

31 mars 1964

ABERRATIONS DUES AU CHAMP DE FUITEI. Introduction*

Dans le choix des trajectoires devant servir à l'éjection du faisceau interne de protons, le problème s'est posé de comparer les aberrations qu'entraîne la traversée du champ de fuite de l'aimant principal. L'étude de quelques trajectoires particulières a été faite précédemment¹⁾²⁾

Le plan horizontal se distingue immédiatement par le fait qu'on y peut calculer toute trajectoire (au moyen du programme 7090 No 0053³⁾, c'est-à-dire obtenir la transformation du plan de phase point par point.

Dans le plan vertical au contraire, aucune trajectoire ne peut être calculée, seules nous sont fournies les matrices de transformations linéaires V-MATRIX.

"Trajectoires voisines"

Définissons ce que nous appelons "trajectoires voisines".

Tout faisceau s'étend dans le plan H sur 5 - 15 mm pour la faisceau rapide, 10 à 30 mm pour le lent. Afin d'explorer cette bande du champ de fuite, on prendra deux trajectoires // à l'entrée du champ de fuite dites "trajectoires voisines", (elles représentent généralement les bords du faisceau étudié).

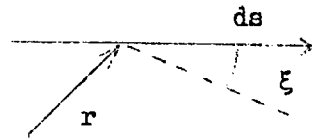
* Disons tout de suite que seules les aberrations résultant de la non-linéarité du champ des aimants du CPS ont été traitées, les aberrations chromatiques étant d'ordre inférieur lorsqu'il s'agit d'éjecter le faisceau interne.

II. Trajectoires à optique linéaire

Dans le plan H

La première approche revient à considérer l'intégrale du gradient le long de chaque trajectoire d'élément ds

$$I = \int_{s_{d1}}^{s_{f1}} \frac{dB(r)}{dr} ds$$



(s_{d1} et s_{f1} déterminent, sur la trajectoire, le début et la fin du champ à traverser).

Si ξ est l'angle que font la trajectoire et l'orbite centrale on écrit

$$ds = \frac{dr}{\text{tg}\xi}$$

en première approximation,* supposons que ξ ne varie pas entre s_{d1} et s_{f1}
On a

$$I_1 \text{tg}\xi = \int_{s_{d1}}^{s_{f1}} dB(r) = B(s_{f1}) - B(s_{d1})$$

pour une "trajectoire voisine", de même ξ on a

$$I_2 = \frac{1}{\text{tg}\xi} [B(s_{f2}) - B(s_{d2})]$$

Connaissant deux "trajectoires voisines", on peut donc se faire une première idée de l'aberration dans le plan H en faisant la différence :

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{\text{tg}\xi} \left[\underbrace{B(s_{f1}) - B(s_{f2})}_{\frac{dB}{dr}(s_f)} - \underbrace{B(s_{d1}) - B(s_{d2})}_{-\frac{dB}{dr}(s_d)} \right] \quad (1)$$

*) Cette approximation qui revient à considérer toute trajectoire comme une spirale dans le plan médian, intérieure ou extérieure au cercle de l'orbite centrale est surtout applicable lorsqu'on éjecte le faisceau interne, et non pour les particules de plus faible impulsion.

