

GONFLEMENT DES EMITTANCES DES FAISCEAUX EJECTES  
AU PASSAGE DU CHAMP DE FUITE DU PS

(Complément à la note PS/MU/EP/NOTE 78-3)

F. Schiber \*

1. Introduction
2. Rappel des hypothèses
3. Procédé de calcul
  - 1) Invariance des paramètres de Twiss
  - 2) Etapes de calcul communes à l'éjection lente et l'éjection rapide
    - a) En SD 61
    - b) En SD 62
4. Gonflement des émittances verticales en SD 64
  - 1) Ejection lente
    - a) A l'aide de l'ellipse circonscrite
    - b) A l'aide du polygone circonscrit
    - c) Résultats
  - 2) Conséquence pour les émittances d'une éjection rapide
5. Conclusions

---

\* Etudiante d'été - Faculté des Sciences d'Orsay (Paris XI)

## 1. Introduction

La note PS/MU/EP/NOTE 78-3 <sup>1)</sup> est relative à des valeurs d'émittance correspondant à l'éjection lente SE 62 ( $E_H = 3.5 \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ ,  $E_V = 3.01 \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ ).

Dans ce qui suit on a étudié comment varient les émittances éjectées en fonction de leur valeur initiale, laquelle dépend de l'intensité et de l'énergie des protons.

- a) en éjection lente, c'est-à-dire avec un rapport  $E_H/E_V = 1.16$  fixé par la valeur  $E_H = 3.5 \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$  et par la valeur  $E_V = 3.01 \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$  de la note référence (1);
- b) en éjection rapide avec un rapport  $E_H/E_V = 2$  correspondant à l'éjection d'un faisceau circulant dans le PS, selon le mode 20 paquets.

## 2. Rappel des hypothèses

Comme dans la note PS/MU/EP/NOTE 78-3

- les aberrations chromatiques sont négligées face aux aberrations non linéaires dues à la traversée du champ magnétique par le faisceau
- le gonflement de l'émittance horizontale est négligé
- il n'y a pas de blindage magnétique ("shim") pour linéariser le champ de fuite le long de la trajectoire du faisceau éjecté.

## 3. Procédé de calcul

L'étude est faite sur la ligne d'éjection 62 (1978); mais les résultats sont applicables à toute éjection issue d'une section droite paire avec un angle d'éjection de l'ordre de 20 mrad.

1) Invariance des paramètres de Twiss

L'émittance d'un faisceau dans l'espace de phases a la forme d'une ellipse dont l'équation générale en fonction des paramètres de Twiss est:

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \beta x'^2 = \epsilon \quad (1)$$

