr, "(\sigma_p)_g"'] & & \sigma_t(g \circ p)
\end{tikzcd}$$

を得る．一番外側が今示したかった可換性である．

$\Sigma_a \colon \omega_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id} \colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P)$ は自然同型である．

$\because$) $\Phi \colon \sigma \Rrightarrow \tau \colon y(a) \Rightarrow P$ を modification とする．次の可換図式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\omega_a(\theta_a(\sigma)) \arrow[r, "(\Sigma_a)_\sigma"] \arrow[d, "\omega_a(\theta_a(\Phi))"'] & \sigma \arrow[d, "\Phi"] \\
\omega_a(\theta_a(\tau)) \arrow[r, "(\Sigma_a)_\tau"'] & \tau
\end{tikzcd}$$

即ち $s \in \mathcal{B}$，$g \colon s \to a$ に対して，圏 $Ps$ の図式

$$\begin{tikzcd}
\omega_a(\theta_a(\sigma))_s(g) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g"] \arrow[d, "(\omega_a(\theta_a(\Phi))_s)_g"'] & \sigma_s(g) \arrow[d, "(\Phi_s)_g"] \\
\omega_a(\theta_a(\tau))_s(g) \arrow[r, "(((\Sigma_a)_\tau)_s)_g"'] & \tau_s(g)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}
(((\Sigma_a)_\sigma)_s)_g &= \sigma_s(\lambda_g) \circ (\sigma_g)_{\mathrm{id}_a} \\
(((\Sigma_a)_\tau)_s)_g &= \tau_s(\lambda_g) \circ (\tau_g)_{\mathrm{id}_a} \\
(\omega_a(\theta_a(\Phi))_s)_g &= (\omega_a((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})_s)_g = Pg((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}$$

だから

$$\begin{tikzcd}
Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "Pg((\Phi_a)_{\mathrm{id}_a})"'] & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[r, "\sigma_s(\lambda_g)"] \arrow[d, "(\Phi_s)_{\mathrm{id}_a \circ g}"'] & \sigma_s(g) \arrow[d, "(\Phi_s)_g"] \\
Pg(\tau_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\tau_g)_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_s(\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[r, "\tau_s(\lambda_g)"'] & \tau_s(g)
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．左の四角は $\Phi\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ が modification だから

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet g"'] & Pa \arrow[d, "Pg"] & & \mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"{name=A1}] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'{name=A2}] \arrow[d, "-\bullet g"'] & Pa \arrow[d, "Pg"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_s"{name=S1}] \arrow[r, bend right, "\tau_s"'{name=S2}] \arrow[from=1-2, Rightarrow, "\sigma_g"'] & Ps & = & \mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend right, "\tau_s"'] \arrow[from=1-5, Rightarrow, "\tau_g"'] & Ps
\arrow[Rightarrow, from=S1, to=S2, "\Phi_s"]
\arrow[Rightarrow, from=A1, to=A2, "\Phi_a"]
\end{tikzcd}$$

となり成り立つ．右の四角は $\Phi_s\colon \sigma_s \Rightarrow \tau_s$ が自然変換だから成り立つ．

以上により定理の証明が終わった． □

**系 34.** $\mathcal{B}$ を bicategory とする．$y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ は局所圏同値である．

**証明**. 米田の補題 (定理 33) により $\widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b)) \simeq y(b)(a) = \mathcal{B}(a,b)$ である．この圏同値は，米田の補題の証明での記号を使うと $\omega_b\colon \mathcal{B}(a,b) \to \widehat{\mathcal{B}}(y(a), y(b))$ で与えられる．故に関手として $\omega_b = y$ となっていることを示せばよい．

まず $f\colon a \to b$ に対して $\omega_b(f) = y(f)$ を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して $\omega_b(f)_s$ と $y(f)$ は関手 $\mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$ である．そこで $\beta\colon g \Rightarrow h\colon s \to a$ とすると $\omega_b$ の定義より

$$\begin{aligned}
\omega_b(f)_s(g) &= y(b)(g)(f) = f \circ g = y(f)(g) \\
\omega_b(f)_s(\beta) &= (y(b)(\beta))_f = f \bullet \beta = y(f)(\beta)
\end{aligned}$$

である．よって関手として $\omega_b(f) = y(f)$ となる．

次に $\beta\colon f \Rightarrow f'\colon a \to b$ に対して $\omega_b(\beta) = y(\beta)$ を示す．$s \in \mathcal{B}$ に対して $\omega_b(\beta)_s$ と $y(\beta)$ は自然変換 $f \bullet - \Rightarrow f' \bullet -$ である．そこで $g\colon s \to a$ とすると

$$(\omega_b(\beta)_s)_g = (y(b)(g))(\beta) = \beta \bullet g = (y(\beta)_s)_g$$

であるから $\omega_b(\beta) = y(\beta)$ となる． □

通常の圏論と同様に，この圏同値 $\theta_a\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(a), P) \Rightarrow Pa$ は $a$ について「自然」である．それを示すため，まず $\widehat{\mathcal{B}}(y(-), P)$ が pseudofunctor であることを示そう．

**命題 35.** $\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$，$G\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．このとき $\mathcal{A}$ の 2-morphism $\beta\colon f\Rightarrow g\colon a\to b$ に対して

- $GF(a) := G(F(a))$
- $GF(f) := G(F(f))$
- $GF(\beta) := G(F(\beta))$

と定義すれば pseudofunctor $GF\colon \mathcal{A}\to\mathcal{C}$ が得られる．

証明.

※ そのためには自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "GF\times GF"'] \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{C}(GFb,GFc)\times\mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[dr, "M"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi^{abc}}{\Longrightarrow}} & \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "GF"] \\
& \mathcal{C}(GFa,GFc) &
\end{tikzcd}$$

と同型 $\psi^a\colon \mathrm{id}_{GFa}\Rightarrow GF(\mathrm{id}_a)$ を定義しなければならない．もしこのような $\varphi^{abc}$ が存在すれば，$a\xrightarrow{f} b\xrightarrow{g} c$ に対して $\varphi^{abc}_{gf}\colon GF(g)\circ GF(f)\Rightarrow GF(g\circ f)$ は同型な 2-morphism である．

pseudofunctor $F\colon \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ が与える自然同型を $\varphi^F$, $\varphi^G$ と書くことにする．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[dl, "F\times F"'] \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{B}(Fb,Fc)\times\mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[dr, "M"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi^{F}}{\Longrightarrow}} & \mathcal{A}(a,c) \arrow[dl, "F"] \\
& \mathcal{B}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "G\times G"'] \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{C}(Gb,Gc)\times\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dr, "M"'] & \overset{\sim}{\underset{\varphi^{G}}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "G"] \\
& \mathcal{C}(Ga,Gc) &
\end{tikzcd}$$

この二つの合成

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[ld, "F\times F"'] \arrow[rd, "M"] & \\
 & \mathcal{B}(Fb,Fc)\times\mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[ld, "G\times G"'] \arrow[rd, "M"] & \underset{\varphi^F}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{A}(a,c) \arrow[ld, "F"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc)\times\mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[rd, "M"'] & \underset{\varphi^G}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[ld, "G"] & \\
 & \mathcal{C}(GFa,GFc) & &
\end{tikzcd}$$

を $\varphi^{GF}$ と定める．また $F,G$ が与える同型な 2-morphism を $\psi^F$，$\psi^G$ と書く．このとき $a\in\mathcal{A}$ に対して $\psi^{GF}:=G(\psi^F)*\psi^G\colon \mathrm{id}_{GFa}\Rightarrow G(\mathrm{id}_{Fa})\Rightarrow GF(\mathrm{id}_a)$ と定める．

これらが pseudofunctor の定義を満たすことを示す．まず条件 (5) を示す．即ち，$\mathcal{A}$ の 1-morphism $a\xrightarrow{f}b\xrightarrow{g}c\xrightarrow{h}d$ に対して次の $\mathcal{C}(GFa,GFd)$ での図式が可換であることを示せばよい．($\varphi$ の下付きの添え字は省略した．)

$$\begin{tikzcd}
(GFh\circ GFg)\circ GFf \arrow[rrrr, "\varphi^{GF}\bullet GFf"] \arrow[rrdd, "\varphi^G\bullet GFf"] \arrow[dddddddd, "\alpha"'] & & & & GF(h\circ g)\circ GFf \arrow[rrrr, "\varphi^{GF}"] \arrow[rrdd, "\varphi^G"'] & & & & GF((h\circ g)\circ f) \arrow[dddddddd, "GF(\alpha)"] \\
 & & & (*) & & & (*) & & \\
 & & G(Fh\circ Fg)\circ GFf \arrow[rruu, "G(\varphi^F)\bullet GFf"'] \arrow[rrd, "\varphi^G"'] & & (\varphi^G) & & G(F(h\circ g)\circ Ff) \arrow[rruu, "G(\varphi^F)"'] & & \\
 & & & & G((Fh\circ Fg)\circ Ff) \arrow[rru, "G(\varphi^F\bullet Ff)"'] \arrow[dd, "G(\alpha)"] & & & & \\
 & & (G) & & & & (F) & & \\
 & & & & G(Fh\circ(Fg\circ Ff)) \arrow[rrd, "G(Fh\bullet\varphi^F)"] & & & & \\
 & & GFh\circ G(Fg\circ Ff) \arrow[rru, "\varphi^G"] \arrow[rrdd, "GFh\bullet G(\varphi^F)"] & & (\varphi^G) & & G(Fh\circ F(g\circ f)) \arrow[rrdd, "G(\varphi^F)"'] & & \\
 & & & (*) & & & (*) & & \\
GFh\circ(GFg\circ GFf) \arrow[rruu, "GFh\bullet\varphi^G"'] \arrow[rrrr, "GFh\bullet\varphi^{GF}"'] & & & & GFh\circ GF(g\circ f) \arrow[rruu, "\varphi^G"'] \arrow[rrrr, "\varphi^{GF}"'] & & & & GF(h\circ(g\circ f))
\end{tikzcd}$$

$(*)$ の部分は $\varphi^{GF}$ の定義だからよい．$(F),(G)$ は $F,G$ が pseudofunctor だから可換である．$(\varphi^G)$ は $\varphi^G$ が自然変換であるから可換である．

条件 (6) を示す．即ち $f\colon a\to b$ に対して次の $\mathcal{C}(GFa,GFb)$ の図式が可換であること

を示す.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{GFb}\circ GFf \arrow[r, "\lambda_{GFf}"] \arrow[d, "\psi^{GF}\bullet GFf"'] & GFf & GFf\circ \mathrm{id}_{GFa} \arrow[r, "\rho_{GFf}"] \arrow[d, "GFf\bullet\psi^{GF}"'] & GFf \\
GF(\mathrm{id}_b)\circ GFf \arrow[r, "\varphi^{GF}_{\mathrm{id}_b,f}"'] & GF(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[u, "GF(\lambda_f)"'] & GFf\circ GF(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^{GF}_{f,\mathrm{id}_a}"'] & GF(f\circ \mathrm{id}_a) \arrow[u, "GF(\rho_f)"']
\end{tikzcd}$$

まず左の図式については，次の図式が可換であることを示せばよい.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{GFb}\circ GFf \arrow[r, "\lambda_{GFf}"] \arrow[d, "\psi^{G}\bullet GFf"] \arrow[dd, bend right=60, "\psi^{GF}\bullet GFf"'] \arrow[dd, phantom, bend right=25, "(*)"] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & GFf & \\
G(\mathrm{id}_{Fb})\circ GFf \arrow[r, "\varphi^{G}_{\mathrm{id}_{Fb},Ff}"] \arrow[d, "G(\psi^{F})\bullet GFf"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi^{G})"] & G(\mathrm{id}_{Fb}\circ Ff) \arrow[u, "G(\lambda_{Ff})"'] \arrow[d, "G(\psi^{F}\bullet Ff)"] \arrow[r, phantom, "(F)"] & \\
GF(\mathrm{id}_b)\circ GFf \arrow[r, "\varphi^{G}_{F(\mathrm{id}_b),Ff}"'] \arrow[rr, bend right=30, "\varphi^{GF}_{\mathrm{id}_b,f}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "(*)"] & G(F(\mathrm{id}_b)\circ Ff) \arrow[r, "G(\varphi^{F}_{\mathrm{id}_b,f})"'] & GF(\mathrm{id}_b\circ f) \arrow[uul, bend right, "GF(\lambda_f)"']
\end{tikzcd}$$

$(*)$ は定義より可換である．$(F),(G)$ は pseudofunctor の定義の条件 (6) より可換である．$(\varphi^G)$ は $\varphi^G$ の自然性により可換である．右の図式についても同様で

$$\begin{tikzcd}
GFf\circ \mathrm{id}_{GFa} \arrow[r, "\rho_{GFf}"] \arrow[d, "GFf\bullet\psi^{G}"] \arrow[dd, bend right=60, "GFf\bullet\psi^{GF}"'] \arrow[dd, phantom, bend right=25, "(*)"] \arrow[dr, phantom, "(G)"] & GFf & \\
GFf\circ G(\mathrm{id}_{Fa}) \arrow[r, "\varphi^{G}_{Ff,\mathrm{id}_{Fa}}"] \arrow[d, "GFf\bullet G(\psi^{F})"] \arrow[dr, phantom, "(\varphi^{G})"] & G(Ff\circ \mathrm{id}_{Fa}) \arrow[u, "G(\rho_{Ff})"'] \arrow[d, "G(Ff\bullet\psi^{F})"] \arrow[r, phantom, "(F)"] & \\
GFf\circ GF(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\varphi^{G}_{Ff,F(\mathrm{id}_a)}"'] \arrow[rr, bend right=30, "\varphi^{GF}_{f,\mathrm{id}_a}"'] \arrow[rr, phantom, bend right=15, "(*)"] & G(Ff\circ F(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "G(\varphi^{F}_{f,\mathrm{id}_a})"'] & GF(f\circ \mathrm{id}_a) \arrow[uul, bend right, "GF(\rho_f)"']
\end{tikzcd}$$

が可換となり成り立つ. □

故に pseudofunctor $P\colon \mathcal{B}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{CAT}$ に対して，合成

$$\widehat{\mathcal{B}}(y(-),P) := (\mathcal{B}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{y^{\mathrm{op}}} (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\widehat{\mathcal{B}}(-,P)} \mathbf{CAT})$$

も pseudofunctor である． $\widehat{\mathcal{B}}$ は strict 2-category だから $\widehat{\mathcal{B}}(-,P)$ は strict 2-functor となり (系 29)， $\widehat{\mathcal{B}}(y(-),P)$ の自然同型 $\varphi$ は $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ に対して

$$\varphi_{gf} = \widehat{\mathcal{B}}(\varphi^{y^{\mathrm{op}}}_{gf}, P) = (- \mathbin{\widehat{\bullet}} \varphi^{y}_{fg})\colon (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g)) \bullet (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) \Rightarrow (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f \circ g))$$

で与えられる．

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "y^{\mathrm{op}} \times y^{\mathrm{op}}"'] \arrow[dr, "M"] & \\
 & (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}}(y(b),y(c)) \times (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}}(y(a),y(b)) \arrow[dl, "\widehat{\mathcal{B}}(-,P) \times \widehat{\mathcal{B}}(-,P)"'] \arrow[dr, "M"] \arrow[rr, phantom, "\overset{\sim}{\underset{\varphi^{y^{\mathrm{op}}}}{\Longrightarrow}}"] & & \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,c) \arrow[dl, "y^{\mathrm{op}}"] \\
\begin{array}{c}\mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(b),P), \widehat{\mathcal{B}}(y(c),P)) \\ \times \mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P), \widehat{\mathcal{B}}(y(b),P))\end{array} \arrow[dr, "M"'] \arrow[rr, phantom, "\underset{\mathrm{id}}{\Longrightarrow}"] & & (\widehat{\mathcal{B}})^{\mathrm{op}}(y(a),y(c)) \arrow[dl, "\widehat{\mathcal{B}}(-,P)"] & \\
 & \mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P), \widehat{\mathcal{B}}(y(c),P)) & &
\end{tikzcd}$$

即ち $\sigma\colon y(a) \Rightarrow P$ に対して

$$(\varphi_{gf})_\sigma = \sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \varphi^{y}_{fg}\colon (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) \mathbin{\widehat{\circ}} y(g) \Rrightarrow \sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f \circ g)\colon y(c) \Rightarrow P$$

である． $d \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{aligned}
\bigl((\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) \mathbin{\widehat{\circ}} y(g)\bigr)_d &= \sigma_d \circ y(f)_d \circ y(g)_d = \sigma_d \circ (f \bullet -) \circ (g \bullet -) \\
\bigl(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f \circ g)\bigr)_d &= \sigma_d \circ y(f \circ g)_d = \sigma_d \circ ((f \circ g) \bullet -)
\end{aligned}$$

だから $((\varphi_{gf})_\sigma)_d\colon \sigma_d \circ (f \bullet -) \circ (g \bullet -) \Rightarrow \sigma_d \circ ((f \circ g) \bullet -)\colon \mathcal{B}(d,c) \to Pd$ であり， $h\colon d \to c$ に対して $(((\varphi_{gf})_\sigma)_d)_h\colon \sigma_d(f \circ (g \circ h)) \Rightarrow \sigma_d((f \circ g) \circ h)$ となる．定義より

$$\begin{aligned}
(((\varphi_{gf})_\sigma)_d)_h &= (\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \varphi^{y}_{fg})_d)_h = (\sigma_d \bullet (\varphi^{y}_{fg})_d)_h = \sigma_d(((\varphi^{y}_{fg})_d)_h) \\
&= \sigma_d(\alpha^{-1}_{fgh})
\end{aligned}$$

となる．

**定理 36.** 定理 33 の $\theta_a$ は pseudonatural transformation $\theta\colon \widehat{\mathcal{B}}(y(-),P) \Rightarrow P$ を与える．

証明.

※ そのためには $a, b \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[ld, "P"'] \arrow[rd, "\widehat{\mathcal{B}}(y(-),P)"] & \\
\mathbf{CAT}(Pa, Pb) \arrow[rd, "-\bullet\theta_a"'] & \overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\theta^{ab}} & \mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P), \widehat{\mathcal{B}}(y(b),P)) \arrow[ld, "\theta_b\bullet-"] \\
& \mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P), Pb) &
\end{tikzcd}$$

を定義しなければならない．もしこのような $\theta^{ab}$ が存在すれば，$f\colon b \to a$ に対して

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[ld, "\theta_a"'] \arrow[rd, "\widehat{\mathcal{B}}(y(f),P) = -\widehat{\bullet}y(f)"] & \\
Pa \arrow[rd, "Pf"'] & \overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\theta^{ab}_f} & \widehat{\mathcal{B}}(y(b),P) \arrow[ld, "\theta_b"] \\
& Pb &
\end{tikzcd}$$

は自然同型である．よって $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ に対して

$$(\theta^{ab}_f)_\sigma\colon Pf(\theta_a(\sigma)) \to \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))$$

は圏 $Pb$ の同型射である．ここで

$$\begin{aligned}
Pf(\theta_a(\sigma)) &= Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \\
\theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) &= (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_b(\mathrm{id}_b) = (\sigma_b \circ y(f)_b)(\mathrm{id}_b) \\
&= \sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b)
\end{aligned}$$

である．

$a, b \in \mathcal{B}$ を対象，$\sigma\colon y(a) \Rightarrow P$ を pseudonatural transformation とすると次の自然同型が与えられる．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[ld, "P"'] \arrow[rd, "y(a)"] & \\
\mathbf{CAT}(Pa, Pb) \arrow[rd, "-\bullet\sigma_a"'] & \overset{\sim}{\Longrightarrow}_{\sigma^{ab}} & \mathbf{CAT}\big(\mathcal{B}(a,a), \mathcal{B}(b,a)\big) \arrow[ld, "\sigma_b\bullet-"] \\
& \mathbf{CAT}\big(\mathcal{B}(a,a), Pb\big) &
\end{tikzcd}$$

即ち $f\colon b \to a$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(a,a) \arrow[dl, "\sigma_a"'] \arrow[dr, "-\bullet f"] & \\
Pa \arrow[dr, "Pf"'] & \underset{\sigma_f^{ab}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}(b,a) \arrow[dl, "\sigma_b"] \\
& Pb &
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．$\mathrm{id}_a \in \mathcal{B}(a,a)$ を考えれば圏 $Pb$ の同型

$$(\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}\colon Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \to \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f)$$

を得る．そこで圏 $Pb$ の射 $(\theta_f^{ab})_\sigma$ を合成

$$Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \xrightarrow{(\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}} \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \xrightarrow{\sigma_b(\lambda_f)} \sigma_b(f) \xrightarrow{\sigma_b(\rho_f^{-1})} \sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b)$$

で定義する．上で注意したように，$(\theta_f^{ab})_\sigma\colon Pf(\theta_a(\sigma)) \to \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))$ である．これは自然同型 $\theta_f^{ab}\colon Pf \circ \theta_a \Rightarrow \theta_b \circ (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))$ を与える．

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[dl, "\theta_a"'] \arrow[dr, "-\widehat{\bullet} y(f)"] & \\
Pa \arrow[dr, "Pf"'] & \underset{\theta_f^{ab}}{\overset{\sim}{\Longrightarrow}} & \widehat{\mathcal{B}}(y(b),P) \arrow[dl, "\theta_b"] \\
& Pb &
\end{tikzcd}$$

∵) $\sigma, \tau \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ として $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ を modification とする．圏 $Pb$ における次の図式の可換性を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Pf(\theta_a(\sigma)) \arrow[r, "(\theta_f^{ab})_\sigma"] \arrow[d, "Pf(\theta_a(\Gamma))"'] & \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)) \arrow[d, "\theta_b(\Gamma \widehat{\bullet} y(f))"] \\
Pf(\theta_a(\tau)) \arrow[r, "(\theta_f^{ab})_\tau"'] & \theta_b(\tau \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))
\end{tikzcd}$$

定義より

$$\begin{aligned}
\theta_b(\Gamma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) &= ((\Gamma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f))_b)_{\mathrm{id}_b} = (\Gamma_b \bullet y(f)_b)_{\mathrm{id}_b} \\
&= (\Gamma_b)_{y(f)_b(\mathrm{id}_b)} = (\Gamma_b)_{f\circ\mathrm{id}_b} \\
(\theta_f^{ab})_\sigma &= \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
(\theta_f^{ab})_\tau &= \tau_b(\rho_f^{-1}) \circ \tau_b(\lambda_f) \circ (\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
Pf(\theta_a(\Gamma)) &= Pf((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}$$

である．よって

$$\begin{aligned}
&(\Gamma_b)_{f\circ\mathrm{id}_b} \circ \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
&= \tau_b(\rho_f^{-1}) \circ \tau_b(\lambda_f) \circ (\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \circ Pf((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})
\end{aligned}$$

を示せばよい．今 $\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$ が modification だから

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_f^{ab}}{\swarrow}"] & Pa \arrow[d, "Pf"] \\
\mathcal{B}(b,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_b", ""{name=S, below}] \arrow[r, bend right, "\tau_b"', ""{name=T, above}] & Pb
\arrow[Rightarrow, from=S, to=T, "\Gamma_b"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, bend left, "\sigma_a", ""{name=A, below}] \arrow[r, bend right, "\tau_a"', ""{name=B, above}] \arrow[d, "-\bullet f"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau_f^{ab}}{\swarrow}"] & Pa \arrow[d, "Pf"] \\
\mathcal{B}(b,a) \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] & Pb
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\Gamma_a"]
\end{tikzcd}$$

となり $(\Gamma_b)_{\mathrm{id}_a\circ f} \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} = (\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \circ Pf((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})$ である．また $\Gamma_b\colon \sigma_b \Rightarrow \tau_b$ は自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{\mathrm{id}_a\circ f}"] \arrow[d, "\sigma_b(\lambda_f)"'] & \tau_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[d, "\tau_b(\lambda_f)"] \\
\sigma_b(f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_f"'] \arrow[d, "\sigma_b(\rho_f^{-1})"'] & \tau_b(f) \arrow[d, "\tau_b(\rho_f^{-1})"] \\
\sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{f\circ\mathrm{id}_b}"'] & \tau_b(f \circ \mathrm{id}_b)
\end{tikzcd}$$

が可換である．この二つを組み合わせて可換図式

$$\begin{tikzcd}
Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "Pf((\Gamma_a)_{\mathrm{id}_a})"] \arrow[d, "(\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}"'] & Pf(\tau_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\tau_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}"] \\
\sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{\mathrm{id}_a \circ f}"] \arrow[d, "\sigma_b(\lambda_f)"'] & \tau_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[d, "\tau_b(\lambda_f)"] \\
\sigma_b(f) \arrow[r, "(\Gamma_b)_f"'] \arrow[d, "\sigma_b(\rho_f^{-1})"'] & \tau_b(f) \arrow[d, "\tau_b(\rho_f^{-1})"] \\
\sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \arrow[r, "(\Gamma_b)_{f \circ \mathrm{id}_b}"'] & \tau_b(f \circ \mathrm{id}_b)
\end{tikzcd}$$

を得る．この外側の四角が今示したかった可換性である．

この $\theta_f^{ab}$ が自然同型 $\theta^{ab}$ を与える．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}^{\mathrm{op}}(a,b) \arrow[dl, "P"'] \arrow[dr, "\widehat{\mathcal{B}}(y(-),P)"] & \\
\mathbf{CAT}(Pa,Pb) \arrow[dr, "-\bullet\theta_a"'] & \overset{\sim}{\underset{\theta^{ab}}{\Longrightarrow}} & \mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P),\widehat{\mathcal{B}}(y(b),P)) \arrow[dl, "\theta_b\bullet-"] \\
& \mathbf{CAT}(\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P),Pb) &
\end{tikzcd}$$

$\because$) $\beta\colon f \Rightarrow g\colon b \to a$ を 2-morphism とする．次が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
Pf \circ \theta_a \arrow[r, "\theta_f^{ab}"] \arrow[d, "P\beta\bullet\theta_a"'] & \theta_b \circ (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(f)) \arrow[d, "\theta_b\bullet(-\widehat{\bullet}y(\beta))"] \\
Pg \circ \theta_a \arrow[r, "\theta_g^{ab}"'] & \theta_b \circ (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(g))
\end{tikzcd}$$

そのためには $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ に対して

$$(\theta_b \bullet (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta)))_\sigma \circ (\theta_f^{ab})_\sigma = (\theta_g^{ab})_\sigma \circ ((P\beta)_{\theta_a})_\sigma$$

を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}
(\theta_b \bullet (- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta)))_\sigma &= \theta_b((- \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta))_\sigma) = \theta_b(\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta)) \\
&= (\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} y(\beta))_b(\mathrm{id}_b) = (\sigma_b \bullet y(\beta)_b)(\mathrm{id}_b) = \sigma_b(\beta \bullet \mathrm{id}_b) \\
(\theta_f^{ab})_\sigma &= \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
(\theta_g^{ab})_\sigma &= \sigma_b(\rho_g^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_g) \circ (\sigma_g^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
((P\beta)_{\theta_a})_\sigma &= (P\beta)_{\theta_a(\sigma)} = (P\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}
&\sigma_b(\beta \bullet \mathrm{id}_b) \circ \sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a} \\
&= \sigma_b(\rho_g^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_g) \circ (\sigma_g^{ab})_{\mathrm{id}_a} \circ (P\beta)_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}$$

を示せばよい．まず $\sigma_f^{ab}$ が $f$ について自然だから

$$\begin{tikzcd}
Pf \circ \sigma_a \arrow[r, "\sigma_f^{ab}"] \arrow[d, "P\beta \bullet \sigma_a"'] & \sigma_b \circ (- \bullet f) \arrow[d, "\sigma_b \bullet (- \bullet \beta)"] \\
Pg \circ \sigma_a \arrow[r, "\sigma_g^{ab}"'] & \sigma_b \circ (- \bullet g)
\end{tikzcd}$$

は可換である．また $\lambda, \rho$ は自然同型だから

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_a \circ f \arrow[r, "\lambda_f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a \bullet \beta"'] & f \arrow[r, "\rho_f^{-1}"] \arrow[d, "\beta"] & f \circ \mathrm{id}_b \arrow[d, "\beta \bullet \mathrm{id}_b"] \\
\mathrm{id}_a \circ g \arrow[r, "\lambda_g"'] & g \arrow[r, "\rho_g^{-1}"'] & g \circ \mathrm{id}_b
\end{tikzcd}$$

も可換である．この二つから可換図式

$$\begin{tikzcd}
Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_f^{ab})_{\mathrm{id}_a}"] \arrow[d, "P\beta_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"'] & \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ f) \arrow[r, "\sigma_b(\lambda_f)"] \arrow[d, "\sigma_b(\mathrm{id}_a \bullet \beta)"'] & \sigma_b(f) \arrow[r, "\sigma_b(\rho_f^{-1})"] \arrow[d, "\sigma_b(\beta)"] & \sigma_b(f \circ \mathrm{id}_b) \arrow[d, "\sigma_b(\beta \bullet \mathrm{id}_b)"] \\
Pg(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[r, "(\sigma_g^{ab})_{\mathrm{id}_a}"'] & \sigma_b(\mathrm{id}_a \circ g) \arrow[r, "\sigma_b(\lambda_g)"'] & \sigma_b(g) \arrow[r, "\sigma_b(\rho_g^{-1})"'] & \sigma_b(g \circ \mathrm{id}_b)
\end{tikzcd}$$

が得られる．この外側の四角が今示したかった可換性である．

$\theta$ が pseudonatural transformation であることを示すため，まず条件 (3) を示す．そのためには $c \xrightarrow{g} b \xrightarrow{f} a$ に対して自然変換の等式

