明日使える? Kan リフトの話

@alg_d

2017 年 12 月 2 日

※ これは Category Theory Advent Calendar 2017 の 2 日目です.

(この記事では Kan 拡張の知識を仮定します.)

Kan 拡張の定義において、関手の向きを逆にしたものが Kan リフトである. この Kan リフト, (一般の 2 圏の中ならともかく) 通常の圏論で何か役に立つのか? と思い検索してみても全然情報が見つからない[*1]. そこでこの PDF では, Kan リフトの性質を使用して証明できる[*2]圏論の定理を紹介する. (他に何か知っていたら, 教えてください.)

まず, Kan 拡張と同様にして以下の定義をする.

定義. C, D, U を圏, $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon U \longrightarrow D$ を関手とする. F に沿った E の左 Kan リフトとは組 $\langle F_\dagger E, \eta\rangle$ であって, 以下の条件を満たすものである[*3].

(1) $F_\dagger E$ は関手 $U \longrightarrow C$, η は自然変換 $E \Longrightarrow F \circ (F_\dagger E)$ である.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] & \\ D \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"'] \end{tikzcd}$$

(2) 組 $\langle S, \theta\rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S\colon U \longrightarrow C$ は関手で $\theta\colon E \Longrightarrow FS$ は自然変換) ならば, 自然変換 $\tau\colon F_\dagger E \Longrightarrow S$ が一意に存在して $\theta = F\tau \circ \eta$ となる. 即ち

---

*1 恐らく最も有益 (?) な情報は [1] である.

*2 Kan リフトを使わない普通の証明は皆さん知っていると思います.

*3 $F_\dagger E$ という記法はここだけのもの.「左 Kan 拡張が上付きダガーなら左 Kan リフトは下付きダガーでは?」という安直な考え.

次の等式が成り立つ．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\eta\Uparrow"] & \\
D & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E" description] \arrow[ul, bend right=60, "S"'] \arrow[ul, phantom, bend right=30, "\tau"]
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\theta\Uparrow"] & \\
D & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, bend right=60, "S"']
\end{tikzcd}
$$

定義． C, D, U, V を圏，$F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon U \longrightarrow D$，$K\colon V \longrightarrow U$ を関手として左 Kan リフト $\langle F_\dagger E, \eta\rangle$ が存在するとする．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\eta\Uparrow"] & & \\
D & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"'] & V \arrow[l, "K"]
\end{tikzcd}
$$

このとき $\langle F_\dagger E, \eta\rangle$ と K が交換するとは，K を合成して得られる次の図式も左 Kan リフトになる (即ち，$\langle (F_\dagger E)\circ K, \eta_K\rangle$ が F に沿った EK の左 Kan リフトになる) ことをいう．

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\eta_K\Uparrow"] & & \\
D & U \arrow[l, "E"] & V \arrow[l, "K"] \arrow[ull, "(F_\dagger E)\circ K"']
\end{tikzcd}
$$

定義． $F\colon C \longrightarrow D$，$E\colon U \longrightarrow D$ を関手として左 Kan リフト $F_\dagger E$ が存在するとする．$F_\dagger E$ が任意の関手 $K\colon V \longrightarrow U$ と交換するとき，$F_\dagger E$ は絶対左 Kan リフトであるという．

Kan 拡張の場合と同じように次の定理が成り立つ．(同じなので証明は省略する．)

定理 1． 関手 $G\colon D \longrightarrow C$ に対して以下の条件は同値である．

(1) G が左随伴を持つ．

(2) 絶対左 Kan リフト $\langle G_\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在する．

(3) 左 Kan リフト $\langle G_\dagger \mathrm{id}_C, \eta\rangle$ が存在し，G が $G_\dagger \mathrm{id}_C$ と交換する．

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[d, "G"'] \arrow[dr, phantom, "\eta\Uparrow"] & & \\
C & C \arrow[l, "\mathrm{id}_C"] \arrow[ul, "G_\dagger \mathrm{id}_C"'] & D \arrow[l, "G"']
\end{tikzcd}
$$

またこのとき $G_\dagger \mathrm{id}_C \dashv G$ であり η がその unit である. $\square$

定理 2. $F\colon C \longrightarrow D$, $E\colon U \longrightarrow D$ を関手として，(絶対) 左 Kan リフト $\langle F_\dagger E, \eta\rangle$ が存在すると仮定する.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] & \\ D \arrow[r, phantom, "\Uparrow\eta", shift left=3ex] & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"'] \end{tikzcd}$$

