ESTIMATIONS L^p DES FONCTIONS DU LAPLACIEN SUR LES VARIÉTÉS CUSPIDALES I.

Hong-Quan LI

Institut des Hautes Études Scientifiques
35, route de Chartres
91440 – Bures-sur-Yvette (France)

Décembre 2002

IHES/M/02/87

Estimations L^p des fonctions du Laplacien sur les variétés cuspidales I.

Hong-Quan LI

IHES, 35, route de Chartres, F-91440 Bures-sur-Yvette Cedex

Courriel : lihq@ihes.fr

Résumé. Le but de cet article est d'étudier la continuité L^p des fonctions du laplacien sur les variétés cuspidales.

1 Introduction et énoncé du résultat

On considère M une variété différentiable, munie d'une mesure $d\sigma$. Soit L un opérateur différentiel du second ordre, positif et essentiellement auto-adjoint sur $C_o^\infty(M)$. Pour une fonction borélienne $m : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $m(\sqrt{L})$ est définie par le théorème spectral. Quand m est bornée, on sait bien que $m(\sqrt{L})$ est bornée sur $L^2(M)$. On s'intéresse à montrer la continuité $L^p(M)$ $(p \neq 2)$ de $m(\sqrt{L})$. En particulier, on aime bien trouver des conditions sur m qui permettent d'assurer que $m(\sqrt{L})$ est bornée sur L^p pour tout $1 < p < +\infty$.

Dans le cadre des espaces euclidiens $\mathbb{R}^n$ (avec $-L = \Delta$ le laplacien), par [24] et [34], on sait que $m(L)$ est bornée sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $1 < p < +\infty$ si m satisfait la condition de Mikhlin-Hörmander, c'est-à-dire,

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]+1} \sup_{\lambda>0} \lambda^k \left| m^{(k)}(\lambda) \right| < +\infty,$$

où $[s]$ $(s \in \mathbb{R})$ désigne la partie entière de s. On peut se reporter à [43] pour d'autres types de conditions.

Dans le cas où M est une variété riemannienne compacte de dimension n et $L = -\Delta + C$ avec Δ le laplacien et $C \geq 0$ une constante, d'après le travaux de A. Seeger et C.D. Sogge (voir [39]), on sait que $m(\sqrt{L})$ est bornée dans L^p pour tout $1 < p < +\infty$ s'il existe $\alpha > \frac{n}{2}$ et une fonction positive $\beta \in C_o^\infty([1,2])$ telles que :

$$\sup_{s>0} \left\| \beta(\cdot) m(s\cdot) \right\|_{L^2_\alpha(\mathbb{R})} < +\infty.$$

On peut trouver un résultat plus général dans [40].

Dans le cadre des groupes de Lie à croissance polynomiale avec $-L = \Delta$ un sous-laplacien, on trouve des résultats analogues aux cas précédents, voir par exemple [25], [15], [16], [33], [11], [41], [35] et [1].

Dans le cadre des groupes de Lie à croissance exponentielle, les résultats sont très variants, voir par exemple [18]-[23], [14], [6], [5], [12], [37], [38] et [31].

Dans le cadre des espaces symétriques de type non compact, par le travail de Clerc et Stein (voir [10]), on doit supposer que m est holomorphe dans une certaine bande de $\mathbb{C}$ pour que $m(L)$ soit borné dans L^p pour tout $1 < p < +\infty$. Et on trouve les travaux [42], [2]-[4] qui sont consacrés à l'étude des multiplicateurs spectraux sur les espaces symétriques de type non compact.

Dans [46], M.E. Taylor a étudié la continuité L^p des fonctions du laplacien sur une classe très large des variétés, les variétés riemanniennes à géométrie bornée. Dans cet article, on se propose à établir dans le cadre des variétés cuspidales un résultat analogue à celui de [46].

Avant d'énoncer notre résultat, nous rappelons quelques définitions et notations :

Si X est une variété riemannienne de dimension N, avec un bord ∂X (on admet $\partial \mathrm{X} = \emptyset$), on définit Cusp(X) comme étant l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathrm{X}$ muni de la métrique riemannienne $r^{-2}(dr^2 + g_{\mathbf{x}})$, où $g_{\mathbf{x}}$ est la métrique riemannienne sur X. Par exemple, si X est l'espace euclidien $\mathbb{R}^N$, alors Cusp(X) est l'espace hyperbolique réel de dimension $N+1$. On note d_{X} (resp. d) la distance riemannienne induite sur X (resp. Cusp(X)), $d\mu$ (resp. $d\mu_{\mathrm{X}}$) la mesure riemannienne induite sur Cusp(X) (resp. X), Δ le laplacien sur Cusp(X). Notons $B(Y,r)$ ($Y \in$ Cusp(X), $r > 0$) la boule géodésique de centre Y et de rayon r, $|B(Y,r)|$ son volume et

$$L = -\Delta - \frac{N^2}{4}$$

où $\frac{N^2}{4}$ est la base du spectre $-\Delta$ dans $L^2(\mathrm{Cusp(X)})$ (voir la proposition 2.4 de [28]).

Rappelons que (voir la proposition 2 de [27])

$$d((y,x),(y',x')) = \operatorname{arc\,cosh} \frac{y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2(x,x')}{2yy'}, \quad \forall (y,x),(y',x') \in \mathrm{Cusp(X)}. \tag{1.1}$$

La difficulté particulière des variétés cuspidales tient à ce que la courbure de Ricci n'est pas toujours minorée, que le rayon d'injectivité peut être nul et que le volume des boules est à croissance exponentiel. Pour d'autres informations sur les variétés cuspidales, on pourra se reporter par exemple aux [36] et [27].

On utilise les notations de [46],

$$\overline{\Omega}_W = \{z \in \mathbb{C}; |\Im z| \leq W\},$$

Ω_W est l'intérieur de $\overline{\Omega}_W$ et

$$\mathcal{F}_W^s = \{m \text{ est holomorphe et paire dans } \Omega_W : |m^{(j)}(z)| \leq C_j(1+|z|^2)^{\frac{s-j}{2}}, \quad \forall z \in \overline{\Omega}_W\}.$$

Dans cet article, on va montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1.1 *Soit* X *une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension* $N \geq 2$. *Pour* $1 < p < +\infty$, *quand* $m \in \mathcal{F}_W^0$ *avec* $W \geq N|\frac{1}{p} - \frac{1}{2}|$, $m(\sqrt{L})$ *est borné sur* $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$. *De plus, quand* $m \in \mathcal{F}_{\frac{N}{2}}^0$, *il existe une constante* $C > 0$ *telle que :*

$$\mu\Big\{Y \in \mathrm{Cusp(X)}; |m(\sqrt{L})f(Y)| > \lambda\Big\} \leq C\frac{\|f\|_1}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0,\ \forall f \in L^1(\mathrm{Cusp(X)}).$$

On remarque que dans le theorem A de [46], on n'a obtenu aucune information concernant la continuité $L^1 \to L^{1,\infty}$ de $m(\sqrt{L})$; pour montrer ses résultats de [46], Taylor a utilisé la formule

$$m(\sqrt{L}) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \widehat{m}(t) \cos(t\sqrt{L})\, dt$$

où

$$\widehat{m}(h) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} m(t) \cos th\, dt,$$

la théorie des opérateurs pseudo-différentiables, et les estimations du noyau des fonctions du laplacien établies dans [8].

