

明日使える? Kan リフトの話

@alg_d

2017年12月2日

※ これは Category Theory Advent Calendar 2017 の 2 日目です .

(この記事では Kan 拡張の知識を仮定します .)

Kan 拡張の定義において、関手の向きを逆にしたものが Kan リフトである . この Kan リフト , (一般の 2 圏の中ならともかく) 通常の圏論で何か役に立つのか? と思い検索してみても全然情報が見つからない*¹ . そこでこの PDF では , Kan リフトの性質を使用して証明できる*²圏論の定理を紹介する . (他に何か知っていたら , 教えてください .)

まず , Kan 拡張と同様にして以下の定義をする .

定義 . C, D, U を圏 , $F: C \rightarrow D, E: U \rightarrow D$ を関手とする . F に沿った E の左 Kan リフトとは組 $\langle F_{\dagger}E, \eta \rangle$ であって , 以下の条件を満たすものである*³ .

(1) $F_{\dagger}E$ は関手 $U \rightarrow C$, η は自然変換 $E \Rightarrow F \circ (F_{\dagger}E)$ である .

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \downarrow F & \swarrow F_{\dagger}E & \\ D & \xleftarrow{E} & U \end{array} \quad \eta \uparrow \uparrow$$

(2) 組 $\langle S, \theta \rangle$ が同じ条件を満たす (即ち $S: U \rightarrow C$ は関手で $\theta: E \Rightarrow FS$ は自然変換) ならば , 自然変換 $\tau: F_{\dagger}E \Rightarrow S$ が一意に存在して $\theta = F\tau \circ \eta$ となる . 即ち

*¹ 恐らく最も有益 (?) な情報は [1] である .

*² Kan リフトを使わない普通の証明は皆さん知っていると思います .

*³ $F_{\dagger}E$ という記法はここだけのもの . 「左 Kan 拡張が上付きダガーなら左 Kan リフトは下付きダガーでは?」という安直な考え .

次の等式が成り立つ .

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xleftarrow{S} & U \\
 F \downarrow & \nearrow F_{\dagger}E & \\
 D & \xleftarrow{E} & U
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \tau \\
 \uparrow \\
 \eta
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 C & \xleftarrow{S} & U \\
 F \downarrow & \nearrow \theta & \\
 D & \xleftarrow{E} & U
 \end{array}$$

定義. C, D, U, V を圏, $F: C \rightarrow D, E: U \rightarrow D, K: V \rightarrow U$ を関手として左 Kan リフト $\langle F_{\dagger}E, \eta \rangle$ が存在するとする .

$$\begin{array}{ccccc}
 C & & & & \\
 F \downarrow & \nearrow F_{\dagger}E & & & \\
 D & \xleftarrow{E} & U & \xleftarrow{K} & V
 \end{array}$$

このとき $\langle F_{\dagger}E, \eta \rangle$ と K が交換するとは, K を合成して得られる次の図式も左 Kan リフトになる (即ち, $\langle (F_{\dagger}E) \circ K, \eta_K \rangle$ が F に沿った EK の左 Kan リフトになる) ことをいう .

$$\begin{array}{ccccc}
 C & & & & \\
 F \downarrow & \nearrow (F_{\dagger}E) \circ K & & & \\
 D & \xleftarrow{E} & U & \xleftarrow{K} & V
 \end{array}$$

定義. $F: C \rightarrow D, E: U \rightarrow D$ を関手として左 Kan リフト $F_{\dagger}E$ が存在するとする . $F_{\dagger}E$ が任意の関手 $K: V \rightarrow U$ と交換するとき, $F_{\dagger}E$ は絶対左 Kan リフトであるという .

Kan 拡張の場合と同じように次の定理が成り立つ . (同じなので証明は省略する .)

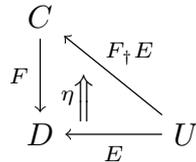
定理 1. 関手 $G: D \rightarrow C$ に対して以下の条件は同値である .