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[rr, "\theta_a"] \arrow[dr, "-\widehat{\bullet}y(f)"] \arrow[dd, bend right=60, "-\widehat{\bullet}y(f\circ g)"'] & & Pa \arrow[dr, "Pf"] \arrow[dl, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_f"'] & \\
& \widehat{\mathcal{B}}(y(b),P) \arrow[rr, "\theta_b"] \arrow[dl, "-\widehat{\bullet}y(g)"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] & & Pb \arrow[dl, "Pg"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(c),P) \arrow[rr, "\theta_c"'] & & Pc &
\arrow[from=2-3, to=3-2, Rightarrow, shorten=4mm, "\theta_g"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\widehat{\bullet}y(f\circ g)"'] & Pa \arrow[dr, "Pf"] \arrow[dd, bend right=60, "P(f\circ g)"'] \arrow[ddl, phantom, "\overset{\theta_{f\circ g}}{\Longleftarrow}"] & \\
& & Pb \arrow[dl, "Pg"] \arrow[l, phantom, "\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(c),P) \arrow[r, "\theta_c"'] & Pc &
\end{tikzcd}$$

を示せばよい．即ち $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ に対して，圏 $Pc$ での等式

$$\theta_c((\varphi_{gf})_\sigma) \circ (\theta_g)_{\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)} \circ Pg((\theta_f)_\sigma) = (\theta_{f\circ g})_\sigma \circ (\varphi_{gf})_{\theta_a(\sigma)}$$

を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}
\theta_c((\varphi_{gf})_\sigma) &= (((\varphi_{gf})_\sigma)_c)_{\mathrm{id}_c} = \sigma_c(\alpha^{-1}_{f,g,\mathrm{id}_c}) \\
(\theta_g)_{\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f)} &= (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_c(\rho_g^{-1}) \circ (\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_c(\lambda_g) \circ ((\sigma \mathbin{\widehat{\circ}} y(f))_g)_{\mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(f \bullet \lambda_g) \circ \big((\sigma_c \bullet y(f)_g) * (\sigma_g \bullet y(f)_b)\big)_{\mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(f \bullet \lambda_g) \circ (\sigma_c \bullet y(f)_g)_{\mathrm{id}_b} \circ (\sigma_g \bullet y(f)_b)_{\mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c\big(f \bullet \lambda_g) \circ \sigma_c(\alpha_{f,\mathrm{id}_b,g}\big) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c\big((f \bullet \lambda_g) * \alpha_{f,\mathrm{id}_b,g}\big) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&= \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
Pg((\theta_f)_\sigma) &= Pg(\sigma_b(\rho_f^{-1}) \circ \sigma_b(\lambda_f) \circ (\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
&= Pg(\sigma_b(\rho_f^{-1})) \circ Pg(\sigma_b(\lambda_f)) \circ Pg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
(\theta_{f\circ g})_\sigma &= \sigma_c(\rho^{-1}_{f\circ g}) \circ \sigma_c(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a} \\
(\varphi_{gf})_{\theta_a(\sigma)} &= (\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}$$

だから示すべき等式は

$$\begin{aligned}
&\sigma_c(\alpha^{-1}_{f,g,\mathrm{id}_c}) \circ \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) \circ \sigma_c(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \\
&\quad \circ Pg(\sigma_b(\rho_f^{-1})) \circ Pg(\sigma_b(\lambda_f)) \circ Pg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
&= \sigma_c(\rho^{-1}_{f\circ g}) \circ \sigma_c(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}$$

である．補題 8 より $\sigma_c(\alpha^{-1}_{f,g,\mathrm{id}_c}) \circ \sigma_c(f \bullet \rho_g^{-1}) = \sigma_c(\rho^{-1}_{f\circ g})$ だから

$$\begin{aligned}
&\sigma_c(\rho_f \bullet g) \circ (\sigma_g)_{f\circ \mathrm{id}_b} \circ Pg(\sigma_b(\rho_f^{-1})) \circ Pg(\sigma_b(\lambda_f)) \circ Pg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a}) \\
&= \sigma_c(\lambda_{f\circ g}) \circ (\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a} \circ (\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}$$

を示せばよい．まず $\sigma_g\colon Pg\circ\sigma_b\Rightarrow\sigma_c\circ(-\bullet g)$ が自然変換だから

$$\begin{tikzcd}
Pg(\sigma_b(\mathrm{id}_a\circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"] \arrow[d, "Pg(\sigma_b(\lambda_f))"'] & \sigma_c((\mathrm{id}_a\circ f)\circ g) \arrow[d, "\sigma_c(\lambda_f\bullet g)"] \\
Pg(\sigma_b(f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_f"'] & \sigma_c(f\circ g) \\
Pg(\sigma_b(f\circ\mathrm{id}_b)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{f\circ\mathrm{id}_b}"'] \arrow[u, "Pg(\sigma_b(\rho_f))"] & \sigma_c((f\circ\mathrm{id}_b)\circ g) \arrow[u, "\sigma_c(\rho_f\bullet g)"']
\end{tikzcd}$$

が可換である．次に $\sigma$ が pseudonatural transformation だから次の自然変換の等号が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dr, "-\bullet f"'] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ g)"'] & Pa \arrow[dr, "Pf"] & \\
& \mathcal{B}(b,a) \arrow[r, "\sigma_b"] \arrow[dl, "-\bullet g"] \arrow[l, Rightarrow, "\alpha_{-fg}"'] & Pb \arrow[dl, "Pg"] \\
\mathcal{B}(c,a) \arrow[r, "\sigma_c"'] & Pc &
\arrow[from=1-3, to=2-2, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_f"']
\arrow[from=2-3, to=3-2, Rightarrow, shorten=4mm, "\sigma_g"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "-\bullet(f\circ g)"'] & Pa \arrow[dr, "Pf"] \arrow[dd, bend right=60, "P(f\circ g)"'] & \\
& & Pb \arrow[dl, "Pg"] \arrow[l, Rightarrow, "\varphi_{gf}"'] \\
\mathcal{B}(c,a) \arrow[r, "\sigma_c"'] & Pc &
\arrow[from=1-2, to=3-1, Rightarrow, shorten=8mm, "\sigma_{f\circ g}"']
\end{tikzcd}$$

故に $\mathrm{id}_a\in\mathcal{B}(a,a)$ を考えれば次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
Pg(Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[r, "(\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Pg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & P(f\circ g)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& \sigma_c(\mathrm{id}_a\circ(f\circ g)) \\
Pg(\sigma_b(\mathrm{id}_a\circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] & \sigma_c((\mathrm{id}_a\circ f)\circ g) \arrow[u, "\sigma_c(\alpha_{\mathrm{id}_a,f,g})"']
\end{tikzcd}$$

この二つと補題 9 を組み合わせて

$$\begin{tikzcd}
Pg(Pf(\sigma_a(\mathrm{id}_a))) \arrow[rr, "(\varphi_{gf})_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}"] \arrow[dd, "Pg((\sigma_f)_{\mathrm{id}_a})"'] & & P(f\circ g)(\sigma_a(\mathrm{id}_a)) \arrow[d, "(\sigma_{f\circ g})_{\mathrm{id}_a}"] \\
& & \sigma_c(\mathrm{id}_a\circ(f\circ g)) \arrow[dl, "\sigma_c(\alpha^{-1}_{\mathrm{id}_a,f,g})"'] \arrow[dd, "\sigma_c(\lambda_{f\circ g})"] \\
Pg(\sigma_b(\mathrm{id}_a\circ f)) \arrow[r, "(\sigma_g)_{\mathrm{id}_a\circ f}"'] \arrow[d, "Pg(\sigma_b(\lambda_f))"'] & \sigma_c((\mathrm{id}_a\circ f)\circ g) \arrow[dr, "\sigma_c(\lambda_f\bullet g)"'] & \\
Pg(\sigma_b(f)) \arrow[rr, "(\sigma_g)_f"'] \arrow[d, "Pg(\sigma_b(\rho_f^{-1}))"'] & & \sigma_c(f\circ g) \\
Pg(\sigma_b(f\circ\mathrm{id}_b)) \arrow[rr, "(\sigma_g)_{f\circ\mathrm{id}_b}"'] & & \sigma_c((f\circ\mathrm{id}_b)\circ g) \arrow[u, "\sigma_c(\rho_f\bullet g)"']
\end{tikzcd}$$

を得る．この外側の四角が今示したい可換性である．

条件 (4) を示す．即ち次の自然変換の等式を示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "-\mathbin{\widehat{\bullet}}y(\mathrm{id}_a)"', ""{name=L}] \arrow[d, "\mathrm{id}", ""'{name=I}] \arrow[dr, "\theta_a"'] \arrow[dr, phantom, "/\!\!/", shift left=3ex] \arrow[dr, phantom, "/\!\!/"', shift right=3ex] & Pa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Pa}"] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[r, "\theta_a"'] & Pa
\arrow[Rightarrow, from=I, to=L, "-\mathbin{\widehat{\bullet}}\psi"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[r, "\theta_a"] \arrow[d, bend right=60, "-\mathbin{\widehat{\bullet}}y(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\theta_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Pa \arrow[d, bend right=60, "P(\mathrm{id}_a)"', ""{name=PI}] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Pa}", ""'{name=IP}] \\
\widehat{\mathcal{B}}(y(a),P) \arrow[r, "\theta_a"'] & Pa
\arrow[Rightarrow, from=IP, to=PI, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

即ち $\sigma \in \widehat{\mathcal{B}}(y(a),P)$ に対して，圏 $Pa$ での等式

$$\theta_a(\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \psi) = (\theta_{\mathrm{id}_a})_\sigma \circ \psi_{\theta_a(\sigma)}$$

を示せばよい．定義より

$$\begin{aligned}
\theta_a(\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \psi) &= ((\sigma \mathbin{\widehat{\bullet}} \psi)_a)_{\mathrm{id}_a} = (\sigma_a \bullet \psi_a)_{\mathrm{id}_a} = \sigma_a((\psi_a)_{\mathrm{id}_a}) = \sigma_a(\lambda^{-1}_{\mathrm{id}_a}) \\
(\theta_{\mathrm{id}_a})_\sigma &= \sigma_a(\rho^{-1}_{\mathrm{id}_a}) \circ \sigma_a(\lambda_{\mathrm{id}_a}) \circ (\sigma_{\mathrm{id}_a})_{\mathrm{id}_a} \\
\psi_{\theta_a(\sigma)} &= \psi_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}
\end{aligned}$$

で，補題 10 より $\lambda_{\mathrm{id}_a} = \rho_{\mathrm{id}_a}$ だから $\sigma_a(\lambda^{-1}_{\mathrm{id}_a}) = (\sigma_{\mathrm{id}_a})_{\mathrm{id}_a} \circ \psi_{\sigma_a(\mathrm{id}_a)}$ を示せばよい．これは $\sigma \colon y(a) \Rightarrow P$ が pseudonatural transformation だから

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"', ""{name=L}] \arrow[d, "\mathrm{id}", ""'{name=I}] \arrow[dr, "\sigma_a"] \arrow[dr, phantom, "/\!\!/", shift left=3ex] \arrow[dr, phantom, "/\!\!/"', shift right=3ex] & Pa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Pa}"] \\
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"'] & Pa
\arrow[Rightarrow, from=I, to=L, "\lambda^{-1}"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "-\bullet\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Pa \arrow[d, bend right=60, "P(\mathrm{id}_a)"', ""{name=PI}] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Pa}", ""'{name=IP}] \\
\mathcal{B}(a,a) \arrow[r, "\sigma_a"'] & Pa
\arrow[Rightarrow, from=IP, to=PI, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

となり成り立つ． □

※ 後で示す補題 77 を使えば $\widehat{\mathcal{B}}$ における同値 $\widehat{\mathcal{B}}(y(-),P) \simeq P$ が成立することが分かる．これは定理 36 で定義した記号について

- $\omega_a$ が pseudonatural transformation を与えること
- $\Delta_a, \Sigma_a$ が modification を与えること

が成り立つことからも分かる．

## 3 coherence 定理

**定理 37** (coherence 定理)**.** 任意の bicategory はある strict 2-category と biequivalence である．

**証明**. $\mathcal{B}$ を bicategory，$y\colon \mathcal{B} \to \widehat{\mathcal{B}}$ を米田埋込とする．$\mathcal{C}$ を $\mathrm{Ob}(\mathcal{C}) := \{y(a) \mid a \in \mathcal{B}\}$ により定まる充満部分 2-category とする．このとき pseudofunctor $y\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が得られる．明らかにこの $y$ は対象に関して全射で，また系 34 により局所圏同値である． □

これを使うと，初めに説明した coherence 条件が成り立つということを証明することができる (定理 41)．それを証明する前に例を紹介する．

**例 38.** 次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
 & (h \circ (\mathrm{id} \circ g)) \circ f \arrow[dl, "\alpha^{-1} \bullet \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
((h \circ \mathrm{id}) \circ g) \circ f \arrow[d, "(\rho \bullet \mathrm{id}) \bullet \mathrm{id}"'] & & h \circ ((\mathrm{id} \circ g) \circ f) \arrow[d, "\mathrm{id} \bullet (\lambda \bullet \mathrm{id})"] \\
(h \circ g) \circ f \arrow[rr, "\alpha"'] & & h \circ (g \circ f)
\end{tikzcd}$$

これは定理 41 の証明によると，次のように証明できる．まず定理 37 により strict 2-category $\mathcal{C}$ と biequivalence $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が存在する．上記の図式をこの $F$ で写すと，次

の図式の一番外側の五角形を得る．定理 41 の証明により，残りの内側の部分を得る．

$$\begin{tikzcd}
 & & F((h\circ(\mathrm{id}\circ g))\circ f) \arrow[dll, "F(\alpha^{-1}\bullet\mathrm{id})"'] \arrow[d, "\wr"] \arrow[drr, "F(\alpha)"] & & \\
F(((h\circ\mathrm{id})\circ g)\circ f) \arrow[dr, "\sim"] \arrow[dddd, "F((\rho\bullet\mathrm{id})\bullet\mathrm{id})"'] & & (Fh\circ(\mathrm{id}\circ Fg))\circ Ff \arrow[dl, "\alpha^{-1}\bullet\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\alpha"] & & F(h\circ((\mathrm{id}\circ g)\circ f)) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dddd, "F(\mathrm{id}\bullet(\lambda\bullet\mathrm{id}))"] \\
 & ((Fh\circ\mathrm{id})\circ Fg)\circ Ff \arrow[d, "(\rho\bullet\mathrm{id})\bullet\mathrm{id}"'] & & Fh\circ((\mathrm{id}\circ Fg)\circ Ff) \arrow[d, "\mathrm{id}\bullet(\lambda\bullet\mathrm{id})"] & \\
 & (Fh\circ Fg)\circ Ff \arrow[rr, "\alpha"] & & Fh\circ(Fg\circ Ff) & \\
 & & & & \\
F((h\circ g)\circ f) \arrow[uur, "\sim"] \arrow[rrrr, "F(\alpha)"'] & & & & F(h\circ(g\circ f)) \arrow[uul, "\sim"']
\end{tikzcd}$$

中央の五角形は $\mathcal{C}$ が strict 2-category だから可換である．残りの四角形は $F$ が pseudo-functor だから可換である．故に一番外側の五角形は可換である．$F$ が biequivalence だから元の五角形が可換となることが分かる． □

**例 39.** 例えば 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ が $(h\circ g)\circ f = h\circ(g\circ f)$ を満たす場合 $\alpha_{hgf} \neq \mathrm{id}\colon (h\circ g)\circ f \Rightarrow h\circ(g\circ f)$ となることがありえる．従ってこのときは同型 $(h\circ g)\circ f \cong h\circ(g\circ f)$ は複数存在する．(この場合，後に定義する記号を使うと $|\widetilde{\sigma}| = \mathrm{id}$ となるような $\widetilde{\sigma}\colon (h\,\widetilde{\circ}\,g)\,\widetilde{\circ}\,f \Rightarrow h\,\widetilde{\circ}\,(g\,\widetilde{\circ}\,f)$ が存在しないことになる．) □

例 39 のように coherence 条件は完全に無条件に成り立つわけではなく，ある程度の仮定を置かなければならない．以下ではそれを説明する．

**定義.** $\mathcal{B}$ を bicategory とする．$\mathcal{B}$ の形式射とは次の条件で定まるものである．

(1) 対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して新しい記号 $i_a$ を用意し，$i_a$ は形式射であると定める．また $s(i_a) := a$，$t(i_a) := a$ と定める．

(2) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f$ は形式射である．また $f\colon a \to b$ のとき $s(f) := a$，$t(f) := b$ と定める．

(3) $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ が形式射[*9]で $t(\widetilde{f}) = s(\widetilde{g})$ のとき順序対 $\widetilde{g}\,\widetilde{\circ}\,\widetilde{f} := \langle \widetilde{g}, \widetilde{f}\rangle$ は形式射である．またこのとき $s(\widetilde{g}\,\widetilde{\circ}\,\widetilde{f}) := s(\widetilde{f})$，$t(\widetilde{g}\,\widetilde{\circ}\,\widetilde{f}) := t(\widetilde{g})$ と定める．

---

[*9] $f$ に対して $\widetilde{f}$ という形式射が存在するという意味ではなく，$\widetilde{f}$ 全体で 1 つの記号である．以下形式射に関する記号は $\widetilde{\ }$ 付きの記号を使用する．

(4) 以上により得られるもののみが形式射である．

形式射 $\widetilde{f}$ が $s(\widetilde{f}) = a$，$t(\widetilde{f}) = b$ を満たすことを $\widetilde{f}\colon a \to b$ で表す．$\widetilde{g} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f}$ は順序対であるから，例えば $(\widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{g}) \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f} \neq \widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\widetilde{g} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f})$ となることを注意しておく．また $\mathrm{id}_a$ と $i_a$ は別の形式射として区別する．

**定義．** 基本射とは次の条件で定まるものである．

(1) $a \xrightarrow{\widetilde{f}} b \xrightarrow{\widetilde{g}} c \xrightarrow{\widetilde{h}} d$ を形式射とするとき，新しい記号 $\mathfrak{a}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ と $\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ を用意し，$\mathfrak{a}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ と $\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ は基本射であると定める．また

$$
\begin{aligned}
s(\mathfrak{a}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}) &:= (\widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{g}) \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f}, &\qquad t(\mathfrak{a}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}) &:= \widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\widetilde{g} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f}),\\
s(\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}) &:= \widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} (\widetilde{g} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f}), &\qquad t(\mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}) &:= (\widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{g}) \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f}
\end{aligned}
$$

と定める．

(2) 形式射 $\widetilde{f}\colon a \to b$ に対して新しい記号 $\mathfrak{i}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{f}}$ を用意し $\mathfrak{i}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{l}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{f}}$ は基本射であると定める．また

$$
\begin{aligned}
s(\mathfrak{i}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f}, &\qquad t(\mathfrak{i}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f}\\
s(\mathfrak{l}_{\widetilde{f}}) &:= i_b \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f} &\qquad t(\mathfrak{l}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f}\\
s(\mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f}, &\qquad t(\mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{f}}) &:= i_b \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{f}\\
s(\mathfrak{r}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f} \mathbin{\widetilde{\circ}} i_a, &\qquad t(\mathfrak{r}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f}\\
s(\mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f}, &\qquad t(\mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{f}}) &:= \widetilde{f} \mathbin{\widetilde{\circ}} i_a
\end{aligned}
$$

と定める．

(3) $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ が基本射で $s(\mathfrak{b})\colon a \to b$，$s(\mathfrak{c})\colon b \to c$ のとき順序対 $\mathfrak{c} \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathfrak{b} := \langle \mathfrak{c}, \mathfrak{b} \rangle$ は基本射である．また $s(\mathfrak{c} \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathfrak{b}) = s(\mathfrak{c}) \mathbin{\widetilde{\circ}} s(\mathfrak{b})$，$t(\mathfrak{c} \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathfrak{b}) = t(\mathfrak{c}) \mathbin{\widetilde{\circ}} t(\mathfrak{b})$ と定める．

(4) 以上により得られるもののみが基本射である．

**定義．** $\widetilde{f}, \widetilde{g}\colon a \to b$ を形式射とする．$\widetilde{f}$ から $\widetilde{g}$ への射とは基本射の有限列 $\mathfrak{b}_0, \cdots, \mathfrak{b}_n$ であって $s(\mathfrak{b}_0) = \widetilde{f}$，$t(\mathfrak{b}_0) = s(\mathfrak{b}_1)$，$\cdots$，$t(\mathfrak{b}_{n-1}) = s(\mathfrak{b}_n)$，$t(\mathfrak{b}_n) = \widetilde{g}$ を満たすものである．この射を $\mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{*}} \cdots \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{b}_0$ で表す．

$\mathfrak{b}$ が $\widetilde{f}$ から $\widetilde{g}$ への射のとき $\mathfrak{b}\colon \widetilde{f} \Rightarrow \widetilde{g}$ と書く．

※ 以上の定義により，形式射を 1-morphism，その間の射を 2-morphism とすれば

bicategory となる (但し 2-morphism については coherence 条件を満たすよう適当な同一視をする必要がある) のであるが，その事実は以下では使わないためそのことは証明しない.

**定義.** $\mathcal{B}$ の形式射 $\widetilde{f}$ に対して，$\mathcal{B}$ の 1-morphism $|\widetilde{f}|$ を以下により定める.

(1) $\widetilde{f} = i_a$ のとき $|\widetilde{f}| := \mathrm{id}_a$ と定める.
(2) $\widetilde{f} = f$ が $\mathcal{B}$ の 1-morphism のとき，$|\widetilde{f}| := f$ と定める.
(3) $\widetilde{f} = \widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{g}$ のとき $|\widetilde{f}| := |\widetilde{h}| \circ |\widetilde{g}|$ と定める.

**定義.** 形式射の射 $\mathfrak{b}\colon \widetilde{f} \Rightarrow \widetilde{g}$ に対して，$\mathcal{B}$ の 2-morphism $|\mathfrak{b}|\colon |\widetilde{f}| \Rightarrow |\widetilde{g}|$ を以下により定める.

(1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \alpha_{|\widetilde{h}||\widetilde{g}||\widetilde{f}|}$ とする.
(2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \alpha^{-1}_{|\widetilde{h}||\widetilde{g}||\widetilde{f}|}$ とする.
(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{i}_{\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \mathrm{id}_{|\widetilde{f}|}$ とする.
(4) $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}_{\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \lambda_{|\widetilde{f}|}$ とする.
(5) $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}^{-1}_{\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \lambda^{-1}_{|\widetilde{f}|}$ とする.
(6) $\mathfrak{b} = \mathfrak{r}_{\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \rho_{|\widetilde{f}|}$ とする.
(7) $\mathfrak{b} = \mathfrak{r}^{-1}_{\widetilde{f}}$ のとき $|\mathfrak{b}| := \rho^{-1}_{|\widetilde{f}|}$ とする.
(8) $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathfrak{c}$ ($\mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ は基本射) のとき $|\mathfrak{b}| := |\mathfrak{d}| \bullet |\mathfrak{c}|$ とする.
(9) $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{*}} \cdots \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{b}_0$ (各 $\mathfrak{b}_i$ は基本射) のとき $|\mathfrak{b}| := |\mathfrak{b}_n| * \cdots * |\mathfrak{b}_0|$ とする.

$\mathcal{B}$ を bicategory，$\mathcal{C}$ を strict 2-category，$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする.

**定義.** $\mathcal{B}$ の形式射 $\widetilde{f}$ に対して，$\mathcal{C}$ の 1-morphism $\langle\widetilde{f}\rangle$ と 2-morphism $\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}\colon F(|\widetilde{f}|) \Rightarrow \langle\widetilde{f}\rangle$ を以下のように定める.

(1) $\widetilde{f} = i_a$ のとき，$\langle\widetilde{f}\rangle := \mathrm{id}_{Fa}$ として $\overline{\varphi}^{\widetilde{f}} := \psi_a^{-1}\colon F(|\widetilde{f}|) \Rightarrow \mathrm{id}_{Fa}$ とする.
(2) $\widetilde{f} = f$ が $\mathcal{B}$ の 1-morphism のとき，$\langle\widetilde{f}\rangle := Ff$ として $\overline{\varphi}^{\widetilde{f}} := \mathrm{id}_{Ff}\colon F(|\widetilde{f}|) \Rightarrow Ff$ とする.
(3) $\widetilde{f} = \widetilde{h} \mathbin{\widetilde{\circ}} \widetilde{g}$ のとき，$\langle\widetilde{f}\rangle := \langle\widetilde{h}\rangle \circ \langle\widetilde{g}\rangle$ として $\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}$ を合成

$$F(|\widetilde{f}|) \xrightarrow{\varphi^{-1}_{|\widetilde{h}||\widetilde{g}|}} F(|\widetilde{h}|) \circ F(|\widetilde{g}|) \xrightarrow{\overline{\varphi}^{\widetilde{h}} \bullet \overline{\varphi}^{\widetilde{g}}} \langle\widetilde{h}\rangle \circ \langle\widetilde{g}\rangle$$

で定める.

**補題 40.** $\mathcal{B}$ を bicategory，$\mathcal{C}$ を strict 2-category，$F\colon \mathcal{B}\to\mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．$\mathfrak{b}$ を $\mathcal{B}$ における基本射として，$\widetilde{f} := s(\mathfrak{b})$，$\widetilde{g} := t(\mathfrak{b})$ とする．このとき $\langle\widetilde{f}\rangle = \langle\widetilde{g}\rangle$ であり，更に次の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
F(|\widetilde{f}|) \arrow[r, "F(|\mathfrak{b}|)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}"'] & F(|\widetilde{g}|) \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{g}}"] \\
\langle\widetilde{f}\rangle \arrow[r, equal] & \langle\widetilde{g}\rangle
\end{tikzcd}$$

証明. 基本射の構成に関する帰納法.

(1-1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ のとき.

示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である．

$$\begin{tikzcd}
F((|\widetilde{h}|\circ|\widetilde{g}|)\circ|\widetilde{f}|) \arrow[r, "F(\alpha_{|\widetilde{h}||\widetilde{g}||\widetilde{f}|})"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{h}|\circ(|\widetilde{g}|\circ|\widetilde{f}|)) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{h}|\circ|\widetilde{g}|)\circ F(|\widetilde{f}|) \arrow[d, "\varphi^{-1}\bullet\mathrm{id}"'] & F(|\widetilde{h}|)\circ F(|\widetilde{g}|\circ|\widetilde{f}|) \arrow[d, "\mathrm{id}\bullet\varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{h}|)\circ F(|\widetilde{g}|)\circ F(|\widetilde{f}|) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{h}}\bullet\overline{\varphi}^{\widetilde{g}}\bullet\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}"'] & F(|\widetilde{h}|)\circ F(|\widetilde{g}|)\circ F(|\widetilde{f}|) \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{h}}\bullet\overline{\varphi}^{\widetilde{g}}\bullet\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}"] \\
\langle\widetilde{h}\rangle\circ\langle\widetilde{g}\rangle\circ\langle\widetilde{f}\rangle \arrow[r, equal] & \langle\widetilde{h}\rangle\circ\langle\widetilde{g}\rangle\circ\langle\widetilde{f}\rangle
\end{tikzcd}$$

(1-2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{-1}_{\widetilde{h}\widetilde{g}\widetilde{f}}$ のとき，(1-1) と同様.

(2-1) $\mathfrak{b} = \mathfrak{i}_{\widetilde{f}}$ のとき，明らか.

(2-2) $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}_{\widetilde{f}}$ のとき.

示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である．

$$\begin{tikzcd}
F(\mathrm{id}\circ|\widetilde{f}|) \arrow[r, "F(\lambda_{|\widetilde{f}|})"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{f}|) \arrow[ddd, "\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}"] \\
F(\mathrm{id})\circ F(|\widetilde{f}|) \arrow[d, "\psi^{-1}\bullet\mathrm{id}"'] & \\
\mathrm{id}\circ F(|\widetilde{f}|) \arrow[ruu, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\bullet\overline{\varphi}^{\widetilde{f}}"'] & \\
\mathrm{id}\circ\langle\widetilde{f}\rangle \arrow[r, equal] & \langle\widetilde{f}\rangle
\end{tikzcd}$$

(2-3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{l}_{\widetilde{f}}^{-1}, \mathfrak{r}_{\widetilde{f}}, \mathfrak{r}_{\widetilde{f}}^{-1}$ のとき，(2-2) と同様.
(3) $\mathfrak{b} = \mathfrak{d} \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathfrak{c}$ のとき.
$\mathfrak{c}\colon \widetilde{f} \Rightarrow \widetilde{h}$, $\mathfrak{d}\colon \widetilde{g} \Rightarrow \widetilde{k}$ とすると示すべき可換性は次の図式であり，これは可換である.

$$\begin{tikzcd}
F(|\widetilde{g}| \circ |\widetilde{f}|) \arrow[r, "F(|\mathfrak{d}| \bullet |\mathfrak{c}|)"] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & F(|\widetilde{k}| \circ |\widetilde{h}|) \arrow[d, "\varphi^{-1}"] \\
F(|\widetilde{g}|) \circ F(|\widetilde{f}|) \arrow[r, "F(|\mathfrak{d}|) \bullet F(|\mathfrak{c}|)"] \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{g}} \bullet \overline{\varphi}^{\widetilde{f}}"'] & F(|\widetilde{k}|) \circ F(|\widetilde{h}|) \arrow[d, "\overline{\varphi}^{\widetilde{k}} \bullet \overline{\varphi}^{\widetilde{h}}"] \\
\langle \widetilde{g} \rangle \circ \langle \widetilde{f} \rangle \arrow[r, equal] & \langle \widetilde{k} \rangle \circ \langle \widetilde{h} \rangle
\end{tikzcd}$$

□

**定義.** 次の条件で定まる $\mathcal{B}$ の 2-morphism を基本 coherence 2-morphism と呼ぶ.

(1) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism とするとき，$\alpha_{hgf}$ と $\alpha_{hgf}^{-1}$ は基本 coherence 2-morphism である.