Dans cet article, on va utiliser la méthode de la séparation des variables pour montrer notre résultat. On peut trouver aussi quelques affinements du théorème 1.1 dans cet article.

Cet article est organisé de la façon suivante : dans la section 2, on utilise les résultats de [36] pour donner la formule du noyau de $m(\sqrt{L})$ et on montre le théorème 1.1 dans la section 3.

Remerciements. Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe d'Analyse Harmonique d'Orsay pour leur soutien constant. Mes remerciements vont également à Professeur Jean-Pierre Bourguignon pour son invitation à l'IHES, Professeurs Laurent Clozel et Laurent Lafforgue pour leur aide.

2 Le noyau de $m(\sqrt{L})$

Dans toute la suite, C, C_*, C^*, etc. désigneront des constantes universelles qui dépendent peut-être des propriétés de X. Celles-ci pourront changer d'une ligne à une autre.

En utlisant la méthode de la séparation des variables et la transformation de Kantorovitsch-Lebedjev, W. Müller a obtenu une représentation spectrale de $-\Delta$, voir [36] (p. 207). Donc, en répétant la méthode de la construction des fonctions du laplacien dans le cadre des variétés coniques (voir par exemple [9]), on peut considérer $m(\sqrt{L})$ comme $k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})$, une distribution sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ à valeur dans l'espace des opérateurs sur $L^2(\mathrm{X})$, avec

$$\begin{aligned} k_m(y, y', \sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) &= (yy')^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} m(\sqrt{\lambda}) K_{i\sqrt{\lambda}}(y\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) K_{i\sqrt{-\lambda}}(y'\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) \frac{\sinh \pi\sqrt{\lambda}}{\pi^2}\, d\lambda \\ &= \frac{2}{\pi^2}(yy')^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \lambda m(\lambda) K_{i\lambda}(y\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) K_{i\lambda}(y'\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) \sinh(\pi\lambda)\, d\lambda, \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $K_\nu(x)$ ($x > 0$, $\nu \in \mathbb{C}$) désigne la fonction de Bessel modifiée.

(2.1) nous permet d'étudier la continuité L^p de l'opérateur des ondes qui sera le sujet d'un autre article ([30]). En général, (2.1) ne serait pas très utilie dans les applications. Donc, on aime bien la simplifier. Rappelons que (voir par exemple [32], p.96)

$$K_{i\lambda}(ys)K_{i\lambda}(y's) = \frac{\pi}{2}(yy')^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\cosh(\pi\lambda)} \int_0^{+\infty} \beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}\left(\frac{t^2 + y^2 + y'^2}{2yy'}\right) \cos(ts)\, dt, \quad \forall y, y', s > 0,$$

où $\beta_\nu^\mu(s)$ $(\mu,\nu\in\mathbb{C},\ s>1)$ désigne les fonctions de Legendre du second genre. D'après les propriétés suivantes de β_ν^μ (voir par exemple [32] p.174, p.196 et pp.201-202),

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\beta_\nu(z) &= (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\beta_\nu^1(z),\\
\beta_\nu^k(z) &= 2^{-\frac{k}{2}}\frac{\Gamma(\nu+k+1)}{m!\Gamma(\nu-k+1)}(z-1)^{\frac{k}{2}}\Big(1+0(1)\Big),\quad (k\in\mathbb{N}),\quad \text{quand } z\longrightarrow 1^+,\\
\beta^\mu_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\cosh a) &\sim \Big(\frac{\sinh a}{2}\Big)^{-\frac{1}{2}}\lambda^{\mu-1}\cos(a\lambda+\frac{\pi\mu}{2}-\frac{\pi}{4}),\quad \text{quand } \lambda\gg 1;
\end{aligned}$$

on déduit que quand $\lambda m(\lambda)\in L^1(\mathbb{R}^+,d\lambda)$ et $s>0$, on a :

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)K_{i\lambda}(ys)K_{i\lambda}(y's)\frac{\sinh(\pi\lambda)}{\pi^2}\,d\lambda\\
=\ &\frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)\tanh(\pi\lambda)\Big[\frac{-1}{s}\int_0^{+\infty}\sin(ts)\frac{\partial}{\partial t}\beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\frac{t^2+y^2+y'^2}{2yy'})\,dt\Big]\,d\lambda\\
=\ &\frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{-1}{s}\sin(ts)\Big[\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)\tanh(\pi\lambda)\frac{\partial}{\partial t}\beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\frac{t^2+y^2+y'^2}{2yy'})\,d\lambda\Big]\,dt\\
=\ &\frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{-1}{s}\sin(ts)\frac{\partial}{\partial t}\Big[\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)\tanh(\pi\lambda)\beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\frac{t^2+y^2+y'^2}{2yy'})\,d\lambda\Big]\,dt\\
=\ &\frac{(yy')^{-\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos(ts)\Big[\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)\tanh(\pi\lambda)\beta_{-\frac{1}{2}+i\lambda}(\frac{t^2+y^2+y'^2}{2yy'})\,d\lambda\Big]\,dt.
\end{aligned}$$

Or,

$$\tanh(\pi\lambda)\beta_{i\lambda-\frac{1}{2}}(\cosh a)=C\int_a^{+\infty}\frac{\sin\lambda h}{\sqrt{\cosh h-\cosh a}}\,dh,\quad \forall a>0,\lambda\in\mathbb{R},$$

où $C>0$ est une constante, voir [32] (p. 422); donc, quand $\lambda m(\lambda)\in L^1(\mathbb{R}^+,d\lambda)$, pour tout $s>0$, on a :

$$\begin{aligned}
&2\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)K_{i\lambda}(ys)K_{i\lambda}(y's)\frac{\sinh(\pi\lambda)}{\pi^2}\,d\lambda\\
=\ &C(yy')^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\cos(ts)\Big\{\int_0^{+\infty}\lambda m(\lambda)\Big[\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{\sin(\lambda h)}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh\Big]\,d\lambda\Big\}\,dt\\
=\ &C'(yy')^{-\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}\cos(ts)\Big[\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{-\widehat{m}'(h)}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh\Big]\,dt,
\end{aligned}$$

où

$$\eta(t)=\operatorname{arc\,cosh}\frac{y^2+y'^2+t^2}{2yy'}.\tag{2.2}$$

Autrement dit, quand $m\in L^\infty(\mathbb{R}^+,d\lambda)\cap L^1(\mathbb{R}^+,\lambda d\lambda)$, on a :

$$\begin{aligned}
m(\sqrt{L}) &= k_m(y,y',\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})\\
&= C(yy')^{\frac{N-1}{2}}\int_0^{+\infty}\cos(t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})\Big[\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{-\widehat{m}'(h)}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh\Big]\,dt. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, pour simplifier les notations, on note

$$\begin{aligned} F_m(s) &= \int_s^{+\infty} \frac{-\widehat{m}'(h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh s}}\, dh \ (s>0), \quad Y=(y,x), \\ Y' &= (y',x'),\ d_{\mathrm{X}} = d_{\mathrm{X}}(x,x') \text{ et } d = d(Y,Y'); \end{aligned}$$

d'après (1.1), on a $d = \eta(d_{\mathrm{X}})$.