- (1) G が左随伴を持つ .
- (2) 絶対左 Kan リフト $\langle G_{\dagger}\text{id}_C, \eta \rangle$ が存在する .
- (3) 左 Kan リフト $\langle G_{\dagger}\text{id}_C, \eta \rangle$ が存在し, G が $G_{\dagger}\text{id}_C$ と交換する .

$$\begin{array}{ccccc}
 D & & & & \\
 G \downarrow & \nearrow G_{\dagger}\text{id}_C & & & \\
 C & \xleftarrow{\text{id}_C} & C & \xleftarrow{G} & D
 \end{array}$$

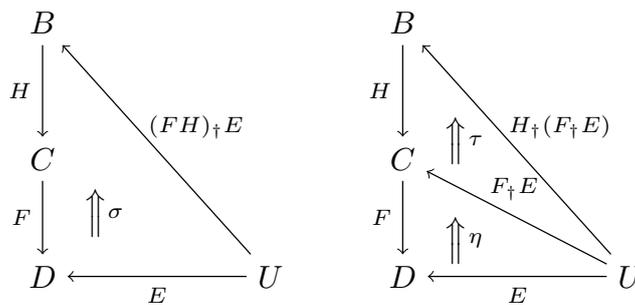
またこのとき $G \dagger \text{id}_C \dashv G$ であり η がその unit である . □

定理 2. $F: C \rightarrow D, E: U \rightarrow D$ を関手として, (絶対) 左 Kan リフト $\langle F \dagger E, \eta \rangle$ が存在すると仮定する .



このとき関手 $H: B \rightarrow C$ に対して

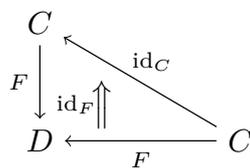
(絶対) 左 Kan リフト $\langle (FH) \dagger E, \sigma \rangle$ が存在する
 \iff (絶対) 左 Kan リフト $\langle H \dagger (F \dagger E), \tau \rangle$ が存在する



更に, これらが存在するとき $(FH) \dagger E \cong H \dagger (F \dagger E), \sigma \cong (F \tau) \circ \eta$ である . □

また Kan リフトについては次の命題が成り立つ .

命題 3. 関手 $F: C \rightarrow D$ が忠実充満
 $\iff \langle \text{id}_C, \text{id}_F \rangle$ が F に沿った F の絶対左 Kan リフトになる .



証明. $\langle \text{id}_C, \text{id}_F \rangle$ が絶対左 Kan リフト
 \iff 任意の圏 X と関手 $G, H: X \rightarrow C$, 自然変換 $\theta: FG \implies FH$ に対して, $\tau: G \implies$

H が一意に存在して $F\tau = \theta$ となる .

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xleftarrow{H} & X \\
 F \downarrow & \nearrow \tau & \uparrow \text{id}_C \\
 D & \xleftarrow{F} & C
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 C & \xleftarrow{H} & X \\
 F \downarrow & \uparrow \theta & \downarrow G \\
 D & \xleftarrow{F} & C
 \end{array}$$

\iff 任意の圏 X と $G, H: X \rightarrow C$ に対して

$$F \circ -: \text{Hom}_{C^X}(G, H) \rightarrow \text{Hom}_{D^X}(FG, FH)$$

が全単射となる .

$\iff F$ が忠実充満 . □

これらの性質を使うことで次の証明をすることができる .

定理 4. 随伴 $F \dashv G: C \rightarrow D$ の unit を η とするとき , F が忠実充満 $\implies \eta$ が自然同型 .^{*4}

証明. F が忠実充満だから , 定理 3 より $\langle \text{id}_C, \text{id}_F \rangle$ が F に沿った F の絶対左 Kan リフトである . また $F \dashv G$ だから , 定理 1 より $\langle F, \eta \rangle$ は G に沿った id_C の絶対左 Kan リフトである . 故に定理 2 より $\langle \text{id}_C, \eta \rangle$ が GF に沿った id_C の絶対左 Kan リフトになる .

$$\begin{array}{ccc}
 C & & C \\
 F \downarrow & \nearrow \text{id}_C & \\
 D & \uparrow \text{id}_F & \\
 G \downarrow & \nearrow F & \\
 C & \xleftarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}
 \quad = \quad
 \begin{array}{ccc}
 C & & C \\
 F \downarrow & \nearrow \text{id}_C & \\
 D & \uparrow \eta & \\
 G \downarrow & & \\
 C & \xleftarrow{\text{id}_C} & C
 \end{array}$$

故に $\text{id}_C \dashv GF$ である . 一方 $\text{id}_C \dashv \text{id}_C$ だから , 右随伴の一意性より $GF \cong \text{id}_C$ である . よって η が同型であることが分かる . □

参考文献

[1] カン拡張 (Kan extensions) とカン持ち上げ (Kan lifts) , 檜山正幸のキマイラ飼育記

^{*4} ご存じの通り逆向きも成り立ちます .