選択公理 $\Longrightarrow$ 排中律

@alg_d

2017 年 12 月 3 日

※ これは Category Theory Advent Calendar 2017 の 3 日目です．

「選択公理を仮定すると排中律が導かれる」という，よく知られた事実の証明を行うのがこの PDF の目的である．ところでこれは Category Theory Advent Calendar の記事であるから，この事実の圏バージョンを証明することにする．(主に [2] を参考にした．)

まずよく知られているように，選択公理の圏バージョンとして次の定義をすることができる．

定義． 圏 C が AC を満たす
$\Longleftrightarrow$ C の任意のエピ射 $f\colon a \longrightarrow b$ に対してある射 $g\colon b \longrightarrow a$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_b$ となる．(この g はモノ射になることが容易に分かる．)

次に排中律の圏バージョンを定義する為にトポスを導入する．

定義． 圏 E がトポスとは，以下の条件を満たすことである．

(1) E は有限完備である．
(2) E はカルテシアン閉である．
(3) E は subobject classifier と呼ばれる対象 Ω を持つ．

この定義についての説明はしない[*1]が，ここで重要なのは，トポス E は Ω という対象を持ち，これが「真偽値全体がなす集まり」の役割を持っているという事である．(例えば集合の圏 **Set** はトポスであるが，この場合は $\Omega = \{\mathrm{true}, \mathrm{false}\}$ となっている．) そして，一般にトポスにおいて「否定」を与える射 $\neg\colon \Omega \longrightarrow \Omega$ を定義することができる．(例えば **Set** の場合は $\neg$ は写像で $\neg(\mathrm{true}) = \mathrm{false}$，$\neg(\mathrm{false}) = \mathrm{true}$ となる．)

[*1] トポスについて詳しくは [3] などを参照．

さて，排中律というのは二重否定が除去できるということであるが，実は一般のトポスにおいては $\neg \circ \neg = \mathrm{id}_\Omega$ とは限らない．そこで「排中律が成り立つ」トポス (boolean トポスという) を次のように定義することができる．

定義. トポス E が boolean $\iff \neg \circ \neg = \mathrm{id}_\Omega$.

さて，次の事実が知られている．

命題 1.

- トポスは有限余完備である．(例えば [3] の IV.5. の系 4)
- トポスにおいて，モノ射の pushout はモノ射である．更にこの pushout square は pullback にもなる．(例えば [3] の IV.10. の系 4)
- トポス E が boolean
  $\iff$ 任意の subobject $f\colon Y \longrightarrow X$ に対してある subobject $g\colon Z \longrightarrow X$ が存在し，普遍性から得られる射 $Y \amalg Z \longrightarrow X$ が同型となる．(この Z を Y の complement という．) (例えば [2] の 5.14) □

これを使うと「選択公理 $\Longrightarrow$ 排中律」の圏バージョン (正確にはトポスバージョン?) となる次の定理が証明できる．

定理 2. トポス E が AC を満たすならば，boolean である．

証明. E の任意の subobject $f\colon Y \longrightarrow X$ を取る．f の complement の存在を示せばよい．まず次の pushout を取る．

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "q_1"] \\ X \arrow[r, "q_2"'] & Q \end{tikzcd}$$

命題 1 より q_1, q_2 はモノ射であり，またこの図式は pullback になる．

次に余直積 $X \xrightarrow{j_1} X \amalg X \xleftarrow{j_2} X$ を取り，普遍性により射 $g\colon X \amalg X \longrightarrow Q$ を得る．これはエピ射である．

∵) $h_1, h_2\colon Q \longrightarrow Z$ を射で，$h_1 \circ g = h_2 \circ g$ とする．

$$
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "j_1"] \arrow[ddr, bend left, "q^1"] & & \\
X \arrow[r, "j_2"] \arrow[drr, bend right, "q^2"'] & X \amalg X \arrow[dr, "g"] & & \\
& & Q \arrow[dr, shift left, "h_1"] \arrow[dr, shift right, "h_2"'] & \\
& & & Z
\end{tikzcd}
$$

このとき

$$h_1 \circ q^1 \circ f = h_1 \circ g \circ j_1 \circ f = h_2 \circ g \circ j_1 \circ f = h_2 \circ q^1 \circ f = h_2 \circ q^2 \circ f$$

である．よって pushout Q の普遍性により $h_1 = h_2$ となる．

故に AC より $t\colon Q \longrightarrow X \amalg X$ が存在して $g \circ t = \mathrm{id}_Q$ とできる．この t に沿って pullback Z_1, Z_2 を取る．

$$
\begin{tikzcd}
Z_1 \arrow[r, "z_1"] \arrow[d, "w_1"'] & Q \arrow[d, "t"] & Z_2 \arrow[l, "z_2"'] \arrow[d, "w_2"] \\
X \arrow[r, "j_1"'] & X \amalg X & X \arrow[l, "j_2"]
\end{tikzcd}
$$

t はモノ射だから，w_i もモノ射である．また $Q = Z_1 \amalg Z_2$ である．更に，次の pullback $T_1^1, T_2^1, T_1^2, T_2^2$ を取る．

$$
\begin{tikzcd}
T_1^k \arrow[r, "s_1^k"] \arrow[d, "t_1^k"'] & X \arrow[d, "q^k"] & T_2^k \arrow[l, "s_2^k"'] \arrow[d, "t_2^k"] \\
Z_1 \arrow[r, "z_1"] \arrow[d, "w_1"'] & Z_1 \amalg Z_2 \arrow[d, "t"] & Z_2 \arrow[l, "z_2"'] \arrow[d, "w_2"] \\
X \arrow[r, "j_1"'] & X \amalg X & X \arrow[l, "j_2"]
\end{tikzcd}
$$