(2) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f\colon a \to b$ に対して $\mathrm{id}_f, \lambda_f, \lambda_f^{-1}, \rho_f, \rho_f^{-1}$ は基本 coherence 2-morphism である.

(3) $\gamma\colon f \Rightarrow g\colon a \to b$ と $\gamma'\colon h \Rightarrow k\colon b \to c$ が基本 coherence 2-morphism のとき $\gamma' \bullet \gamma$ も基本 coherence 2-morphism である.

(4) 以上により得られるもののみが基本 coherence 2-morphism である.

**定義.** $\mathcal{B}$ の 2-morphism $\gamma$ が coherence 2-morphism
$\iff$ ある基本 coherence 2-morphism $\gamma_0, \cdots, \gamma_n$ が存在して $\gamma = \gamma_n * \cdots * \gamma_0$ と書ける.

**定理 41** (coherence 定理). $\sigma, \tau$ を coherence 2-morphism として $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\tau)$, $\mathrm{cod}(\sigma) = \mathrm{cod}(\tau)$ とする．またある形式射 $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ とその間の射 $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}\colon \widetilde{f} \Rightarrow \widetilde{g}$ が存在して $|\mathfrak{b}| = \sigma$, $|\mathfrak{c}| = \tau$ となるとする．このとき $\sigma = \tau$ である.

*証明.* 定理 37 により strict 2-category $\mathcal{C}$ と biequivalence $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が存在する．このとき $F(\sigma) = F(\tau)$ を示せばよい.

$\because$) $f := \mathrm{dom}(\sigma)$ として $a := \mathrm{dom}(f)$, $b := \mathrm{cod}(f)$ とする．$F$ は biequivalence だから $F^{ab}\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ は圏同値，従って忠実関手である．故に $F(\sigma) = F(\tau)$ ならば $\sigma = \tau$ である.

仮定により存在する $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ を

$$\begin{aligned} \mathfrak{b} &= \mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{*}} \cdots \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{b}_0 \quad (\mathfrak{b}_i \colon \widetilde{f}_i \Rightarrow \widetilde{f}_{i+1} \text{ は基本射}), \\ \mathfrak{c} &= \mathfrak{c}_m \mathbin{\widetilde{*}} \cdots \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{c}_0 \quad (\mathfrak{c}_i \colon \widetilde{g}_i \Rightarrow \widetilde{g}_{i+1} \text{ は基本射}) \end{aligned}$$

と書く．$\widetilde{f} = \widetilde{f}_0 = \widetilde{g}_0$ であり $\widetilde{g} = \widetilde{f}_{n+1} = \widetilde{g}_{m+1}$ である．次の図式を考える．

$$\begin{tikzcd}
 & & F(|\widetilde{f}|) \arrow[dll, "F(|\mathfrak{b}_0|)"'] \arrow[drr, "F(|\mathfrak{c}_0|)"] \arrow[d, "\bar{\varphi}^{\widetilde{f}}"] & & \\
F(|\widetilde{f}_1|) \arrow[dr, "\bar{\varphi}^{\widetilde{f}_1}"] \arrow[dd, "F(|\mathfrak{b}_1|)"'] & & \langle \widetilde{f} \rangle \arrow[dl, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & & F(|\widetilde{g}_1|) \arrow[dl, "\bar{\varphi}^{\widetilde{g}_1}"'] \arrow[dd, "F(|\mathfrak{c}_1|)"] \\
 & \langle \widetilde{f}_1 \rangle \arrow[d] & & \langle \widetilde{g}_1 \rangle \arrow[d] & \\
\vdots \arrow[dd, "F(|\mathfrak{b}_{n-1}|)"'] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[dd, "F(|\mathfrak{c}_{m-1}|)"] \\
 & \langle \widetilde{f}_n \rangle \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & & \langle \widetilde{g}_m \rangle \arrow[dl, "\mathrm{id}"'] & \\
F(|\widetilde{f}_n|) \arrow[ur, "\bar{\varphi}^{\widetilde{f}_n}"'] \arrow[drr, "F(|\mathfrak{b}_n|)"'] & & \langle \widetilde{g} \rangle & & F(|\widetilde{g}_m|) \arrow[ul, "\bar{\varphi}^{\widetilde{g}_m}"] \arrow[dll, "F(|\mathfrak{c}_m|)"] \\
 & & F(|\widetilde{g}|) \arrow[u, "\bar{\varphi}^{\widetilde{g}}"] & &
\end{tikzcd}$$

この図式の中心は明らかに可換である．残りの四角は補題 40 により可換である．故にこの図式の一番外側は可換である．従って

$$F(\sigma) = F(|\mathfrak{b}|) = F(|\mathfrak{b}_n|) * \cdots * F(|\mathfrak{b}_0|) = F(|\mathfrak{c}_n|) * \cdots * F(|\mathfrak{c}_0|) = F(|\mathfrak{c}|) = F(\tau)$$

である． □

# 4 coherence 2-morphism の扱いについて

ここでは bicategory $\mathcal{B}$ に対して bicategory $\check{\mathcal{B}}$ と strict 2-category $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ と，strict な biequivalence $\mathrm{ev} \colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$, $[-] \colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ を構成する．

まず bicategory $\check{\mathcal{B}}$ を以下のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(\check{\mathcal{B}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ とする．
- $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism は，$\mathcal{B}$ の形式射のうち $i_a$ $(a \in \mathcal{B})$ を含まないものとする．(つまり $f \mathbin{\widetilde{\circ}} i_a$ などは $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism ではない．)

- $\check{f}, \check{g} \colon a \to b$ を $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism とするとき，$\check{f}$ から $\check{g}$ への 2-morphism とは，$\mathcal{B}$ の 2-morphism $\beta \colon |\check{f}| \Rightarrow |\check{g}|$ のこととする．
- $\check{\mathcal{B}}$ の垂直合成は $\mathcal{B}$ の垂直合成とする．これにより明らかに，$a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\check{\mathcal{B}}(a,b)$ は圏となる．
- $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して関手 $M^{abc} \colon \check{\mathcal{B}}(b,c) \times \check{\mathcal{B}}(a,b) \to \check{\mathcal{B}}(a,c)$ を次のように定める．
  - ⋆ $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{\check{f}} b \xrightarrow{\check{g}} c$ に対して $M^{abc}(\check{g}, \check{f}) := \check{g} \mathbin{\tilde{\circ}} \check{f}$.
  - ⋆ $\theta \colon \check{f} \Rightarrow \check{g} \colon a \to b,\ \tau \colon \check{h} \Rightarrow \check{k} \colon b \to c$ に対して $M^{abc}(\tau, \theta) := \tau \bullet \theta$
- $a \in \mathcal{B}$ に対して関手 $I^a \colon \mathbb{1} \to \check{\mathcal{B}}(a,a)$ を $I^a(*) := \mathrm{id}_a$ で定める．
- $a, b, c, d \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
& \check{\mathcal{B}}(c,d) \times \check{\mathcal{B}}(b,c) \times \check{\mathcal{B}}(a,b) \arrow[dl, "M^{bcd}\times\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times M^{abc}"] & \\
\check{\mathcal{B}}(b,d) \times \check{\mathcal{B}}(a,b) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\alpha^{abcd}"'] \arrow[dr, "M^{abd}"'] & & \check{\mathcal{B}}(c,d) \times \check{\mathcal{B}}(a,c) \arrow[dl, "M^{acd}"] \\
& \check{\mathcal{B}}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

を，$a \xrightarrow{\check{f}} b \xrightarrow{\check{g}} c \xrightarrow{\check{h}} d$ に対して

$$\alpha_{\check{h}\check{g}\check{f}} := \alpha_{|\check{h}||\check{g}||\check{f}|} \colon (|\check{h}| \circ |\check{g}|) \circ |\check{f}| \Rightarrow |\check{h}| \circ (|\check{g}| \circ |\check{f}|)$$

により定める．

- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して自然同型

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1} \times \check{\mathcal{B}}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times\mathrm{id}"'] & & \check{\mathcal{B}}(a,b) \\
& \check{\mathcal{B}}(b,b) \times \check{\mathcal{B}}(a,b) \arrow[ur, "M^{abb}"'] \arrow[u, phantom, "\lambda^{ab}\Uparrow\wr"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\check{\mathcal{B}}(a,b) \times \mathbb{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & & \check{\mathcal{B}}(a,b) \\
& \check{\mathcal{B}}(a,b) \times \check{\mathcal{B}}(a,a) \arrow[ur, "M^{aab}"'] \arrow[u, phantom, "\rho^{ab}\Uparrow\wr"] &
\end{tikzcd}$$

を $\check{f} \colon a \to b$ に対して

$$\lambda_{\check{f}} := \lambda_{|\check{f}|} \colon \mathrm{id}_b \circ |\check{f}| \Rightarrow |\check{f}|$$
$$\rho_{\check{f}} := \rho_{|\check{f}|} \colon |\check{f}| \circ \mathrm{id}_a \Rightarrow |\check{f}|$$

により定める．

- $\mathcal{B}$ が bicategory であることから，条件 (7), (8) が成り立つことが分かる．故に $\check{\mathcal{B}}$ は bicategory である．

以下では区別のため，bicategory $\check{\mathcal{B}}$ における合成を $\check{\circ}, \check{\bullet}, \check{*}$ で表す．

次に strict 2-functor $\mathrm{ev}\colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ を以下のように定義する．

- $a \in \check{\mathcal{B}}$ に対して $\mathrm{ev}(a) := a$ とする．
- $\check{f}$ を $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism とするとき $\mathrm{ev}(\check{f}) := |\check{f}|$ とする．
- $\check{\mathcal{B}}$ の 2-morphism $\beta\colon \check{f} \Rightarrow \check{g}$ に対して $\mathrm{ev}(\beta) := \beta\colon |\check{f}| \Rightarrow |\check{g}|$ と定義するとこれは関手 $\mathrm{ev}\colon \check{\mathcal{B}}(a,b) \to \mathcal{B}(a,b)$ を与える．
- このとき ev は strict 2-functor $\mathrm{ev}\colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ となる．

∵) ev の定義より明らかに，$\mathrm{id}_{\mathrm{ev}(a)} = \mathrm{ev}(\mathrm{id}_a)$ かつ

$$\begin{tikzcd}
& \check{\mathcal{B}}(b,c) \times \check{\mathcal{B}}(a,b) \arrow[dl, "\mathrm{ev}\times\mathrm{ev}"'] \arrow[dr, "M"] & \\
\mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[dr, "M"'] & = & \check{\mathcal{B}}(a,c) \arrow[dl, "\mathrm{ev}"] \\
& \mathcal{B}(a,c) &
\end{tikzcd}$$

である．(即ち $\varphi$ と $\psi$ は id である．) また

$$\mathrm{ev}(\alpha_{\check{h}\check{g}\check{f}}) = \alpha_{\mathrm{ev}(\check{h})\mathrm{ev}(\check{g})\mathrm{ev}(\check{f})}, \quad \mathrm{ev}(\lambda_{\check{f}}) = \lambda_{\mathrm{ev}(\check{f})}, \quad \mathrm{ev}(\rho_{\check{f}}) = \rho_{\mathrm{ev}(\check{f})}$$

だから条件 (5), (6) は成り立つ．

**補題 42.** $\sigma, \tau$ を $\check{\mathcal{B}}$ における coherence 2-morphism として $\mathrm{dom}(\sigma) = \mathrm{dom}(\tau)$, $\mathrm{cod}(\sigma) = \mathrm{cod}(\tau)$ とする．このとき $\sigma = \tau$ である．

証明. まず $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism $\check{f}$ に対して，$\check{\mathcal{B}}$ の形式射 $\check{f}^{\mathrm{f}}$ を次により定義する．

- $\check{f} = \mathrm{id}_a$ ($\mathrm{id}_a$ は $\mathcal{B}$ の id) のとき $\check{f}^{\mathrm{f}} := i_a$ とする．
- $\check{f} = f$ が $\mathcal{B}$ の 1-morphism で，$f \neq \mathrm{id}$ のとき $\check{f}^{\mathrm{f}} := f$ とする．
- $\check{f} = \check{h} \,\check{\circ}\, \check{g}$ のとき $\check{f}^{\mathrm{f}} := \check{h}^{\mathrm{f}} \,\tilde{\circ}\, \check{g}^{\mathrm{f}}$ とする．

定理 41 によれば，$\check{\mathcal{B}}$ における coherence 2-morphism $\sigma\colon \check{f} \Rightarrow \check{g}$ に対して，形式射の射 $\mathfrak{b}\colon \check{f}^{\mathrm{f}} \Rightarrow \check{g}^{\mathrm{f}}$ が存在して $|\mathfrak{b}| = \sigma$ となることを示せばよい．

(1) $\sigma = \alpha_{\check{h}\check{g}\check{f}}\colon (\check{h} \,\check{\circ}\, \check{g}) \,\check{\circ}\, \check{f} \Rightarrow \check{h} \,\check{\circ}\, (\check{g} \,\check{\circ}\, \check{f})$ のとき
$((\check{h} \,\check{\circ}\, \check{g}) \,\check{\circ}\, \check{f})^{\mathrm{f}} = (\check{h}^{\mathrm{f}} \,\tilde{\circ}\, \check{g}^{\mathrm{f}}) \,\tilde{\circ}\, \check{f}^{\mathrm{f}}$，$(\check{h} \,\check{\circ}\, (\check{g} \,\check{\circ}\, \check{f}))^{\mathrm{f}} = \check{h}^{\mathrm{f}} \,\tilde{\circ}\, (\check{g}^{\mathrm{f}} \,\tilde{\circ}\, \check{f}^{\mathrm{f}})$ だから $\mathfrak{b} := \mathfrak{a}_{\check{h}^{\mathrm{f}}\check{g}^{\mathrm{f}}\check{f}^{\mathrm{f}}}$ とすれば $\mathfrak{b}\colon ((\check{h} \,\check{\circ}\, \check{g}) \,\check{\circ}\, \check{f})^{\mathrm{f}} \Rightarrow (\check{h} \,\check{\circ}\, (\check{g} \,\check{\circ}\, \check{f}))^{\mathrm{f}}$ で $|\mathfrak{b}| = \sigma$ となる．

(2) $\sigma = \alpha^{-1}_{\check{h}\check{g}\check{f}}, \lambda_{\check{f}}, \lambda^{-1}_{\check{f}}, \rho_{\check{f}}, \rho^{-1}_{\check{f}}, \mathrm{id}_{\check{f}}$ のときも同様.

(3) $\sigma = \zeta \mathbin{\check{\bullet}} \tau$ ($\zeta, \tau$ は基本 coherence 2-morphism) のとき

$\tau \colon \check{h} \Rightarrow \check{k} \colon a \to b$, $\zeta \colon \check{p} \Rightarrow \check{q} \colon b \to c$ とする．帰納法により $\mathfrak{c} \colon \check{h}^{\mathrm{f}} \Rightarrow \check{k}^{\mathrm{f}}$, $\mathfrak{d} \colon \check{p}^{\mathrm{f}} \Rightarrow \check{q}^{\mathrm{f}}$ が存在して $|\mathfrak{c}| = \tau$, $|\mathfrak{d}| = \zeta$ となる．このとき $\mathfrak{b} := \mathfrak{d} \mathbin{\widetilde{\bullet}} \mathfrak{c}$ とすれば $|\mathfrak{b}| = |\mathfrak{d}| \mathbin{\check{\bullet}} |\mathfrak{c}| = \sigma$ である．

以上により $\sigma$ が基本 coherence 2-morphism の場合は証明できた.

(4) 一般の $\sigma$ のとき

$\sigma = \sigma_n \mathbin{\check{*}} \cdots \mathbin{\check{*}} \sigma_0$ ($\sigma_i \colon \check{f}_i \Rightarrow \check{f}_{i+1}$ は基本 coherence 2-morphism) と書く．上で示したことにより $\mathfrak{b}_i \colon \check{f}^{\mathrm{f}}_i \Rightarrow \check{f}^{\mathrm{f}}_{i+1}$ が存在して $|\mathfrak{b}_i| = \sigma_i$ となる．よって $|\mathfrak{b}_n \mathbin{\widetilde{*}} \cdots \mathbin{\widetilde{*}} \mathfrak{b}_0| = |\mathfrak{b}_n| \mathbin{\check{*}} \cdots \mathbin{\check{*}} |\mathfrak{b}_0| = \sigma$ である． □

**定理 43.** $\mathrm{ev} \colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}$ は biequivalence である.

**証明**. 定義より対象については全射だから，局所圏同値であることを示せばよい．そのために $a, b \in \mathcal{B}$ を取り関手 $\mathrm{ev} \colon \check{\mathcal{B}}(a, b) \to \mathcal{B}(a, b)$ を考える．

$\mathcal{B}$ の 1-morphism $f \colon a \to b$ に対して，$f$ を形式射 (即ち $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism) とみなせば $\mathrm{ev}(f) = f$ である．故に $\mathrm{ev} \colon \check{\mathcal{B}}(a, b) \to \mathcal{B}(a, b)$ は対象について全射である．

同様にして $\mathcal{B}$ の 2-morphism $\beta \colon f \Rightarrow g$ を $\check{\mathcal{B}}$ の 2-morphism $\beta \colon f \Rightarrow g$ とみなせば $\mathrm{ev}(\beta) = \beta$ である．故に ev は充満である．

最後に ev の定義より $\mathrm{ev}(\beta) = \beta$ だから ev は忠実である． □

次に bicategory $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ を以下のように定義する．

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{st}}) := \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ とする．
- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $\mathrm{Ob}(\check{\mathcal{B}}(a, b))$ の二項関係 $\sim$ を

$$\check{f} \sim \check{g} \iff \check{\mathcal{B}} \text{ の coherence 2-morphism } \check{f} \Rightarrow \check{g} \text{ が存在する}$$

により定める．$\sim$ は同値関係である．

> ∵) $\check{f}, \check{g}, \check{h} \colon a \to b$ とする．まず $\mathrm{id}_{\check{f}} \colon \check{f} \Rightarrow \check{f}$ は coherence 2-morphism だから $\check{f} \sim \check{f}$ である．
>
> 次に $\gamma \colon \check{f} \Rightarrow \check{g}$ が coherence 2-morphism であるとすると $\gamma^{-1} \colon \check{g} \Rightarrow \check{f}$ も coherence 2-morphism である．
>
> 最後に $\gamma \colon \check{f} \Rightarrow \check{g}$, $\gamma' \colon \check{g} \Rightarrow \check{h}$ とする．このとき明らかに $\gamma' \mathbin{\check{*}} \gamma$ も coherence 2-morphism である．

$\mathrm{Ob}(\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a, b)) := \mathrm{Ob}(\check{\mathcal{B}}(a, b))/{\sim}$ とする．また $\check{f}$ の属する同値類を $[\check{f}]$ と書く．

- $\check{\mathcal{B}}$ の 1-morphism $\check{f}, \check{g} \colon a \to b$ に対して

$$H([\check{f}],[\check{g}]) := \{\sigma \colon \check{k} \Rightarrow \check{l} \mid \check{k} \in [\check{f}],\ \check{l} \in [\check{g}]\}$$

として，$H([\check{f}],[\check{g}])$ の二項関係 $\sim$ を

$$\sigma \sim \tau \iff \text{ある coherence 2-morphism } \gamma,\ \gamma' \text{ が存在して } \gamma \mathbin{\check{*}} \sigma = \tau \mathbin{\check{*}} \gamma'$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma'"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma"] \\ \bullet \arrow[r, "\tau"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

により定める．$\sim$ は同値関係である．

∵) $\sigma, \tau, \theta \in H(\check{f}, \check{g})$ を任意に取る．

まず id は coherence 2-morphism であり $\mathrm{id} \mathbin{\check{*}} \sigma = \sigma \mathbin{\check{*}} \mathrm{id}$ が成り立つ．故に $\sigma \sim \sigma$ である．

次に $\sigma \sim \tau$ とする．即ちある $\gamma, \gamma'$ が存在して $\gamma \mathbin{\check{*}} \sigma = \tau \mathbin{\check{*}} \gamma'$ と書ける．このとき $\gamma^{-1} \mathbin{\check{*}} \tau = \sigma \mathbin{\check{*}} (\gamma')^{-1}$ だから $\tau \sim \sigma$ である．

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma'"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma"] \\ \bullet \arrow[r, "\tau"'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "(\gamma')^{-1}"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma^{-1}"] \\ \bullet \arrow[r, "\sigma"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

最後に $\sigma \sim \tau$，$\tau \sim \theta$ とする．即ちある $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ が存在して $\gamma_0 \mathbin{\check{*}} \sigma = \tau \mathbin{\check{*}} \gamma_1$，$\gamma_2 \mathbin{\check{*}} \tau = \theta \mathbin{\check{*}} \gamma_3$ と書ける．このとき

$$\gamma_2 \mathbin{\check{*}} \gamma_0 \mathbin{\check{*}} \sigma = \gamma_2 \mathbin{\check{*}} \tau \mathbin{\check{*}} \gamma_1 = \theta \mathbin{\check{*}} \gamma_3 \mathbin{\check{*}} \gamma_1$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma_0"] \\ \bullet \arrow[r, "\tau"'] \arrow[d, "\gamma_3"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma_2"] \\ \bullet \arrow[r, "\theta"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

だから $\sigma \sim \theta$ である．

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)}([\check{f}],[\check{g}]) := H([\check{f}],[\check{g}])/{\sim}$ とする．また $\sigma$ の属する同値類を $[\sigma]$ と書く．$[\sigma] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)}([\check{f}],[\check{g}])$ のとき $[\sigma]\colon [\check{f}] \Rightarrow [\check{g}]$ と書く．

- $[\sigma]\colon [\check{f}] \Rightarrow [\check{g}]$，$[\tau]\colon [\check{g}] \Rightarrow [\check{h}]$ とする．このとき $\mathrm{cod}(\sigma) \sim \check{g} \sim \mathrm{dom}(\tau)$ だから coherence 2-morphism $\gamma\colon \mathrm{cod}(\sigma) \Rightarrow \mathrm{dom}(\tau)$ が存在する．このとき $[\tau] * [\sigma] := [\tau \mathbin{\check{*}} \gamma \mathbin{\check{*}} \sigma]$ と定める．

$$\bullet \xrightarrow{\sigma} \mathrm{cod}(\theta) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{dom}(\tau) \xrightarrow{\tau} \bullet$$

これは well-defined である．

∵) $[\sigma'] = [\sigma]$, $[\tau'] = [\tau]$ で $\gamma'\colon \mathrm{cod}(\sigma') \Rightarrow \mathrm{dom}(\tau')$ を coherence 2-morphism とする．$\sigma \sim \sigma'$，$\tau \sim \tau'$ だから coherence 2-morphism $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ により $\gamma_0 \mathbin{\check{*}} \sigma = \sigma' \mathbin{\check{*}} \gamma_1$，$\gamma_2 \mathbin{\check{*}} \tau = \tau' \mathbin{\check{*}} \gamma_3$ とできる．つまり次の $(*)$ は可換である．

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma_1"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \bullet \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\gamma_0"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma_3"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \bullet \arrow[d, "\gamma_2"] \\
\bullet \arrow[r, "\sigma'"'] & \bullet \arrow[r, "\gamma'"'] & \bullet \arrow[r, "\tau'"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

また補題 42 により $(**)$ も可換である．故に $[\tau \mathbin{\check{*}} \gamma \mathbin{\check{*}} \sigma] = [\tau' \mathbin{\check{*}} \gamma' \mathbin{\check{*}} \sigma']$ が分かった．

- $\mathrm{id}_{[\check{f}]} := [\mathrm{id}_{\check{f}}]\colon [\check{f}] \Rightarrow [\check{f}]$ と定める．これは well-defined である．

∵) $[\check{f}] = [\check{g}]$ とする．即ち coherence 2-morphism $\gamma\colon \check{f} \Rightarrow \check{g}$ が存在する．このとき次の図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
\check{f} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\check{f}}"] \arrow[d, "\gamma"'] & \check{f} \arrow[d, "\gamma"] \\
\check{g} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\check{g}}"'] & \check{g}
\end{tikzcd}$$

$\gamma$ と $\mathrm{id}_{\check{f}}, \mathrm{id}_{\check{g}}$ が $\check{\mathcal{B}}$ の coherence 2-morphism だから補題 42 よりこの図式は可換である．よって $\mathrm{id}_{\check{f}} \sim \mathrm{id}_{\check{g}}$ である．

- 以上により $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)$ は圏になる．

∵) まず結合律を示すため $[\sigma]\colon [\check{f}] \Rightarrow [\check{g}]$，$[\tau]\colon [\check{g}] \Rightarrow [\check{h}]$，$[\theta]\colon [\check{h}] \Rightarrow [\check{k}]$ とす

る．$\gamma_0, \gamma_1$ を次の図式のように取る．

$$\bullet \xrightarrow{\sigma} \mathrm{cod}(\sigma) \xrightarrow{\gamma_0} \mathrm{dom}(\tau) \xrightarrow{\tau} \mathrm{cod}(\tau) \xrightarrow{\gamma_1} \mathrm{dom}(\theta) \xrightarrow{\theta} \bullet$$

このとき

$$\begin{aligned}([\theta] * [\tau]) * [\sigma] &= [(\theta \mathbin{\check{*}} \gamma_1 \mathbin{\check{*}} \tau) \mathbin{\check{*}} \gamma_0 \mathbin{\check{*}} \sigma] = [\theta \mathbin{\check{*}} \gamma_1 \mathbin{\check{*}} (\tau \mathbin{\check{*}} \gamma_0 \mathbin{\check{*}} \sigma)] \\ &= [\theta] * ([\tau] * [\sigma])\end{aligned}$$

である．

後は $\mathrm{id}_{[\check{g}]} * [\sigma] = [\sigma]$，$[\sigma] * \mathrm{id}_{[\check{f}]} = [\sigma]$ を示せばよい．それは定義より

$$\begin{aligned}\mathrm{id}_{[\check{g}]} * [\sigma] = [\mathrm{id}_{\check{g}}] * [\sigma] = [\mathrm{id}_{\check{g}} * \mathrm{id}_{\check{g}} * \sigma] = [\sigma] \\ [\sigma] * \mathrm{id}_{[\check{f}]} = [\sigma] * [\mathrm{id}_{\check{f}}] = [\sigma * \mathrm{id}_{\check{f}} * \mathrm{id}_{\check{f}}] = [\sigma]\end{aligned}$$

となり成り立つ．

- $[\check{f}] \colon a \to b$，$[\check{g}] \colon b \to c$ に対して $[\check{g}] \circ [\check{f}] := [\check{g} \mathbin{\check{\circ}} \check{f}]$ と定める．これは well-defined である．

∵) $[\check{f}] = [\check{k}]$，$[\check{g}] = [\check{l}]$ とする．即ち coherence 2-morphism $\gamma \colon \check{f} \Rightarrow \check{k}$ と $\gamma' \colon \check{g} \Rightarrow \check{l}$ が存在する．このとき $\gamma' \mathbin{\check{\bullet}} \gamma \colon \check{g} \mathbin{\check{\circ}} \check{f} \Rightarrow \check{l} \mathbin{\check{\circ}} \check{k}$ も coherence 2-morphism である．ゆえに $[\check{g} \mathbin{\check{\circ}} \check{f}] = [\check{l} \mathbin{\check{\circ}} \check{k}]$ である．

- $[\sigma] \colon [\check{f}] \Rightarrow [\check{g}] \colon a \to b$，$[\tau] \colon [\check{h}] \Rightarrow [\check{k}] \colon b \to c$ に対して $[\tau] \bullet [\sigma] := [\tau \mathbin{\check{\bullet}} \sigma]$ と定める．これは well-defined である．

∵) $[\sigma] = [\sigma']$，$[\tau] = [\tau']$ とする．即ち次のような coherence 2-morphism $\gamma_i$ が取れる．

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\gamma_1"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma_0"] \\ \bullet \arrow[r, "\sigma'"'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\gamma_3"'] & \bullet \arrow[d, "\gamma_2"] \\ \bullet \arrow[r, "\tau'"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{aligned}[\tau \mathbin{\check{\bullet}} \sigma] &= [(\gamma_2 \mathbin{\check{\bullet}} \gamma_0) \mathbin{\check{*}} (\tau \mathbin{\check{\bullet}} \sigma)] = [(\gamma_2 \mathbin{\check{*}} \tau) \mathbin{\check{\bullet}} (\gamma_0 \mathbin{\check{*}} \sigma)] \\ &= [(\tau' \mathbin{\check{*}} \gamma_3) \mathbin{\check{\bullet}} (\sigma' \mathbin{\check{*}} \gamma_1)] = [(\tau' \mathbin{\check{\bullet}} \sigma') \mathbin{\check{*}} (\gamma_3 \mathbin{\check{\bullet}} \gamma_1)] = [\tau' \mathbin{\check{\bullet}} \sigma']\end{aligned}$$

である．

- 上記の $\circ, \bullet$ は関手 $M^{abc} \colon \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,c)$ を定める．

∵) まず id については，$a \xrightarrow{[\check{f}]} b \xrightarrow{[\check{g}]} c$ に対して

$$\mathrm{id}_{[\check{g}]} \bullet \mathrm{id}_{[\check{f}]} = [\mathrm{id}_{\check{g}}] \bullet [\mathrm{id}_{\check{f}}] = [\mathrm{id}_{\check{g}} \mathbin{\check{\bullet}} \mathrm{id}_{\check{f}}] = [\mathrm{id}_{\check{g} \check{\circ} \check{f}}] = \mathrm{id}_{[\check{g} \check{\circ} \check{f}]} = \mathrm{id}_{[\check{g}] \circ [\check{f}]}$$