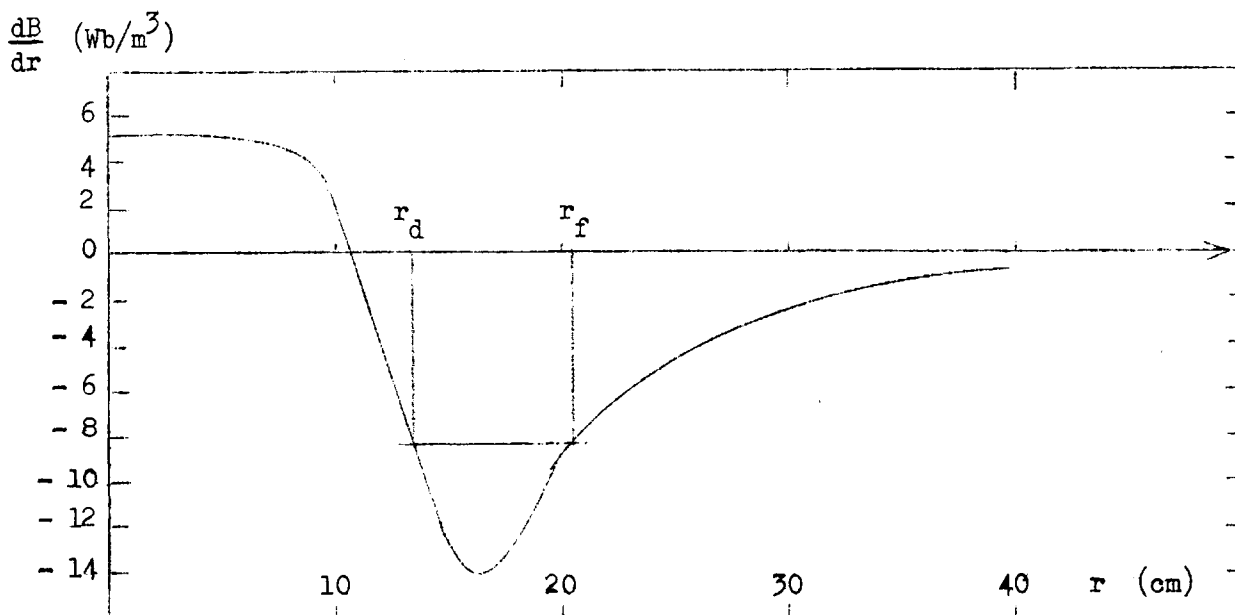


Fig. 1.

Dans le cas d'une demi-unité focalisante (fig. 1), on voit qu'une trajectoire entrant en r_d et sortant en r_f doit avoir une optique linéaire (aux approximations faites).

En pratique cette manière d'analyse se révèle un peu rudimentaire. Elle permet toutefois de comprendre pourquoi certaines trajectoires présentent un minimum d'aberration.

Lorsque la traversée complète du champ de fuite donne un $\Delta I = I_1 - I_2 \neq 0$, on peut se demander si cette fonction ne s'annule pas en un point intermédiaire s_0 .

Ce cas se présente fréquemment et, avec le nouveau programme 709 No 0053, au lieu de calculer $\Delta I(s)$ par intégration graphique il est plus facile de faire imprimer la matrice H à chaque pas d'intégration (5 cm). On compare alors pas après pas les matrices de deux trajectoires voisines et on repère aisément les intersections correspondant à $\Delta I = 0(s_0)$.

Lorsqu'une correction du champ de fuite est envisagée par un shimming partiel, il est indiqué de faire débiter ce shimming au point s_0 .

III. Calcul des aberrations

III.1 Jusqu'ici nous avons simplement trouvé les trajectoires ou parties de trajectoires à optique linéaire, c'est à dire au bout desquelles la matrice de transfert s'identifiait à celle d'une trajectoire voisine.

Lorsque cette condition ne peut être réalisée, on est amené à définir quantitativement l'aberration du faisceau qui dépendra

- 1) de la différence des matrices de transferts attachées à deux trajectoires voisines
- 2) de la forme de l'ellipse d'émittance. (En effet, si on désire comparer des trajectoires provenant de sections droites D et F, il faut tenir compte du fait que l'ellipse d'émittance ne s'y présente pas sous la même forme - voir ⁵⁾).

III.2 Coefficient d'aberration

Si un faisceau de particules occupe une surface S_d dans un plan de phase (H ou V), au début du champ de fuite, et si par suite des aberrations cette surface devient S_f après la traversée, on peut définir le coefficient d'aberration:

$$r = \frac{S_f}{S_d}$$

En pratique dans un calcul d'émittance on utilise souvent des surfaces elliptiques, S_d et S_f seront donc les ellipses minima contenant toutes les particules dans le plan de phase.

III.3 Surfaces d'émittance

Les surfaces d'émittance du faisceau interne du CPS sont des ellipses droites (axes parallèles à ceux du plan de phase), au milieu d'une section droite. Dans une section F, le rapport des axes $\hat{x}/\hat{x}' = 21.7$ m/rad pour l'ellipse horizontale, $\hat{y}/\hat{y}' = 12.0$ m/rad pour l'ellipse verticale. Ces nombres sont échangés dans une section D.

La forme de ces ellipses ne change pas avec l'énergie du faisceau accéléré, mais leur surface ($S = \pi \hat{x} \hat{x}'$) varie théoriquement comme $1/p$ et vaut par exemple pour $p = 10$ GeV/c $S = 4.7 \cdot 10^{-6}$ m rad (calculé d'après⁵⁾).