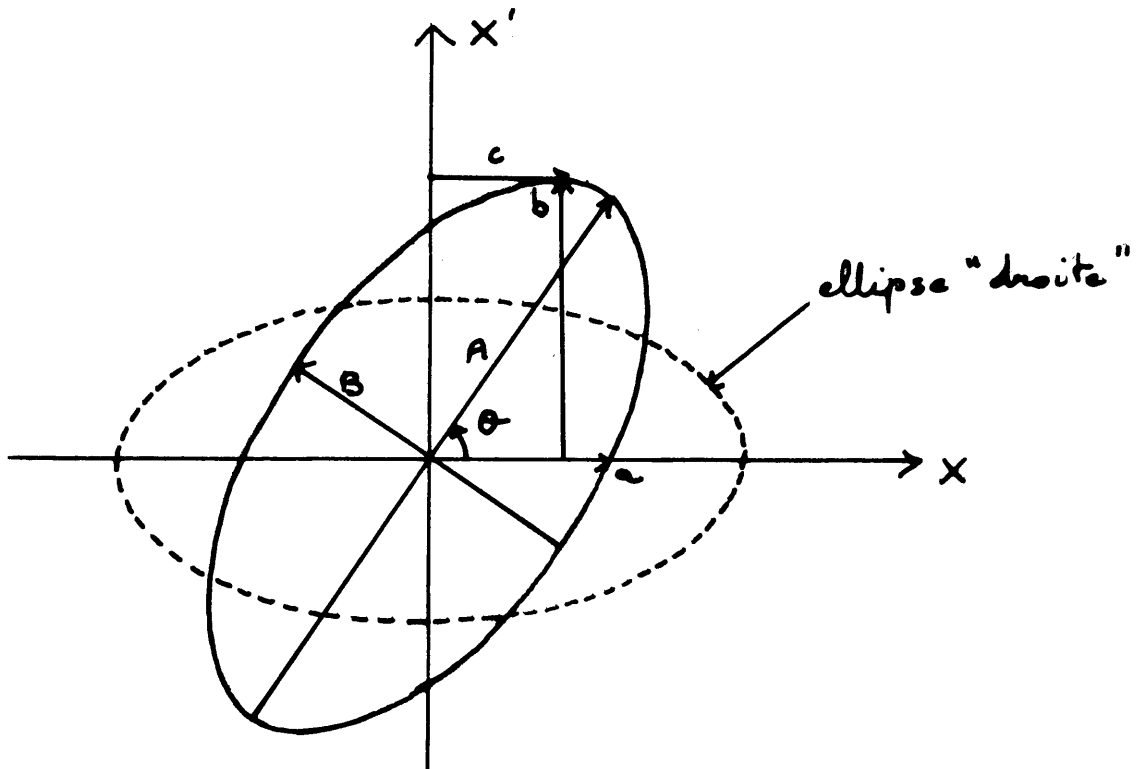
$$\epsilon = A \cdot B = ab$$

cf. figure ci-dessous.

$$\gamma = \frac{b}{a}, \quad \alpha = -\frac{c}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 + c^2}{\epsilon}.$$

Quand  $\alpha = 0$ , l'ellipse est "droite":  $B = b$ ,  $A = a$

$$\text{donc } \gamma_0 = \frac{B}{A} \text{ et } \beta_0 = \frac{1}{\gamma_0} = \frac{A}{B}$$



L'équation paramétrique de l'ellipse inclinée dans ce repère d'axes est:

$$\frac{(x \cos \theta - x' \sin \theta)^2}{A^2} + \frac{(x \sin \theta + x' \cos \theta)^2}{B^2} = 1$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} x^2 \left( \frac{B}{A} \cos^2 \theta + \frac{A}{B} \sin^2 \theta \right) + 2 xx' \cos \theta \sin \theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \\ + x'^2 \left( \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta \right) = A \cdot B = \epsilon. \end{aligned} \quad (2)$$

En comparant (2) avec (1) on en déduit que

$$\gamma = \frac{B}{A} \cos^2 \theta + \frac{A}{B} \sin^2 \theta = \beta_0 \cos^2 \theta + \gamma_0 \sin^2 \theta$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) = \frac{1}{2} \sin^2 \theta (\gamma_0 - \beta_0)$$

$$\beta = \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta = \gamma_0 \cos^2 \theta + \beta_0 \sin^2 \theta.$$

Si l'on se réfère à la Réf. <sup>5)</sup> on voit que selon l'hypothèse de l'approximation linéaire lorsqu'il y a un changement de l'émittance dans l'accélérateur, les points du plan de phase appartiennent à des ellipses homothétiques quand le faisceau traverse chaque période du système PS.

Soit  $\sqrt{n}$  le rapport d'homothétie, donc

$$\left. \begin{aligned} A' &= A\sqrt{n} \\ B' &= B\sqrt{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \epsilon' = A'B' = (A\sqrt{n})(B\sqrt{n}) = n\epsilon.$$

Soit  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  les paramètres de Twiss de l'ellipse homothétique:

$$\gamma' x^2 + 2\alpha' xx' + \beta' x'^2 = \epsilon' = n\epsilon. \quad (1.1)$$

L'équation paramétrique de l'ellipse homothétique est:

$$\frac{(x \cos \theta - x' \sin \theta)^2}{nA^2} + \frac{(x \sin \theta + x' \cos \theta)^2}{nB^2} = 1$$

que l'on peut mettre sous la forme suivante:

$$\begin{aligned} x^2 \left( \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta \right) + 2xx' \cos \theta \sin \theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) + \\ + x'^2 \left( \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta \right) = nAB = n\epsilon = \epsilon' \end{aligned} \quad (2.2)$$

d'où en comparant ces deux équations (2.2) avec (1.1) il vient que

$$\alpha' = \frac{1}{2} \sin^2\theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) = \alpha, \quad \gamma' = \frac{B}{A} \cos^2\theta + \frac{A}{B} \sin^2\theta = \gamma,$$

$$\beta' = \frac{A}{B} \cos^2\theta + \frac{B}{A} \sin^2\theta = \beta.$$

Les paramètres de Twiss restent donc invariants quand on passe d'une ellipse à une ellipse homothétique.

