

選択公理 \implies 排中律

@alg_d

2017年12月3日

※ これは Category Theory Advent Calendar 2017 の 3 日目です .

「選択公理を仮定すると排中律が導かれる」という、よく知られた事実の証明を行うのがこの PDF の目的である . ところでこれは Category Theory Advent Calendar の記事であるから、この事実の圏バージョンを証明することにする . (主に [2] を参考にした .)

まずよく知られているように、選択公理の圏バージョンとして次の定義をすることができる .

定義. 圏 C が AC を満たす

$\iff C$ の任意のエピ射 $f: a \rightarrow b$ に対してある射 $g: b \rightarrow a$ が存在して $f \circ g = \text{id}_b$ となる . (この g はモノ射になることが容易に分かる .)

次に排中律の圏バージョンを定義する為にトポスを導入する .

定義. 圏 E がトポスとは、以下の条件を満たすことである .

- (1) E は有限完備である .
- (2) E はカルテシアン閉である .
- (3) E は subobject classifier と呼ばれる対象 Ω を持つ .

この定義についての説明はしない*¹が、ここで重要なのは、トポス E は Ω という対象を持ち、これが「真偽値全体がなす集まり」の役割を持っているという事である . (例えば集合の圏 Set はトポスであるが、この場合は $\Omega = \{\text{true}, \text{false}\}$ となっている .) そして、一般にトポスにおいて「否定」を与える射 $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$ を定義することができる . (例えば Set の場合は \neg は写像で $\neg(\text{true}) = \text{false}$, $\neg(\text{false}) = \text{true}$ となる .)

*¹ トポスについて詳しくは [3] などを参照 .

さて、排中律というのは二重否定が除去できるということであるが、実は一般のトポスにおいては $\neg \circ \neg = \text{id}_\Omega$ とは限らない。そこで「排中律が成り立つ」トポス (boolean トポスという) を次のように定義することができる。

定義. トポス E が boolean $\iff \neg \circ \neg = \text{id}_\Omega$.

さて、次の事実が知られている。

- 命題 1. • トポスは有限余完備である。(例えば [3] の IV.5. の系 4)
- トポスにおいて、モノ射の pushout はモノ射である。更にこの pushout square は pullback にもなる。(例えば [3] の IV.10. の系 4)
 - トポス E が boolean
 \iff 任意の subobject $f: Y \rightarrow X$ に対してある subobject $g: Z \rightarrow X$ が存在し、普遍性から得られる射 $Y \amalg Z \rightarrow X$ が同型となる。(この Z を Y の complement という。) (例えば [2] の 5.14) □

これを使うと「選択公理 \implies 排中律」の圏バージョン (正確にはトポスバージョン?) となる次の定理が証明できる。

定理 2. トポス E が AC を満たすならば、boolean である。

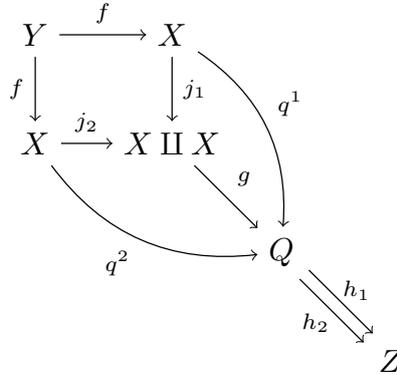
証明. E の任意の subobject $f: Y \rightarrow X$ を取る。 f の complement の存在を示せばよい。まず次の pushout を取る。

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ f \downarrow & & \downarrow q_1 \\ X & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array}$$

命題 1 より q_1, q_2 はモノ射であり、またこの図式は pullback になる。

次に余直積 $X \xrightarrow{j_1} X \amalg X \xleftarrow{j_2} X$ を取り、普遍性により射 $g: X \amalg X \rightarrow Q$ を得る。これはエピ射である。

∴) $h_1, h_2: Q \rightarrow Z$ を射で, $h_1 \circ g = h_2 \circ g$ とする .

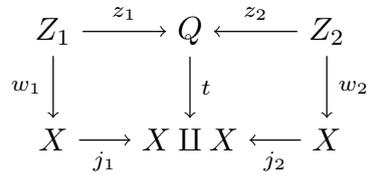


このとき

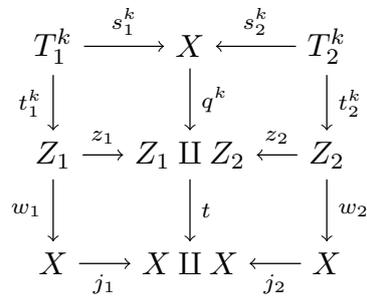
$$h_1 \circ q^1 \circ f = h_1 \circ g \circ j_1 \circ f = h_2 \circ g \circ j_1 \circ f = h_2 \circ q^1 \circ f = h_2 \circ q^2 \circ f$$

である . よって pushout Q の普遍性により $h_1 = h_2$ となる .

故に AC より $t: Q \rightarrow X \amalg X$ が存在して $g \circ t = \text{id}_Q$ とできる . この t に沿って pullback Z_1, Z_2 を取る .



t はモノ射だから, w_i もモノ射である . また $Q = Z_1 \amalg Z_2$ である . 更に, 次の pullback $T_1^1, T_2^1, T_1^2, T_2^2$ を取る .