このとき関手 $H\colon B \longrightarrow C$ に対して

$$\begin{aligned} &(\text{絶対}) \text{ 左 Kan リフト } \langle (FH)_\dagger E, \sigma\rangle \text{ が存在する} \\ \iff &(\text{絶対}) \text{ 左 Kan リフト } \langle H_\dagger (F_\dagger E), \tau\rangle \text{ が存在する} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "H"'] & \\ C \arrow[d, "F"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow\sigma"] & \\ D & U \arrow[l, "E"] \arrow[uul, "(FH)_\dagger E"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "H"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\tau"] & \\ C \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\eta"] & \\ D & U \arrow[l, "E"] \arrow[ul, "F_\dagger E"] \arrow[uul, "H_\dagger(F_\dagger E)"'] \end{tikzcd}$$

更に，これらが存在するとき $(FH)_\dagger E \cong H_\dagger(F_\dagger E)$, $\sigma \cong (F\tau)\circ\eta$ である. $\square$

また Kan リフトについては次の命題が成り立つ.

命題 3. 関手 $F\colon C \longrightarrow D$ が忠実充満
$\iff$ $\langle \mathrm{id}_C, \mathrm{id}_F\rangle$ が F に沿った F の絶対左 Kan リフトになる.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] & \\ D \arrow[r, phantom, "\mathrm{id}_F\Uparrow", shift left=3ex] & C \arrow[l, "F"] \arrow[ul, "\mathrm{id}_C"'] \end{tikzcd}$$

証明. $\langle \mathrm{id}_C, \mathrm{id}_F\rangle$ が絶対左 Kan リフト
$\iff$ 任意の圏 X と関手 $G, H\colon X \longrightarrow C$, 自然変換 $\theta\colon FG \Longrightarrow FH$ に対して，$\tau\colon G \Longrightarrow$

H が一意に存在して $F\tau = \theta$ となる.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] & X \arrow[l, "H"'] \arrow[d, "G"] \arrow[dl, phantom, "\tau \Uparrow"] \\ D \arrow[ur, phantom, "\mathrm{id}_F \Uparrow"] & C \arrow[l, "F"] \arrow[ul, "\mathrm{id}_C"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] \arrow[dr, phantom, "\theta \Uparrow"] & X \arrow[l, "H"'] \arrow[d, "G"] \\ D & C \arrow[l, "F"] \end{tikzcd}$$

$\Longleftrightarrow$ 任意の圏 X と $G, H \colon X \longrightarrow C$ に対して

$$F \circ - \colon \mathrm{Hom}_{C^X}(G, H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{D^X}(FG, FH)$$

が全単射となる.

$\Longleftrightarrow$ F が忠実充満. $\square$

これらの性質を使うことで次の証明をすることができる.

定理 4. 随伴 $F \dashv G \colon C \longrightarrow D$ の unit を η とするとき，F が忠実充満 $\Longrightarrow$ η が自然同型. *4

証明. F が忠実充満だから，定理 3 より $\langle \mathrm{id}_C, \mathrm{id}_F \rangle$ が F に沿った F の絶対左 Kan リフトである．また $F \dashv G$ だから，定理 1 より $\langle F, \eta \rangle$ は G に沿った id_C の絶対左 Kan リフトである．故に定理 2 より $\langle \mathrm{id}_C, \eta \rangle$ が GF に沿った id_C の絶対左 Kan リフトになる.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] & \\ D \arrow[d, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Uparrow \mathrm{id}_F"] & \\ C \arrow[r, phantom, "\Uparrow \eta"] & C \arrow[l, "\mathrm{id}_C"] \arrow[ul, "F"'] \arrow[uul, "\mathrm{id}_C"'] \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} C \arrow[d, "F"'] & \\ D \arrow[d, "G"'] & \\ C \arrow[ur, phantom, "\Uparrow \eta"] & C \arrow[l, "\mathrm{id}_C"] \arrow[uul, "\mathrm{id}_C"'] \end{tikzcd}$$

故に $\mathrm{id}_C \dashv GF$ である．一方 $\mathrm{id}_C \dashv \mathrm{id}_C$ だから，右随伴の一意性より $GF \cong \mathrm{id}_C$ である.
よって η が同型であることが分かる. $\square$

参考文献

[1] カン拡張（Kan extensions）とカン持ち上げ（Kan lifts）, 檜山正幸のキマイラ飼育記

*4 ご存じの通り逆向きも成り立ちます.