## 2) Etapas de calcul communes à l'éjection lente et à l'éjection rapide

Les paramètres de Twiss des ellipses initiales considérées en SD 61 sont les suivantes:

Ejection lente			
Plan horizontal:	$E_H = 0,58$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\alpha_H = 0,144121$
	$E_H = 1,75$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\beta_H = 25,928238 \text{ m}$
	$E_H = 3,5$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\gamma_H = 0,03969 \text{ m}^{-1}$
	$E_H = 7$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	
Plan vertical:	$E_V = 0,5$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\alpha_V = -0,211313$
	$E_V = 1,505$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\beta_V = 10,659827 \text{ m}$
	$E_V = 3,01$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\gamma_V = 0,098 \text{ m}^{-1}$
	$E_V = 6,02$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	
Ejection rapide			
Plan horizontal:	$E_H = 0,58$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\alpha_H = 0,144121$
	$E_H = 1,75$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\beta_H = 25,928238 \text{ m}$
	$E_H = 3,5$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\gamma_H = 0,03969 \text{ m}^{-1}$
	$E_H = 7$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	
Plan vertical:	$E_V = 0,29$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\alpha_V = -0,211313$
	$E_V = 0,875$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\beta_V = 10,659827 \text{ m}$
	$E_V = 1,75$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$\gamma_V = 0,098 \text{ m}^{-1}$
	$E_V = 3,5$	$\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	

a) En SD 61

La présence du 1<sup>er</sup> septum entraîne une déflexion de 0,00420 rad dans le plan horizontal.

Les coordonnées de la trajectoire centrale données par TRAJ<sup>2)</sup> sont:

$$Y_T = 0,08428 \text{ m}$$

$$A_T = 0,00587 \text{ rad.}$$

Les coordonnées des 24 points du polygone horizontal ont été obtenues par SATURN<sup>3)</sup> pour les différentes valeurs de  $E_H$ ; à ces 24 points il a été ajouté en A la valeur de 0,00587 rad (déflexion due au septum, plus une translation due au fait que l'axe du faisceau n'est pas (0,0) comme supposé dans SATURN); il a été ajouté à Y la valeur de 0,08428 m (translation due à l'axe du faisceau).

b) En SD 62

La présence du 2<sup>ème</sup> septum entraîne une déflexion de 0,01064 rad.

La trajectoire des 24 points extrêmes et la trajectoire centrale ont été obtenues grâce à TRAJ, il a été ajouté à A la valeur de 0,01064 rad (déflexion produite sur le faisceau au niveau du septum).

4. Gonflement des émittances verticales en SD 64

Le point considéré (TV2) se trouve à la sortie du champ de fuite du PS.

1) Ejection lente

Le principe du calcul du gonflement de l'émittance verticale est expliqué au paragr. 2-3 (pages 6 et 7) de la référence (1).

Au point d'observation  $S_T = 0,32$  m les trajectoires extrêmes sont:

$E_H = 7 \pi$ mm·mrad $E_V = 6,02 \pi$ mm·mrad	$E_H = 1,75 \pi$ mm·mrad $E_V = 1,505 \pi$ mm·mrad	$E_H = 0,58 \pi$ mm·mrad $E_V = 0,5 \pi$ mm·mrad
$Y_{\max} = 0,69804$ m (trajectoire no. 21)	$Y_{\max} = 0,6632$ m (trajectoire no. 21)	$Y_{\max} = 0,64939$ m (trajectoire no. 21)
$Y_{\min} = 0,56826$ m (trajectoire no. 24)	$Y_{\min} = 0,60007$ m (trajectoire no. 24)	$Y_{\min} = 0,61282$ m (trajectoire no. 24)

Les paramètres de Twiss correspondant à ces trajectoires extrêmes sont:

Emittances	Trajectoire no. 24	Trajectoire no. 21
$E_H = 7 \pi$ mm·mrad $E_V = 6,02 \pi$ mm·mrad	$\beta_V = 52,222670$ m $\alpha_V = -9,330895$ $\gamma_V = 1,686345 \text{ m}^{-1}$	$\beta_V = 26,277856$ m $\alpha_V = -5,092298$ $\gamma_V = 1,024876 \text{ m}^{-1}$
$E_H = 3,5 \pi$ mm·mrad $E_V = 3,01 \pi$ mm·mrad	$\beta_V = 58,87020$ m $\alpha_V = -11,302702$ $\gamma_V = 2,18703 \text{ m}^{-1}$	$\beta_V = 32,207026$ m $\alpha_V = -6,310291$ $\gamma_V = 1,267417 \text{ m}^{-1}$
$E_H = 1,75 \pi$ mm·mrad $E_V = 1,505 \pi$ mm·mrad	$\beta_V = 49,495772$ m $\alpha_V = -9,205180$ $\gamma_V = 1,732177 \text{ m}^{-1}$	$\beta_V = 33,503786$ m $\alpha_V = -6,457931$ $\gamma_V = 1,274627 \text{ m}^{-1}$
$E_H = 0,58 \pi$ mm·mrad $E_V = 0,5 \pi$ mm·mrad	$\beta_V = 46,440273$ $\alpha_V = -8,720301$ $\gamma_V = 1,658984 \text{ m}^{-1}$	$\beta_V = 36,902691$ m $\alpha_V = -7,087758$ $\gamma_V = 1,388418 \text{ m}^{-1}$

Ces paramètres ont permis d'évaluer le gonflement de l'émittance verticale au passage du champ de fuite du PS, de deux façons différentes:

a) A l'aide de l'ellipse circonscrite

i) D'après le formulaire MPS-SI/Int. DL/68-3<sup>4)</sup> le gonflement "g" est:

$$g = (D + \sqrt{D^2 - 1})^{\frac{1}{2}} .$$

ii) avec  $D = \frac{1}{2}(\beta_M \gamma_m + \gamma_M \beta_m - 2\alpha_m \alpha_M)$

$\gamma_m$ paramètres de Twiss de l'ellipse associée à Y minimum $\beta_m$ $\alpha_m$ (traj. no. 24)	$\gamma_M$ paramètres de Twiss de l'ellipse associée à Y maximum $\beta_M$ $\alpha_M$ (traj. no. 21)
--	--

b) A l'aide du polygone circonscrit

C'est une méthode graphique dont le but est de connaître le mieux possible la surface occupée par le balayage des deux ellipses extrêmes.

c) Résultats

Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 1 ci-dessous et sur la figure 1.

TABLEAU 1

$E_H = 7 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_H = 3,5 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_H = 1,75 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_H = 0,58 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$
$E_V = 6,02 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_V = 3,01 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_V = 1,505 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_V = 0,5 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$
$g(\text{ellipse}) = 1,54$	$g(\text{ellipse}) = 1,365$	$g(\text{ellipse}) = 1,27$	$g(\text{ellipse}) = 1,16$
$g(\text{graphique}) = 1,35$	$g(\text{graphique}) = 1,25$	$g(\text{graphique}) = 1,22$	$g(\text{graphique}) = 1,13$



2) Conséquence pour les émittances d'une éjection rapide

Le calcul des paramètres de Twiss,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , des deux ellipses verticales extrêmes en SD 64 à  $S_T = 0,32$  m est obtenu par la matrice de transfert donnée par TRAJ pour les deux trajectoires horizontales.

Ces paramètres correspondant aux différentes valeurs de  $E_H$  restent inchangés puisqu'il n'y a pas de changement dans le plan horizontal.

Le gonflement de l'ellipse circonscrite à  $E_V = E_H/2$  est  $g = (D + \sqrt{D^2-1})^{\frac{1}{2}}$  (voir ii). Ce gonflement est donc celui de  $E_V = E_H/1,16$  pour la valeur de  $E_H$  correspondante.

Le "g" graphique est de nouveau déterminé à partir du polygone circonscrit; les formes des ellipses sont modifiées car pour les mêmes paramètres de Twiss la valeur de l'émittance (donc de la surface de l'ellipse) est différente.

