$\mathbb{Z}_p$ は終余代数であるらしい

@alg_d

2017 年 12 月 1 日

※ これは Category Theory Advent Calendar 2017 の 1 日目です.

Math Advent Calendar 2017 の 1 日目にてりす君が p 進整数環 $\mathbb{Z}_p$ を構成するとのことなので，それに対抗して (?) こちらでも $\mathbb{Z}_p$ をある種の普遍性で特徴付ける．まず次の定義をする.

定義. C を圏，$T\colon C \longrightarrow C$ を関手とする．T-余代数とは対象 $a \in C$ と射 $k\colon a \longrightarrow Ta$ の組 $\langle a, k\rangle$ のことである.

定義. T-余代数の間の射 $\langle a, k\rangle \longrightarrow \langle b, l\rangle$ とは，射 $f\colon a \longrightarrow b$ であって次を可換にするものをいう.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "k"] \arrow[d, "f"'] & Ta \arrow[d, "Tf"] \\ b \arrow[r, "l"'] & Tb \end{tikzcd}$$

定義. T-余代数とその間の射は圏をなす．この圏の終対象を T-終余代数という.

このとき，実は $\mathbb{Z}_p$ はある T に関する T-終余代数になっているというのがこの PDF の主張である．一般に次の定理が成り立つ.

定理 1. C を終対象 1 を持つ圏とし，$T\colon C \longrightarrow C$ を関手とする.

$$1 \xleftarrow{!} T1 \xleftarrow{T!} T^2 1 \longleftarrow \cdots$$

が定める図式を D (従って関手 $D\colon \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \longrightarrow C$ である) として，その極限 $\langle \lim D, \mu\rangle$ が存在するとする．更に T は極限 $\langle \lim D, \mu\rangle$ と交換するとする．このとき T-終余代数が存在する.

証明. T が極限 $\langle \lim D, \mu \rangle$ と交換するから，図式

$$T1 \xleftarrow{T!} T^2 1 \xleftarrow{T^2!} T^3 1 \longleftarrow \cdots$$

の極限は $\langle T(\lim D), T\mu \rangle$ である．この極限の普遍性から射 $k\colon \lim D \longrightarrow T(\lim D)$ が存在する．

$$\begin{tikzcd}
 & T1 \arrow[l, phantom] & T^2 1 \arrow[l, "T!"'] & T^3 1 \arrow[l, "T^2!"'] & \cdots \arrow[l] & T(\lim D) \arrow[l, "T\mu_n"'] \\
1 & T1 \arrow[l, "!"] \arrow[u, "\mathrm{id}"] & T^2 1 \arrow[l, "T!"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & T^3 1 \arrow[l, "T^2!"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & \cdots \arrow[l] & \lim D \arrow[l, "\mu_{n+1}"] \arrow[u, dashed, "k"']
\end{tikzcd}$$

こうして得られた T-余代数 $\langle \lim D, k \rangle$ が T-終余代数であることを示す．その為にまず $\langle a, l \rangle$ を T-余代数とする．このとき自然変換 $\theta\colon \Delta a \Longrightarrow D$ が存在する．

∵) $n \in \mathbb{N}$ に対して $\theta_n := T^n! \circ T^{n-1}l \circ \cdots \circ l\colon a \longrightarrow T^n 1$ とすればよい．

$$\begin{tikzcd}
1 & T1 \arrow[l, "!"'] & T^2 1 \arrow[l, "T!"'] & \cdots \arrow[l] & T^n 1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
a \arrow[u, "!"] \arrow[r, "l"'] & Ta \arrow[u, "T!"'] \arrow[r, "Tl"'] & T^2 a \arrow[u, "T^2!"'] \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "T^{n-1}l"'] & T^n a \arrow[u, "T^n!"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

従って普遍性から射 $h\colon a \longrightarrow \lim D$ を得る．この h は余代数の射 $\langle a, l \rangle \longrightarrow \langle \lim D, k \rangle$ を与える．

∵) 次の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"'] & Ta \arrow[d, "Th"] \\
\lim D \arrow[r, "k"'] & T(\lim D)
\end{tikzcd}$$

定義より

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "\theta_{n+1}=T^{n+1}!\circ T^n l\circ\cdots\circ l"'] & \lim D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mu_{n+1}"] & T(\lim D) \arrow[d, "T\mu_n"] \\
 & T^{n+1} 1 \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & T^{n+1} 1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "l"] & Ta \arrow[r, "Th"] \arrow[dr, "T^{n+1}!\circ T^n l\circ\cdots\circ Tl"'] & T(\lim D) \arrow[d, "T\mu_n"] \\
 & & T^{n+1} 1
\end{tikzcd}$$

が可換であるから，$T(\lim D)$ の普遍性により，上記の図式は可換である．

故に余代数の射 $\langle a, l\rangle \longrightarrow \langle \lim D, k\rangle$ は存在する．後はこのような射が一意であることを示せばよい．その為には任意の余代数の射 $f\colon \langle a, l\rangle \longrightarrow \langle \lim D, k\rangle$ に対して $f = h$ を示せばよい．$f = h$ を示す為には，$\lim D$ の普遍性より，$n \in \mathbb{N}$ に対して $\mu_n \circ f = \mu_n \circ h$ を示せばよい．n に関する帰納法を使う．

まず $n = 0$ の場合，$\mu_0 \circ f, \mu_0 \circ h\colon a \longrightarrow 1$ で 1 が終対象だから $\mu_0 \circ f = \mu_0 \circ h$ である．$n > 0$ の場合．f が余代数の射だから

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "l"] \arrow[d, "f"'] & Ta \arrow[d, "Tf"] \\
\lim D \arrow[r, "k"'] & T(\lim D)
\end{tikzcd}$$

が可換である．従って

$$\mu_n \circ f = T\mu_{n-1} \circ k \circ f = T\mu_{n-1} \circ Tf \circ l = T\mu_{n-1} \circ Th \circ l = \mu_n \circ h$$

$$\begin{tikzcd}
& Ta \arrow[dr, bend left, "Tf"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "l"] \arrow[r, "f"] & \lim D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\mu_n"] & T(\lim D) \arrow[d, "T\mu_{n-1}"] \\
& T^n 1 \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & T^n 1
\end{tikzcd}$$

となる． □

さて，U を次の圏とする．

- 対象は直径が 1 以下の超距離空間.
- 射は非拡大写像.

$V_p := \{0, 1, \cdots, p-1\}$ を離散距離空間として関手 $T_p\colon U \longrightarrow U$ を

$$T_p(X) := \frac{1}{p}X \times V_p$$

で定義する．U は 1 点空間を終対象として持ち，$\lim(1 \leftarrow T_p 1 \leftarrow T_p^2 1 \leftarrow \cdots) \cong \mathbb{Z}_p$ である．また T_p はこの極限と交換する．従って定理より T_p-終余代数が存在するが，それは証明より $\mathbb{Z}_p$ であることが分かる．

参考文献

[1] Prasit Bhattacharya, The p-adic integers as final coalgebra, https://arxiv.org/abs/1504.01408

[2] J. Adamek, S. Milius, L. S. Moss, Initial algebras and terminal coalgebras: a survey, https://www.tu-braunschweig.de/Medien-DB/iti/survey_full.pdf