$X = T_1^1 \amalg T_2^1 = T_1^2 \amalg T_2^2$ である．s_i^1, s_j^2 の pullback を U_{ij} とする．

$$\begin{tikzcd} U_{ij} \arrow[r, "u_{ij}^1"] \arrow[d, "u_{ij}^2"'] & T_i^1 \arrow[d, "s_i^1"] \\ T_j^2 \arrow[r, "s_j^2"'] & X \end{tikzcd}$$

即ち

$$\begin{tikzcd} T_1^2 \arrow[r, "s_1^2"] & T_1^2 \amalg T_2^2 & T_2^2 \arrow[l, "s_2^2"'] \\ U_{11} \arrow[u, "u_{11}^2"] \arrow[r, "u_{11}^1"'] & T_1^1 \arrow[u, "s_1^1"] & U_{12} \arrow[u, "u_{12}^2"'] \arrow[l, "u_{12}^1"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T_1^2 \arrow[r, "s_1^2"] & T_1^2 \amalg T_2^2 & T_2^2 \arrow[l, "s_2^2"'] \\ U_{21} \arrow[u, "u_{21}^2"] \arrow[r, "u_{21}^1"'] & T_2^1 \arrow[u, "s_2^1"] & U_{22} \arrow[u, "u_{22}^2"'] \arrow[l, "u_{22}^1"] \end{tikzcd}$$

だから $T_1^1 = U_{11} \amalg U_{12}$，$T_2^1 = U_{21} \amalg U_{22}$ である．従って $X = U_{11} \amalg U_{12} \amalg U_{21} \amalg U_{22}$ となる．j_i と $t \circ q^k \colon X \longrightarrow X \amalg X$ を考える．

$$\begin{tikzcd} & X & \\ X \arrow[ur, bend left, "\mathrm{id}_X"] \arrow[r, "j_i"] \arrow[dr, "q^k"'] & X \amalg X \arrow[u, "\nabla"'] \arrow[d, "g"] & \\ & Q & Q \arrow[l, "\mathrm{id}_Q"] \arrow[ul, "t"'] \end{tikzcd}$$

$\nabla \circ j_i = \mathrm{id}_X$，$\nabla \circ t \circ q^k = \mathrm{id}_X$ である．T_i^k の定義の図式から，$t \circ q^k \circ s_i^k = j_i \circ w_i \circ t_i^k$ である．これに ∇ を合成して $s_i^k = w_i \circ t_i^k$ を得る．従って

$$w_i \circ t_i^1 \circ u_{ii}^1 = s_i^1 \circ u_{ii}^1 = s_i^2 \circ u_{ii}^2 = w_i \circ t_i^2 \circ u_{ii}^2$$

である．

$$\begin{tikzcd} U_{ii} \arrow[rr, "u_{ii}^1"] \arrow[dd, "u_{ii}^2"'] & & T_i^1 \arrow[dl, "t_i^1"'] \arrow[dd, "s_i^1"] \\ & Z_i \arrow[dr, "w_i"] & \\ T_i^2 \arrow[ur, "t_i^2"] \arrow[rr, "s_i^2"'] & & X \end{tikzcd}$$

w_i はモノ射だったから $t^1_i \circ u^1_{ii} = t^2_i \circ u^2_{ii}$ となる．即ち次の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
U_{11} \arrow[r, "u^1_{11}"] \arrow[d, "u^2_{11}"'] & T^1_1 \arrow[d, "t^1_1"] \\
T^2_1 \arrow[r, "t^2_1"'] & Z_1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_{22} \arrow[r, "u^1_{22}"] \arrow[d, "u^2_{22}"'] & T^1_2 \arrow[d, "t^1_2"] \\
T^2_2 \arrow[r, "t^2_2"'] & Z_2
\end{tikzcd}$$

この図式は pullback である．

$\because$) $h^1 \colon W \longrightarrow T^1_i$，$h^2 \colon W \longrightarrow T^2_i$ が $t^1_i \circ h^1 = t^2_i \circ h^2$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drrr, bend left, "h^1"] \arrow[dddr, bend right, "h^2"'] & & & \\
& U_{ii} \arrow[rr, "u^1_{ii}"] \arrow[dd, "u^2_{ii}"'] & & T^1_i \arrow[dl, "t^1_i"'] \arrow[dd, "s^1_i"] \\
& & Z_i \arrow[dr, "w_i"] & \\
& T^2_i \arrow[ur, "t^2_i"] \arrow[rr, "s^2_i"'] & & X
\end{tikzcd}$$

このとき $s^1_i \circ h^1 = s^2_i \circ h^2$ だから，pullback の普遍性により $h \colon W \longrightarrow U_{ii}$ が一意に存在して $u^1_{ii} \circ h = h^1$，$u^2_{ii} \circ h = h^2$ を満たす．

一番最初の図式を書き直せば

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d] & T^1_1 \amalg T^1_2 \arrow[d] \\
T^2_1 \amalg T^2_2 \arrow[r] & Z_1 \amalg Z_2
\end{tikzcd}$$

となる．故に先の二つの pullback を組み合わせれば $Y = U_{11} \amalg U_{22}$ が分かる．$X = U_{11} \amalg U_{12} \amalg U_{21} \amalg U_{22}$ だったから，Y は complement $U_{12} \amalg U_{21}$ を持つ． □

参考文献

[1] R. Diaconescu, Axiom of Choice and Complementation, Proc. Amer. Math. Soc. 51 (1975), 176–178, https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1975-0373893-X

[2] P. T. Johnstone, Topos Theory, Dover Books on Mathematics, 141–143 (定理 5.23), `https://www.amazon.co.jp/dp/0486493369`

[3] S. Mac Lane, I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, Springer