TABLEAU 2

$E_H = 7 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ $E_V = 3,5 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_H = 3,5 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ $E_V = 1,75 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_H = 1,75 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ $E_V = 0,875 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$	$E_H = 0,58 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ $E_V = 0,29 \quad \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$
g(ellipse) = 1,54	g(ellipse) = 1,365	g(ellipse) = 1,27	g(ellipse) = 1,16
g(graphique) = 1,33	g(graphique) = 1,20	g(graphique) = 1,21	g(graphique) = 1,145

5. Conclusions

Les éjections sans "shims" et à petit angle ( $\leq 20$  mrad) du PS impliquent un gonflement des émittances verticales qui est loin d'être négligeable même pour des émittances très faibles ( $g \approx 1,20$  pour  $E_H = 1\pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ ,  $E_V = 0,5 \pi \text{ mm}\cdot\text{mrad}$ ).

Pour chaque cas d'éjection (énergie, intensité éjectée) on pourra décider si cette augmentation d'émission est acceptable ou non.

Je remercie M. D.J. Simon et Mme D. Dumollard pour l'aide qu'ils m'ont apportée au cours de ce travail.

#### Références

- 1) D. Dumollard et D.J. Simon, Trajectoires et optique du faisceau SE 62 dans le champ de fuite du PS (de SD 61 à SD 64), PS/MU/EP/NOTE 78-3, 18.4.1978.
- 2) R. Keyser, Particle trajectories in the CPS magnetic field computed by a Fortran program (program TRAJ, W 104), DD/CO/63-2, October 1963
- 3) L. Hoffmann, Programme SATURN 4: polygon tracking through optical systems with scattering materials.
- 4) C. Bovet, R. Gouiran, I. Gumowski, K.H. Reich, A selection of formulae and data useful for the design of AG synchrotrons, CERN/MPS/-SI/Int. DL/70/4.
- 5) C. Bovet, Optique des faisceaux primaires. Traitement analytique d'une densité non uniforme dans l'espace des phases, Rapport jaune, CERN 66-25, 2.8.1966.

Distribution (ouverte)

Sections MU/EP et MU/BL

B. Allardyce  
K. Bätzner  
M. Chassard  
D. Dumollard  
J.Y. Freeman  
J. Geibel  
G. Granger  
B. Hedin  
W. Heinze  
L. Hoffmann  
D.J. Simon

Division PS

V. Agoritsas	A. Krusche
O. Barbalat	B. Kuiper
R. Bertolotto	P. Lefèvre
D. Bloess	P. Mann
J. Boillot	C. Mazzeline
M. Bouthéon	G.L. Munday
E. Brouzet	J.P. Potier
R. Cappi	K.H. Reich
D. Dekkers	P. Riboni
J.P. Delahaye	J.P. Riunaud
B. Frammery	G. Rosset
C. Germain	Ch. Rufer
P. Germain	V. Schou
R. Gouiran	Ch. Steinbach
J. Gruber	R. Tinguely
L. Henny	H. Umstätter
G. Héritier	