3 Preuve du théorème 1.1

Dans cet article, on a besoin de la paramétrice de l'équation d'onde : par les résultats de [7] (pp. 252-258), il existe une constante $\zeta_o > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \cos s\nu(x,x') &= \sum_{k=0}^{K} u_k(x,x') s \frac{(s^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}\Big|_{l=\frac{N+1}{2}} \\ &+ \ sC_K(s,x,x'), \quad \forall 0 < s \le \zeta_o,\ x \neq x', \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $u_k(x,x') \in C^\infty(\mathrm{X}\times\mathrm{X})$ et $\frac{(s^2-d_{\mathrm{X}}^2(x,x'))_+^{k-l}}{\Gamma(k-l+1)}\Big|_{l=\frac{N+1}{2}}$ a le sens du §3.4. de [17]; $C_K(s,x,x') \in C^2([0,\,\zeta_o]\times\mathrm{X}\times\mathrm{X})$ (si on choisit K assez grand) et $C_K(s,x,x') = 0$ quand $d_{\mathrm{X}} > s$.

Pour estimer le noyau de $m(\sqrt{L}) = k_m(y,y',\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})$, on le divise par deux morceaux. Plus précisement, choisissons $\zeta_o > 0$ comme dans (3.1) et $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$0 \le \psi \le 1, \quad \psi(s) = \psi(-s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \le \frac{1}{4}\sqrt{\zeta_o}, \\ 0 & \text{si } |s| \ge \frac{1}{2}\sqrt{\zeta_o}, \end{cases}$$

fixons

$$\phi(s) = \psi(s^2), \quad \varphi(s) = 1 - \phi(s) (s \in \mathbb{R});$$

notons

$$\begin{aligned} m(\sqrt{L}) &= k_m(y,y',\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) = m_{loc} + m_{inf} \\ &= C(yy')^{\frac{N-1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) \phi(t) F_m(\eta(t))\, dt \\ &+ \ C(yy')^{\frac{N-1}{2}} \int_0^{+\infty} \cos(t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) \varphi(t) F_m(\eta(t))\, dt. \end{aligned} \tag{3.2}$$

On va montrer la proposition suivante :

PROPOSITION 3.1 *Soit* X *une variété riemannienne compacte, sans bord et de dimension* $N \ge 2$. *Si* $m \in L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda) \cap L^1(\mathbb{R}^+, \lambda d\lambda)$, *et il existe deux constantes* $\delta_o > 1$, $M > 0$ *telles que*

$$\Big|\Big(\frac{1}{\sinh t}\frac{d}{dt}\Big)^k(-\widehat{m})(t)\Big| \le M(1+t)^{-\delta_o}\Big[\cosh t\Big]^{-(\frac{N}{2}+k)}, \forall t > 0, k = 0,1,\cdots,N+2.$$

Alors, il existe une constante $C(\delta_o)$ *qui ne dépend que de* δ_o *et des propriétés de* X *telle que :*

$$\|m(\sqrt{L})f\|_{L^p(\mathrm{Cusp}(\mathrm{X}))} \le C(\delta_o) M \|f\|_{L^p(\mathrm{Cusp}(\mathrm{X}))}, \quad \forall f \in L^p \ (1 \le p \le +\infty).$$

Preuve. Il suffit de montrer que

$$\sup_{Y\in \mathrm{Cusp(X)}} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} [|m_{loc}| + |m_{inf}|]\, d\mu(Y') \leq C(\delta_o)M,$$

où m_{loc} et m_{inf} sont définits par (3.2).

On commence par estimer $|m_{loc}|$. On utilise la paramétrice de $\cos t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}$ (voir (3.1)), et on a :

$$\begin{aligned}
& \Big| \int_0^{+\infty} \phi(t) t C_K(t,x,x') F_m(\eta(t))\, dt \Big| \\
\leq\ & CM \int_{d_{\mathrm{X}}}^{+\infty} \phi(t) \Big\{ \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{(1+h)^{-\delta_o}\sinh h}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} \Big[\cosh h\Big]^{-(\frac{N}{2}+1)} dh \Big\}\, dt \\
\leq\ & C_* M \sup_{t\geq d_{\mathrm{X}}} \int_{\eta(t)}^{+\infty} \frac{(1+h)^{-\delta_o}\sinh h}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta(t)}} \Big[\cosh h\Big]^{-(\frac{N}{2}+1)} dh \\
\leq\ & C' M (1+\eta(d_{\mathrm{X}}))^{-\delta_o} \Big[\cosh \eta(d_{\mathrm{X}})\Big]^{-\frac{N+1}{2}} \\
\leq\ & CM(1+d)^{-\delta_o} e^{-\frac{N+1}{2}d}.
\end{aligned}$$

Pour estimer

$$\Big| \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t))\, dt \Big|,$$

on remarque que quand $\frac{N+1}{2} \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t))\, dt \\
=\ & (-1)^{\frac{N-1}{2}} \frac{\partial^{\frac{N-1}{2}}}{\partial s^{\frac{N-1}{2}}}\Big|_{s=0} \Big[\psi(d_{\mathrm{X}}^2+s) F_m(\sqrt{d_{\mathrm{X}}^2+s})\Big],
\end{aligned}$$

et quand $\frac{N+1}{2} \notin \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2-d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t))\, dt \\
=\ & (-1)^{\frac{N}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{\frac{N}{2}}}{\partial s^{\frac{N}{2}}} \Big[\psi(d_{\mathrm{X}}^2+s) F_m(\sqrt{d_{\mathrm{X}}^2+s})\Big] \frac{s^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})}\, ds.
\end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on note

$$\eta_*(s) = \eta(\sqrt{d_{\mathrm{X}}^2+s})(s\geq 0), \quad \Xi_m(n+1,h) = \sinh h \Big[\frac{1}{\sinh h}\frac{d}{dh}\Big]^{n+1}(-\widehat{m})(h).$$

D'après les propriétés de m, quand $0 \le n \le [\frac{N}{2}]$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial^n}{\partial s^n} F_m(\eta_*(s))\Big| &= \Big|(2yy')^{-n} \int_{\eta_*(s)}^{+\infty} \frac{\Xi_m(n+1,h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta_*(s)}}\, dh\Big| \\
&\le (2yy')^{-n} M(1+\eta_*(0))^{-\delta_o} \int_{\eta_*(s)}^{+\infty} \frac{\sinh h[\cosh h]^{-(\frac{N}{2}+n+1)}}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta_*(s)}}\, dh\Big| \\
&\le C_n M(1+d)^{-\delta_o} e^{-\frac{N+1}{2}d} (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2 + s)^{-n}.
\end{aligned}$$

Donc, en remarquant que $\psi \in C_o^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_{\mathrm{X}}^2)_+^{-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t))\, dt\Big| \\
\le\ & C(k) M(1+d)^{-\delta_o} e^{-\frac{N+1}{2}d}\Big[1 + (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)^{-\frac{N-1}{2}}\Big].
\end{aligned}$$