となるからよい．そこで interchange law について示せばよい．そのために $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left=50, "{[\check{f}]}"] \arrow[r, "{[\check{g}]}"] \arrow[r, bend right=50, "{[\check{h}]}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "{[\sigma]\Downarrow}"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "{[\tau]\Downarrow}"] & b \arrow[r, bend left=50, "{[\check{k}]}"] \arrow[r, "{[\check{l}]}"] \arrow[r, bend right=50, "{[\check{m}]}"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "{[\theta]\Downarrow}"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "{[\zeta]\Downarrow}"] & c
\end{tikzcd}$$

を考える．$\gamma_i$ を適当に取ると

$$\begin{aligned}
([\zeta] * [\theta]) \bullet ([\tau] * [\sigma]) &= ([\zeta \mathbin{\check{*}} \gamma_0 \mathbin{\check{*}} \theta]) \bullet ([\tau \mathbin{\check{*}} \gamma_1 \mathbin{\check{*}} \sigma]) \\
&= [(\zeta \mathbin{\check{*}} \gamma_0 \mathbin{\check{*}} \theta) \mathbin{\check{\bullet}} (\tau \mathbin{\check{*}} \gamma_1 \mathbin{\check{*}} \sigma)] \\
&= [(\zeta \mathbin{\check{\bullet}} \tau) \mathbin{\check{*}} (\gamma_0 \mathbin{\check{\bullet}} \gamma_1) \mathbin{\check{*}} (\theta \mathbin{\check{\bullet}} \sigma)] \\
&= [\zeta \mathbin{\check{\bullet}} \tau] * [\theta \mathbin{\check{\bullet}} \sigma] \\
&= ([\zeta] \bullet [\tau]) * ([\theta] \bullet [\sigma])
\end{aligned}$$

となる．

- $a \in \mathcal{B}$ に対して関手 $I^a \colon \mathbb{1} \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,a)$ を $I^a(*) := [\mathrm{id}_a]$ で定める．
- $a,b,c,d \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(c,d) \times \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(b,c) \times \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \arrow[dl, "M^{bcd} \times \mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id} \times M^{abc}"] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(b,d) \times \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \arrow[dr, "M^{abd}"'] & & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(c,d) \times \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,c) \arrow[dl, "M^{acd}"] \\
 & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,d) &
\end{tikzcd}$$

は可換である．

∵) $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ の図式

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "{[\check{f}]}"] \arrow[r, bend right, "{[\check{g}]}"'] \arrow[r, phantom, "{[\sigma]\Downarrow}"] & b \arrow[r, bend left, "{[\check{h}]}"] \arrow[r, bend right, "{[\check{k}]}"'] \arrow[r, phantom, "{[\tau]\Downarrow}"] & c \arrow[r, bend left, "{[\check{l}]}"] \arrow[r, bend right, "{[\check{m}]}"'] \arrow[r, phantom, "{[\theta]\Downarrow}"] & d
\end{tikzcd}$$

を考えると $\check{B}$ における $\alpha$ の自然性により

$$\begin{tikzcd}
(\check{l}\,\check{\circ}\,\check{h})\,\check{\circ}\,\check{f} \arrow[r, "\alpha_{\check{l}\check{h}\check{f}}"] \arrow[d, "(\theta\check{\bullet}\tau)\check{\bullet}\sigma"'] & \check{l}\,\check{\circ}\,(\check{h}\,\check{\circ}\,\check{f}) \arrow[d, "\theta\check{\bullet}(\tau\check{\bullet}\sigma)"] \\
(\check{m}\,\check{\circ}\,\check{k})\,\check{\circ}\,\check{g} \arrow[r, "\alpha_{\check{m}\check{k}\check{g}}"'] & \check{m}\,\check{\circ}\,(\check{k}\,\check{\circ}\,\check{g})
\end{tikzcd}$$

が可換だから

$$([\theta]\bullet[\tau])\bullet[\sigma] = [(\theta\,\check{\bullet}\,\tau)\,\check{\bullet}\,\sigma] = [(\theta\,\check{\bullet}\,(\tau\,\check{\bullet}\,\sigma))] = [\theta]\bullet([\tau]\bullet[\sigma])$$

である．

- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}\times\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "I^b\times\mathrm{id}"'] & & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)\times\mathbb{1} \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "\mathrm{id}\times I^a"'] & & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \\
& \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(b,b)\times\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \arrow[ur, "M^{abb}"'] & & & \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)\times\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,a) \arrow[ur, "M^{aab}"'] &
\end{tikzcd}$$

は可換である．

∵) $[\sigma]\colon [\check{f}] \Rightarrow [\check{g}]\colon a \to b$ に対して

$$[\mathrm{id}_{\mathrm{id}_b}]\bullet[\sigma] = [\mathrm{id}_{\mathrm{id}_b}\,\check{\bullet}\,\sigma] = [\sigma]$$
$$[\sigma]\bullet[\mathrm{id}_{\mathrm{id}_a}] = [\sigma\,\check{\bullet}\,\mathrm{id}_{\mathrm{id}_a}] = [\sigma]$$

である．

- 以上により $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ は strict 2-category である．

**命題 44.** $[-]$ は strict 2-functor $[-]\colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ を与える．

**証明**. まず定義より，$[-]$ は $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $\check{\mathcal{B}}(a,b) \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)$ を与える．また

$\mathrm{id}_{[a]} = [\mathrm{id}_a]$ である．更に

$$\begin{tikzcd}
& \check{\mathcal{B}}(b,c)\times\check{\mathcal{B}}(a,b) \arrow[ld, "{[-]\times[-]}"'] \arrow[rd, "M"] & \\
\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(b,c)\times\mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b) \arrow[rd, "M"'] & = & \check{\mathcal{B}}(a,c) \arrow[ld, "{[-]}"] \\
& \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,c) &
\end{tikzcd}$$

である．

定義より $[\alpha_{\check{h}\check{g}\check{f}}] = \mathrm{id}$，$[\lambda_{\check{f}}] = \mathrm{id}$，$[\rho_{\check{f}}] = \mathrm{id}$ だから条件 (5)，(6) は成り立つ． □

**定理 45.** $[-]\colon \check{\mathcal{B}} \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ は biequivalence である．

**証明**. 定義より対象については全射だから，局所圏同値であることを示せばよい．そのために $a, b \in \mathcal{B}$ を取り関手 $[-]\colon \check{\mathcal{B}}(a,b) \to \mathcal{B}^{\mathrm{st}}(a,b)$ を考える．これは定義より明らかに対象について全射であり，充満である．

そこで忠実であることを示せばよい．$\check{\mathcal{B}}$ の 2-morphism $\theta, \tau\colon \check{f} \Rightarrow \check{g}\colon a \to b$ が $[\theta] = [\tau]$ を満たすとする．定義より，ある coherence 2-morphism $\gamma, \gamma'$ が存在して

$$\begin{tikzcd}
\check{f} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\gamma'"'] & \check{g} \arrow[d, "\gamma"] \\
\check{f} \arrow[r, "\tau"'] & \check{g}
\end{tikzcd}$$

となる．補題 42 より $\gamma = \mathrm{id}$，$\gamma' = \mathrm{id}$ となるから $\theta = \tau$ である． □

さて，$a, b \in \mathcal{B}$ として $\mathcal{B}(a,b)$ における射の等式

$$\beta_n * \cdots * \beta_1 = \beta_{n+m} * \cdots * \beta_{n+1} \tag{46}$$

を考える (但し $n, m \geq 1$ とする)．ここで $\beta_i\colon f_i^0 \circ \cdots \circ f_i^{s_i} \Rightarrow f_{i+1}^0 \circ \cdots \circ f_{i+1}^{s_{i+1}}$ とする．このとき，$\beta_i$ を $\check{\mathcal{B}}$ の 2-morphism $\beta_i\colon f_i^0 \mathbin{\check{\circ}} \cdots \mathbin{\check{\circ}} f_i^{s_i} \Rightarrow f_{i+1}^0 \mathbin{\check{\circ}} \cdots \mathbin{\check{\circ}} f_{i+1}^{s_{i+1}}$ とみなせば，$\check{\mathcal{B}}$ における等式

$$\beta_n \mathbin{\check{*}} \cdots \mathbin{\check{*}} \beta_1 = \beta_{n+m} \mathbin{\check{*}} \cdots \mathbin{\check{*}} \beta_{n+1} \tag{47}$$

を考えることができる．このとき

$$\mathrm{ev}((47)\text{ の左辺}) = ((46)\text{ の左辺}), \quad \mathrm{ev}((47)\text{ の右辺}) = ((46)\text{ の右辺})$$

である．よって，ev が biequivalence だから，(46) と (47) は同値である．次に等式 (47) に $[-]$ を適用すると

$$[\beta_n] * \cdots * [\beta_0] = [\beta_{n+m}] * \cdots * [\beta_{n+1}] \tag{48}$$

を得る．$[-]$ が biequivalence だから (47) と (48) も同値である．

以上により，等式 (46) を示したいときは等式 (48) を示せばよい．

さて，ここである $\beta_i$ が coherence 2-morphism だったとする．すると定義より $\check{\mathcal{B}}$ においても $\beta_i$ は coherence 2-morphism である．更に $[-]$ が strict 2-functor だから，$[\beta_i]$ も coherence 2-morphism であるが $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ は strict 2-category だから結局 $[\beta_i] = \mathrm{id}$ となる．つまり等式 (48) においては coherence 2-morphism のことは考えなくてよいということになる．

以上の事実は次節以降で使っていく．(この事実とその使い方は [3] を参考にした．)

## 5 pasting theorem

bicategory の定義が分かれば，随伴や Kan 拡張は容易に bicategory の中で定義できる．これについては第 6 節で実際に扱うが，その前に注意すべきことがある．

例えば随伴の定義では (随伴関手のときと同様に) 次のような等式を扱う．

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & {}
\end{tikzcd} \quad = \quad \mathrm{id}_f \tag{49}$$

この等式の意味は分かると思うが，ところがこの等式には 2 つ問題がある．

まず左辺の合成は $f \circ \mathrm{id}_a \Rightarrow \mathrm{id}_b \circ f$ という 2-morphism なのに対して右辺は $f \Rightarrow f$ である．つまりドメインやコドメインが異なるので本当はこの等式を考えることはできないのであるが，勿論 $\lambda$ と $\rho$ を使えば $f \circ \mathrm{id}_a \cong f$ かつ $\mathrm{id}_b \circ f \cong f$ であるし，coherence 定理 (定理 41) によりこの同型は一意である．故にこの点に関しては本来の意図は誤解無く伝わると思うため，以下気にしないことにする．

もう 1 つの問題点は，ここでは左辺において $\varepsilon$ と $\eta$ を合成して $(\varepsilon \bullet f) * (f \bullet \eta)$ を考えようとしているが，この合成はできないことである．というのも

$$\mathrm{cod}(f \bullet \eta) = f \circ (u \circ f), \quad \mathrm{dom}(\varepsilon \bullet f) = (f \circ u) \circ f$$

だからである．故にここでは $\alpha_{fuf}^{-1}$ を補って

$$f \circ \mathrm{id}_a \xrightarrow{f \bullet \eta} f \circ (u \circ f) \xrightarrow{\alpha_{fuf}^{-1}} (f \circ u) \circ f \xrightarrow{\varepsilon \bullet f} \mathrm{id}_b \circ f$$

を考えなければならない．

従って厳密に言えばこの等式の左辺には $\alpha^{-1}$ を書き込むべきであるが，それでは図式が複雑になってしまう．とりあえず今回の場合はこの図式でも問題なく意味が伝わるだろうから $\alpha$ を省略してもいいと思うが，一般にこのような図式の等式を考えるとき出来れば $\alpha$ を省略したい．そこで問題となるのは

(1) このような「図式」が与えられたとき，$\alpha$ を補うことで常に「合成」ができるようになるか?

(2)「図式」を「合成」するとき，それは $\alpha$ の補い方や合成の順番によらず well-defined であるか?

これらを定式化したものがこの節で証明する pasting theorem (定理 57) である．

なおこの節の内容は [4] を参考にした．

## 5.1 グラフ

まず bicategory における「図式」を定式化するためにグラフを考える．ここではグラフとは写像 $G\colon E \to V^2$ のことをいう．更に，ここでは平面上に描かれているグラフのみを扱うことにする．また $2 \leq |E| < \infty$，$2 \leq |V| < \infty$ とする．また連結であるとする．

$V$ の元を $G$ の点，$E$ の元を $G$ の辺と呼び，$e \in E$ に対して $G(e) = \langle u, v \rangle$ のとき $u$ を $e$ の始点，$v$ を $e$ の終点と呼ぶ．$e$ の始点を $s(e)$，$e$ の終点を $t(e)$ で表す．グラフ $G$ を平面上に書いたとき，平面が各辺で分割されてできる各領域を面という．非有界な面がただ一つ存在するので，それを外面と呼ぶ．それ以外の面を内面と呼ぶ．面 $X$ の境界にある点，辺を $X$ の点，$X$ の辺という．

最後に，ここでは内面を持つグラフのみ扱うことにする．[*10]

**定義．** $G$ をグラフ，$u, v$ を $G$ の点とする．$u$ から $v$ へのパス (path) とは，有限列 $P = \langle v_0, e_1, v_1, \cdots, e_n, v_n \rangle$ であって以下の条件を満たすものをいう．

(1) $v_0, \cdots, v_n$ は $G$ の点で，$v_0 = u$，$v_n = v$ である．

---

[*10] グラフに対して色々と条件を付けたが，要するに図式として実際に現れるようなグラフしか考えないということである．

(2) $e_1, \cdots, e_n$ は $G$ の辺である．

(3) 各 $1 \leq i \leq n$ に対して「$s(e_i) = v_{i-1}$, $t(e_i) = v_i$」または「$s(e_i) = v_i$, $t(e_i) = v_{i-1}$」が成り立つ．

またこのとき $n$ を $P$ の長さという．

**定義．** グラフ $G$ の有向パス (directed path) とは，パス $P = \langle v_0, e_1, v_1, \cdots, e_n, v_n \rangle$ であって，各 $1 \leq i \leq n$ に対して「$s(e_i) = v_{i-1}$，$t(e_i) = v_i$」が成り立つものをいう．

**定義．** グラフ $G$ のパス $P = \langle v_0, e_1, v_1, \cdots, e_n, v_n \rangle$ に対して，$G$ のパス $P^*$ を $P^* := \langle v_n, e_n, v_{n-1}, \cdots, e_1, v_0 \rangle$ で定める．

**定義．** $G$ をグラフ，$P = \langle v_0, e_1, v_1, \cdots, e_n, v_n \rangle$，$Q = \langle v_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+m}, v_{n+m} \rangle$ を $G$ のパスとするとき

$$Q \circ P := \langle v_0, e_1, v_1, \cdots, e_n, v_n, e_{n+1}, \cdots, e_{n+m}, v_{n+m} \rangle$$

と定める．

**定義．** グラフ $G$ の面 $X$ の錨 (anchor) とは，組 $\langle s_X, t_X \, \mathrm{dom}_X, \mathrm{cod}_X \rangle$ であって以下の条件を満たすものである．

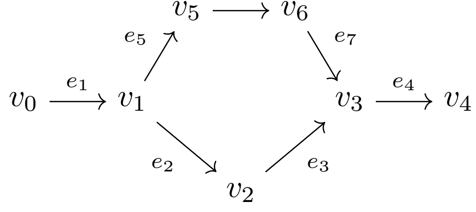
(1) $s_X, t_X$ は $X$ の点である．

(2) $\mathrm{dom}_X, \mathrm{cod}_X$ は $s_X$ から $t_X$ への $G$ の有向パスである．

(3) $X$ が内面の場合 $\mathrm{cod}_X^* \circ \mathrm{dom}_X$ は $X$ の境界を一周する有向パス (向きは $X$ が左側に来る向き) である．$X$ が外面の場合 $\mathrm{dom}_X^* \circ \mathrm{cod}_X$ は $X$ の境界を一周する有向パス (向きは $X$ が左側に来る向き) である．

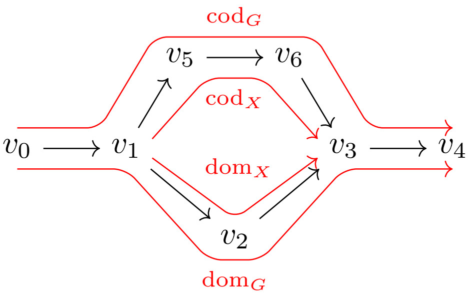
**定義．** 錨付グラフ (anchored graph) とは，グラフ $G$ であって各面 $X$ に対して錨が与えられているものをいう．またこのとき，$G$ の外面の錨を $\langle s_G, t_G, \mathrm{dom}_G, \mathrm{cod}_G \rangle$ で表す．

**例 50.** 次のグラフを考える．



ただ一つの内面を $X$ とする．このとき次のようにするとこれは錨付グラフとなる．

- $s_G := v_0$，$t_G := v_4$，$s_X := v_1$，$t_X := v_3$.
- $\mathrm{dom}_G := \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, e_4, v_4 \rangle$.
- $\mathrm{cod}_G := \langle v_0, e_1, v_1, e_5, v_5, e_6, v_6, e_7, v_3, e_4, v_4 \rangle$.
- $\mathrm{dom}_X := \langle v_1, e_2, v_2, e_3, v_3 \rangle$.
- $\mathrm{cod}_X := \langle v_1, e_5, v_5, e_6, v_6, e_7, v_3 \rangle$.



□

**定義．** $G, H$ を錨付グラフとして $\mathrm{cod}_G$ と $\mathrm{dom}_H$ の長さが等しいとする．このとき $\mathrm{cod}_G$ と $\mathrm{dom}_H$ を貼り合わせてできるグラフは標準的に錨付グラフになる．これを $G$ と $H$ の垂直合成といい $H * G$ で表す．

錨付グラフの垂直合成は明らかに結合的である．この垂直合成により錨付グラフを分割することを考える．

**定義．** 原始的錨付グラフ (atomic graph) とは，錨付グラフ $G$ であって内面がただ一つのものをいう．

**定義．** $G$ を錨付グラフとする．$G$ の貼付表現 (pasting scheme presentation) とは原始的錨付グラフの有限列 $G_1, \cdots, G_n$ であって $G \cong G_n * \cdots * G_1$ が成り立つものをいう．

$G \cong G_n * \cdots * G_1$ を貼付表現とするとき，この $n$ は明らかに $G$ の内面の個数と一致する．

## 5.2　括弧付け

次に bicategory において 3 つ以上の 1-morphism を合成する際に，どういう順番で合成するかを指定するために括弧付けというものを導入する．

**定義.** 括弧付け (bracketing) とは以下で定まるものをいう.

(1) $-$ は長さ 1 の括弧付けである.
(2) $b, c$ が長さ $n, m$ の括弧付けのとき, $[bc]$ は長さ $n+m$ の括弧付けである.
(3) 以上により定まるもののみが括弧付けである.

**定義.** 左正規括弧付け (left normalized bracketing) $b_n$ とは, 次で定まる長さ $n$ の括弧付けである.

(1) $b_1 := -$.
(2) $b_{n+1} := [b_n-]$

**例 51.** 長さ 1 の括弧付けは $b_1 = -$ のみである. 長さ 2 の括弧付けは $b_2 = [--]$ のみである. 長さ 3 の括弧付けは $b_3 = [[--]-]$ と $[-[--]]$ の 2 つのみである. 長さ 4 の括弧付けは $b_4 = [[[--]-]-]$, $[[-[--]]-]$, $[-[[--]-]]$, $[-[-[--]]]$, $[[--][--]]$ の 5 つのみである. □

**定義.** グラフ $G$ の括弧付有向パス (bracketed directed path) とは, $G$ の有向パス $P$ と括弧付け $b$ の組であって, $P$ と $b$ の長さが一致しているものをいう. この括弧付有向パスを $b[P]$ で表す.

$P = \langle v_0, e_1, \cdots, e_n, v_n \rangle$ のとき, $b[P]$ を $b[e_1, \cdots, e_n]$ のように表す. また $b$ が具体的に与えられているとき, 例えば $b = [[-[--]]-]$, $P = \langle v_0, e_1, \cdots, e_4, v_4 \rangle$ の場合は $b[P] = [[e_1[e_2e_3]]e_4]$ のように書く.

**定義.** 括弧付有向パス $b[P], c[Q]$ に対して $b[P] \cong c[Q] \iff b = c$.

**定義.** 括弧付錨付グラフ (bracketed graph) とは錨付グラフ $G$ であって, 以下の有向パス全てに括弧付けが与えられているものをいう.

(1) $\mathrm{dom}_G$ と $\mathrm{cod}_G$.
(2) 各内面 $X$ に対する $\mathrm{dom}_X$ と $\mathrm{cod}_X$.

※ ここで, この括弧付けは同じ有向パスに対しても別々の括弧付けが与えられてもよい. 例えば内面 $X \neq Y$ が $\mathrm{cod}_X = \mathrm{dom}_Y$ を満たすとき, $\mathrm{cod}_X$ と $\mathrm{dom}_Y$ の括弧付けは一致していなくてもよい (例 53 も参照). 従って任意の錨付グラフは括弧付錨付グラフにすることができる.

$G$ が括弧付錨付グラフのとき，$\mathrm{dom}_G$ などに与えられている括弧付けから得られる括弧付有向パスを $[\mathrm{dom}_G]$ などで表す．

**補題 52.** $G, H$ は括弧付錨付グラフで $[\mathrm{cod}_G] \cong [\mathrm{dom}_H]$ を満たすとする．このとき錨付グラフとしての垂直合成 $H * G$ は標準的に括弧付錨付グラフとなる． □

そこでこれを括弧付錨付グラフの垂直合成と呼び，区別のため $\circledast$ で表す．この垂直合成 $H \circledast G$ には $[\mathrm{cod}_G] \cong [\mathrm{dom}_H]$ という条件が付いていることに注意する．これによる分解を考える．

**定義.** $G$ が原始的括弧付錨付グラフ (bracketed atomic graph) とは，$G$ が括弧付錨付グラフかつ原始的錨付グラフであることをいう．

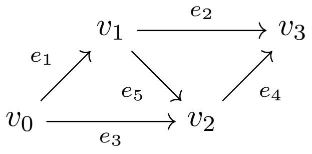
**定義.** 整合的原始的括弧付錨付グラフ (consistent graph) とは，原始的括弧付錨付グラフ $G$ であって，ある括弧付け $b_G$ により

$$\begin{aligned}[\mathrm{dom}_G] &= b_G[e_1, \cdots, e_m, [\mathrm{dom}_X], e'_1, \cdots, e'_m] \\ [\mathrm{cod}_G] &= b_G[e_1, \cdots, e_m, [\mathrm{cod}_X], e'_1, \cdots, e'_m]\end{aligned}$$

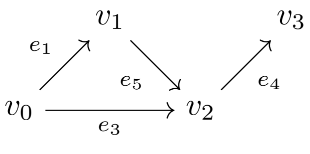
と書けることをいう．

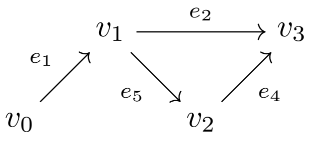
**定義.** $G$ を括弧付錨付グラフとする．$G$ の合成表現 (composition scheme presentation) とは整合的原始的括弧付錨付グラフの有限列 $G_1, \cdots, G_n$ であって $G \cong G_n \circledast \cdots \circledast G_1$ を満たすものをいう．

**例 53.** $G$ を次のグラフとする．



これは $\mathrm{dom}_G = \langle v_0, e_1, v_1, e_2, v_3 \rangle$，$\mathrm{cod}_G = \langle v_0, e_3, v_2, e_4, v_3 \rangle$ を満たす錨付グラフになる．このとき $G_1, G_2$ を次のような原始的錨付グラフとすれば $G = G_2 * G_1$ は貼付表現である．





さて，$G_1, G_2$ の内面の $\mathrm{dom}, \mathrm{cod}$ は長さが高々 2 しかないから，これらを整合的原始的括弧付錨付グラフにするには

$$[\mathrm{cod}_{G_1}] = [[e_1 e_5] e_4], \quad [\mathrm{dom}_{G_2}] = [e_1 [e_5 e_4]]$$

とするしかない．故に $G$ に括弧付けを与えて括弧付錨付グラフにした場合，合成表現は存在しない． □

例 53 の $G$ の合成表現が存在しないというのは，最初に説明した等式 (49) において $\varepsilon$ と $\eta$ が合成できないということに対応している．これを合成するために $\alpha_{fuf}^{-1}$ を補ったわけであるが，この操作に対応するのが次に定義する合成可能拡大である．これを使うと今考えている問題「図式の合成ができるか」は「括弧付錨付グラフの合成可能拡大は存在するか」に帰着することができる．これは定理 56 により判定ができる．

**定義.** 結合グラフ (associativity graph) とは，整合的原始的括弧付錨付グラフ $G$ であって，以下の条件を満たすものをいう．

(1) $G$ のただ一つの内面 $X$ は次のような形である．ここで各 $P_i, Q_i$ は有向パスである．

$$\begin{tikzcd}
 & v_4 \arrow[r, "Q_2"] & v_5 \arrow[dr, "Q_3"] & \\
v_0 \arrow[ur, "Q_1"] \arrow[dr, "P_1"'] & & & v_3 \\
 & v_1 \arrow[r, "P_2"'] & v_2 \arrow[ur, "P_3"'] &
\end{tikzcd}$$

(2) $s_X = v_0$，$t_X = v_3$，$\mathrm{dom}_X = P_3 \circ P_2 \circ P_1$，$\mathrm{cod}_X = Q_3 \circ Q_2 \circ Q_1$.

(3) $P_i$ と $Q_i$ は同じ長さで，同じ括弧付けを持つ (それを $[P_i], [Q_i]$ で表す).

(4) 次のいずれかが成り立つ．

- $[\mathrm{dom}_X] = \big[[P_1]\big[[P_2][P_3]\big]\big]$ かつ $[\mathrm{cod}_X] = \big[\big[[Q_1][Q_2]\big][Q_3]\big]$.
- $[\mathrm{dom}_X] = \big[\big[[P_1][P_2]\big][P_3]\big]$ かつ $[\mathrm{cod}_X] = \big[[Q_1]\big[[Q_2][Q_3]\big]\big]$.