W. Kubischta - EP  
J. Léault - SPS

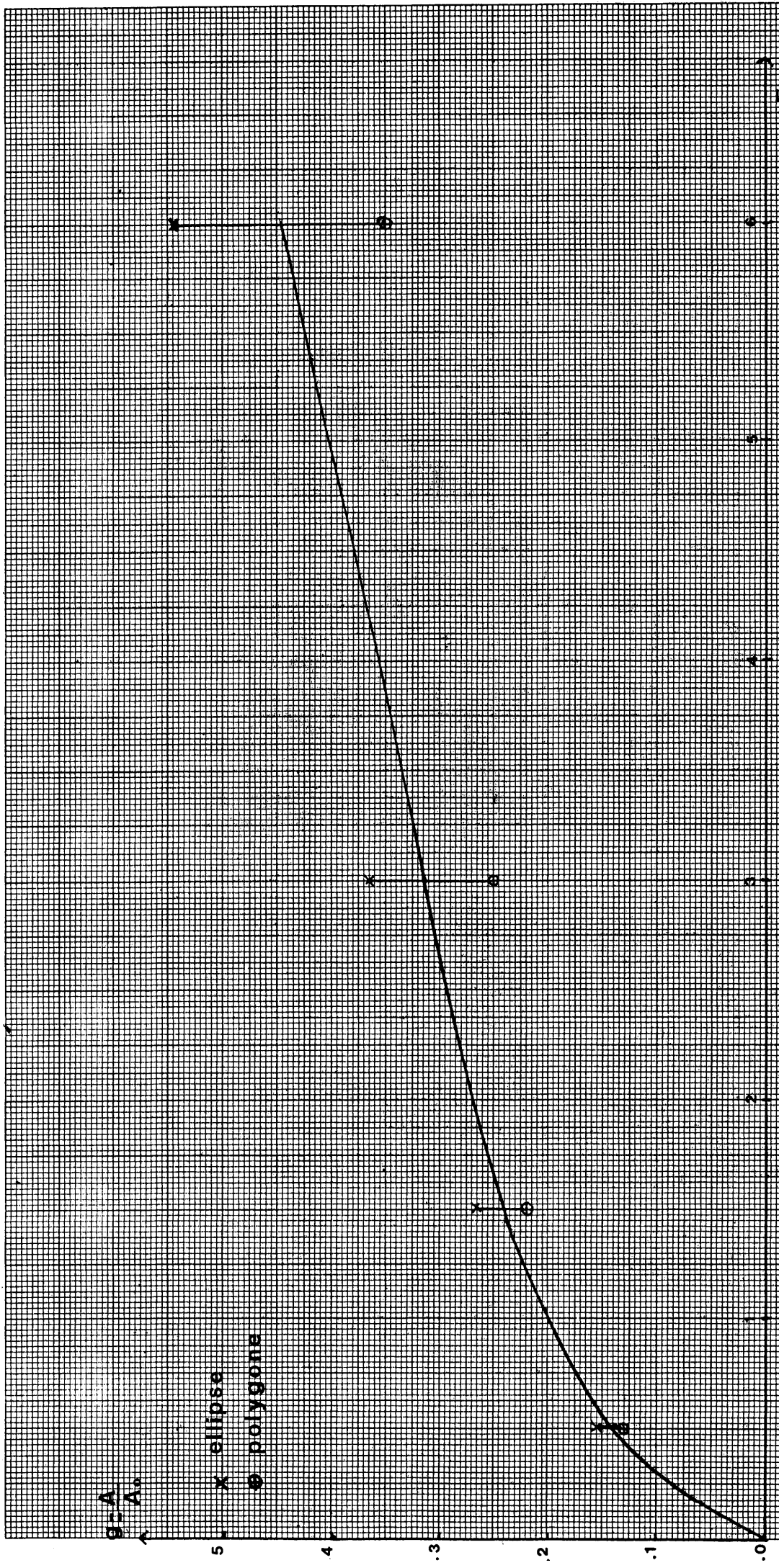


Fig 1 GONFLEMENT DES EMITTANCES VERTICALES EN SD 64

(TV 2; ST: 0.32 m)