De la même façon, pour $1 \le k \le K$, on a :

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_0^{+\infty} \phi(t) t \frac{(t^2 - d_{\mathrm{X}}^2)_+^{k-\frac{N+1}{2}}}{\Gamma(k-\frac{N-1}{2})} F_m(\eta(t))\, dt\Big| \\
\le\ & C(k) M(1+d)^{-\delta_o} e^{-\frac{N+1}{2}d}\Big[1 + (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)^{-\max(0,\frac{N-3}{2})}\Big].
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$|m_{loc}| \le CM(1+d)^{-\delta_o}\Big[e^{-Nd} + e^{-\frac{N+1}{2}d}(yy')^{\frac{N-1}{2}}\Big]. \tag{3.3}$$

D'après la proposition 3 de [27], quand $\delta_o > 1$, on a :

$$\sup_{Y \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X})} \int_{\mathrm{Cusp}(\mathrm{X})} (1+d)^{-\delta_o} e^{-Nd}\, d\mu(Y') < C(\delta_o).$$

Donc, pour montrer que :

$$\sup_{Y \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X})} \int_{\mathrm{Cusp}(\mathrm{X})} |m_{loc}|(Y,Y')\, d\mu(Y') \le C(\delta_o) M,$$

il nous reste à montrer le lemme suivant :

LEMME 3.2 *Soient* X *une variété riemannienne compacte de dimension N, et $\delta_o > 1$ fixé. Alors*

$$\sup_{Y \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X})} \int_{\mathrm{Cusp}(\mathrm{X})} (1+d)^{-\delta_o} (yy')^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{N+1}{2}d}\, d\mu(Y') < C(\delta_o).$$

Preuve. D'après (1.1), on voit qu'il existe une constante telle que pour tous $Y, Y' \in \mathrm{Cusp}(\mathrm{X})$, on a :

$$(1+d)^{-\delta_o}(yy')^{\frac{N-1}{2}} e^{-\frac{N+1}{2}d} \le C\Big(1 + \Big|\ln \frac{y}{y'}\Big|\Big)^{-\delta_o} (yy')^N (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)^{-\frac{N+1}{2}}.$$

On distingue les deux cas suivants : $0 < y \leq 1$ et $y > 1$.
Quand $0 < y \leq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \left[1 + \left|\ln \frac{y}{y'}\right|\right]^{-\delta_o} (yy')^N (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)^{-\frac{N+1}{2}}\, d\mu(y', x') \\
\leq & \int_0^{+\infty} \left[1 + \left|\ln \frac{y}{y'}\right|\right]^{-\delta_o} (yy')^N \left[\int_{\mathrm{X}} (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)^{-\frac{N+1}{2}}\, d\mu_{\mathrm{X}}(x')\right] y'^{-N-1}\, dy' \\
\leq & \; C \int_0^{+\infty} \left[1 + \left|\ln \frac{y'}{y}\right|\right]^{-\delta_o} (yy')^N (y^2 + y'^2)^{-\frac{1}{2}} y'^{-N-1}\, dy' \\
\leq & \; C y^{N-1} \int_0^{+\infty} (1 + |\ln h|)^{-\delta_o} (1 + h^2)^{-\frac{1}{2}} \frac{dh}{h} < C(\delta_o).
\end{aligned}
$$

Quand $y \geq 1$, on a

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \left[1 + \left|\ln \frac{y}{y'}\right|\right]^{-\delta_o} (yy')^N (y^2 + y'^2 + d_{\mathrm{X}}^2)^{-\frac{N+1}{2}}\, d\mu(y', x') \\
\leq & \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \left[1 + \left|\ln \frac{y}{y'}\right|\right]^{-\delta_o} y'^N\, d\mu(y', x') \\
\leq & \; C \int_0^{+\infty} \left[1 + \left|\ln \frac{y'}{y}\right|\right]^{-\delta_o} y'^{-1}\, dy' \leq C(\delta_o).
\end{aligned}
$$

Ceci achève la preuve du lemme. ■

On va montrer

$$
\sup_{Y \in \mathrm{Cusp(X)}} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} |m_{inf}|(Y, Y')\, d\mu(Y') \leq C(\delta_o) M.
$$

On commence par estimer $|m_{inf}|$, et on va utiliser le lemme suivant :

LEMME 3.3 *Soient* X *une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension* $N \geq 2$, *et* $\Phi \in C(\mathbb{R})$ *une fonction paire. Alors,*

$$
\sup \left\{ \left| \Phi(\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})(x, x') - \frac{1}{|\mathrm{X}|}\Phi(0) \right| ; x, x' \in \mathrm{X} \right\} \leq C \sup_{s > 0} s^{N+1} |\Phi(s)|. \tag{3.4}
$$

Preuve. Ce résultat a été utilisé dans [29]. Pour être complet, on donne sa preuve :
D'après le développement spectral de $\Phi(\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})$, on peut choisir $\kappa \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ telle que $\kappa(s) = 0$ quand $s \ll 1$, $\kappa(s) = 1$ quand s est assez grand, et

$$
\Phi(\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})(x, x') = \frac{1}{|\mathrm{X}|}\Phi(0) + [\kappa\Phi](\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})(x, x').
$$

Puisque $(I - \Delta_{\mathrm{X}})^{-\frac{N+1}{4}}$ est borné de $L^1(\mathrm{X})$ dans $L^2(\mathrm{X})$ et aussi de $L^2(\mathrm{X})$ dans $L^\infty(\mathrm{X})$, on a donc :

$$
\left| \left[\kappa\Phi\right](\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})(x, x') \right| \;\leq\; \left\| \left[\kappa\Phi\right](\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}}) \right\|_{L^1(\mathrm{X}) \longrightarrow L^\infty(\mathrm{X})}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le C\Big|(I-\Delta_{\mathrm{X}})^{\frac{N+1}{2}}\Big[\kappa\Phi\Big](\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})\Big|_{L^2(\mathrm{X})\longrightarrow L^2(\mathrm{X})}\\
&\le C'\sup_{s\ge 0}(1+s^2)^{\frac{N+1}{2}}\Big|\kappa(s)\Phi(s)\Big|\\
&\le C\sup_{s>0} s^{N+1}|\Phi(s)|.
\end{aligned}
$$

D'où le lemme. ■

On estime maintenant $|m_{inf}|$.