**定義.** $G_1, G_2$ を括弧付錨付グラフ，$A$ を結合グラフとして $G := G_2 \circledast A \circledast G_1$ とする．このとき $A$ の内面を潰してできる括弧付錨付グラフを $G/A$ で表す．

定義から明らかに $[\mathrm{dom}_{G/A}] = [\mathrm{dom}_G]$，$[\mathrm{cod}_{G/A}] = [\mathrm{cod}_G]$ である．

**定義.** $G$ を括弧付錨付グラフとする．$G$ の合成可能拡大 (composition scheme extension)

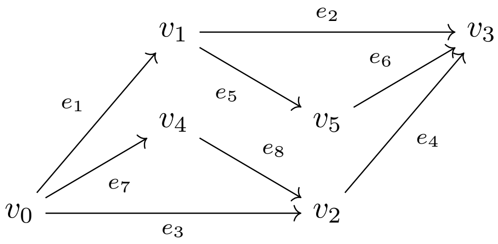
とは括弧付錨付グラフ $H$ であって以下の条件をみたすものをいう．

(1) $H$ は合成表現 $H \cong H_n \circledast \cdots \circledast H_1$ を持つ．

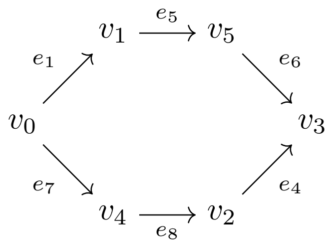
(2) 結合グラフからなる部分列 $\{A_1, \cdots, A_j\} \subsetneq \{H_1, \cdots, H_n\}$ が存在して $G \cong H/\{A_1, \cdots, A_j\} := ((H/A_1)/\cdots)/A_j$ と書ける．

$H$ が $G$ の合成可能拡大のとき $[\mathrm{dom}_G] = [\mathrm{dom}_{H/\{A_1,\cdots,A_j\}}] = [\mathrm{dom}_H]$，$[\mathrm{cod}_G] = [\mathrm{cod}_{H/\{A_1,\cdots,A_j\}}] = [\mathrm{cod}_H]$ である．

**例 54.** 例 53 の括弧付錨付グラフ $G, G_1, G_2$ を考える．$H$ を次のような括弧付錨付グラフとする．



また $A$ を次のような結合グラフとする．



但し $[\mathrm{dom}_A] = [[e_7e_8]e_4]$，$[\mathrm{cod}_A] = [e_1[e_5e_6]]$ とする．このとき $H \cong G_2 \circledast A \circledast G_1$ は合成表現であり，かつ $H/A \cong G$ である．故に $G$ は合成可能拡大 $H$ を持つ． □

**補題 55.** $B, B'$ は括弧付有向パスとして，$B$ と $B'$ の長さは等しいとする．この長さは 3 以上で，更に $B \ncong B'$ であるとする．このとき結合グラフの列 $A_1, \cdots, A_k$ であって次の条件を満たすものを取ることができる．

- 括弧付錨付グラフの垂直合成 $A := A_k \circledast \cdots \circledast A_1$ が可能である．
- $[\mathrm{dom}_A] \cong B$ かつ $[\mathrm{cod}_A] \cong B'$ である．

**証明**. $B$ の長さを $n \geq 3$ とする (条件より $B'$ の長さも $n$ である)．まず $B' = b_n[P']$ となっている場合を，$n$ に関する帰納法で示す．

$n = 3$ のとき．$B \ncong B'$ だから $B \cong [e_1[e_2 e_3]]$ かつ $B' \cong [[e'_1 e'_2]e'_3]$ と書ける．よって明らかである．

$n \geq 4$ のとき．括弧付けの定義より，ある括弧付有向パス $B_1, B_2$ を使って $B = [B_1 B_2]$ と書ける．

(1) $B_2$ の長さが 1 の場合．

$P' = e' \circ Q'$ と書けば $B' = b_n[P'] = [b_{n-1}[Q'], e']$ となる．そこで $B_1$ と $b_{n-1}[Q']$ に帰納法の仮定を使って，結合グラフの列 $A'_1, \cdots, A'_k$ を次の条件を満たすように取ることができる．

- 括弧付錨付グラフの垂直合成 $A' := A'_k \circledast \cdots \circledast A'_1$ が可能である．
- $[\mathrm{dom}_{A'}] = B_1$ かつ $[\mathrm{cod}_{A'}] = b_{n-1}[Q']$ である．

このとき各 $A'_i$ に辺 $e$ 付け加えた結合グラフを $A_i$ とすればよい．

(2) $B_2$ の長さが 1 より大きい場合．

更に $B_2 = [B_{21} B_{22}]$ と書く．このとき結合グラフ $A_0$ を

$$[\mathrm{dom}_{A_0}] = B = [B_1[B_{21} B_{22}]], \quad [\mathrm{cod}_{A_0}] = [[B_1 B_{21}]B_{22}]$$

となるように取ることができる．もし $B_{22}$ の長さが 1 であれば，(1) を $[B_1 B_{21}]B_{22}$ と $B'$ に対して使うことで結合グラフ $A_1, \cdots, A_k$ を

- 括弧付錨付グラフの垂直合成 $A = A_k \circledast \cdots \circledast A_1$ が可能である．
- $[\mathrm{dom}_A] = [[B_1 B_{21}]B_{22}]$ かつ $[\mathrm{cod}_A] = B'$ である．

となるように取れる．このとき $A_0, A_1, \cdots, A_k$ が条件を満たす．$B_{22}$ の長さが 1 より大きい場合は，同じ操作を繰り返していけばよい．

以上により $B' = b_n[P']$ の場合は示せた．

同様にして $B = b_n[P]$ の場合も証明できる．

最後に一般の場合，$P''$ を長さ $n$ の有向パスとして $B'' := b_n[P'']$ とする．上で示したことから，結合グラフ $A_1, \cdots, A_k, A'_1, \cdots, A'_l$ を

- 括弧付錨付グラフの垂直合成 $A = A_k \circledast \cdots \circledast A_1$ が可能である．
- $[\mathrm{dom}_A] = B$ かつ $[\mathrm{cod}_A] = B''$ である．
- 括弧付錨付グラフの垂直合成 $A' = A'_l \circledast \cdots \circledast A'_1$ が可能である．
- $[\mathrm{dom}_{A'}] = B''$ かつ $[\mathrm{cod}_{A'}] = B'$ である．

となるように取ることができる．このとき $A_1, \cdots, A_k, A'_1, \cdots, A'_l$ が条件を満たす． □

**定理 56.** 括弧付錨付グラフ $G$ に対して

$$G \text{ は合成可能拡大を持つ} \Longleftrightarrow G \text{ は (錨付グラフとして) 貼付表現を持つ}.$$

**証明.** $(\Longrightarrow)$ $G$ が合成可能拡大を持つとする．即ち上記の条件を満たす $H \cong H_n \circledast \cdots \circledast H_1$ が存在する．このとき $\{G_1, \cdots, G_{n-j}\} = \{H_1, \cdots, H_n\} \setminus \{A_1, \cdots, A_j\}$ と書く．各 $G_i$ は整合的原始的括弧付錨付グラフだから，これらは原始的錨付グラフである．すると垂直合成 $G_{n-j} * \cdots * G_1$ を考えることができる．このとき $G \cong G_{n-j} * \cdots * G_1$ だから $G$ は貼付表現を持つ．

$(\Longleftarrow)$ $G \cong G_n * \cdots * G_1$ を貼付表現とする．$G_i$ の唯一の内面を $X_i$ とする．$G_i$ は次のようになっている．

$$\begin{tikzcd}
s_{G_i} \arrow[r, "P_i"] & s_{X_i} \arrow[r, bend left, "\mathrm{cod}_{X_i}"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{dom}_{X_i}"'] & t_{X_i} \arrow[r, "Q_i"] & t_{G_i}
\end{tikzcd}$$

この $G_i$ に次のように括弧付けを定める．

- $\mathrm{dom}_{X_i}$，$\mathrm{cod}_{X_i}$ の括弧付けは $G$ に与えられている括弧付けを使う．
- $[\mathrm{dom}_{G_i}] := b[b[P_i], [\mathrm{dom}_{X_i}], b[Q_i]]$，$[\mathrm{cod}_{G_i}] := b[b[P_i], [\mathrm{cod}_{F_i}], b[Q_i]]$．但し $b$ は左正規括弧付けを表す．

これにより $G_i$ は括弧付錨付グラフになる．補題 55 より，結合グラフの列 $A_{i1}, \cdots, A_{ik_i}$ であって次の条件を満たすものを取ることができる．

- 括弧付錨付グラフの垂直合成 $A_i := A_{ik_i} \circledast \cdots \circledast A_{i1}$ が可能である．
- $i = 0$ のとき，$[\mathrm{dom}_{A_0}] \cong [\mathrm{dom}_G]$ かつ $[\mathrm{cod}_{A_0}] \cong [\mathrm{dom}_{G_1}]$ である．
- $0 < i < n$ のとき，$[\mathrm{dom}_{A_i}] \cong [\mathrm{cod}_{G_i}]$ かつ $[\mathrm{cod}_{A_i}] \cong [\mathrm{dom}_{G_{i+1}}]$ である．
- $i = n$ のとき，$[\mathrm{dom}_{A_n}] \cong [\mathrm{cod}_{G_n}]$ かつ $[\mathrm{cod}_{A_n}] \cong [\mathrm{dom}_G]$ である．

このとき括弧付錨付グラフの垂直合成

$$H := A_n \circledast G_n \circledast A_{n-1} \circledast G_{n-1} \circledast \cdots \circledast G_2 \circledast A_1 \circledast G_1 \circledast A_0$$

を考えることができる．この $H$ は明らかに $G$ の合成可能拡大となる． □

## 5.3　図式の合成

以下では $\mathcal{B}$ を bicategory，$G$ を括弧付錨付グラフとする．

**定義.** $\mathcal{B}$ における $G$ 型の 1-図式 (1-skeletal $G$-diagram in $\mathcal{B}$) とは次を満たす関数 $T$ である．

(1) $G$ の点 $v$ に対して $T(v)$ は $\mathcal{B}$ の対象である．
(2) $G$ の辺 $e$ に対して $T(e)\colon T(s(e)) \to T(t(e))$ は $\mathcal{B}$ の 1-morphism である．

**定義.** $T$ を $\mathcal{B}$ における $G$ 型の 1-図式とする．$G$ の括弧付有向パス $B$ に対して $\mathcal{B}$ の 1-morphism $T(B)$ を以下により定める．

(1) $e$ が辺で $B = [e]$ のとき $T(B) := T(e)$ とする．
(2) $B = [B_0 B_1]$ のとき $T(B) := T(B_1) \circ T(B_0)$ とする．

**定義.** $\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式 ($G$-diagram in $\mathcal{B}$) とは，$\mathcal{B}$ における $G$ 型の 1-図式 $T$ であって，更に $G$ の内面 $X$ に対して $\mathcal{B}$ の 2-morphism $T(X)\colon T[\mathrm{dom}_X] \Rightarrow T[\mathrm{cod}_X]$ が与えられていることをいう．

**定義.** $b$ を長さ $n$ の括弧付けとして，$\mathcal{B}$ の次のような 2-morphism $\beta_1, \cdots, \beta_n$ を取る．

$$\begin{tikzcd} a_0 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta_1"] & a_1 \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta_2"] & \cdots \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\beta_n"] & a_n \end{tikzcd}$$

このとき 2-morphism $b[\beta_1, \cdots, \beta_n]$ を次のように定める．

(1) $n = 1$ のとき $b[\beta_1] := \beta_1$ とする．
(2) $n > 1$ で $b = [cd]$ のとき $b[\beta_1, \cdots, \beta_n] := d[\beta_{m+1}, \cdots, \beta_n] \bullet c[\beta_1, \cdots, \beta_m]$ とする．(但し $c$ の長さを $m$ とする．)

**定義.** $G$ は合成表現 $G \cong G_n \circledast \cdots \circledast G_1$ を持つとして，$T$ を $\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式とする．このとき $T$ の合成 (composite) とは以下により定まる $\mathcal{B}$ の 2-morphism $|T|$ である．

(1) $G_i$ のただ一つの内面を $X_i$ として $\theta_{G_i} := b_{G_i}[\mathrm{id}, \cdots, \mathrm{id}, T(X_i), \mathrm{id}, \cdots, \mathrm{id}]$ と定める．$\theta_{G_i}\colon T[\mathrm{dom}_{G_i}] \Rightarrow T[\mathrm{cod}_{G_i}]$ は 2-morphism である．
(2) $|T| := \theta_{G_n} * \cdots * \theta_{G_1}$ と定める．

**定義.** $G$ は貼付表現を持つとして，$T$ を $\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式とする．このとき $T$ の合

成 (composite) とは以下により定まる $\mathcal{B}$ の 2-morphism $|T|$ である．

(1) まず $H$ を $G$ の合成可能拡大とする．(定理 56 より取れる．)

(2) 次に $H$ 型の図式 $T_H$ を以下により定める．

- $H \cong H_n \circledast \cdots \circledast H_1,\ \{A_1, \cdots, A_j\} \subsetneq \{H_1, \cdots, H_n\},\ G \cong H/\{A_1, \cdots, A_j\}$ とする．また標準的なグラフ準同型を $p\colon H \to G$ とする．
- $H$ の点 $v$ に対して $T_H(v) := T(p(v))$ とする．
- $H$ の辺 $e$ に対して $T_H(e) := T(p(e))$ とする．
- $H$ の内面 $X$ に対して $T_H(X)\colon T_H[\mathrm{dom}_X] \Rightarrow T_H[\mathrm{cod}_X]$ を次のように定める．
  - (a) $X$ が $A_1, \cdots, A_j$ に属さない $H$ の内面 $X$ のとき，対応する $G$ の面を $X_G$ としたとき $T_H(X) := T(X_G)$ とする．
  - (b) $X$ が $A_i$ の内面で $[\mathrm{dom}_X] = \big[[P_1]\big[[P_2][P_3]\big]\big]$, $[\mathrm{cod}_X] = \big[\big[[Q_1][Q_2]\big][Q_3]\big]$ のとき，$T_H(X) := \alpha_{T_H[P_3], T_H[P_2], T_H[P_1]}$ とする．
  - (c) $X$ が $A_i$ の内面で $[\mathrm{dom}_X] = \big[\big[[P_1][P_2]\big][P_3]\big]$, $[\mathrm{cod}_X] = \big[[Q_1]\big[[Q_2][Q_3]\big]\big]$ のとき，$T_H(X) := \alpha^{-1}_{T_H[P_3], T_H[P_2], T_H[P_1]}$ とする．

(3) $|T| := |T_H|$ と定める．

**定理 57** (pasting theorem)**.** $G$ を貼付表現を持つ括弧付錨付グラフとするとき，$\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式 $T$ の合成 $|T|$ は well-defined である．

**証明**. $H, H'$ を $G$ の合成可能拡大として $|T_H| = |T_{H'}|$ を示せばよい．

$$H = H_{j+n} \circledast \cdots \circledast H_1,\ \{A_1, \cdots, A_j\} \subsetneq \{H_1, \cdots, H_{j+n}\},\ G \cong H/\{A_1, \cdots, A_j\}.$$
$$H' = H'_{k+n} \circledast \cdots \circledast H'_1,\ \{A'_1, \cdots, A'_k\} \subsetneq \{H'_1, \cdots, H'_{k+n}\},\ G \cong H'/\{A'_1, \cdots, A'_k\}.$$

と書いておく．定義より

$$|T_H| = \theta_{H_{j+n}} * \cdots * \theta_{H_1}, \quad |T_{H'}| = \theta_{H'_{k+n}} * \cdots * \theta_{H'_1}$$

であるから，$\mathcal{B}$ における等式 $|T_H| = |T_{H'}|$ を示すには $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ で考えて

$$[\theta_{H_{j+n}}] * \cdots * [\theta_{H_0}] = [\theta_{H'_{j+n}}] * \cdots * [\theta_{H'_0}]$$

を示せばよい (第 4 節の最後を参照)．ここで $[\theta_{A_i}] = \mathrm{id}$ であるから

$$\{G_1, \cdots, G_n\} = \{H_1, \cdots, H_{j+n}\} \setminus \{A_1, \cdots, A_j\}$$
$$\{G'_1, \cdots, G'_n\} = \{H'_1, \cdots, H'_{k+n}\} \setminus \{A'_1, \cdots, A'_k\}$$

と書いたとき

$$[\theta_{G_n}] * \cdots * [\theta_{G_1}] = [\theta_{G'_n}] * \cdots * [\theta_{G'_1}]$$

を示せばよい．

strict 2-category $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ における $G$ 型の図式 $S$ を次のように定義する．

- $G$ の点 $v$ に対して $S(v) := T(v)$.
- $G$ の辺 $e$ に対して $S(e) := [T(e)]$.
- $G$ の面 $X$ に対して $S(X) := [T(X)]$.

このとき明らかに $[\theta_{G_n}] * \cdots * [\theta_{G_1}] = |S| = [\theta_{G'_n}] * \cdots * [\theta_{G'_0}]$ である． □

最後に $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory，$F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor としたとき図式の合成が $F$ と「交換」することを見る．

**定義．** $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor として $T$ を $\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式とする．このとき $\mathcal{C}$ における $G$ 型の図式 $FT$ を次のように定める．

- $G$ の点 $v$ に対して $FT(v) := F(T(v))$ とする．
- $G$ の辺 $e$ に対して $FT(e) := F(T(e))$ とする．また長さ 1 の括弧付有向パス $[e]$ に対しても $FT[e] := F(T(e))$ とする．また $\sigma^T_{[e]} := \mathrm{id} \colon FT[e] \Rightarrow F(T[e])$ とする．
- $B = [B_0 B_1]$ を長さ 2 以上の括弧付有向パスとするとき $FT(B) := FT(B_1) \circ FT(B_0)$ とする．また $\sigma^T_B \colon FT(B) \Rightarrow F(T(B))$ を合成

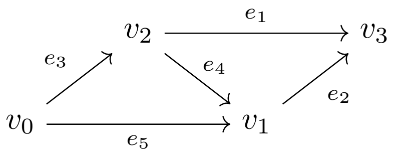
  $$FT(B_1) \circ FT(B_0) \xrightarrow{\sigma^T_{B_1} \bullet \sigma^T_{B_0}} F(T(B_1)) \circ F(T(B_0)) \xrightarrow{\varphi^F} F(T(B_1) \circ T(B_0))$$

  で定める．
- $G$ の面 $X$ に対して $FT(X) \colon FT[\mathrm{dom}_X] \Rightarrow FT[\mathrm{cod}_X]$ を合成

  $$FT[\mathrm{dom}_X] \xrightarrow{\sigma^T_{[\mathrm{dom}_X]}} F(T[\mathrm{dom}_X]) \xrightarrow{F(T(X))} F(T[\mathrm{cod}_X]) \xrightarrow{(\sigma^T_{[\mathrm{cod}_X]})^{-1}} FT[\mathrm{cod}_X]$$

  で定める．

**例 58.** 括弧付錨付グラフ $G$ を次により定める (例 53).



ここで左の面を $X$，右の面を $Y$ とする．bicategory $\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式を次により定まるものとする．

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

即ち次のようになる．

- $T(v_0) = T(v_1) = a$，$T(v_2) = T(v_3) = b$.
- $T(e_1) = \mathrm{id}_a$，$T(e_2) = T(e_3) = f$，$T(e_4) = u$，$T(e_5) = \mathrm{id}_b$.
- $T[\mathrm{dom}_X] = \mathrm{id}_a$，$T[\mathrm{cod}_X] = T[e_3e_4] = T(e_4) \circ T(e_3) = u \circ f$.
- $T[\mathrm{dom}_Y] = T[e_4e_2] = T(e_2) \circ T(e_4) = f \circ u$，$T[\mathrm{cod}_Y] = T[e_5] = \mathrm{id}_b$.
- $T(X) = \eta$，$T(Y) = \varepsilon$.

このとき pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ に対して，$\mathcal{C}$ における $G$ 型の図式 $FT$ は定義より

- $FT(v_0) = FT(v_1) = Fa$，$FT(v_2) = FT(v_3) = Fb$.
- $FT(e_1) = F(\mathrm{id}_a)$，$FT(e_2) = FT(e_3) = Ff$，$FT(e_4) = Fu$，$FT(e_5) = F(\mathrm{id}_b)$.
- $F(T[\mathrm{cod}_X]) = F(T(e_4) \circ T(e_3)) = F(u \circ f)$.
- $FT[\mathrm{cod}_X] = FT(e_4) \circ FT(e_3) = Fu \circ Ff$.
- $F(T[\mathrm{dom}_Y]) = F(T(e_2) \circ T(e_4)) = F(f \circ u)$.
- $FT[\mathrm{dom}_Y] = FT(e_2) \circ FT(e_4) = Ff \circ Fu$.
- $FT(X) = \bigl(F(\mathrm{id}_a) \xrightarrow{F\eta} F(u \circ f) \xrightarrow{(\varphi^F)^{-1}} Fu \circ Ff\bigr)$
- $FT(Y) = \bigl(Ff \circ Fu \xrightarrow{\varphi^F} F(f \circ u) \xrightarrow{F\varepsilon} F(\mathrm{id}_b)\bigr)$

となる．即ち

$$\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[rr, "F\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow FT(X)"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow FT(Y)"] & Fb \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F\mathrm{id}_a"'] & {} & Fa \arrow[ur, "Ff"'] &
\end{tikzcd}$$

である．そこで以下では簡単のため $FT(X)$ のような 2-morphism を単に $F\eta$ で表す．こ

の記法を使うと，図式 $FT$ は

$$\begin{tikzcd}
 & Fb \arrow[rr, "F\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow F\eta"] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow F\varepsilon"] & Fb \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F\mathrm{id}_a"'] & {} & Fa \arrow[ur, "Ff"'] & 
\end{tikzcd}$$

となる. □

**定理 59.** $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor として $T$ を $\mathcal{B}$ における $G$ 型の図式とする．このとき次の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd}
FT[\mathrm{dom}_G] \arrow[r, "\sigma^T_{[\mathrm{dom}_G]}"] \arrow[d, "|FT|"'] & F(T[\mathrm{dom}_G]) \arrow[d, "F(|T|)"] \\
FT[\mathrm{cod}_G] \arrow[r, "\sigma^T_{[\mathrm{cod}_G]}"'] & F(T[\mathrm{cod}_G])
\end{tikzcd}$$

**証明**. $H \cong H_n \circledast \cdots \circledast H_1$ を $G$ の合成可能拡大として，これにより定まる 2-morphism $|T|$ を $|T| = \theta_n * \cdots * \theta_1$ と書く．同様にして $|FT|$ を $|FT| = \tau_n * \cdots * \tau_1$ と書く．このとき次の図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
FT[\mathrm{dom}_G] \arrow[r, "\sigma^T_{[\mathrm{dom}_G]}"] \arrow[d] & F(T[\mathrm{dom}_G]) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
FT[\mathrm{dom}_{H_i}] \arrow[r, "\sigma^T_{[\mathrm{dom}_{H_i}]}"] \arrow[d, "\tau_i"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & F(T[\mathrm{dom}_{H_i}]) \arrow[d, "F\theta_i"] \\
FT[\mathrm{cod}_{H_i}] \arrow[r, "\sigma^T_{[\mathrm{cod}_{H_i}]}"'] \arrow[d] & F(T[\mathrm{cod}_{H_i}]) \arrow[d] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
FT[\mathrm{cod}_G] \arrow[r, "\sigma^T_{[\mathrm{cod}_G]}"'] & F(T[\mathrm{cod}_G])
\end{tikzcd}$$

左の縦列の合成が $|FT|$ で右の縦列の合成が $F(|T|)$ である．よって $(*)$ が可換であることを示せばよい.

(1) $H_i$ がある $A_j$ になっているとき．$H_i$ の唯一の内面を $X_i$ とすると $H_i$ は次のようなグラフである．

$$\begin{tikzcd}
 & & & v_4 \arrow[r, "Q_2"] & v_2 \arrow[dr, "Q_3"] & & & \\
s_G \arrow[r, "e_1"] & \cdots \arrow[r, "e_n"] & s_{H_i} \arrow[ur, "Q_1"] \arrow[dr, "P_1"'] & & & t_{H_i} \arrow[r, "e'_1"] & \cdots \arrow[r, "e'_m"] & t_G \\
 & & & v_1 \arrow[r, "P_2"'] & v_5 \arrow[ur, "P_3"'] & & &
\end{tikzcd}$$

どちらの場合も同様であるから $[\mathrm{dom}_{X_i}] = \big[[P_1]\big[[P_2][P_3]\big]\big]$，$[\mathrm{cod}_{X_i}] = \big[\big[[Q_1][Q_2]\big][Q_3]\big]$ とする．また $f := T[P_1] = T[Q_1]$，$g := T[P_2] = T[Q_2]$，$h := T[P_3] = T[Q_3]$ と書く．このときある括弧付け $b$ により

$$\begin{aligned}
T[\mathrm{dom}_{H_i}] &= b[T(e_1), \cdots, T(e_n), (h \circ g) \circ f, T(e'_1), \cdots, T(e'_m)] \\
T[\mathrm{cod}_{H_i}] &= b[T(e_1), \cdots, T(e_n), h \circ (g \circ f), T(e'_1), \cdots, T(e'_m)] \\
\theta_i &= b[\mathrm{id}, \cdots, \mathrm{id}, \alpha_{hgf}, \mathrm{id}, \cdots, \mathrm{id}] \\
\tau_i &= b[\mathrm{id}, \cdots, \mathrm{id}, \alpha_{FhFgFf}, \mathrm{id}, \cdots, \mathrm{id}]
\end{aligned}$$

と書ける．よって $(*)$ の可換性を示すためには

$$\begin{tikzcd}
(Fh \circ Fg) \circ Ff \arrow[r, "\varphi^F \bullet Ff"] \arrow[d, "\alpha_{FhFgFf}"'] & F(h \circ g) \circ Ff \arrow[r, "\varphi^F"] & F((h \circ g) \circ f) \arrow[d, "F\alpha_{hgf}"] \\
Fh \circ (Fg \circ Ff) \arrow[r, "Fh \bullet \varphi^F"'] & Fh \circ F(g \circ f) \arrow[r, "\varphi^F"'] & F(h \circ (g \circ f))
\end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．それは pseudofunctor の定義より分かる．

(2) そうでないときは定義より明らかに可換である． □

**定理 60.** $G, H$ を括弧付錨付グラフで $[\mathrm{dom}_G] = [\mathrm{dom}_H]$，$[\mathrm{cod}_G] = [\mathrm{cod}_H]$ とする．$T, S$ をそれぞれ $\mathcal{B}$ における $G, H$ 型の図式として，$\mathrm{dom}_G, \mathrm{cod}_G$ に現れる各辺 $e$ について $T(e) = S(e)$ が成り立つとする．このとき $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を局所忠実な pseudofunctor として $|FT| = |FS|$ ならば $|T| = |S|$ である．

**証明**. 仮定より $T[\mathrm{dom}_G] = S[\mathrm{dom}_G]$，$T[\mathrm{cod}_G] = T[\mathrm{cod}_G]$ である．よって定理 59 より

次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
F(T[\mathrm{dom}_G]) \arrow[d, "F(|T|)"'] & FT[\mathrm{dom}_G] \arrow[l, "\sigma^T_{[\mathrm{dom}_G]}"'] \arrow[r, "\sigma^S_{[\mathrm{dom}_G]}"] \arrow[d, "|FT|"] & F(S[\mathrm{dom}_G]) \arrow[d, "F(|S|)"] \\
F(T[\mathrm{cod}_G]) & FT[\mathrm{cod}_G] \arrow[l, "\sigma^T_{[\mathrm{cod}_G]}"] \arrow[r, "\sigma^S_{[\mathrm{cod}_G]}"'] & F(S[\mathrm{cod}_G])
\end{tikzcd}$$

$\sigma$ の定義から $\sigma^T_{[\mathrm{dom}_G]} = \sigma^S_{[\mathrm{dom}_G]}$，$\sigma^T_{[\mathrm{cod}_G]} = \sigma^S_{[\mathrm{cod}_G]}$ である．よって図式から $F(|T|) = F(|S|)$ が分かる．今 $F$ が局所忠実だから $|T| = |S|$ である． □

# 6　bicategory の中での随伴と Kan 拡張

ここまで述べたことを踏まえて，随伴や Kan 拡張を扱っていく．以下，$\mathcal{B}$ は bicategory とする．

**定義.** $f\colon a \to b$，$u\colon b \to a$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism，$\eta\colon \mathrm{id}_a \Rightarrow u \circ f$，$\varepsilon\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_b$ を 2-morphism とする．このとき 4 つ組 $\langle f, u, \eta, \varepsilon\rangle$ が随伴とは，次の 2 つの等式が成り立つことをいう．

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & \Uparrow \varepsilon & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \Uparrow \eta & a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd} \quad = \quad \mathrm{id}_f$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow \varepsilon & b \arrow[dr, "u"] & \\
 & a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \Uparrow \eta & a
\end{tikzcd} \quad = \quad \mathrm{id}_u$$

更に $\eta$ と $\varepsilon$ が同型なとき，$\langle f, u, \eta, \varepsilon\rangle$ を随伴同値 (adjoint equivalence) という．随伴を記号 $f \dashv u\colon a \to b$ もしくは単に $f \dashv u$ で表し，$f$ を $u$ の左随伴，$u$ を $f$ の右随伴，$\eta$ を unit，$\varepsilon$ を counit と呼ぶ．

**命題 61.** $f\colon a \to b$ の右随伴は，もし存在すれば，同型を除いて一意である．

**証明.** $f \dashv u$，$f \dashv u'$ を随伴として，それぞれの unit，counit を $\eta, \varepsilon$ と $\eta', \varepsilon'$ として，

2-morphism $\varphi\colon u \Rightarrow u'$，$\psi\colon u' \Rightarrow u$ を次のように定義する．

$$\varphi \quad := \quad \begin{tikzcd}
b & & b & \\
& a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["u"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["f"', from=2-2, to=1-3]
\arrow["u'", from=1-3, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varepsilon", from=2-2, to=1-2]
\arrow[phantom, "\Uparrow\eta'", from=2-3, to=1-3]
\end{tikzcd}$$

$$\psi \quad := \quad \begin{tikzcd}
b & & b & \\
& a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["u'"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["f"', from=2-2, to=1-3]
\arrow["u", from=1-3, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varepsilon'", from=2-2, to=1-2]
\arrow[phantom, "\Uparrow\eta", from=2-3, to=1-3]
\end{tikzcd}$$

このとき pasting theorem (定理 57) によれば，図式の合成は合成の順番によらないから

$$\begin{tikzcd}
b & & b & & b & \\
& a & & a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-3, to=1-5]
\arrow["u"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["u'", from=1-3, to=2-4]
\arrow["u", from=1-5, to=2-6]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-4, to=2-6]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varphi", from=2-3, to=1-3]
\arrow[phantom, "\Uparrow\psi", from=2-5, to=1-5]
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd}
b & & b & & b & \\
& a & & a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-3, to=1-5]
\arrow["u"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["f"', from=2-2, to=1-3]
\arrow["u'", from=1-3, to=2-4]
\arrow["f"', from=2-4, to=1-5]
\arrow["u", from=1-5, to=2-6]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-4, to=2-6]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varepsilon", from=2-2, to=1-2]
\arrow[phantom, "\Uparrow\eta'", from=2-3, to=1-3]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varepsilon'", from=2-4, to=1-4]
\arrow[phantom, "\Uparrow\eta", from=2-5, to=1-5]
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd}
b & & b & & b & \\
& a & & a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-3, to=1-5]
\arrow["u"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["f"', from=2-2, to=1-3]
\arrow["f"', from=2-4, to=1-5]
\arrow["u", from=1-5, to=2-6]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-4, to=2-6]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varepsilon", from=2-2, to=1-2]
\arrow[phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f", from=2-3, to=1-4]
\arrow[phantom, "\Uparrow\eta", from=2-5, to=1-5]
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd}
b & & b & \\
& a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["u"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["f"', from=2-2, to=1-3]
\arrow["u'", from=1-3, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow[phantom, "\Uparrow\varepsilon", from=2-2, to=1-2]
\arrow[phantom, "\Uparrow\eta", from=2-3, to=1-3]
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd}
b & & b & \\
& a & & a
\arrow["\mathrm{id}_b", from=1-1, to=1-3]
\arrow["u"', from=1-1, to=2-2]
\arrow["u", from=1-3, to=2-4]
\arrow["\mathrm{id}_a"', from=2-2, to=2-4]
\arrow[phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_u", from=2-2, to=1-3]
\end{tikzcd}$$

となり $\psi * \varphi = \mathrm{id}_u$ が分かる．

$\varphi * \psi = \mathrm{id}_{u'}$ についても同様である．以上により $u \cong u'$ である． □

※ この証明は少し不正確である．pasting theorem により確かに合成は一意であるが，この合成には $\lambda$ や $\rho$ が含まれているからその部分の計算 (例えば $\mathrm{id}_f$ が消せることなど) は直ちに明らかではない．それを解消するには第 4 節の最後で述べたことを使って次のようにすればよい．$\psi * \varphi = \mathrm{id}_u$ を示すには $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ での等式 $[\psi] * [\varphi] = \mathrm{id}_{[u]}$ を示せばよいが，それは $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ において

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u]}"'] & \Uparrow{[\varphi]} & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u']}"] & \Uparrow{[\psi]} & b \arrow[dr, "{[u]}"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u]}"'] & \Uparrow{[\varepsilon]} & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u']}"] & \Uparrow{[\varepsilon']} & b \arrow[dr, "{[u]}"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, "{[f]}"'] & \Uparrow{[\eta']} & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, "{[f]}"'] & \Uparrow{[\eta]} & a
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u]}"'] & \Uparrow{[\varepsilon]} & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & \Uparrow \mathrm{id}_{[f]} & b \arrow[dr, "{[u]}"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, "{[f]}"'] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, "{[f]}"'] & \Uparrow{[\eta]} & a
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u]}"'] & \Uparrow{[\varepsilon]} & b \arrow[dr, "{[u']}"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, "{[f]}"'] & \Uparrow{[\eta]} & a
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "{[u]}"'] & & b \arrow[dr, "{[u]}"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & \Uparrow \mathrm{id}_{[u]} & a
\end{tikzcd}$$

となるから成り立つ．($\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ は strict 2-category であるからこの計算は正しい．)

　このように $\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$ で考えることで $\lambda$ や $\rho$ の問題は解決できるから，以下では特に断らずに単に $\mathcal{B}$ における図式の計算をすることで証明できたことにする．

**命題 62.** $f \dashv u\colon a \to b$, $f' \dashv u'\colon b \to c$ とするとき $f' \circ f \dashv u \circ u'\colon a \to c$ である.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "f"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & b \arrow[l, bend left, "u"] \arrow[r, bend left, "f'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & c \arrow[l, bend left, "u'"]
\end{tikzcd}$$

証明. $f \dashv u$, $f' \dashv u'$ の unit, counit をそれぞれ $\eta, \varepsilon, \eta', \varepsilon'$ とする. $\eta'', \varepsilon''$ を以下の合成で定める.

$$\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, "u'"] \arrow[dd, phantom, "\Uparrow \eta''"] & & \\
 & b \arrow[ur, "f'"] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
 & & c \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta'"] & & \\
 & b \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"] & & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dd, phantom, "\Uparrow \varepsilon''"] & & c \\
 & b \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[ur, "f'"'] & \\
 & & a \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}
:=
\begin{tikzcd}
c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon'"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"] \arrow[dr, "u'"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta'"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon'"] & c \\
 & b \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[dr, "u"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & b \arrow[ur, "f'"'] & \\
 & & a \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

このとき明らかに, $\eta'', \varepsilon''$ が $f' \circ f \dashv u \circ u'$ の unit, counit を与える. □

**命題 63.** $f\colon a \to b$, $u\colon b \to a$ を 1-morphism として $\eta\colon \mathrm{id}_a \Rightarrow u \circ f$ と $\sigma\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_b$ を同型な 2-morphism とする (故に $a \simeq b$ である). このとき $\eta$ を unit とするような随伴 $f \dashv u$ が存在する.