$X = T_1^1 \amalg T_2^1 = T_1^2 \amalg T_2^2$ である . s_i^1, s_j^2 の pullback を U_{ij} とする .

$$\begin{array}{ccc} U_{ij} & \xrightarrow{u_{ij}^1} & T_i^1 \\ u_{ij}^2 \downarrow & & \downarrow s_i^1 \\ T_j^2 & \xrightarrow{s_j^2} & X \end{array}$$

即ち

$$\begin{array}{ccccc} T_1^2 & \xrightarrow{s_1^2} & T_1^2 \amalg T_2^2 & \xleftarrow{s_2^2} & T_2^2 \\ u_{11}^2 \uparrow & & s_1^1 \uparrow & & \uparrow u_{12}^2 \\ U_{11} & \xrightarrow{u_{11}^1} & T_1^1 & \xleftarrow{u_{12}^1} & U_{12} \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} T_1^2 & \xrightarrow{s_1^2} & T_1^2 \amalg T_2^2 & \xleftarrow{s_2^2} & T_2^2 \\ u_{21}^2 \uparrow & & s_2^1 \uparrow & & \uparrow u_{22}^2 \\ U_{21} & \xrightarrow{u_{21}^1} & T_2^1 & \xleftarrow{u_{22}^1} & U_{22} \end{array}$$

だから $T_1^1 = U_{11} \amalg U_{12}$, $T_2^1 = U_{21} \amalg U_{22}$ である . 従って $X = U_{11} \amalg U_{12} \amalg U_{21} \amalg U_{22}$ となる . j_i と $t \circ q^k: X \rightarrow X \amalg X$ を考える .

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & \nearrow \text{id}_X & \uparrow \nabla \\ X & \xrightarrow{j_i} & X \amalg X \\ & \searrow q^k & \downarrow g \\ & & Q \xleftarrow{\text{id}_Q} Q \end{array}$$

$\nabla \circ j_i = \text{id}_X$, $\nabla \circ t \circ q^k = \text{id}_X$ である . T_i^k の定義の図式から , $t \circ q^k \circ s_i^k = j_i \circ w_i \circ t_i^k$ である . これに ∇ を合成して $s_i^k = w_i \circ t_i^k$ を得る . 従って

$$w_i \circ t_i^1 \circ u_{ii}^1 = s_i^1 \circ u_{ii}^1 = s_i^2 \circ u_{ii}^2 = w_i \circ t_i^2 \circ u_{ii}^2$$

である .

$$\begin{array}{ccc} U_{ii} & \xrightarrow{u_{ii}^1} & T_i^1 \\ u_{ii}^2 \downarrow & & \downarrow s_i^1 \\ T_i^2 & \xrightarrow{s_i^2} & X \end{array}$$

$\begin{array}{ccc} & t_i^1 & \\ & \swarrow & \searrow \\ & Z_i & \\ & \swarrow & \searrow \\ & t_i^2 & w_i \\ & \swarrow & \searrow \\ & X & \end{array}$

w_i はモノ射だったから $t_i^1 \circ u_{ii}^1 = t_i^2 \circ u_{ii}^2$ となる．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{array}{ccc} U_{11} & \xrightarrow{u_{11}^1} & T_1^1 \\ u_{11}^2 \downarrow & & \downarrow t_1^1 \\ T_1^2 & \xrightarrow{t_1^2} & Z_1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U_{22} & \xrightarrow{u_{22}^1} & T_2^1 \\ u_{22}^2 \downarrow & & \downarrow t_2^1 \\ T_2^2 & \xrightarrow{t_2^2} & Z_2 \end{array}$$

この図式は pullback である．

∴) $h^1: W \rightarrow T_i^1, h^2: W \rightarrow T_i^2$ が $t_i^1 \circ h^1 = t_i^2 \circ h^2$ を満たすとする．

このとき $s_i^1 \circ h^1 = s_i^2 \circ h^2$ だから，pullback の普遍性により $h: W \rightarrow U_{ii}$ が一意に存在して $u_{ii}^1 \circ h = h^1, u_{ii}^2 \circ h = h^2$ を満たす．

一番最初の図式を書き直せば

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & T_1^1 \amalg T_2^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_1^2 \amalg T_2^2 & \longrightarrow & Z_1 \amalg Z_2 \end{array}$$

となる．故に先の二つの pullback を組み合わせれば $Y = U_{11} \amalg U_{22}$ が分かる． $X = U_{11} \amalg U_{12} \amalg U_{21} \amalg U_{22}$ だったから， Y は complement $U_{12} \amalg U_{21}$ を持つ． \square

参考文献

- [1] R. Diaconescu, Axiom of Choice and Complementation, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 176–178, <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1975-0373893-X>

- [2] P. T. Johnstone, *Topos Theory*, Dover Books on Mathematics, 141–143 (定理 5.23), <https://www.amazon.co.jp/dp/0486493369>
- [3] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic*, Springer