En utilisant le raisonnement par récurrence, on voit que pour $k\in\mathbb{N}$, il existe des constantes telles que :

$$
\frac{d^k}{dt^k}F_m(\eta(t)) = \sum_{0\le l\le n\le k;n+(n-l)=k} t^l\frac{C(l,n,k)}{(2yy')^n}\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{\Xi_m(n+1,h)}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh. \tag{3.5}
$$

On en déduit que pour $0\le k\le N+1$ fixé, on a :

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{d^k}{dt^k}F_m(\eta(t))\Big| &\le C_k\sum_{0\le l\le n\le k;n+(n-l)=k} t^l(2yy')^{-n}\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{|\Xi_m(n+1,h)|}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh\\
&\le MC_k\sum t^l(2yy')^{-n}\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{(1+h)^{-\delta_o}\sinh h[\cosh h]^{-(\frac{N}{2}+n+1)}}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh\\
&\le MC'_k\sum t^l(2yy')^{-n}(1+\eta(t))^{-\delta_o}[\cosh\eta(t)]^{-(\frac{N+1}{2}+n)}\\
&\le MC_k(1+\eta(t))^{-\delta_o}\Big(\frac{2yy'}{y^2+y'^2+t^2}\Big)^{\frac{N+1}{2}}t^{-k}.
\end{aligned}
$$

Donc, par (3.4), on a :

$$
\begin{aligned}
&\sup\Big\{\Big|\int_0^{+\infty}\cos(t\sqrt{-\Delta_{\mathrm{X}}})(x,x')\varphi(t)F_m(\eta(t))\,dt\Big|;x,x'\in\mathrm{X}\Big\}\\
\le\ & C\Big[\Big|\int_0^{+\infty}\varphi(t)F_m(\eta(t))\,dt\Big|+\sup_{s>0}s^{N+1}\Big|\int_0^{+\infty}\varphi(t)F_m(\eta(t))\cos(ts)\,dt\Big|\Big]\\
\le\ & C\Big\{\int_0^{+\infty}\Big|\varphi(t)F_m(\eta(t))\Big|\,dt+\int_0^{+\infty}\Big|\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}\Big[\varphi(t)F_m(\eta(t))\Big]\Big|\,dt\Big\}\\
\le\ & CM\Big[\int_{\frac{\zeta_o}{16}}^{+\infty}(1+\eta(t))^{-\delta_o}\Big(\frac{2yy'}{y^2+y'^2+t^2}\Big)^{\frac{N+1}{2}}dt+(1+\eta(\frac{\zeta_o}{16}))^{-\delta_o}\Big(\frac{2yy'}{y^2+y'^2+(\frac{\zeta_o}{16})^2}\Big)^{\frac{N+1}{2}}\Big]\\
& \text{(puisque } \varphi(t)=0 \text{ si } t\le\tfrac{\zeta_o}{16} \text{ et } \varphi(t)=1 \text{ si } t\ge\tfrac{\zeta_o}{4})\\
\le\ & C'M(1+\eta(\frac{\zeta_o}{16}))^{-\delta_o}\Big(\frac{2yy'}{y^2+y'^2+(\frac{\zeta_o}{16})^2}\Big)^{\frac{N+1}{2}}\Big[1+\sqrt{y^2+y'^2+(\frac{\zeta_o}{16})^2}\Big]\\
\le\ & C(\zeta_o)M\Big(1+\Big|\ln\frac{y}{y'}\Big|\Big)^{-\delta_o}(yy')^{\frac{N+1}{2}}[y^2+y'^2]^{-\frac{N}{2}}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
|m_{inf}|\le C(\zeta_o)M\Big(1+\Big|\ln\frac{y}{y'}\Big|\Big)^{-\delta_o}y'^N\Big[1+(\frac{y'}{y})^2\Big]^{-\frac{N}{2}},
$$

et

$$\sup_{Y\in \mathrm{Cusp(X)}} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|m_{inf}\Big|\, d\mu(Y')$$
$$\leq \quad CM|\mathrm{X}| \int_0^{+\infty} \left(1 + \Big|\ln \frac{y}{y'}\Big|\right)^{-\delta_o} (yy')^{\frac{N+1}{2}} [y^2 + y'^2]^{-\frac{N}{2}} y'^{-N-1}\, dy' < C(\delta_o) M.$$

■

On montre maintenant le résultat suivant :

PROPOSITION 3.4 *Soit* X *comme dans la proposition 3.1. Si m est une fonction bornée, paire, $\in L^1(R^+, \lambda d\lambda)$ satisfaisante* $\mathrm{Supp}\widehat{m} \subset [-1,1]$ *et*

$$\Big|\Big(\frac{1}{\sinh t}\frac{d}{dt}\Big)^k (-\widehat{m})(t)\Big| \leq M t^{-2k-1}, \quad \forall 0 < t \leq 1, \ k = 0, 1, \cdots, N+2.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$ qui ne dépend que des propriétés de X *telle que pour tout $f \in L^1(\mathrm{Cusp(X)})$, on a :*

$$\mu\Big\{Y \in \mathrm{Cusp(X)}; |m(\sqrt{L})f(Y)| > \gamma\Big\} \leq C\frac{1 + M + \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda)}}{\gamma} \|f\|_1, \quad \forall \gamma > 0.$$

Donc, $m(\sqrt{L})$ est borné dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $1 < p < +\infty$.

Preuve. On commence par étudier m_{loc}.
Pour $0 \leq k \leq N+1$ fixé, d'après les propriétés de $\widehat{m}$, pour tout $\eta > 0$, on a :

$$\int_\eta^{+\infty} (\cosh t - \cosh \eta)^{-\frac{1}{2}} \Big|\Xi_m(k+1, t)\Big|\, dt$$
$$\leq \quad M \int_{\min(\eta,1)}^1 \frac{t^{-2(k+1)-1}\sinh t}{\sqrt{\cosh t - \cosh \eta}}\, dt$$
$$\leq \quad C_k M \chi\Big\{\eta \leq 1\Big\} \int_\eta^1 \frac{\sinh t (\cosh t - 1)^{-\frac{2(k+1)+1}{2}}}{\sqrt{\cosh t - \cosh \eta}}\, dt \quad (\text{car } t^2 \sim \cosh t - 1 \text{ quand } 0 \leq t \leq 1)$$
$$= \quad 2C_* M \chi\Big\{\eta \leq 1\Big\} \int_0^{+\infty} (s^2 + \cosh \eta - 1)^{-\frac{2(k+1)+1}{2}}\, ds$$
(par le changement de variable $s^2 = \cosh t - \cosh \eta$)
$$\leq \quad CM(\cosh \eta - 1)^{-k-1} \chi_{\{\eta \leq 1\}}, \tag{3.6}$$

où χ désigne la fonction caractéristique.
Donc, en répétant la méthode d'estimer $|m_{loc}|$ dans la preuve de la proposition 3.1, on a :

$$m_{loc} = I_1 + I_{loc}, \tag{3.7}$$

où

$$I_1 \quad = \quad u_o(x,x') \times \begin{cases} C_1 \psi(d_{\mathrm{X}}^2) \int_d^{+\infty} \frac{\Xi_m(\frac{N-1}{2}+1, h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh d}}\, dh & \text{si } \frac{N-1}{2} \in \mathbb{N}, \\ C_2 (2yy')^{-\frac{1}{2}} \int_0^{+\infty} \psi(d_{\mathrm{X}}^2 + s) \Big[\int_{\eta_*(s)}^{+\infty} \frac{\Xi_m(\frac{N}{2}+1, h)}{\sqrt{\cosh h - \cosh \eta_*(s)}}\, dh\Big] \frac{ds}{\sqrt{s}} & \text{si } \frac{N}{2} \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

et

$$\Big|I_{loc}\Big| \le CM(yy')^{\frac{N-1}{2}}\chi_{\{d\le 1\}} \times \left\{ \begin{array}{ll} d^{-2} & \text{si } N=2, \\ \Big[d^{-2}+(yy')^{1-[\frac{N-1}{2}]}d^{-2[\frac{N-1}{2}]}\Big] & \text{si } N\ge 3. \end{array}\right. \tag{3.8}$$

On considère maintenant m_{inf}.