Les faisceaux éjectés, rapide et lent ont les mêmes émittances que le faisceau interne, sauf l'émittance horizontale du faisceau lent. Celle-ci, en effet, n'est pas une ellipse mais un parallélogramme dont les longs côtés sont plus ou moins courbés selon H.G. Hereward⁴⁾. On notera que la surface de ce parallélogramme, qui dépend de la largeur du faisceau dans l'aimant d'éjection, ne varie pas avec p .

III.4 Transfert du plan de phase

Comme nous l'avons déjà indiqué, un transfert du plan de phase horizontal peut se calculer point par point au moyen de l'ordinateur 7090. Ce procédé, coûteux en temps machine (une dizaine de trajectoires sont nécessaires pour dessiner un polygone transféré) et aussi en calculs et dessins, doit être utilisé lorsqu'on veut connaître avec précision le transfert d'une figure d'émittance le long d'un axe parfaitement déterminé. Mais lorsqu'on en est à l'étude d'un tel axe, des valeurs relatives du coefficient d'aberration r suffiront à orienter un choix.

(Ces valeurs relatives pourront être calculées par la méthode exposée ci-dessous).

Dans le plan vertical, la solution qui va être proposée est la plus exacte qui puisse être tirée des tables de champ existant pour les aimants du CPS. Supposons qu'un faisceau remplit dans le plan de phase V une ellipse de surface S_d . Si la largeur de ce faisceau dans le plan horizontal est telle que les matrices V -MATRIX calculées pour des "trajectoires voisines" sont différentes, alors les ellipses d'émittance V transférées le long de ces deux trajectoires ne se recouvriront pas et la surface d'émittance du faisceau entier en sera forcément augmentée.

Dans leur transfert, les ellipses subissent souvent un étirement prononcé qui rend difficile l'évaluation graphique de l'aberration (voir fig. 2).

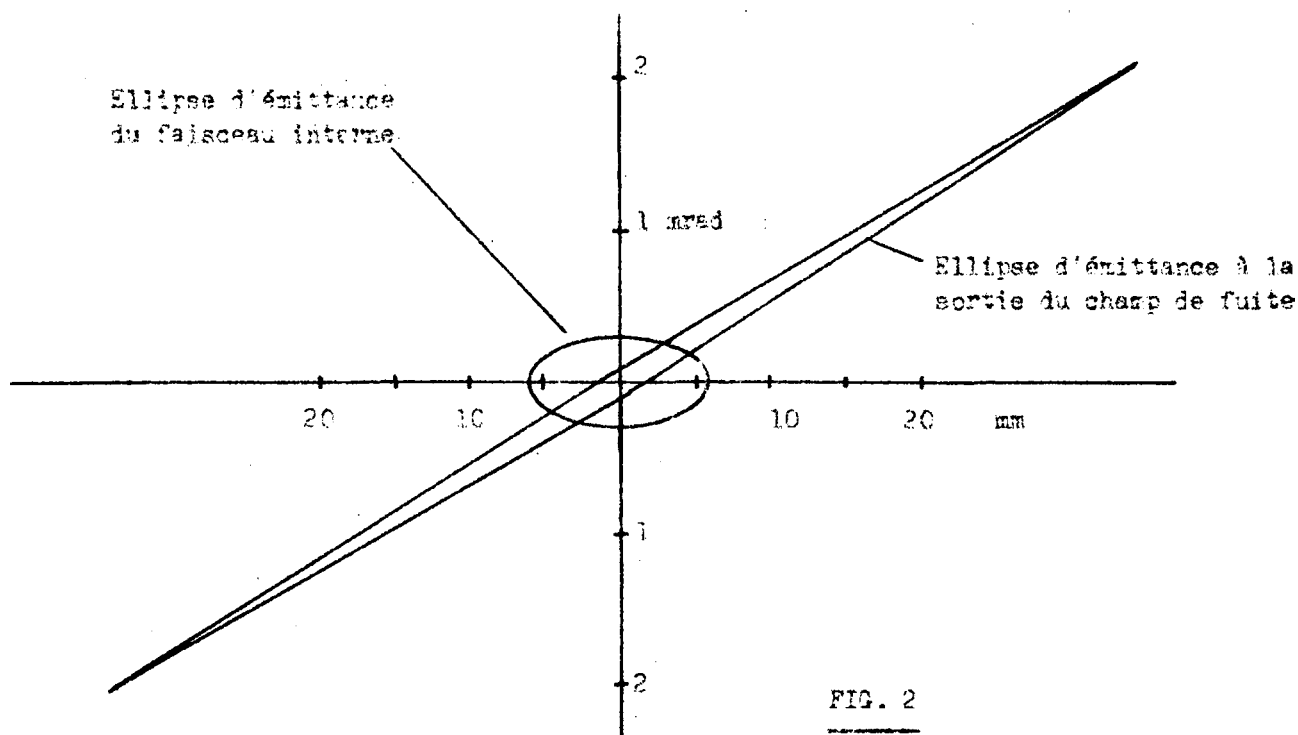


FIG. 2

D'autre part, le dessin d'un grand nombre d'ellipses transférées serait une opération fastidieuse. On se propose donc de calculer la surface augmentée qui résulte de la superposition des ellipses transférées sur les "trajectoires voisines".