証明. 2-morphism $\varepsilon\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_b$ を

$$\varepsilon \quad := \quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "u"'] \arrow[rrrr, bend left=40, "\mathrm{id}_b"] & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] \arrow[rr, phantom, shift left=5, "\Uparrow \sigma"] \arrow[dr, "f"'] & & a \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \sigma^{-1}"] & b \\
 & & b \arrow[ur, "u"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \eta^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_b"'] & {} &
\end{tikzcd}$$

により定義する．このとき

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & {} & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] &
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "u"'] \arrow[rrrr, bend left=40, "\mathrm{id}_b"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Uparrow\sigma"] & & a \arrow[r, "f"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] & b \arrow[dll, phantom, "\Uparrow\sigma^{-1}"] \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_a"'] & {} & & b \arrow[ur, "u"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_b"'] & &
\end{tikzcd}$$

$$= \quad
\begin{tikzcd}
& b \arrow[r, "u"'] \arrow[rrrr, bend left=40, "\mathrm{id}_b"] \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] \arrow[rr, phantom, bend left=30, "\Uparrow\sigma"] & & a \arrow[r, "f"] & b \arrow[dll, phantom, "\Uparrow\sigma^{-1}"] \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[urrrr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[rrr, "f"'] & {} & & b \arrow[ur, "u"'] \arrow[urr, bend right, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ul, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] & &
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}_f$$

である．従って

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & {} & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & a
\end{tikzcd}$$

$$= \quad
\begin{tikzcd}
& & & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"] & {} \arrow[d] \\
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & {} & b \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u"] & \Uparrow\mathrm{id} & a \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & {} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$= \quad
\begin{tikzcd}
& & & a \arrow[dr, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon^{-1}"] & & {} \arrow[d] \\
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & {} & b \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & {} & b \arrow[r, "u"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & a \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta"] & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & & {} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$= \quad
\begin{tikzcd}
& & & a \arrow[dr, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] & & {} \arrow[d] \\
b \arrow[urrr, "u"] \arrow[dr, "u"'] & \Uparrow\mathrm{id}_{f\circ u} & b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] & {} \arrow[d, phantom, "\Uparrow\mathrm{id}_f"] & b \arrow[r, "u"] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta^{-1}"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & a \\
& a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & {} \arrow[u]
\end{tikzcd}
\quad = \quad \mathrm{id}_u$$

となり $f \dashv u$ が分かった． □

**定義．** $a, b, c \in \mathcal{B}$ を対象，$f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ を 1-morphism とする．$f$ に沿った $g$ の左 Kan 拡張とは組 $\langle l, \eta \rangle$ であって，以下の条件を満たすものである．

(1) $l$ は 1-morphism $b \to c$ で，$\eta$ は 2-morphism $g \Rightarrow l \circ f$ である．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}$$

(2) 他に 1-morphism $k\colon b \to c$ と 2-morphism $\theta\colon g \Rightarrow k \circ f$ が存在したとき，2-morphism $\tau\colon l \Rightarrow k$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, "l"'] \arrow[rd, bend left=40, "k"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}
\quad \overset{\tau}{\Uparrow} \quad
=
\quad
\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, bend left=40, "k"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が $f$ に沿った $g$ の左 Kan 拡張のとき，記号で $f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ と書くことにする．もしくは単に，$l$ のことを $f^{\dagger}g$ で表すこともある．また $\mathcal{B}^{\mathrm{co}}$ での左 Kan 拡張を右 Kan 拡張，$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}$ での左 Kan 拡張を左 Kan リフト，$\mathcal{B}^{\mathrm{coop}}$ での左 Kan 拡張を右 Kan リフトという．記号ではそれぞれ $f^{\ddagger}g, f_{\dagger}g, f_{\ddagger}g$ で表すことにする．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, "f^{\ddagger}g"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\Downarrow"] & c
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & \\
a \arrow[ru, phantom, "\Uparrow"] & c \arrow[lu, "f_{\dagger}g"'] \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
b \arrow[d, "f"'] & \\
a \arrow[ru, phantom, "\Downarrow"] & c \arrow[lu, "f_{\ddagger}g"'] \arrow[l, "g"]
\end{tikzcd}$$

**定義．** $f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ を 1-morphism として左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g = \langle l, \eta \rangle$ が存在するとする．1-morphism $h\colon c \to x$ が左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ と交換するとは，$\langle h \circ l, h \bullet \eta \rangle$ が $f$ に沿った $h \circ g$ の左 Kan 拡張になることを言う．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "l"] & c \arrow[rd, "h"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "h\bullet\eta\Uparrow"] & c \arrow[r, "h"'] & x
\end{tikzcd}$$

右 Kan 拡張・左 Kan リフト・右 Kan リフトと交換する，も同様に定義する．[*11]

**定義.** $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$ を 1-morphism とする．任意の 1-morphism $h\colon c \to x$ と交換する左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ を絶対左 Kan 拡張という．また絶対右 Kan 拡張，絶対左 Kan リフト，絶対右 Kan リフトも同様に定義する．

定義から次の同値が分かる．

**命題 64.** $f\colon a \to b$, $g\colon a \to c$, $l\colon b \to c$ を 1-morphism，$\eta\colon g \Rightarrow l \circ f$ を 2-morphism とする．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, "l"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & c
\end{tikzcd}$$

$\langle l, \eta \rangle$ が $f$ に沿った $g$ の絶対左 Kan 拡張である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{B}$ と 1-morphism $k\colon b \to x$, $h\colon c \to x$, 2-morphism $\theta\colon h \circ g \Rightarrow k \circ f$ に対して，ある 2-morphism $\tau\colon h \circ l \Rightarrow k$ が一意に存在して，次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"] \arrow[rd, "l"'] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow\quad\tau\Uparrow"] & c \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "k"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

□

**定理 65.** $f\colon a \to b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) $f$ が右随伴を持つ．

(2) 絶対左 Kan 拡張 $\langle f^{\dagger}\mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在する．

(3) 左 Kan 拡張 $\langle f^{\dagger}\mathrm{id}_a, \eta \rangle$ が存在し，$f$ が $f^{\dagger}\mathrm{id}_a$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, "f^{\dagger}\mathrm{id}_a"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & a \arrow[r, "f"] & b
\end{tikzcd}$$

---

[*11] 英語だと Kan 拡張と交換するは preserved by で Kan リフトと交換するは respected by と言うようだが，ここでは気にせずどちらも交換すると言う事にする．

またこのとき $f \dashv f^\dagger\mathrm{id}_a$ であり $\eta$ がその unit である．

**証明**. ($1 \implies 2$) $f$ の右随伴を $u$，unit を $\eta$，counit を $\varepsilon$ とする．$u$ が $f$ に沿った $\mathrm{id}_a$ の絶対左 Kan 拡張であることを示せばよい．そのために任意の対象 $x \in \mathcal{C}$ と 1-morphism $k\colon a \to x$，$h\colon b \to x$，2-morphism $\theta\colon k \Rightarrow h \circ f$ を取る．$\tau\colon k \circ u \Rightarrow h$ を合成

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\varepsilon\Uparrow"] & b \arrow[r, "h"] & x \\
 & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

で定めれば

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\tau\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\eta\Uparrow"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\varepsilon\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\eta\Uparrow"] & b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

である．逆に $\tau$ が

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\tau\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\eta\Uparrow"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

を満たせば

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\tau\Uparrow"] & x \\
 & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\varepsilon\Uparrow"] & b \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\tau\Uparrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\eta\Uparrow"] & x \\
 & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[dr, phantom, shift left=4, "\varepsilon\Uparrow"] & b \arrow[r, "h"] & x \\
 & a \arrow[u, "f"'] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & a \arrow[u, "k"']
\end{tikzcd}$$

となるから，このような $\tau$ は一意である．故に絶対左 Kan 拡張 $f^\dagger\mathrm{id}_a$ は存在し，$f^\dagger\mathrm{id}_a = \langle u, \eta\rangle$ である．

($2 \implies 3$) 明らか．

(3 $\Longrightarrow$ 1) $u := f^{\dagger}\mathrm{id}_a$ が $f$ と交換するから，$\varepsilon\colon f \circ u \Rightarrow \mathrm{id}_b$ が一意に存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"{name=T}] \arrow[dr, "u"'{name=U}] & b \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'{name=B}] & a \arrow[u, "f"']
\arrow[Rightarrow, from=B, to=U, "\eta"]
\arrow[Rightarrow, dashed, from=U, to=T, "\varepsilon"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] & b \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[u, "f"']
\arrow[from=2-1, to=1-2, phantom, "\mathrm{id}_f\Uparrow"]
\end{tikzcd}$$

故に後は $(u \bullet \varepsilon) * (\eta \bullet u) = \mathrm{id}_u$ を示せばよい．そのためには，左 Kan 拡張 $\langle u, \eta\rangle$ の普遍性から

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"{name=T}] \arrow[dr, "u"'{name=U1}] & b \arrow[dr, "u"{name=U2}] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'{name=B1}] & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'{name=B2}] & a
\arrow[Rightarrow, from=B1, to=U1, "\eta"]
\arrow[Rightarrow, from=U1, to=T, "\varepsilon"]
\arrow[Rightarrow, from=B2, to=U2, "\eta"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'{name=U1}] & b \arrow[dr, "u"{name=U2}] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'{name=B1}] & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a
\arrow[Rightarrow, from=B1, to=U1, "\eta"]
\arrow[Rightarrow, from=U1, to=U2, "\mathrm{id}_u"]
\end{tikzcd}$$

を示せばよいが，それは明らか． □

**系 66.** 左随伴に沿った左 Kan 拡張は存在し，絶対左 Kan 拡張である．

*証明．* $f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ で $f$ が右随伴を持つとする．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[dr, "l"{name=L}] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'{name=G}] & c
\arrow[Rightarrow, from=G, to=L, "\eta"]
\end{tikzcd}$$

このとき絶対左 Kan 拡張 $f^{\dagger}\mathrm{id}_a$ が存在するから $g \circ (f^{\dagger}\mathrm{id}_a) = f^{\dagger}g$ となり左 Kan 拡張 $f^{\dagger}g$ が存在することが分かる．また $h\colon c \to x$ を任意の 1-morphism とするとき，$h \circ (f^{\dagger}g) = h \circ (g \circ (f^{\dagger}\mathrm{id}_a)) = (h \circ g) \circ (f^{\dagger}\mathrm{id}_a) = f^{\dagger}(h \circ g)$ となって $h$ が $f^{\dagger}g$ と交換することが分かる． □

$\mathcal{B}^{\mathrm{op}}, \mathcal{B}^{\mathrm{co}}, \mathcal{B}^{\mathrm{coop}}$ を考えれば次の定理が分かる．

**定理 67.** $u\colon b \to a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) $u$ が左随伴を持つ．

(2) 絶対右 Kan 拡張 $\langle u^{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在する．

(3) 右 Kan 拡張 $\langle u^{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在し，$u$ が $u^{\ddagger}\mathrm{id}_b$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "u^{\ddagger}\mathrm{id}_b"] & & \\
b \arrow[u, "u"] \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\varepsilon}{\Downarrow}"] & b \arrow[r, "u"] & a
\end{tikzcd}$$

またこのとき $u^{\ddagger}\mathrm{id}_b \dashv u$ であり $\varepsilon$ がその counit である． □

**定理 68.** $f\colon a \to b$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) $f$ が右随伴を持つ．

(2) 絶対右 Kan リフト $\langle f_{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在する．

(3) 右 Kan リフト $\langle f_{\ddagger}\mathrm{id}_b, \varepsilon\rangle$ が存在し，$f$ が $f_{\ddagger}\mathrm{id}_b$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
 & & a \arrow[d, "f"] \\
a \arrow[r, "f"] & b \arrow[ur, "f_{\ddagger}\mathrm{id}_b"] \arrow[r, "\mathrm{id}_b"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\varepsilon", shift left=4] & b
\end{tikzcd}$$

またこのとき $f \dashv f_{\ddagger}\mathrm{id}_b$ であり $\varepsilon$ がその counit である． □

**定理 69.** $u\colon b \to a$ を 1-morphism とするとき，以下の条件は同値である．

(1) $u$ が左随伴を持つ．

(2) 絶対左 Kan リフト $\langle u_{\dagger}\mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在する．

(3) 左 Kan リフト $\langle u_{\dagger}\mathrm{id}_a, \eta\rangle$ が存在し，$u$ が $u_{\dagger}\mathrm{id}_a$ と交換する．

$$\begin{tikzcd}
 & & b \arrow[d, "u"] \\
b \arrow[r, "u"] & a \arrow[ur, "u_{\dagger}\mathrm{id}_a"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\eta", shift left=4] & a
\end{tikzcd}$$

またこのとき $u_{\dagger}\mathrm{id}_a \dashv u$ であり $\eta$ がその unit である． □

**定理 70.** 左随伴は左 Kan 拡張と交換する．

**証明**. $f\colon a \to b$，$g\colon a \to c$ で左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在し，$h \dashv u\colon c \to x$ を随伴とする．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rd, "f^\dagger g"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & x \arrow[l, bend left, "u"]
\end{tikzcd}$$

$f^\dagger(h \circ g) = \langle h \circ f^\dagger g, h \bullet \eta\rangle$ であることを示すため，任意の $k\colon b \to x$ と $\theta\colon h \circ g \Rightarrow k \circ f$ を取る．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rrd, bend left, "k"] & & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[r, bend left, "h"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & x \arrow[l, bend left, "u"]
\end{tikzcd}$$

$h \dashv u$ の unit を $\eta'$ とすると，次の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \arrow[rd, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ru, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ の普遍性から，$\tau\colon f^\dagger g \Rightarrow u \circ k$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[rd, "f^\dagger g"] \arrow[rrd, phantom, "\tau\Uparrow"] & & x \arrow[rd, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \arrow[rd, "u"] & \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ru, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ru, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

$h \dashv u$ だから $u_\dagger \mathrm{id}_c = \langle h, \eta'\rangle$ であり，これは絶対左 Kan リフトである．よって $\sigma$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[rd, "f^\dagger g"'] \arrow[rd, phantom, shift left=6, "\sigma\Uparrow"] & & x \arrow[rd, "u"] & \\
 & c \arrow[ru, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[rd, "f^\dagger g"'] \arrow[rrd, phantom, "\tau\Uparrow"] & & x \arrow[rd, "u"] & \\
 & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & & c
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\sigma\Uparrow"] & & x \arrow[dr, "u"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\tau\Uparrow"] & & x \arrow[dr, "u"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] & & c
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \arrow[dr, "u"] \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_c"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\eta'\Uparrow"] & & c
\end{tikzcd}$$

となるから，絶対左 Kan リフト $u_\dagger \mathrm{id}_c = \langle h, \eta' \rangle$ の普遍性より

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] \arrow[dr, "f^\dagger g"] \arrow[dr, phantom, shift left=4ex, "\sigma\Uparrow"] & & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[u, phantom, shift left=4ex, "\eta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, bend left, "k"] & & x \\
a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, phantom, "\theta\Uparrow"] & c \arrow[ur, "h"]
\end{tikzcd}$$

である．このような $\sigma$ は一意だとわかるから，$f^\dagger(h \circ g) = \langle h \circ f^\dagger g, h \bullet \eta \rangle$ である． □

**命題 71.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory，$F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とする．$f \dashv u \colon a \to b$ が $\mathcal{B}$ での随伴のとき，$\mathcal{C}$ での随伴 $Ff \dashv Fu \colon Fa \to Fb$ が成り立つ．(即ち pseudofunctor は随伴を保つ．)

証明. $f \dashv u \colon a \to b$ を随伴として unit, counit を $\eta, \varepsilon$ とする．即ち

$$\begin{tikzcd}
& b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_f"] & & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & & a \arrow[ul, phantom, "\Uparrow \eta"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & & b \arrow[dr, "u"] & \\
& a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_u"] & & a
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．このとき $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudofunctor とすると，定理 59 と pseudofunctor の定義より

$$\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow F\eta"] & & Fb \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_a)"'] & & Fa \arrow[ur, "Ff"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow F\varepsilon"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] & & Fb \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & & Fa \arrow[ur, "Ff"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_{Ff}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fb \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, "Fu"'] & & Fb \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow F\eta"] & \\
& Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow F\varepsilon"] & & Fa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "Fu"'] & & Fb \arrow[dr, "Fu"] & \\
& Fa \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_{Fu}"] & & Fa
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．故に $Ff \dashv Fu$ である． □

**系 72.** $f \dashv u\colon a \to b$ ならば $x \in \mathcal{B}$ に対して $f \bullet - \dashv u \bullet -\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$. □

**命題 73.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を局所忠実充満な pseudofunctor とする．$f\colon a \to b$，$u\colon b \to a$ が $\mathcal{B}$ の 1-morphism で，$\mathcal{C}$ での随伴 $Ff \dashv Fu\colon Fa \to Fb$ が成り立つならば，$\mathcal{B}$ での随伴 $f \dashv u$ が成り立つ．

**証明.** $Ff \dashv Fu\colon Fa \to Fb$ とする．即ち $\eta, \varepsilon$ が存在して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & & Fb \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & & Fa \arrow[ur, "Ff"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] & & Fb \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & & Fa \arrow[ur, "Ff"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_{Ff}"] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "Fu"'] & & Fb \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \\
& Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] & & Fa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "Fu"'] & & Fb \arrow[dr, "Fu"] & \\
& Fa \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_{Fu}"] & & Fa
\end{tikzcd}$$

$F$ が局所充満だから，$\mathcal{B}$ の 2-morphism $\eta', \varepsilon'$ が存在して

$$F\eta' = \begin{tikzcd}
& Fb \arrow[dr, "Fu"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"'] & {} & Fa
\end{tikzcd}, \qquad
F\varepsilon' = \begin{tikzcd}
Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "Fu"'] & {} & Fb \\
& Fa \arrow[ur, "Ff"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon"] &
\end{tikzcd}$$

とできる．このとき定理 60 より

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"] & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[r, phantom, bend left=40, "\Uparrow \eta'"] & a \arrow[ur, "f"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow \varepsilon'"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_f"] & b \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a \arrow[ur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \eta'"] & \\
 & a \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[u, phantom, bend left=40, "\Uparrow \varepsilon'"] & a
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & b \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_u"] & \\
 & a \arrow[r, "\mathrm{id}_a"'] & a
\end{tikzcd}$$

であるから $f \dashv u$ である． □

**系 74.** $f\colon a \to b,\ u\colon b \to a$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism とする．任意の対象 $s \in \mathcal{B}$ に対して随伴 $f \bullet - \dashv u \bullet -\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,b)$ が成り立つとして，その unit, counit を

$$\eta_s\colon \mathrm{id} \Rightarrow (u \bullet -) \circ (f \bullet -)\colon \mathcal{B}(s,a) \to \mathcal{B}(s,a)$$
$$\varepsilon_s\colon (f \bullet -) \circ (u \bullet -) \Rightarrow \mathrm{id}\colon \mathcal{B}(s,b) \to \mathcal{B}(s,b)$$

とする．更に，任意の 1-morphism $p\colon s \to t,\ g\colon t \to a,\ h\colon t \to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "/\!\!/"] & \mathcal{B}(t,a) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "(u\bullet -)\circ(f\bullet -)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta_s"] & \mathcal{B}(s,a)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{B}(t,a) \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}"] \arrow[r, bend right, "(u\bullet -)\circ(f\bullet -)"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \eta_t"] \arrow[d, "-\bullet p"'] & \mathcal{B}(t,a) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(s,a) \arrow[r, bend right, "(u\bullet -)\circ(f\bullet -)"'] \arrow[ur, phantom, "\Swarrow \alpha"] & \mathcal{B}(s,a)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{B}(t,b) \arrow[r, bend left, "(f\bullet -)\circ(u\bullet -)"] \arrow[d, "-\bullet p"'] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow \alpha"] & \mathcal{B}(t,b) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(s,b) \arrow[r, bend left, "(f\bullet -)\circ(u\bullet -)"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon_s"] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\mathcal{B}(t,b) \arrow[r, bend left, "(f\bullet -)\circ(u\bullet -)"] \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \varepsilon_t"] \arrow[d, "-\bullet p"'] & \mathcal{B}(t,b) \arrow[d, "-\bullet p"] \\
\mathcal{B}(s,b) \arrow[r, bend right, "\mathrm{id}"'] \arrow[ur, phantom, "/\!\!/"] & \mathcal{B}(s,b)
\end{tikzcd}$$

が成り立つとする．このとき $f \dashv u$ である．

**証明．** 系の条件は $\eta_s, \varepsilon_s$ が modification $\eta\colon \mathrm{id} \Rrightarrow y(u) \mathbin{\hat{\circ}} y(f)$，$\varepsilon\colon y(f) \mathbin{\hat{\circ}} y(u) \Rrightarrow \mathrm{id}$ を与えるということである．よって $\widehat{\mathcal{B}}$ における随伴 $y(f) \dashv y(u)$ が成り立つ．従って命題 73 より $f \dashv u$ である． □

**命題 75.** $f\colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism とする．任意の $g\colon b \to c$ に対して左 Kan 拡張 $f^\dagger g$ が存在するとき，関手 $-\bullet f\colon \mathcal{B}(b,c) \to \mathcal{B}(a,c)$ は左随伴 $F$ を持つ．この $F$ は $\mathcal{B}(a,c) \ni g \mapsto f^\dagger g \in \mathcal{B}(b,c)$ で与えられる．

証明．定義より，$f^\dagger g$ は $g$ から $-\bullet f$ への普遍射であるから明らか． □

# 7 biequivalence の言い換え

ここでは圏同値と同様の言い換えが biequivalence に対しても成り立つこと (定理 80) を証明する．

**補題 76.** $f \dashv u\colon a \to b$，$f' \dashv u'\colon a' \to b'$ を bicategory $\mathcal{B}$ における随伴として unit, counit をそれぞれ $\eta, \varepsilon, \eta', \varepsilon'$ とする．このとき $p\colon a \to a'$，$q\colon b \to b'$ に対して全単射

$$\varphi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(b,a')}(p \circ u, u' \circ q) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(a,b')}(f' \circ p, q \circ f)$$

$$\begin{tikzcd}
b \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & b' \arrow[d, "u'"] & & b \arrow[r, "q"] \arrow[dr, phantom, "\Nwarrow"] & b' \\
a \arrow[r, "p"'] & a' & \longmapsto & a \arrow[u, "f"] \arrow[r, "p"'] & a' \arrow[u, "f'"']
\end{tikzcd}$$

が存在する．

証明．$\beta\colon p \circ u \Rightarrow u' \circ q$ に対して $\varphi(\beta)\colon f' \circ p \Rightarrow q \circ f$ を

$$\varphi(\beta) \quad := \quad \begin{tikzcd}
& b \arrow[rr, "q"] \arrow[dr, "u"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\eta"] & & b' \arrow[rr, "\mathrm{id}_{b'}"] \arrow[dr, "u'"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon'"] & b' \\
a \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"'] & & a \arrow[rr, "p"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\beta"] & & a' \arrow[ur, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

で定める．この $\varphi$ が全単射を与えることを示せばよい．そのために写像

$$\psi\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(a,b')}(f' \circ p, q \circ f) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}(b,a')}(p \circ u, u' \circ q)$$

を

$$\psi(\gamma) \quad := \quad \begin{tikzcd}
b \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"] \arrow[dr, "u"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\varepsilon"] & b \arrow[rr, "q"] & & b' \arrow[dr, "u'"] & \\
& a \arrow[ur, "f"'] \arrow[rr, "p"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\gamma"] & a' \arrow[ur, "f'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a'}"'] & \arrow[u, phantom, "\Uparrow\eta'"] & a'
\end{tikzcd}$$

で定めれば，随伴の定義から明らかに $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$，$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$ である． □

**定義.** 補題 76 における $\varphi(\beta)$ を $\beta$ の mate という．同様に $\psi(\gamma)$ を $\gamma$ の mate という．

**補題 77.** $\theta\colon F \Rightarrow G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を pseudonatural transformation とするとき

$$\begin{aligned} &\theta \text{ が bicategory } \mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \text{ における同値} \\ \Longleftrightarrow\ &\text{各対象 } a \in \mathcal{B} \text{ に対して } \theta_a\colon Fa \to Ga \text{ が } \mathcal{C} \text{ における同値.} \end{aligned}$$

**証明.** $(\Longrightarrow)$ $\theta$ が同値であるとする．即ち pseudonatural transformation $\sigma\colon G \Rightarrow F$ と同型な modification $\Gamma\colon \mathrm{id}_F \Rrightarrow \theta \,\widehat{\circ}\, \sigma$，$\Delta\colon \sigma \,\widehat{\circ}\, \theta \Rrightarrow \mathrm{id}_G$ が存在する．このとき $a \in \mathcal{B}$ に対して $\Gamma_a\colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow \theta_a \circ \sigma_a$ と $\Delta_a\colon \sigma_a \circ \theta_a \Rightarrow \mathrm{id}_{Ga}$ は同型である．故に $\theta_a$ は同値となる．

$(\Longleftarrow)$ $\theta_a$ が同値だから，命題 63 より $\theta_a$ は随伴同値を与える．それを $\langle \sigma_a, \theta_a, \Gamma_a, \Delta_a \rangle$ とする．$f\colon a \to b$ に対して $\theta_f$ の mate を $\sigma'_f$ とする．

$$\sigma'_f \quad := \quad \begin{tikzcd} & Fa \arrow[rr, "Ff"] \arrow[dr, "\theta_a"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\Gamma_a"] & & Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "\theta_b"'] & & Fb \\ Ga \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Ga}"'] & {} & Ga \arrow[rr, "Gf"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta_f"] & & Gb \arrow[ur, "\sigma_b"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\Delta_b"] & \end{tikzcd}$$

定義より $\sigma'_f$ は同型である．そこで $\sigma_f := (\sigma'_f)^{-1}$ と定める．これは pseudonatural transformation $\sigma\colon G \Rightarrow F$ を定める．

∵) まず $\sigma_f$ が $f$ について自然であること，即ち自然変換

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "F^{ab}"'] \arrow[dr, "G^{ab}"] & \\ \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[rr, Rightarrow, "\sim", "\sigma^{ab}"'] \arrow[dr, "-\bullet\sigma_a"'] & & \mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[dl, "\sigma_b\bullet-"] \\ & \mathcal{C}(Ga,Fb) & \end{tikzcd}$$

となっていることを示そう．そのためには 2-morphism $\beta\colon f \Rightarrow g$ に対して

$$\begin{tikzcd} Ff \bullet \sigma_a \arrow[r, "\sigma_f"] \arrow[d, "F\beta\bullet\sigma_a"'] & \sigma_b \bullet Gf \arrow[d, "\sigma_b\bullet G\beta"] \\ Fg \bullet \sigma_a \arrow[r, "\sigma_g"'] & \sigma_b \bullet Gg \end{tikzcd}$$