Pour $0\le k\le N+1$ fixé, par (3.5) et (3.6), on déduit que pour tout $t>0$, on a :

$$\begin{aligned} \Big|\frac{d^k}{dt^k}F_m(\eta(t))\Big| &\le C_k \sum_{0\le l\le n\le k;\, n+(n-l)=k} t^l(2yy')^{-n}\int_{\eta(t)}^{+\infty}\frac{|\Xi_m(n+1,h)|}{\sqrt{\cosh h-\cosh\eta(t)}}\,dh \\ &\le MC'_k \sum_{0\le l\le n\le k;\, n+(n-l)=k} t^l(2yy')^{-n}\Big[\frac{(y-y')^2+t^2}{2yy'}\Big]^{-n-1}\chi\Big\{\eta(t)\le 1\Big\} \\ &\le MC_k t^{-k}\Big[\frac{(y-y')^2+t^2}{2yy'}\Big]^{-1}\chi\Big\{\frac{y^2+y'^2+t^2}{2yy'}\le\cosh 1\Big\}. \end{aligned}$$

Donc, en remarquant que $\varphi(t)=0$ si $t\le\frac{\zeta_o}{16}$ et $\varphi(t)=1$ si $t\ge\frac{\zeta_o}{4}$, par (3.4), on déduit :

$$\int_0^{+\infty}\cos\big(t\sqrt{-\Delta_{\rm X}}\big)\varphi(t)F_m(\eta(t))\,dt=\frac{1}{|{\rm X}|}\int_0^{+\infty}\varphi(t)F_m(\eta(t))\,dt+R_{inf},$$

avec

$$\begin{aligned} |R_{inf}| &\le \sup_{h>0} h^{N+1}\Big|\int_0^{+\infty}\cos(th)\varphi(t)F_m(\eta(t))\,dt\Big| \\ &\le C\int_0^{+\infty}\Big|\frac{d^{N+1}}{dt^{N+1}}\Big[\varphi(t)F_m(\eta(t))\Big]\Big|\,dt \\ &\le MC(\zeta_o)\frac{2yy'}{(y-y')^2+(\frac{\zeta_o}{16})^2}\chi\Big\{\eta(\frac{\zeta_o}{16})\le 1\Big\}, \end{aligned}$$

parce que $\varphi(t)=0$ si $t\le\frac{\zeta_o}{16}$ et $\varphi(t)=1$ si $t\ge\frac{\zeta_o}{4}$.

Autrement dit, on a :

$$m_{inf}=I_2+I_{inf}, \tag{3.9}$$

où

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{C}{|{\rm X}|}(yy')^{\frac{N-1}{2}}\int_0^{+\infty}\varphi(t)F_m(\eta(t))\,dt, \\ \Big|I_{inf}\Big| &\le C'(\xi_o)M\frac{(2yy')^{\frac{N+1}{2}}}{(y-y')^2+(\frac{\xi_o}{16})^2}\chi\Big\{\eta(\frac{\xi_o}{16})\le 1\Big\}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Par (3.7) et (3.9), on peut écrire :

$$m(\sqrt{L})(Y,Y')=\Big(I_1+I_2\Big)+I_{loc}+I_{inf}=I(Y,Y')+I_{loc}+I_{inf}.$$

Remarquons qu'il existe une constante $C > 1$ telle que :

$$\mathrm{Supp} I(Y,Y') \subset \Big\{(Y,Y') \in \mathrm{Cusp(X)}; d(Y,Y') < C\Big\}. \tag{3.11}$$

On va montrer que :

$$\sup_{Y \in \mathrm{Cusp(X)}} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|I_{loc}\Big| + \Big|I_{inf}\Big|\, d\mu(Y') = \sup_{Y'} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|I_{loc}\Big| + \Big|I_{inf}\Big|\, d\mu(Y) \leq CM. \tag{3.12}$$

En utilisant (1.1) (ou (2.2)), on voit que

$$d(Y,Y') \leq 1 \text{ (ou } \eta(\tfrac{\xi_o}{16}) \leq 1) \Longrightarrow e^{-1}y' \leq y \leq ey. \tag{3.13}$$

Par conséquent, (3.10) montre que :

$$\begin{aligned}
\sup_{Y \in \mathrm{Cusp(X)}} \frac{1}{M} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|I_{inf}\Big|\, d\mu(Y') &\leq C|\mathrm{X}| \sup_{y>0} \int_{e^{-1}<\frac{y'}{y}<y} \frac{(2yy')^{\frac{N+1}{2}}}{(y-y')^2 + (\frac{\xi_o}{16})^2} y'^{-N-1}\, dy' \\
&\leq C' \sup_{y>0} \frac{1}{y} \int_{e^{-1}<a<e} \frac{da}{(1-a)^2 + (\frac{\xi_o}{16})^2 y^{-2}} \\
&\leq C \sup_{y>0} \frac{1}{y} \int_0^{+\infty} \frac{dh}{h^2 + (\frac{\xi_o}{16})^2 y^{-2}} = C(\xi_o).
\end{aligned}$$

Pour montrer que :

$$\sup_{Y \in \mathrm{Cusp(X)}} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|I_{loc}\Big|\, d\mu(Y') \leq CM,$$

on distingue les deux cas : $N \geq 3$ et $N = 2$. Et on considère d'abord le cas où $N \geq 3$.

Pour $0 < y \leq 1$, (3.8) donne :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|I_{loc}\Big|\, d\mu(Y') &\leq C \int_{d \leq 1} \Big[(yy')^{\frac{N-1}{2}} d^{-2} + (yy')^{\frac{N+1}{2} - [\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]}\Big]\, d\mu(Y') \\
&\leq C' \int_{d \leq 1} d^{-N}\, d\mu(Y') = C' \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^{-j-1} \leq d \leq 2^{-j}} d^{-N}\, d\mu(Y') < C,
\end{aligned}$$

par la proposition 2.3 de [28].