III.5 Calcul de l'ellipse minimum contenant deux ellipses transférées

Pour trouver l'ellipse minimum qui contient deux ellipses de même centre, nous allons nous placer dans un plan de phase fictif où l'une d'elles sera un cercle de rayon R . Le grand axe de l'autre fournira immédiatement la valeur du coefficient d'aberration r , défini par la formule (2).

Voir fig. 3 :

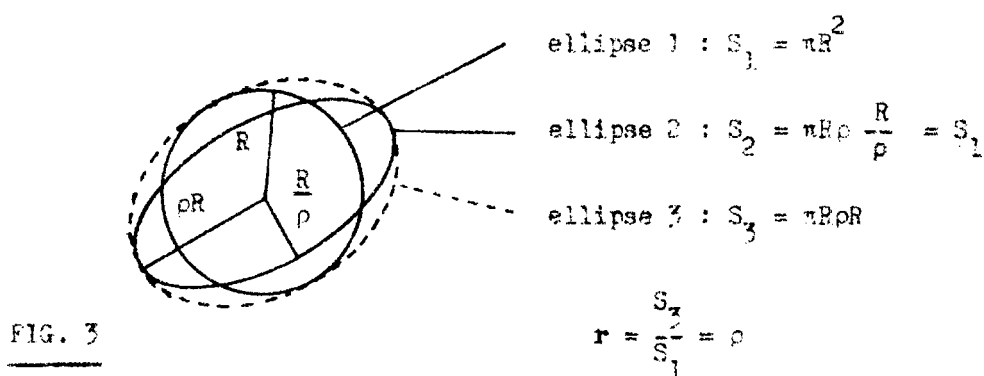


FIG. 3

La transformation U qui amène l'ellipse transférée E_1 sur un cercle peut se calculer ainsi :

Soit T_1 et T_2 les V-MATRIX associées au transfert sur deux "trajectoires voisines", et soit E l'ellipse d'émittance droite du faisceau interne, E_1 et E_2 les ellipses transférées par T_1 et T_2 . Le passage d'un cercle à l'ellipse E se fait au moyen de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad (3)$$

où $a =$ rapport des axes $\frac{y}{y'} = 21.7 \div 12.0 \frac{m}{rad}$ (voir III.3).

Les transformations successives sont alors illustrées à la fig. 4 :

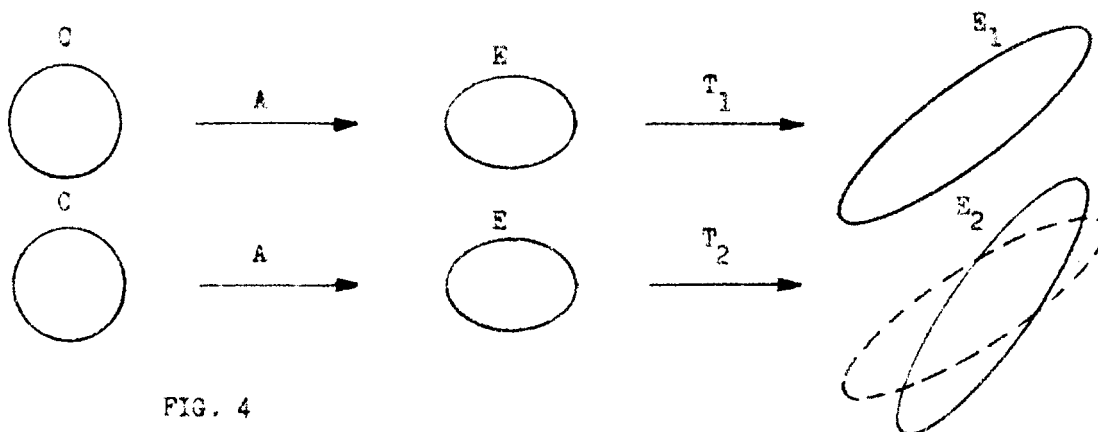


FIG. 4

La matrice qui fait passer de C à E_1 est $T_1 A$, par conséquent, la matrice cherchée vaut $U = (T_1 A)^{-1} = A^{-1} T_1^{-1}$.