が可換であることを示せばよい．それは $\theta_f$ が $f$ について自然であることを使って

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "Fg"] \arrow[r, bend right, "Ff"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow F\beta"] & Fb \\
Ga \arrow[u, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "Gf"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma'_f}{\Nearrow}"] & Gb \arrow[u, "\sigma_b"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Fa \arrow[dr, "\theta_a"] \arrow[rr, bend left, "Fg"] \arrow[rr, bend right, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow F\beta"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\Gamma_a"] & & Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "\theta_b"] & & Fb \\
Ga \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Ga}"'] & & Ga \arrow[rr, bend right, "Gf"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow\theta_f"] & & Gb \arrow[ur, "\sigma_b"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\Delta_b"] &
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
& Fa \arrow[dr, "\theta_a"] \arrow[rr, bend left, "Fg"] \arrow[d, phantom, "\Uparrow\Gamma_a"] & & Fb \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, "\theta_b"] \arrow[dl, phantom, "\Uparrow\theta_g"] & & Fb \\
Ga \arrow[ur, "\sigma_a"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Ga}"'] & & Ga \arrow[rr, bend left, "Gg"] \arrow[rr, bend right, "Gf"'] \arrow[rr, phantom, "\Uparrow G\beta"] & & Gb \arrow[ur, "\sigma_b"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow\Delta_b"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "Fg"] & Fb \\
Ga \arrow[u, "\sigma_a"] \arrow[r, bend left, "Gg"] \arrow[r, bend right, "Gf"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow G\beta"] \arrow[ur, phantom, "\overset{\sigma'_g}{\Nearrow}"] & Gb \arrow[u, "\sigma_b"']
\end{tikzcd}$$

より分かる．

残りの 2 条件

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[rr, "\sigma_a"] \arrow[dr, "Gf"'] \arrow[dd, bend right=60, "G(g\circ f)"'] & & Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sigma_f}{\Swarrow}"] & \\
\overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow} & Gb \arrow[rr, "\sigma_b"] \arrow[dl, "Gg"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_g}{\Swarrow}"] & & Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
Gc \arrow[rr, "\sigma_c"'] & & Fc &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[dd, bend right=60, "G(g\circ f)"'] & Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] & \\
\overset{\sigma_{g\circ f}}{\Swarrow} & & \overset{\varphi_{gf}}{\Longleftarrow}\ Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
Gc \arrow[r, "\sigma_c"'] & Fc &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"', "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \arrow[dr, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=30] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dl, phantom, near start, "\overset{\lambda_{\sigma_a}}{\Swarrow}"] \\
Ga \arrow[r, "\sigma_a"'] \arrow[ur, phantom, near start, "\overset{\rho^{-1}_{\sigma_a}}{\Swarrow}"] & Fa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Ga \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}"] & Fa \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, bend right=20, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}"] \\
Ga \arrow[r, "\sigma_a"'] & Fa
\end{tikzcd}$$

についても同様に，$\theta$ が pseudonatural transformation であることから分かる．

このとき $\Gamma_a, \Delta_a$ は modification $\Gamma, \Delta$ を与える．

$\because$) 同様であるから $\Delta$ についてのみ示す．$f\colon a\to b$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Ga \arrow[rrd, bend left=15, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[rdd, "\sigma_a"'] & & & \\
& & Ga \arrow[r, phantom] \arrow[rd, "\sigma_a"] \arrow[dd, "Gf"] & \\
& Fa \arrow[u, phantom, "\Gamma_a\Downarrow"] \arrow[ru, "\theta_a"] \arrow[dd, "Ff"'] \arrow[rd, phantom, "\theta_f\Swarrow"] & & Fa \arrow[dd, "Ff"] \\
& & Gb \arrow[ru, phantom, "\sigma_f\Swarrow"] \arrow[rd, "\sigma_b"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Delta_b"] & \\
& Fb \arrow[ru, "\theta_b"] \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fb}"'] & & Fb
\end{tikzcd}$$

$$= \qquad \begin{tikzcd}
Ga \arrow[rrd, bend left=15, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[rdd, "\sigma_a"'] & & & \\
& & Ga \arrow[rd, "\sigma_a"] \arrow[dd, "Gf"] & \\
& Fa \arrow[dd, "Ff"'] \arrow[rd, phantom, "\sigma'_f\Swarrow"] & & Fa \arrow[dd, "Ff"] \\
& & Gb \arrow[ru, phantom, "\sigma_f\Swarrow"] \arrow[rd, "\sigma_b"] & \\
& Fb \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fb}"'] & & Fb
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \mathrm{id} \quad = \qquad \begin{tikzcd}
Ga \arrow[rrd, bend left=15, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[rdd, "\sigma_a"'] & & & \\
& & Ga \arrow[rd, "\sigma_a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Delta_a"] & \\
& Fa \arrow[u, phantom, "\Gamma_a\Downarrow"] \arrow[ru, "\theta_a"] \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[dd, "Ff"'] & & Fa \arrow[dd, "Ff"] \\
& & \arrow[phantom, "\mathrm{id}_f\Swarrow"] & \\
& Fb \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fb}"'] & & Fb
\end{tikzcd}$$

となるから絶対左 Kan 拡張 $\sigma_a^\dagger \mathrm{id}_{Ga} = \langle\theta_a, \Gamma_a\rangle$ (定理 65) の普遍性により

$$\begin{tikzcd}
& Ga \arrow[rd, "\sigma_a"] \arrow[dd, "Gf"] & \\
Fa \arrow[ru, "\theta_a"] \arrow[dd, "Ff"'] \arrow[r, phantom, "\theta_f\Swarrow"] & \arrow[r, phantom, "\sigma_f\Swarrow"] & Fa \arrow[dd, "Ff"] \\
& Gb \arrow[rd, "\sigma_b"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Delta_b"] & \\
Fb \arrow[ru, "\theta_b"] \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fb}"'] & & Fb
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
& Ga \arrow[rd, "\sigma_a"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\Delta_a"] & \\
Fa \arrow[ru, "\theta_a"] \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[dd, "Ff"'] & & Fa \arrow[dd, "Ff"] \\
& \arrow[phantom, "\mathrm{id}_f\Swarrow"] & \\
Fb \arrow[rr, bend right=20, "\mathrm{id}_{Fb}"'] & & Fb
\end{tikzcd}$$

である．

故に $\mathrm{id}_F \cong \sigma \mathbin{\widehat{\circ}} \theta$，$\theta \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma \cong \mathrm{id}_G$ となり $\theta$ は同値である． □

**補題 78.** $f\colon a \to b$ が同値のとき，$x \in \mathcal{B}$ に対して関手 $f \bullet -\colon \mathcal{B}(x,a) \to \mathcal{B}(x,b)$ は圏同値である．

*証明.* $f\colon a \to b$ が同値だから，補題 26 により $y(f)\colon y(a) \Rightarrow y(b)$ は $\widehat{\mathcal{B}}$ の同値である．よって命題 77 により $y(f)_x = f \bullet -\colon \mathcal{B}(x,a) \to \mathcal{B}(x,b)$ も同値である． □

**命題 79.** $\theta_x\colon \mathcal{B}(x,a) \to \mathcal{B}(x,b)$ が $x \in \mathcal{B}$ について pseudonatural な圏同値ならば $a \simeq b$ である．

*証明.* 補題 77 より $\theta_x$ は $\widehat{\mathcal{B}}$ における同値 $y(a) \simeq y(b)$ を与える．系 34 より $y$ が局所圏同値だから補題 27 より $a \simeq b$ である． □

**定理 80.** pseudofunctor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ が biequivalence を与える
$\Longleftrightarrow$ ある pseudofunctor $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ が存在して，$\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{B},\mathcal{B})$ における同値 $\mathrm{id}_{\mathcal{B}} \simeq GF$ と，$\mathrm{Fun}_{\mathrm{ps}}(\mathcal{C},\mathcal{C})$ における同値 $FG \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が成り立つ．

*証明.* $(\Longleftarrow)$ $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow GF$ と $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が同値を与えているとする．

まず $c \in \mathcal{C}$ とすると補題 77 より $\varepsilon_c\colon FGc \to c$ は同値である．よって $F$ は本質的全射である．

次に pseudonatural transformation の定義より次の自然同型が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(a,b) \arrow[ld, "(GF)^{ab}"'] \arrow[rd, "\mathrm{id}"] & \\
\mathcal{B}(GFa,GFb) \arrow[rd, "-\bullet\eta_a"'] & \overset{\sim}{\underset{\eta^{ab}}{\Longrightarrow}} & \mathcal{B}(a,b) \arrow[ld, "\eta_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{B}(a,GFb) &
\end{tikzcd}$$

補題 78 より $-\bullet\eta_a$，$\eta_b \bullet -$ は圏同値である．よって $(GF)^{ab}\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{B}(GFa,GFb)$ も圏同値となる．故に $F^{ab}$ は忠実関手である．

同様にして $c,d \in \mathcal{C}$ に対して $(FG)^{cd}\colon \mathcal{C}(c,d) \to \mathcal{C}(FGc,FGd)$ も圏同値であり $G^{cd}$ は忠実関手である．

$F^{ab}$ が充満であることを示す．そこで $f,g\colon a \to b$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism，$\beta\colon Ff \Rightarrow Fg$ を $\mathcal{C}$ の 2-morphism とする．このとき $\eta_b \bullet -$ が圏同値，従って充満だから，次の等式を

満たす $\gamma$ を取ることができる．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[rr, bend left=60, "\eta_b\circ g"] \arrow[rr, bend right=60, "\eta_b\circ f"'] \arrow[r, phantom, shift left=4ex, "\eta_g\Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\eta_f^{-1}\Uparrow"] & GFa \arrow[r, bend left, "GFg"] \arrow[r, bend right, "GFf"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow G\beta"] & GFb & = & a \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\gamma"] & b \arrow[r, "\eta_b"] & GFb
\end{tikzcd}$$

このとき $\eta_f$ が $f$ について自然であることを使うと

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\eta_a"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_g\Nearrow"] & b \arrow[d, "\eta_b"] & = & a \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "f"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\gamma"] \arrow[d, "\eta_a"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_f\Nearrow"] & b \arrow[d, "\eta_b"] & = & a \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[d, "\eta_a"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_g\Nearrow"] & b \arrow[d, "\eta_b"] \\
GFa \arrow[r, bend left, "GFg"] \arrow[r, bend right, "GFf"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow G\beta"] & GFb & & GFa \arrow[r, bend right, "GFf"'] & GFb & & GFa \arrow[r, bend left, "GFg"] \arrow[r, bend right, "GFf"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow GF\gamma"] & GFb
\end{tikzcd}$$

となるから，$\eta_g$ が同型であること，$-\bullet\eta_a$ が圏同値であることから $G\beta = GF\gamma$ が分かる．先に示した通り $G^{FaFb}$ が忠実だったから $F\gamma = \beta$ が分かった．

同様にして $G^{cd}$ も充満である．

最後に $F^{ab}$ が本質的全射であることを示せばよい．そこで $g\colon Fa \to Fb$ を $\mathcal{C}$ の 1-morphism とすると $(GF)^{ab}\colon \mathcal{B}(a,b) \to \mathcal{B}(GFa, GFb)$ が圏同値 (従って本質的全射) だから, ある $f\colon a \to b$ が存在して $GF(f) \cong Gg$ となる．このとき $G^{FaFb}$ が忠実充満 (従って conservative) だから $Ff \cong g$ となる．

($\Longrightarrow$) $F$ を本質的全射かつ局所圏同値とする．まず pseudofunctor $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{B}$ を次のように定義する．

- $s \in \mathcal{C}$ とする．$F$ が本質的全射なので $Gs \in \mathcal{B}$ と同値 $\varepsilon_s\colon FGs \to s$ が存在する．このとき命題 63 より随伴同値 $\langle \varepsilon_s^\bullet, \varepsilon_s, \kappa^s, \mu^s \rangle$ が取れる．
- $p\colon s \to t$ とする．$F$ が局所圏同値，従って $F^{GsGt}\colon \mathcal{B}(Gs, Gt) \to \mathcal{C}(FGs, FGt)$ が本質的全射だから 1-morphism $Gp\colon Gs \to Gt$ と同型

$$\varepsilon'_p\colon (FGs \xrightarrow{\varepsilon_s} s \xrightarrow{p} t \xrightarrow{\varepsilon_t^\bullet} FGt) \Rightarrow FGp$$

が存在する．そこで $\varepsilon_p$ を

$$\varepsilon_p \quad := \quad \begin{tikzcd} FGs \arrow[rr, "FGp"] \arrow[d, "\varepsilon_s"'] \arrow[from=1-1, to=2-2, phantom, "\Uparrow \varepsilon'_p"] & & FGt \arrow[d, "\varepsilon_t"] \\ s \arrow[r, "p"'] & t \arrow[ru, "\varepsilon_t^\bullet"] \arrow[r, "\mathrm{id}_t"'] \arrow[from=2-2, to=1-3, phantom, "\kappa^t \Uparrow"', shift right=3] & t \end{tikzcd}$$

と定義する．これは同型な 2-morphism である．定理 69 より $(\varepsilon_t)_\dagger \mathrm{id}_t = \langle \varepsilon_t^\bullet, \kappa^t \rangle$ は絶対左 Kan リフトである．故に $\langle FGp, \varepsilon_p \rangle$ は左 Kan リフトである．

- $\beta\colon p \Rightarrow q$ とする．$F$ が局所圏同値だから $G\beta\colon Gp \Rightarrow Gq$ を

$$F(G\beta) \quad = \quad \begin{tikzcd} FGs \arrow[r, "\varepsilon_s"] \arrow[rrr, bend left=40, "FGp"] \arrow[rrr, bend right=40, "FGq"'] \arrow[r, phantom, shift left=5, "\varepsilon'_p \Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=5, "(\varepsilon'_q)^{-1} \Downarrow"'] & s \arrow[r, bend left, "p"] \arrow[r, bend right, "q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow \beta"] & t \arrow[r, "\varepsilon_t^\bullet"] & FGt \end{tikzcd}$$

  となるように取ることができる．
- 明らかに $G$ は関手 $G\colon \mathcal{C}(s,t) \to \mathcal{B}(Gs, Gt)$ を与える．
- $s \xrightarrow{p} t \xrightarrow{q} u$ を $\mathcal{C}$ の 1-morphism とする．$\langle FG(q \circ p), \varepsilon_{q\circ p} \rangle$ が左 Kan リフトだから，$\varphi'_{qp}$ を次の等式が成り立つように取れる．

$$\begin{tikzcd} FGs \arrow[r, "\varepsilon_s"] \arrow[dd, bend right=60, "F(Gq\circ Gp)"'] \arrow[dd, bend left=60, "FG(q\circ p)"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varphi'_{qp}}{\Leftarrow}"] & s \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, phantom, "\overset{\varepsilon_{q\circ p}}{\Leftarrow}"] & \\ & & t \arrow[dl, "q"] \\ FGu \arrow[r, "\varepsilon_u"'] & u & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} FGs \arrow[rr, "\varepsilon_s"] \arrow[dd, bend right=60, "F(Gq\circ Gp)"'] \arrow[dr, "FGp"'] & & s \arrow[dr, "p"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon_p}{\Leftarrow}"] & \\ \overset{\varphi^F_{GqGp}}{\Leftarrow} & FGt \arrow[rr, "\varepsilon_t"] \arrow[dl, "FGq"'] & & t \arrow[dl, "q"] \arrow[dll, phantom, "\overset{\varepsilon_q}{\Leftarrow}"] \\ FGu \arrow[rr, "\varepsilon_u"'] & & u & \end{tikzcd} \tag{81}$$

  $\varepsilon_p, \varphi^F_{GqGp}$ が同型だから $\varepsilon_u \bullet \varphi'_{qp}$ も同型である．よって $\varepsilon_u \bullet -$ が圏同型だから $\varphi'_{qp}$ も同型である．更に $F$ が局所圏同値だから $\varphi^G_{qp}\colon Gq \circ Gp \Rightarrow G(q \circ p)$ を $F(\varphi^G_{qp}) = (\varphi'_{qp})^{-1}$ となるように取ることができる．
- この $\varphi^G_{qp}$ は $q, p$ について自然である．

$\because$) $\beta\colon p \Rightarrow p'$，$\gamma\colon q \Rightarrow q'$ とする．まず $\varepsilon_p$ が $p$ について自然であることから容易に $\varphi'_{q'p'} * FG(\gamma \bullet \beta) = F(G\gamma \bullet G\beta) * \varphi'_{qp}$ が分かる．よって $\varphi^G$ の定義と

$F$ が局所圏同値であることから

$$\begin{tikzcd}
Gq \circ Gp \arrow[r, "\varphi^G_{qp}"] \arrow[d, "G\gamma \bullet G\beta"'] & G(q \circ p) \arrow[d, "G(\gamma \bullet \beta)"] \\
Gq' \circ Gp' \arrow[r, "\varphi^G_{q'p'}"'] & G(q' \circ p')
\end{tikzcd}$$

が可換である．

- $\langle FG(\mathrm{id}_s), \varepsilon_{\mathrm{id}_s} \rangle$ が左 Kan リフトだから，$\psi'$ を次の等式が成り立つように取れる．

$$\begin{tikzcd}
FGs \arrow[r, "\varepsilon_s"] \arrow[dr, "\varepsilon_s"'] \arrow[d, bend right=60, "\mathrm{id}_{FGs}"'] & s \arrow[d, "\mathrm{id}_s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\lambda_{\varepsilon_s}}{\Swarrow}"] \\
FGs \arrow[r, "\varepsilon_s"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\rho^{-1}_{\varepsilon_s}}{\Swarrow}"] & s
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FGs \arrow[r, "\varepsilon_s"] \arrow[d, "FG(\mathrm{id}_s)"] \arrow[d, bend right=60, "\mathrm{id}_{FGs}"'] \arrow[d, phantom, bend right=30, "\overset{\psi'}{\Leftarrow}"] & s \arrow[d, "\mathrm{id}_s"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon_{\mathrm{id}_s}}{\Swarrow}"] \\
FGs \arrow[r, "\varepsilon_s"'] & s
\end{tikzcd}$$

このとき $\psi^G \colon \mathrm{id}_{Gs} \Rightarrow G(\mathrm{id}_s)$ を $F(\psi^G) = \psi' * (\psi^F)^{-1}$ となるように取れる．

- $s \xrightarrow{p} t \xrightarrow{q} u \xrightarrow{r} v$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(Gr \circ Gq) \circ Gp \arrow[r, "\varphi^G_{rq} \bullet Gp"] \arrow[d, "\alpha_{Gr,Gq,Gp}"'] & G(r \circ q) \circ Gp \arrow[r, "\varphi^G_{r \circ q, p}"] & G((r \circ q) \circ p) \arrow[d, "G(\alpha_{rqp})"] \\
Gr \circ (Gq \circ Gp) \arrow[r, "Gr \bullet \varphi^G_{qp}"'] & Gr \circ G(q \circ p) \arrow[r, "\varphi^G_{r, q \circ p}"'] & G(r \circ (q \circ p))
\end{tikzcd}$$

∵) $F$ で写した図式が可換であることを示せばよい．即ち，次の図式が可換で

あることを示せばよい．（ここで $\sigma_{qp} := (\varphi^F_{GqGp})^{-1} * F(\varphi^G_{qp})^{-1}$ と定義した．）

$$\begin{tikzcd}
F((Gr \circ Gq) \circ Gp) \arrow[r, "F(\varphi^G_{rq} \bullet Gp)"] \arrow[d, "(\varphi^F)^{-1}"'] \arrow[ddddd, bend right, "F\alpha"'] \arrow[rd, phantom, "(\varphi^F)"] & & F(G(r \circ q) \circ Gp) \arrow[rr, "F(\varphi^G_{r \circ q, p})"] \arrow[d, "(\varphi^F)^{-1}"'] \arrow[rrd, phantom, "(\sigma)"] & & FG((r \circ q) \circ p) \arrow[lld, "\sigma_{r \circ q, p}"] \arrow[ddddd, "FG\alpha"] \\
F(Gr \circ Gq) \circ FGp \arrow[rr, "F(\varphi^G_{rq}) \bullet FGp"] \arrow[rd, "(\varphi^F)^{-1} \bullet FGp"'] & \arrow[d, phantom, "(\sigma)"] & FG(r \circ q) \circ FGp \arrow[ld, "\sigma_{rq} \bullet FGp"] & & \\
\arrow[d, phantom, "(F)"] & (FGr \circ FGq) \circ FGp \arrow[d, "\alpha"] & & \arrow[d, phantom, "(*)"] & \\
 & FGr \circ (FGq \circ FGp) & & & \\
FGr \circ F(Gq \circ Gp) \arrow[ru, "FGr \bullet (\varphi^F)^{-1}"] \arrow[rr, "FGr \bullet F(\varphi^G_{qp})"'] \arrow[rrd, phantom, "(\varphi^F)"] & \arrow[u, phantom, "(\sigma)"] & FGr \circ FG(q \circ p) \arrow[lu, "FGr \bullet \sigma_{qp}"'] \arrow[rrd, phantom, "(\sigma)"] & & \\
F(Gr \circ (Gq \circ Gp)) \arrow[u, "(\varphi^F)^{-1}"] \arrow[rr, "F(Gr \bullet \varphi^G_{qp})"'] & & F(Gr \circ G(q \circ p)) \arrow[u, "(\varphi^F)^{-1}"] \arrow[rr, "F(\varphi^G_{r, q \circ p})"'] & & FG(r \circ (q \circ p)) \arrow[llu, "\sigma_{r, q \circ p}"']
\end{tikzcd}$$

$(F)$ は $F$ が pseudofunctor だから可換である．$(\varphi^F)$ は自然性により可換である．$(\sigma)$ は定義より可換である．よって $(*)$ が可換であることを示せばよい．これは左 Kan リフトの普遍性から分かる．

- $p \colon s \to t$ に対して次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Gt} \circ Gp \arrow[r, "\lambda_{Gp}"] \arrow[d, "\psi^G \bullet Gp"'] & Gp \\
G(\mathrm{id}_t) \circ Gp \arrow[r, "\varphi^G"'] & G(\mathrm{id}_t \circ p) \arrow[u, "G(\lambda_p)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Gp \circ \mathrm{id}_{Gs} \arrow[r, "\rho_{Gp}"] \arrow[d, "Gp \bullet \psi^G"'] & Gp \\
Gp \circ G(\mathrm{id}_s) \arrow[r, "\varphi^G"'] & G(p \circ \mathrm{id}_s) \arrow[u, "G(\rho_p)"']
\end{tikzcd}$$

∵) $F$ で写した図式が可換であることを示せばよい．即ち，次の図式が可換で

あることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
F(\mathrm{id}_{Gt}\circ Gp) \arrow[rrrr, "F(\lambda)"] \arrow[to=2-3, "(\varphi^F)^{-1}"'] \arrow[dddd, "F(\psi^G\bullet Gp)"'] & & (F) & & FGp \\
 & (\varphi^F) & F(\mathrm{id}_{Gt})\circ FGp \arrow[r, "(\psi^F)^{-1}\bullet FGp"] \arrow[d, "F(\psi^G)\bullet FGp"'] \arrow[d, phantom, shift left=8ex, "(\psi^G)"] & \mathrm{id}_{FGt}\circ FGp \arrow[to=1-5, "\lambda"] \arrow[to=3-3, "\psi'\bullet FGp"] & \\
 & & FG(\mathrm{id}_t)\circ FGp & (*) & \\
 & & (\sigma) & & \\
F(G(\mathrm{id}_t)\circ Gp) \arrow[to=3-3, "(\varphi^F)^{-1}"'] \arrow[rrrr, "F(\varphi^G)"'] & & & & FG(\mathrm{id}_t\circ p) \arrow[to=3-3, "\sigma"'] \arrow[uuuu, "FG\lambda"']
\end{tikzcd}$$

$(F)$ は $F$ が pseudofunctor だから可換である．$(\varphi^F)$ は自然性により可換である．$(\sigma)$，$(\psi^G)$ は定義より可換である．よって $(*)$ が可換であることを示せばよい．これは左 Kan リフトの普遍性から分かる．

このとき $\varepsilon_s\colon FGs \to s$ は pseudonatural transformation $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ を定める．

$\because$) まず $G\beta$ の定義より，$\varepsilon_p$ は $p$ について自然である．故に pseudonatural transformation の条件を示せばよいが，それは $\varphi^G, \psi^G$ の定義より明らか．

よって補題 77 より同値 $FG \simeq \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ が分かる．

あとは同値 $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow GF$ を定めればよい．

そこで $a \in \mathcal{B}$ とする．$\varepsilon^\bullet_{Fa}\colon Fa \to FGFa$ は $\mathcal{C}$ の 1-morphism で $F$ が局所圏同値だから，1-morphism $\eta_a\colon a \to GFa$ と同型 $F\eta_a \cong \varepsilon^\bullet_{Fa}$ が存在する．補題 27 より $\eta_a$ は同値である．更に $f\colon a \to b$ に対して $\eta'_f$ を

$$\eta'_f \quad = \quad \begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dr, bend right, "F\eta_a"'] \arrow[dr, bend left, "\varepsilon^\bullet_{Fa}"] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & \Downarrow\kappa^{Fa} & Fa \arrow[rr, "Ff"] & \Downarrow\varepsilon_{Ff} & Fb \arrow[dr, bend left, "F\eta_b"] \arrow[dr, bend right, "\varepsilon^\bullet_{Fb}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & \\
 & FGFa \arrow[ur, "\varepsilon_{Fa}"'] \arrow[rr, "FGFf"'] & & FGFb \arrow[ur, "\varepsilon_{Fb}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{FGFb}"'] & \Downarrow\mu^{Fb} & FGFb
\end{tikzcd}$$

と定める．これは同型である．よって $F(\eta_f) = (\eta'_f)^{-1}$ となるように取ることができる．なるように取る．これが pseudonatural transformation $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow GF$ となることを示せばよい．まず $\eta_f$ は $f$ について自然である．

$\because$) $\beta\colon f \Rightarrow g$ に対して

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta"] \arrow[d, "F\eta_a"'] & Fb \arrow[d, "F\eta_b"] \\
FGFa \arrow[r, bend right, "FGFg"'] \arrow[ur, phantom, "(F\eta_g)^{-1}\ \Swarrow"] & FGFb
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dr, bend right=40, "F\eta_a"'] \arrow[dr, bend left=20, "\varepsilon^{\bullet}_{Fa}"] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & & Fa \arrow[rr, bend left, "Ff"] \arrow[rr, bend right, "Fg"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow F\beta"] & & Fb \arrow[dr, bend left=40, "F\eta_b"] \arrow[dr, bend right=20, "\varepsilon^{\bullet}_{Fb}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu^{Fb}"] & \\
& FGFa \arrow[ur, "\varepsilon_{Fa}"'] \arrow[rr, bend right, "FGFg"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\kappa^{Fa}"] & & FGFb \arrow[ur, "\varepsilon_{Fb}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{FGFb}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon_{Ff}"] & & FGFb
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
Fa \arrow[rr, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[dr, bend right=40, "F\eta_a"'] \arrow[dr, bend left=20, "\varepsilon^{\bullet}_{Fa}"] \arrow[dr, phantom, "\cong"] & & Fa \arrow[rr, bend left, "Ff"] & & Fb \arrow[dr, bend left=40, "FGF\eta_b"] \arrow[dr, bend right=20, "\varepsilon^{\bullet}_{Fb}"'] \arrow[dr, phantom, "\cong"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\mu^{Fb}"] & \\
& FGFa \arrow[ur, "\varepsilon_{Fa}"'] \arrow[rr, bend left, "FGFf"] \arrow[rr, bend right, "FGFg"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow F\beta"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\kappa^{Fa}"] & & FGFb \arrow[ur, "\varepsilon_{Fb}"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{FGFb}"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\varepsilon_{Fg}"] & & FGFb
\end{tikzcd}$$

$$= \begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[d, "F\eta_a"'] \arrow[dr, phantom, "(F\eta_f)^{-1}\ \Swarrow"] & Fb \arrow[d, "F\eta_b"] \\
FGFa \arrow[r, bend left, "FGFf"] \arrow[r, bend right, "FGFg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow FGF\beta"] & FGFb
\end{tikzcd}$$

となるから

$$\begin{tikzcd}
FGFa \arrow[r, bend left, "FGFf"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow F\eta_f"] & FGFb \\
Fa \arrow[u, "F\eta_a"] \arrow[r, bend left, "Ff"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow F\beta"] & Fb \arrow[u, "F\eta_b"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FGFa \arrow[r, bend left, "FGFf"] \arrow[r, bend right, "FGFg"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow FGF\beta"] \arrow[dr, phantom, "F\eta_g \Searrow"] & FGFb \\
Fa \arrow[u, "F\eta_a"] \arrow[r, bend right, "Fg"'] & Fb \arrow[u, "F\eta_b"']
\end{tikzcd}$$

となる．よって定理 60 より

$$\begin{tikzcd}
GFa \arrow[rr, bend left, "GFf"] & & GFb \\
& \eta_f \Searrow & \\
a \arrow[uu, "\eta_a"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[rr, bend right, "g"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow\beta"] & & b \arrow[uu, "\eta_b"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
GFa \arrow[rr, bend left, "GFf"] \arrow[rr, bend right, "GFg"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow GF\beta"] & & GFb \\
& \eta_g \Searrow & \\
a \arrow[uu, "\eta_a"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & & b \arrow[uu, "\eta_b"']
\end{tikzcd}$$