Dans le cas où $y \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \Big|I_{loc}\Big|\, d\mu(Y') &\leq C \int_{d \leq 1} \Big[y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1) - 2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]}\Big]\, d\mu(Y') \\
&= C \int_{y^{-1} \leq d \leq 1} + \int_{d \leq y^{-1}},
\end{aligned}$$

mais, par la proposition 2.3 de [28] montre que :

$$\int_{y^{-1} \leq d \leq 1} \Big[y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1) - 2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]}\Big]\, d\mu(Y')$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=0}^{[\log_2 y]} \int_{2^j y^{-1} \leq d \leq 2^{j+1} y^{-1}} \left[y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\
&\leq \sum_{j=0}^{[\log_2 y]} \left[y^{N-1} (2^j y^{-1})^{-2} + y^{N+1-2[\frac{N-1}{2}]} (2^j y^{-1})^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] \left| B(Y, 2^{j+1} y^{-1}) \right| \\
&\leq C \sum_{j=0}^{[\log_2 y]} \left[y^{N-1} (2^j y^{-1})^{-2} + y^{N+1-2[\frac{N-1}{2}]} (2^j y^{-1})^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] y^{-N} (2^{j+1} y^{-1}) < C',
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
& \int_{d \leq y^{-1}} \left[y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\
= & \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{2^{-j-1} y^{-1} \leq d \leq 2^{-j} y^{-1}} \left[y^{N-1} d^{-2} + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} d^{-2[\frac{N-1}{2}]} \right] d\mu(Y') \\
\leq & C \sum_{j=0}^{+\infty} \left\{ y^{N-1} (2^{j+1} y)^2 + y^{(N+1)-2[\frac{N-1}{2}]} [2^{j+1} y]^{2[\frac{N-1}{2}]} \right\} \left| B(Y, 2^{-j} y^{-1}) \right| \\
\leq & C' \sum_{j=0}^{+\infty} y^{N+1} \left[(2^{j+1})^2 + (2^{j+1})^{2[\frac{N-1}{2}]} \right] (2^{-j} y^{-1})^{N+1} < C.
\end{aligned}
$$

De la même façon, pour $N = 2$, on a :

$$
\sup_{Y \in \mathrm{Cusp(X)}} \int_{\mathrm{Cusp(X)}} \left| I_{loc} \right| d\mu(Y') \leq CM.
$$

Définissons les opérateurs intégraux, T_1 et T_2, de noyaux intégraux donnés par $I_{loc} + I_{inf}$ et $I(Y, Y')$. On remarque que :

$$
m(\sqrt{L}) = T_1 + T_2,
$$

et (3.12) montre que :

$$
\|T_1 f\|_{L^p(\mathrm{Cusp(X)})} \leq CM \|f\|_{L^p(\mathrm{Cusp(X)})}, \quad \forall f \in L^p(\mathrm{Cusp(X)}) \ (1 \leq p \leq +\infty).
$$

Puisque

$$
\|m(\sqrt{L}) f\|_2 \leq \|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, d\lambda)} \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathrm{Cusp(X)}),
$$

on a donc

$$
\|T_2 f\|_2 \leq \Big(CM + \|m\|_\infty \Big) \|f\|_2, \quad \forall f \in L^2(\mathrm{Cusp(X)}). \tag{3.14}
$$

La proposition 2.3 de [28] montre que pour tout $c > 0$ fixé et pour tout $Y \in \mathrm{Cusp(X)}$, $B(Y, c)$ est un espace homogène au sens de [13]. Par (3.11), (3.14) et la théorie des intégrales singulières (voir par exemple [13] ou [45]), pour achever la démonstration de la proposition 3.4, il suffit de montrer les estimations suivantes :

$$\Big|I(Y,Y')\Big| \leq CM\Big|B(Y,d(Y,Y'))\Big|^{-1}, \quad \Big|\nabla I(Y,Y')\Big| \leq CM\frac{1}{d(Y,Y')|B(Y,d(Y,Y'))|}.$$

Par exemple, par (3.6) et la propriétés de φ, on a :

$$\begin{aligned}
\Big|I_2\Big| &\leq C(yy')^{\frac{N-1}{2}}\chi\Big\{\eta(\frac{\xi_o}{16}) \leq 1\Big\}\int_{\frac{\xi_o}{16}}^{+\infty}\frac{2yy'}{(y-y')^2+t^2}\,dt \\
&\leq C'(yy')^{\frac{N}{2}}(\cosh\eta(\frac{\xi_o}{16})-1)^{-\frac{1}{2}}\chi\Big\{\eta(\frac{\xi_o}{16}) \leq 1\Big\} \\
&\leq Cy^N[\eta(d_{\mathrm{X}})]^{-1} \\
&\quad \text{(par (3.13) et le fait que } \cosh\eta(\tfrac{\xi_o}{16})-1 \sim \eta^2(\tfrac{\xi_o}{16}) \sim \eta^2(d_{\mathrm{X}}) \text{ quand } \eta(\tfrac{\xi_o}{16}) \leq 1) \\
&\leq C\Big|B(Y,d(Y,Y'))\Big|^{-1},
\end{aligned}$$

grâce à la proposition 2.3 de [28].

De la même façon, on peut montrer les autres estimations. ■

Remarque : Si X et m sont comme dans la proposition 3.4, de plus, on suppose qu'il existe $1 \geq \epsilon > 0$ telle que :

$$\Big|\Big(\frac{1}{\sinh t}\frac{d}{dt}\Big)^k(-\hat{m}(t))\Big| \leq Mt^{-2k+\epsilon-1}, \quad \forall 0 < t \leq 1,\ k = 0,1,\cdots,N+2,$$

alors, on peut montrer qu'il existe une constante $C(\epsilon) > 0$ telle que :

$$\sup_{Y\in\mathrm{Cusp(X)}}\int_{\mathrm{Cusp(X)}}|m(\sqrt{L})(Y,Y')|\,d\mu(Y') \leq C(\epsilon)M. \tag{3.15}$$

On peut donner maintenant **la Preuve du théorème 1.1 :**

Il suffit de montrer que le théorème 1.1 est vrai pour $0 < W \leq \frac{N}{2}$. On peut supposer que $m \in L^1(\mathbb{R}^+, \lambda d\lambda)$ afin d'utiliser (2.3). En général, comme ce qu'Ionescu a expliqué dans la proof of theorem A de [26], il suffit de remplacer $m(\lambda)$ par $e^{-\epsilon^2\lambda^2}m(\lambda)$ $(0 < \epsilon \leq 1)$ et utiliser ensuite l'argument standard de limite.

D'après le lemme 1.2 de [46], on peut écrire $m = m_a + m_b$ où m_a satisfait les conditions de la proposition 3.4, et m_b a les propiétés suivantes : $\mathrm{Supp}\widehat{m_b} \subset (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$ et

$$\Big|\Big(\frac{1}{\sinh t}\frac{d}{dt}\Big)^k\widehat{m_b}(t)\Big| \leq C_k(1+t)^{-2}\Big[\cosh t\Big]^{-(W+k)}, \forall t > 0, k \in \mathbb{N}.$$

D'après la proposition 3.4, on sait que $m_a(\sqrt{L})$ est borné dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $1 < p < +\infty$ et de type faible $(1,1)$.

Pour montrer que m_b est borné dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ $(1 < p < +\infty)$ quand $N|\frac{1}{2} - \frac{1}{p}| \leq W$, définissons une famille analytique des opérateurs

$$T_z(\sqrt{L}) = \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{1}{2}}\int_0^{+\infty}e^{(W-\frac{N}{2}z)t}\widehat{m_b}(t)\cos(t\sqrt{L})\,dt, \quad 0 \leq \Re z \leq 1.$$

Quand $\Re z = 0$, on a $\|T_z(\sqrt{L})\|_{L^2 \longrightarrow L^2} \leq C$.