EJECTION LENTE ;  $\frac{EH}{EV} = 1.16$

$$\frac{A_0 - A}{A_0}$$

15 x ellipse

o polygone

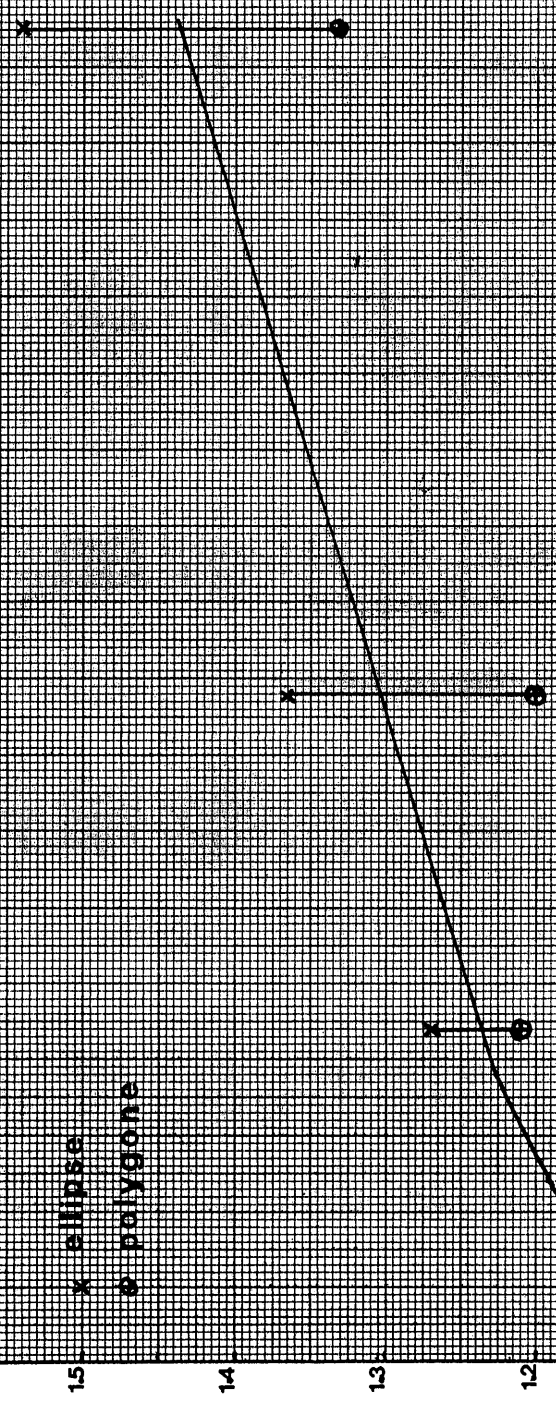


Fig 2 GONFLEMENT DES EMISSIONS VERTICALES EN SD 64

(TV 2 ; ST = 0.32 m)

EJECTION RAPIDE ;  $\frac{EH}{EV} = 2$

E R R A T A

GONFLEMENT DES EMITTANCES DES FAISCEAUX EJECTES

AU PASSAGE DU CHAMP DE FUITE DU PS

F. Schiber \*

Page 3

au lieu de: "En comparant (2) avec (1) on en déduit que

$$\gamma = \frac{B}{A} \cos^2\theta + \frac{A}{B} \sin^2\theta = \beta_0 \cos^2\theta + \gamma_0 \sin^2\theta$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^2\theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) = \frac{1}{2} \sin^2\theta (\gamma_0 - \beta_0)$$

$$\beta = \frac{A}{B} \cos^2\theta + \frac{B}{A} \sin^2\theta = \gamma_0 \cos^2\theta + \beta_0 \sin^2\theta."$$

lire : "En comparant (2) avec (1) on en déduit que

$$\gamma = \frac{B}{A} \cos^2\theta + \frac{A}{B} \sin^2\theta = \gamma_0 \cos^2\theta + \beta_0 \sin^2\theta$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \sin^2\theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) = \frac{1}{2} \sin^2\theta (\beta_0 - \gamma_0)$$

$$\beta = \frac{A}{B} \cos^2\theta + \frac{B}{A} \sin^2\theta = \beta_0 \cos^2\theta + \gamma_0 \sin^2\theta."$$

---

\* Etudiante d'été - Faculté des Sciences d'Orsay (Paris XI)

Plus loin à la dernière équation:

au lieu de:  $x^2 \left( \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta \right) + 2xx' \cos \theta \sin \theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right)$   
 $+ x'^2 \left( \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta \right) = n_{AB} = n_{\epsilon} = \epsilon' "$

lire :  $x^2 \left( \frac{B}{A} \cos^2 \theta + \frac{A}{B} \sin^2 \theta \right) + 2xx' \cos \theta \sin \theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right)$   
 $+ x'^2 \left( \frac{A}{B} \cos^2 \theta + \frac{B}{A} \sin^2 \theta \right) = n_{AB} = n_{\epsilon} = \epsilon' "$

Page 4

au lieu de:  $\alpha' = \frac{1}{2} \sin^2 \theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) = \alpha, "$

lire :  $\alpha' = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left( \frac{A}{B} - \frac{B}{A} \right) = \alpha, "$

Figures 1 et 2

Axe des "E<sub>V</sub>": unité =  $\pi$  mm.mrad