である．

あとは pseudonatural transformation の条件を示せばよい．そこで $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ を $\mathcal{B}$ の 1-morphism とする．まず $\varepsilon\colon FG \Rightarrow \mathrm{id}$ が pseudonatural transformation だから

$$\begin{tikzcd}
FGFa \arrow[rr, "\varepsilon_{Fa}"] \arrow[dr, "FGFf"'] \arrow[dd, bend right=70, "FG(Fg\circ Ff)"'] & & Fa \arrow[dr, "Ff"] & \\
\overset{\varphi^{FG}_{FgFf}}{\Longleftarrow} & FGFb \arrow[rr, "\varepsilon_{Fb}"] \arrow[dl, "FGFg"] & \overset{\varepsilon_{Ff}}{\Swarrow} & Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
FGFc \arrow[rr, "\varepsilon_{Fc}"'] & \overset{\varepsilon_{Fg}}{\Swarrow} & Fc &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
FGFa \arrow[rr, "\varepsilon_{Fa}"] \arrow[dd, bend right=70, "FG(Fg\circ Ff)"'] & & Fa \arrow[dr, "Ff"] & \\
& \overset{\varepsilon_{Fg\circ Ff}}{\Swarrow} & & Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
FGFc \arrow[rr, "\varepsilon_{Fc}"'] & & Fc &
\end{tikzcd}$$

となる．よって

$$\begin{tikzcd}
& FGFa \arrow[rr, "\varepsilon_{Fa}"] \arrow[dl, "FGFf"'] & \overset{\varepsilon_{Ff}}{\Swarrow} & Fa \arrow[dl, "Ff"] \arrow[dd, bend left=70, "F(g\circ f)"] \\
FGFb \arrow[rr, "\varepsilon_{Fb}"] \arrow[dr, "FGFg"'] & & Fb \arrow[dr, "Fg"] & \overset{(\varphi^F_{gf})^{-1}}{\Longleftarrow} \\
& FGFc \arrow[rr, "\varepsilon_{Fc}"'] & \overset{\varepsilon_{Fg}}{\Swarrow} & Fc
\end{tikzcd}$$

$$=
\begin{tikzcd}
& FGFa \arrow[rrr, "\varepsilon_{Fa}"] \arrow[dl, "FGFf"'] \arrow[dd, bend left=70, "FGF(g\circ f)"] & & & Fa \arrow[dl, "Ff"'] \arrow[dd, bend left=70, "F(g\circ f)"] \\
FGFb \arrow[dr, "FGFg"'] & \overset{(\varphi^{FG}_{FgFf})^{-1}}{\Longleftarrow} & \overset{\varepsilon_{Fg\circ Ff}}{\Swarrow} & Fb \arrow[dr, "Fg"'] & \overset{(\varphi^F_{gf})^{-1}}{\Longleftarrow} \\
& FGFc \arrow[rrr, "\varepsilon_{Fc}"'] & & & Fc
\end{tikzcd}$$

$$= \quad \begin{tikzcd}
 & FGFa \arrow[r, "\varepsilon_{Fa}"] \arrow[dl, "FGFf"'] \arrow[dd, bend left=50, "FGF(g\circ f)"] & Fa \arrow[dd, bend left=50, "F(g\circ f)"] \\
FGFb \arrow[dr, "FGFg"'] \arrow[r, phantom, "\overset{F(\varphi^{GF}_{gf})^{-1}}{\Longleftarrow}"] & \phantom{X} \arrow[r, phantom, "\overset{\varepsilon_{F(g\circ f)}}{\Swarrow}"] & \phantom{X} \\
 & FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"'] & Fc
\end{tikzcd}$$

となる (ここで $\varepsilon_f$ が $f$ について自然であることと $\varphi^{FG}$ の定義を使った)．従って

$$\begin{tikzcd}
 & FGFa \arrow[dl, "FGFf"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{(F\eta_f)^{-1}}{\Longleftarrow}"] & & Fa \arrow[ll, "F\eta_a"'] \arrow[dl, "Ff"] \arrow[dd, bend left=50, "F(g\circ f)"] \\
FGFb \arrow[rr, "F\eta_b"] \arrow[dr, "FGFg"'] & & Fb \arrow[dr, "Fg"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi^{F}_{gf}}{\Leftarrow}"] & \phantom{X} \\
 & FGFc \arrow[rr, "F\eta_c"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{(F\eta_g)^{-1}}{\Swarrow}"] & & Fc
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
 & Fa \arrow[dl, "\varepsilon^{\bullet}_{Fa}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, bend right=60, "F\eta_a"', "\cong"] \\
FGFa \arrow[r, "\varepsilon_{Fa}"'] \arrow[d, "FGFf"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\kappa^{Fa}}{\Leftarrow}"] & Fa \arrow[d, "Ff"] \arrow[dddd, bend left=40, "F(g\circ f)"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon_{Ff}}{\Swarrow}"] \\
FGFb \arrow[r, "\varepsilon_{Fb}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu^{Fb}}{\Leftarrow}"] & Fb \arrow[dl, "\varepsilon^{\bullet}_{Fb}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\kappa^{Fb}}{\Leftarrow}"] \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi^{F}_{gf}}{\Longleftarrow}"] & \phantom{X} \\
FGFb \arrow[r, "\varepsilon_{Fb}"'] \arrow[d, "FGFg"'] & Fb \arrow[d, "Fg"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\varepsilon_{Fg}}{\Swarrow}"] \\
FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\mu^{Fc}}{\Leftarrow}"] & Fc \arrow[dl, "\varepsilon^{\bullet}_{Fc}"] \arrow[dl, bend left=60, "F\eta_c", "\cong"'] \\
FGFc &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & Fa \arrow[dl, "\varepsilon^{\bullet}_{Fa}"'] \arrow[dl, bend right=70, "F\eta_a"'] \arrow[dl, phantom, bend right=35, "\cong"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \arrow[d, phantom, shift right=3, "\overset{\kappa^{Fa}}{\Leftarrow}"] \\
 & & FGFa \arrow[r, "\varepsilon_{Fa}"'] \arrow[dl, "FGFf"'] \arrow[dd, bend left=50, "FGF(g\circ f)"] & Fa \arrow[dd, bend left=70, "F(g\circ f)"] \\
= & FGFb \arrow[dr, "FGFg"'] \arrow[r, phantom, "\overset{F(\varphi^{GF}_{gf})^{-1}}{\Longleftarrow}"] & & \overset{\varepsilon_{F(g\circ f)}}{\Swarrow} \\
 & & FGFc \arrow[r, "\varepsilon_{Fc}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \arrow[d, phantom, shift left=3, "\overset{\mu^{Fc}}{\Leftarrow}"] & Fc \arrow[dl, "\varepsilon^{\bullet}_{Fc}"] \arrow[dl, bend left=70, "F\eta_c"] \arrow[dl, phantom, bend left=35, "\cong"] \\
 & & FGFc & 
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & FGFa \arrow[dl, "FGFf"'] \arrow[dd, bend left=50, "FGF(g\circ f)"] & Fa \arrow[l, "F\eta_a"'] \arrow[dr, "Ff"] & \\
= & FGFb \arrow[dr, "FGFg"'] \arrow[r, phantom, "\overset{F(\varphi^{GF}_{gf})^{-1}}{\Longleftarrow}"] & & \overset{(F\eta_{g\circ f})^{-1}}{\Nwarrow} & Fb \arrow[dl, "Fg"] \\
 & & FGFc & Fc \arrow[l, "F\eta_c"] & 
\end{tikzcd}$$

となるから

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "F\eta_a"] \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dd, bend right=60, "Fg\circ Ff"'] & \overset{F\eta_f}{\Swarrow} & FGFa \arrow[dr, "FGFf"] & & = & Fa \arrow[r, "F\eta_a"] \arrow[dd, bend right=60, "F(g\circ f)"'] & FGFa \arrow[dr, "FGFf"] \arrow[dd, bend right=50, "FGF(g\circ f)"'] \arrow[r, phantom, "\overset{F\varphi^{GF}_{gf}}{\Longleftarrow}"] & \\
= & Fb \arrow[rr, "F\eta_b"] \arrow[dl, "Fg"] & & FGFb \arrow[dl, "FGFg"] & & \overset{F\eta_{g\circ f}}{\Swarrow} & & FGFb \arrow[dl, "FGFg"] \\
Fc \arrow[r, "F\eta_c"'] & \overset{F\eta_g}{\Swarrow} & FGFc & & & Fc \arrow[r, "F\eta_c"'] & FGFc & 
\end{tikzcd}$$

となる．よって定理 60 より

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[dd, bend right=60, "g\circ f"'] \arrow[dd, phantom, shift left=4ex, "\overset{\eta_{g\circ f}}{\Swarrow}"] & GFa \arrow[dr, "GFf"] \arrow[dd, bend right=50, "GF(g\circ f)"'] & \\
& \arrow[r, phantom, "\overset{\varphi^{GF}_{gf}}{\Longleftarrow}"] & GFb \arrow[dl, "GFg"] \\
c \arrow[r, "\eta_c"'] & GFc &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\eta_a"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dd, bend right=60, "g\circ f"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\eta_f}{\Swarrow}"] & GFa \arrow[dr, "GFf"] & \\
\arrow[r, phantom, "="] & b \arrow[rr, "\eta_b"] \arrow[dl, "g"] & & GFb \arrow[dl, "GFg"] \\
c \arrow[rr, "\eta_c"'] & \arrow[u, phantom, "\overset{\eta_g}{\Swarrow}"] & GFc &
\end{tikzcd}$$

が分かる．

もう一つの条件

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_a", "="'] \arrow[d, bend right=60, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[dr, "\eta_a"'] & GFa \arrow[d, "\mathrm{id}_{GFa}"] \arrow[dl, phantom, shift left=3ex, "\overset{\lambda_{\eta_a}}{\Swarrow}"] \\
a \arrow[r, "\eta_a"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\overset{\rho^{-1}_{\eta_a}}{\Swarrow}"] & GFa
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, bend right=60, "\mathrm{id}_a"'] \arrow[d, phantom, "\underset{GF(\mathrm{id}_a)}{\overset{\eta_{\mathrm{id}_a}}{\Swarrow}}"] & GFa \arrow[d, "\mathrm{id}_{GFa}"] \arrow[d, bend right=60, ""'] \arrow[d, phantom, shift right=2ex, "\overset{\psi^{GF}}{\Leftarrow}"] \\
a \arrow[r, "\eta_a"'] & GFa
\end{tikzcd}$$

も同じようにして分かる． □

# 8 lax, oplax

pseudofunctor の定義において，$\varphi^{abc}$ と $\psi^a$ が同型でなくともよい，としたものを lax 2-functor という．即ち

**定義.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory とする．lax 2-functor $F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ とは以下を満たすことである．

(1) 関数 $F\colon \mathrm{Ob}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ が与えられている．

(2) 各対象 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して関手 $F^{ab}\colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ が与えられている．

(3) 各対象 $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して次の自然変換 $\varphi^{abc}$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c) \times \mathcal{B}(a,b) \arrow[dl, "F^{bc}\times F^{ab}"'] \arrow[dr, "M^{abc}"] & \\
\mathcal{C}(Fb,Fc) \times \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[dr, "M^{Fa,Fb,Fc}"'] \arrow[rr, phantom, "\underset{\varphi^{abc}}{\Longrightarrow}"] & & \mathcal{B}(a,c) \arrow[dl, "F^{ac}"] \\
& \mathcal{C}(Fa,Fc) &
\end{tikzcd}$$

(4) 各対象 $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 2-morphism $\psi^a \colon \mathrm{id}_{Fa} \Rightarrow F^{aa}(\mathrm{id}_a)$ が与えられている．

(5) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \xrightarrow{h} d$ に対して次の $\mathcal{C}(Fa, Fd)$ の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
(Fh \circ Fg) \circ Ff \arrow[r, "\varphi_{hg} \bullet Ff"] \arrow[d, "\alpha_{Fh,Fg,Ff}"'] & F(h \circ g) \circ Ff \arrow[r, "\varphi_{h \circ g, f}"] & F((h \circ g) \circ f) \arrow[d, "F(\alpha_{hgf})"] \\
Fh \circ (Fg \circ Ff) \arrow[r, "Fh \bullet \varphi_{gf}"'] & Fh \circ F(g \circ f) \arrow[r, "\varphi_{h, g \circ f}"'] & F(h \circ (g \circ f))
\end{tikzcd}$$

(6) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f \colon a \to b$ に対して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[dr, "F(\mathrm{id}_b)"] \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fb}"] \arrow[dr, phantom, bend left=30, "\psi^b \Swarrow"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, "F(\mathrm{id}_b \circ f)"] \arrow[rr, bend right=50, "F(f)"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow F(\lambda_f)"] \arrow[ur, phantom, shift left=6, "\Downarrow \varphi^{abb}_{\mathrm{id}_b, f}"] & & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Fb \arrow[dr, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fb}"] & \\
Fa \arrow[ur, "Ff"] \arrow[rr, bend right=50, "F(f)"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \lambda_{Ff}"] & & Fb
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& Fa \arrow[dr, "Ff"] \arrow[dr, phantom, shift right=6, "\varphi^{aab}_{f, \mathrm{id}_a} \Downarrow"] & \\
Fa \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[ur, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[ur, phantom, bend left=30, "\Searrow \psi^a"] \arrow[rr, "F(f \circ \mathrm{id}_a)"] \arrow[rr, bend right=50, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, bend right=25, "\Downarrow F(\rho_f)"] & & Fb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& Fa \arrow[dr, "Ff"] & \\
Fa \arrow[ur, bend left=60, "\mathrm{id}_{Fa}"] \arrow[rr, bend right=50, "Ff"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow \rho_{Ff}"] & & Fb
\end{tikzcd}$$

lax 2-functor に対しても，pseudofunctor と全く同様にして pseudonatural transformation を定義することができる．更に，条件を弱くした lax natural transformation もある．

**定義．** $F, G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor とする．$F$ から $G$ への lax natural transformation $\sigma \colon F \Rightarrow G$ とは以下を満たすことである．

(1) 各 $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 1-morphism $\sigma_a \colon Fa \to Ga$ が与えられている．

(2) 各 $a, b \in \mathcal{B}$ に対して，次の自然変換 $\sigma^{ab}$ が与えられている．

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{B}(a,b) \arrow[ld, "G^{ab}"'] \arrow[rd, "F^{ab}"] & \\
\mathcal{C}(Ga,Gb) \arrow[rd, "-\bullet\sigma_a"'] & \underset{\sigma^{ab}}{\Longrightarrow} & \mathcal{C}(Fa,Fb) \arrow[ld, "\sigma_b\bullet-"] \\
 & \mathcal{C}(Fa,Gb) &
\end{tikzcd}$$

(3) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して，次の $\mathcal{C}(Fa, Gc)$ の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
(Gg \circ Gf) \circ \sigma_a \arrow[r, "\sim", "\alpha"'] \arrow[ddd, "\varphi_{gf}\bullet\sigma_a"'] & Gg \circ (Gf \circ \sigma_a) \arrow[r, "Gg\bullet\sigma_f"'] & Gg \circ (\sigma_b \circ Ff) \arrow[r, "\sim", "\alpha^{-1}"'] & (Gg \circ \sigma_b) \circ Ff \arrow[d, "\sigma_g\bullet Ff"'] \\
 & & & (\sigma_c \circ Fg) \circ Ff \arrow[d, "\alpha"', "\wr"] \\
 & & & \sigma_c \circ (Fg \circ Ff) \arrow[d, "\sigma_c\bullet\varphi_{gf}"'] \\
G(g \circ f) \circ \sigma_a \arrow[rrr, "\sigma_{g\circ f}"'] & & & \sigma_c \circ F(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

(4) $a \in \mathcal{B}$ に対して次の等式が成り立つ．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{Fa}"'] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[rd, "\sigma_a"'] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[ld, phantom, "\lambda_{\sigma_a}\ \Swarrow" near start] \\
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}" near start, shift right=5ex] \arrow[ru, phantom, "\rho^{-1}_{\sigma_a}\ \Swarrow" near start] & Ga
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, "\sigma_a"] \arrow[d, bend right=60, "F(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, "\sigma_{\mathrm{id}_a}\ \Swarrow"] & Ga \arrow[d, "\mathrm{id}_{Ga}"] \arrow[d, bend right=60, "G(\mathrm{id}_a)"'] \arrow[d, phantom, "\overset{\psi^a}{\Leftarrow}", shift right=2ex] \\
Fa \arrow[r, "\sigma_a"'] & Ga
\end{tikzcd}$$

各 $\sigma^{ab}$ が自然同型となるとき，$\sigma$ を pseudonatural transformation と呼ぶ．各 $\sigma^{ab}$ が恒等変換となるとき，$\sigma$ を strict natural transformation と呼ぶ．

lax natural transformation に対しても，modification を全く同様にして定義できる．

**定義．** $F, G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor，$\sigma, \tau \colon F \Rightarrow G$ を lax natural transformation とする．$\sigma$ から $\tau$ への modification $\Gamma \colon \sigma \Rrightarrow \tau$ とは以下を満たすことである．

(1) 各 $a \in \mathcal{B}$ に対して $\mathcal{C}$ の 2-morphism $\Gamma_a \colon \sigma_a \Rightarrow \tau_a$ が与えられている．

(2) $\mathcal{B}$ の 1-morphism $f \colon a \to b$ に対して，$\mathcal{C}$ の 2-morphism に関する次の等式が成り

立つ．

$$\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\sigma_f^{ab}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend left, "\sigma_b"] \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_b"] & Gb
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
Fa \arrow[r, bend left, "\sigma_a"] \arrow[r, bend right, "\tau_a"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\Gamma_a"] \arrow[d, "Ff"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\tau_f^{ab}}{\Swarrow}"] & Ga \arrow[d, "Gf"] \\
Fb \arrow[r, bend right, "\tau_b"'] & Gb
\end{tikzcd}$$

このとき，pseudofunctor，pseudonatural transformation，modification の場合と同様にして以下の命題を示すことができる．

**命題 82.** $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor とする．lax natural transformation $\sigma\colon F \Rightarrow G$，$\tau\colon G \Rightarrow H$ に対して垂直合成 $\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma)_a := \tau_a \circ \sigma_a$ で定めれば，$\tau \mathbin{\widehat{\circ}} \sigma$ は lax natural transformation $F \Rightarrow H$ となる． □

**命題 83.** $F, G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor，$\sigma, \tau, \rho\colon F \Rightarrow G$ を lax natural transformation，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$，$\Delta\colon \tau \Rrightarrow \rho$ を modification とする．modification の垂直合成 $\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma)_a := \Delta_a * \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{*}} \Gamma$ は modification $\sigma \Rrightarrow \rho$ となる． □

**命題 84.** lax natural transformation $F \Rightarrow G$ を対象，modification を射とすれば圏となる．この圏を $\mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, G)$ と書く． □

**命題 85.** $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor，$\sigma, \tau\colon F \Rightarrow G$，$\rho, \xi\colon G \Rightarrow H$ を lax natural transformation，$\Gamma\colon \sigma \Rrightarrow \tau$，$\Delta\colon \rho \Rrightarrow \xi$ を modification とする．modification の水平合成 $\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ を，$a \in \mathcal{B}$ に対して $(\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma)_a := \Delta_a \bullet \Gamma_a$ で定めれば，$\Delta \mathbin{\widehat{\bullet}} \Gamma$ は modification $\rho \bullet \sigma \Rrightarrow \xi \bullet \tau$ となる． □

**命題 86.** $F, G, H\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ に対して，lax natural transformation の合成は関手 $\mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(G, H) \times \mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, G) \to \mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, H)$ を与える． □

**定理 87.** bicategory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ に対して bicategory $\mathrm{Fun}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ を以下のように定義することができる．

- lax 2-functor $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を対象とする．
- $\mathrm{Fun}_{\mathrm{lax}}(\mathcal{B}, \mathcal{C})(F, G) := \mathrm{Nat}_{\mathrm{lax}}(F, G)$ とする．即ち lax natural transformation が 1-morphism で modification が 2-morphism である． □

$\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ を bicategory，$F\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$，$G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を lax 2-functor とする．このとき $F$ と

$G$ を合成した lax 2-functor $GF$ を命題 35 と同様にして定義することができる．即ち

- $a \in \mathcal{B}$ に対して $GF(a) := G(F(a))$.
- $a, b \in \mathcal{B}$ に対して $(GF)^{ab} := \big(\mathcal{B}(a,b) \xrightarrow{F^{ab}} \mathcal{C}(Fa,Fb) \xrightarrow{G^{FaFb}} \mathcal{D}(GFa,GFb)\big)$.
- $a, b, c \in \mathcal{B}$ に対して自然変換

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B}(b,c)\times\mathcal{B}(a,b) \arrow[ld, "GF^{bc}\times GF^{ab}"'] \arrow[rd, "M"] & \\
\mathcal{D}(GFb,GFc)\times\mathcal{D}(GFa,GFb) \arrow[rd, "M"'] & \underset{\varphi^{GF}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}(a,c) \arrow[ld, "GF^{ac}"] \\
& \mathcal{D}(GFa,GFc) &
\end{tikzcd}$$

  を合成

$$\begin{tikzcd}
& & \mathcal{A}(b,c)\times\mathcal{A}(a,b) \arrow[ld, "F\times F"'] \arrow[rd, "M"] & \\
& \mathcal{B}(Fb,Fc)\times\mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[ld, "G\times G"'] \arrow[rd, "M"] & \underset{\varphi^{F}}{\Longrightarrow} & \mathcal{A}(a,c) \arrow[ld, "F"] \\
\mathcal{C}(GFb,GFc)\times\mathcal{C}(GFa,GFb) \arrow[rd, "M"'] & \underset{\varphi^{G}}{\Longrightarrow} & \mathcal{B}(Fa,Fc) \arrow[ld, "G"] & \\
& \mathcal{C}(GFa,GFc) & &
\end{tikzcd}$$

  で定める．
- $a \in \mathcal{B}$ に対して $\psi^{GF} := G(\psi^F) * \psi^G \colon \mathrm{id}_{GFa} \Rightarrow G(\mathrm{id}_{Fa}) \Rightarrow GF(\mathrm{id}_a)$ と定める．

が $GF$ の定義である．

**命題 88.** この合成により，対象を bicategory，射を lax 2-functor とすると圏になる．

**証明**. まず lax 2-functor $F$ に対して $F \circ \mathrm{id} = F$, $\mathrm{id} \circ F = F$ が定義から容易に分かる．よって結合律を示せばよい．

$F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, $H\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ を lax 2-functor とする．定義から明らかに $\varphi^{(HG)F} = \varphi^{H(GF)}$ である．また

$$\psi^{(HG)F} = HG(\psi^F) * \psi^{HG} = HG(\psi^F) * H(\psi^G) * \psi^H$$
$$\psi^{H(GF)} = H(\psi^{GF}) * \psi^H = H(G(\psi^F) * \psi^G) * \psi^H$$

だから $\psi^{(HG)F} = \psi^{H(GF)}$ である． □

bicategory と lax 2-functor が圏となったので，lax natural transformation を 2-morphism にすれば strict 2-category になるのではないか？ という気がしてくるが実はそれは成り立たない．そこで代わりに導入される 2-morphism が icon である．

**定義.** $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ を bicategory，$F, G \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を lax 2-functor とする．icon[*12] $\sigma \colon F \Rightarrow G$ とは

(1) まず各 $a \in \mathcal{B}$ について $Fa = Ga$ とする．

(2) $a, b \in \mathcal{B}$ に対して自然変換 $\sigma^{ab} \colon F^{ab} \Rightarrow G^{ab} \colon \mathcal{B}(a, b) \to \mathcal{C}(Fa, Fb)$ が与えられている．

(3) $a \in \mathcal{B}$ に対して次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{Fa} \arrow[d, "\psi"'] \arrow[dr, "\psi"] & \\
F(\mathrm{id}_a) \arrow[r, "\sigma^{aa}_{\mathrm{id}_a}"'] & G(\mathrm{id}_a)
\end{tikzcd}$$

(4) $a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c$ に対して次が可換である．

$$\begin{tikzcd}
Fg \circ Ff \arrow[r, "\sigma^{bc}_g \bullet \sigma^{ab}_f"] \arrow[d, "\varphi_{gf}"'] & Gg \circ Gf \arrow[d, "\varphi_{gf}"] \\
F(g \circ f) \arrow[r, "\sigma^{ac}_{g \circ f}"'] & G(g \circ f)
\end{tikzcd}$$

**命題 89.** $\sigma \colon F \Rightarrow G$，$\tau \colon G \Rightarrow H$ を icon とする．これら icon の垂直合成 $\tau * \theta \colon F \Rightarrow H$ を $(\tau * \sigma)^{ab} := \tau^{ab} * \sigma^{ab}$ で定める．このとき lax 2-functor $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ を対象，icon を射とすると圏になる．

証明. lax 2-functor $F \colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ に対して icon $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$ を $(\mathrm{id}_F)^{ab} := \mathrm{id}_{F^{ab}}$ で定める．このとき，icon $\sigma$ の各成分 $\sigma^{ab}$ は自然変換だから

$$\begin{aligned}
((\rho * \tau) * \sigma)^{ab} &= (\rho * \tau)^{ab} * \sigma^{ab} = (\rho^{ab} * \tau^{ab}) * \sigma^{ab} \\
&= \rho^{ab} * (\tau^{ab} * \sigma^{ab}) = (\rho * (\tau * \sigma))^{ab} \\
(\sigma * \mathrm{id}_F)^{ab} &= \sigma^{ab} * \mathrm{id}_{F^{ab}} = \sigma^{ab} \\
(\mathrm{id}_G * \sigma)^{ab} &= \mathrm{id}_{G^{ab}} * \sigma^{ab} = \sigma^{ab}
\end{aligned}$$

となり，圏の条件が成り立つ． □

---

[*12] icon は Identity Component Oplax Natural transformation の略らしい．

**命題 90.** 対象を bicategory，1-morphism を lax 2-functor，2-morphism を icon とすると strict 2-category になる．これを **Icon** と書く．

証明. $\sigma, \tau$ を次のような icon とする．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=40, "F"] \arrow[r, bend right=40, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=40, "K"] \arrow[r, bend right=40, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

このとき icon の水平合成 $\tau \bullet \sigma \colon LG \Rightarrow KF$ を $(\tau \bullet \sigma)^{ab} := \tau^{FaFb} \bullet \sigma^{ab}$ で定義する．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,b) \arrow[r, bend left=30, "F^{ab}"] \arrow[r, bend right=30, "G^{ab}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma^{ab}"] & \mathcal{B}(Fa,Fb) \arrow[r, bend left=30, "K^{FaFb}"] \arrow[r, bend right=30, "L^{FaFb}"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau^{FaFb}"] & \mathcal{C}(KFa,KFB)
\end{tikzcd}$$

これにより **Icon** が strict 2-category となることを示そう．

まず命題 89 により，bicategory $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ に対して $\mathbf{Icon}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は圏である．

次に合成 $\mathbf{Icon}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \times \mathbf{Icon}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \to \mathbf{Icon}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ が関手であることを示すため，次の icon を考える．

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left=50, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=50, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\sigma\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\rho\Downarrow"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left=50, "K"] \arrow[r, "L" description] \arrow[r, bend right=50, "M"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\tau\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\theta\Downarrow"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

このとき

$$\begin{aligned}
\big((\theta * \tau) \bullet (\rho * \sigma)\big)^{ab} &= (\theta * \tau)^{FaFb} \bullet (\rho * \sigma)^{ab} \\
&= (\theta^{FaFb} * \tau^{FaFb}) \bullet (\rho^{ab} * \sigma^{ab}) \\
\big((\theta \bullet \rho) * (\tau \bullet \sigma)\big)^{ab} &= (\theta \bullet \rho)^{ab} * (\tau \bullet \sigma)^{ab} \\
&= (\theta^{FaFb} \bullet \rho^{ab}) * (\tau^{FaFb} \bullet \sigma^{ab}) \\
&= (\theta^{FaFb} * \tau^{FaFb}) \bullet (\rho^{ab} * \sigma^{ab})
\end{aligned}$$

だから $(\theta * \tau) \bullet (\rho * \sigma) = (\theta \bullet \rho) * (\tau \bullet \sigma)$ である．また

$$(\mathrm{id}_K \bullet \mathrm{id}_F)^{ab} = \mathrm{id}_{K^{FaFb}} \bullet \mathrm{id}_{F^{ab}} = (\mathrm{id}_{KF})^{ab}$$

となるから $\mathrm{id}_K \bullet \mathrm{id}_F = \mathrm{id}_{KF}$ である．以上により合成が関手であることが分かった．

次に

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\sigma"] & \mathcal{B} \arrow[r, bend left, "K"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\tau"] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "P"] \arrow[r, bend right, "Q"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\rho"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

を icon としたとき

$$\begin{aligned}
\bigl((\rho\bullet\tau)\bullet\sigma\bigr)^{ab} &= (\rho\bullet\tau)^{FaFb}\bullet\sigma^{ab} = (\rho^{KFaKFb}\bullet\tau^{FaFb})\bullet\sigma^{ab}\\
\bigl(\rho\bullet(\tau\bullet\sigma)\bigr)^{ab} &= \rho^{KFaKFb}\bullet(\tau\bullet\sigma)^{ab} = \rho^{KFaKFb}\bullet(\tau^{FaFb}\bullet\sigma^{ab})
\end{aligned}$$

となるから結合律も成り立つ．単位元についても

$$\begin{aligned}
\bigl(\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}}}\bullet\sigma\bigr)^{ab} &= \mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{B}(Fa,Fb)}}\bullet\sigma^{ab} = \sigma^{ab}\\
\bigl(\sigma\bullet\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{A}}}\bigr)^{ab} &= \sigma^{ab}\bullet\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathcal{A}(a,b)}} = \sigma^{ab}
\end{aligned}$$

となるから成り立つ．

以上により **Icon** は strict 2-category である． □

# 参考文献

[1] Igor Bakovic, Bicategorical Yoneda lemma, `http://www.irb.hr/users/ibakovic/`

[2] Katrina Honigs, Coherence Theorems in Two-Dimensional Category Theory, `https://pages.uoregon.edu/honigs/`

[3] Peter Guthman, The tricategory of formal composites and its strictification, `https://arxiv.org/abs/1903.05777`

[4] N. Johnson and D. Yau, 2-Dimensional Categories, `https://arxiv.org/abs/2002.06055`