Quand $\Re z = 1$, notons m_a^z la transformation inversée de Fourier de $e^{(W-\frac{N}{2}z)|t|}\widehat{m_b}(|t|)$. On a $T_z(\sqrt{L}) = m_a^z(\sqrt{L})$ où m_a^z satisfait les conditions de la proposition 3.1; donc, $T_z(\sqrt{L})$ est borné dans $L^p(\mathrm{Cusp(X)})$ pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

D'après le théorème d'interpolation de Stein, on obtient le résultat du théorème 1.1. ■

La proposition 3.1 et (3.15) donnent le résultat suivant :

THÉORÈME 3.5 *Soit* X *une variété riemannienne compacte, sans bord, de dimension* $N \geq 2$. *Pour* $m \in \mathcal{F}^{\epsilon}_{\frac{N}{2}}$ *avec* $\epsilon > 0$, *il existe une constante* $C(\epsilon) > 0$ *telle que :*

$$\|m(\sqrt{L})f\|_p \leq C(\epsilon)\|f\|_p, \quad \forall f \in L^p(\mathrm{Cusp(X)})\ (1 \leq p \leq +\infty).$$

References

[1] G. Alexopoulos, Spectral multipliers on Lie groupsn of polynomial growth, Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994) 973-979.

[2] J.-P. Anker, N. Lohoué, Multiplicateurs sur certains espaces symétriques, Amer. J. Math. 108 (1986) 1303-1354.

[3] J.-P. Anker, L^p Fourier multipliers on Riemannian symmetric spaces of the non-compact type, Ann. of Math. 132 (1990) 597-628.

[4] J.-P. Anker, Sharp estimates for some functions of the Laplacian on noncompact symmetric spaces, Duke Mathematical Journal 65 (1992) 257-297.

[5] J.-P. Anker, E. Damek, C. Yacoub, Spherical Analysis on Harmonic AN Groups, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. IV. Sen. 23 (1996) 643-679.

[6] F. Astengo, Multipliers for a distinguished Laplacean on solvable extensions of H-type groups, Monatsh. Math. 120 (1995) 179-188.

[7] P. Bérard, On the Wave Equation on Riemannian Manifold without Conjugate Points, Math. Z., 155 (1977) 249-276.

[8] J. Cheeger, M. Gromov, M. E. Taylor, Finite propagation speed, kernel estimates for functions of the Laplace operator, and the geometry of complete Riemannian manifolds, J. Differential Geom. 17 (1982) 15-53.

[9] J. Cheeger, M. E. Taylor, On the diffraction of wave by conical singularities. I, Comm. Pure Appl. Math. XXV (1982) 275-331.

[10] J. Clerc, E. M. Stein, L^p-multipliers for noncompact symmertric spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 71 (1974) 3911-3912.

[11] M. Christ, L^p bound for spectral multiplier on nilpotent groups, Trans. Amer. Math. Soc. 328 (1991) 73-81.

[12] M. Christ, D. Müller, On L^p spectral multipliers for a solvable Lie group, Geom. Funct. Anal. 6 (1996) 860-876.

[13] R. Coifman, G. Weiss, *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes,* Springer L.N.n^0 242, 1971.

[14] M. Cowling, S. Giulini, A. Hulanicki, G. Mauceri, Spectral multipliers for a distinguished Laplacian on certain groups of exponential growth, Studia Math. 111 (1994) 103-121.

[15] L. De Michèle, G. Mauceri, L^p-multipliers on the Heisenberg group, Michigan Math. J., 26 (1979) 361-373.

[16] L. De Michèle, G. Mauceri, H^p multipliers on stratified groups, Ann. Mat. Pura Appl. 148 (1987) 353-366.

[17] Gelfand I. M., Shilov G., *Generalized Functions I*, Academic Press, New York and London, 1960.

[18] W. Hebisch, The subalgebra of $L^1(AN)$ generated by the laplacean, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993) 547-549.

[19] W. Hebisch, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups, Coll. Math. 65 (1993) 231-239.

[20] W. Hebisch, J. Zieenkiewicz, Multiplier theorem on generalized Heisenberg groups II, Coll. Math. 69 (1995) 29-36.

[21] W. Hebisch, Boundedness of L^1 spectral multipliers for an exponential solvable Lie group, Coll. Math. 73 (1997) 155-164.

[22] W. Hebisch, Spectral multipliers on exponential growth solvable Lie groups, Math. Z. 229 (1998) 435-441.

[23] W. Hebisch, Spectral multipliers on metabelian groups, Revista Math. Iberoamericana 16 (2000) 597-604.

[24] L. Hörmander, Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta Math. 104 (1960), 93-139.

[25] A. Hulanicki, Subalgebra of $L_1(G)$ associated with Laplacian on a Lie group, Coll. Math. 31 (1974) 259-287.

[26] Ionescu A., An endpoint estimate for the Kunze-Stein phenomenon and related maximal operators, Ann. of Math. 152 (2000) 259-275.

[27] H.-Q. Li, Analyse sur les variétés cuspidales, C. R. Acad. Sci. Paris, 331 (2000) 553-556.

[28] H.-Q. Li, Analyse sur les variétés cuspidales, A paraître au Math. Ann.

[29] H.-Q. Li, Certaines fonctions maximales sur les variétés cuspidales, Soumis.

[30] H.-Q. Li, Estimations L^p des fonctions du Laplacien sur les variétés cuspidales II, En préparation.

[31] J. Ludwig, D. Müller, Sub-Laplacians of holomorphic L^p-type on rank one AN-groups and related solvable groups, J. Funct. Anal. 170 (2000) 366-427.

[32] W. Magnus, F. Oberhettinger, R. P. Soni, Formulas and Theorems for Special Functions of Mathematical Physics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1966.

[33] G. Mauceri, S. Meda, Vector-valued multipliers on stratified groups, Revista Math. Iberoamericana 6 (1990) 141-154.

[34] S. Mikhlin, Multidimensional singular integral equation, Pergamon Press, New York, 1965.

[35] D. Müller, E. M. Stein, On spectral multipliers for Heisenberg and related groups, J. Math. Pures et Appl. 73 (1994) 413-440.

[36] W. Müller, Spectral theory for Riemannian manifolds with cusps and a related trace formula, Math. Nachr. 111 (1983) 197-288.

[37] S. Mustapha, Multiplicateurs spectraux sur certains groupes non-unimodulaires, Harmonic Analysis and Number Theory, CMS Conf. Proceedings, Vol. 21, 1997.

[38] S. Mustapha, Multiplicateurs de Mikhlin pour une classe particulière de groupes non-unimodulaires, Ann. Inst. Fourier 48 (1998) 957-966.

[39] A. Seeger, C.D. Sogge, On the boundedness of function of (pseudo-)Differential operators on compact manifolds, Duke Math. J. 59 (1989) 709-736.

[40] A. Seeger, Endpoint estimates for multiplier transformations on Compact manifolds, Indiana Univ. Math. J. 40 (1991) 471-533.

[41] A. Sikora, Multiplicateurs associés aux souslaplaciens sur les groupes homogènes, C. R. Acad. Sci. Paris 315 (1992) 417-419.

[42] R. Stanton, P. Tomas, Expansions for spherical functions on noncompact symmetric spaces, Acta Math. 140 (1978) 251-276.

[43] E. M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.

[44] E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

[45] E.M. Stein, "Harmonic Analysis : Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatary Integrals," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.

[46] M. E. Taylor, L^p-Estimates on functions of the Laplace operator, Duke Math. J. 58 (1989) 773-793.