L'aberration apparaîtra donc lorsqu'on ramènera E_2 au plan C par la transformation U .

On définira

$$\Delta = U T_2 A = A^{-1} T_1^{-1} T_2 A = \underline{\text{matrice d'aberration.}}$$

Cette matrice représente bien l'aberration : elle dépend de la largeur du faisceau (par le choix des trajectoires voisines), du champ traversé (T_1, T_2) et de l'ellipse d'émittance E dont la forme est donnée par la matrice A .

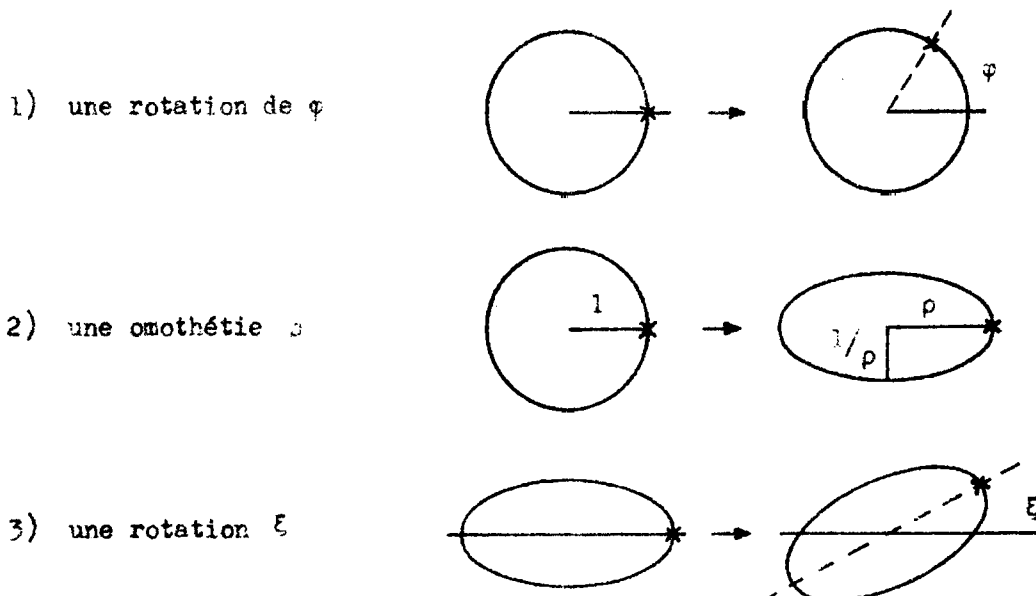
Δ transforme donc un cercle en une ellipse d'axes quelconques, de même centre et même surface (toutes les matrices envisagées sont unitaires).

On peut écrire

$$\Delta = \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \quad (4)$$

où trois coefficients sont indépendants.

Une telle transformation peut en toute généralité être représentée par le produit de trois transformations :



$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \xi & \sin \xi \\ -\sin \xi & \cos \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & 1/\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Le système à résoudre est alors

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \rho \cos \xi \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \sin \xi \sin \varphi \\ \delta_2 &= \rho \cos \xi \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \sin \xi \cos \varphi \\ \delta_3 &= -\rho \sin \xi \cos \varphi - \frac{1}{\rho} \cos \xi \sin \varphi \\ \delta_4 &= -\rho \sin \xi \sin \varphi + \frac{1}{\rho} \cos \xi \cos \varphi \end{aligned} \quad (5)$$

Substituons à φ et ξ les angles p et q tels que

$$\xi = \frac{p+q}{2}, \quad \varphi = \frac{p-q}{2}$$

Les formules élémentaires d'addition des angles permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} (\cos q + \cos p) - \frac{1}{2\rho} (\cos q - \cos p) &= \delta_1 \\ + \quad -\frac{\rho}{2} (\cos q - \cos p) + \frac{1}{2\rho} (\cos q + \cos p) &= \delta_4 \\ \hline \cos p \left(\rho + \frac{1}{\rho} \right) &= \delta_1 + \delta_4 \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{2} (\sin p - \cos q) + \frac{1}{2\rho} (\sin p + \sin q) &= \delta_2 \\ + \frac{\rho}{2} (\sin p + \sin q) + \frac{1}{2\rho} (\sin p - \sin q) &= -\delta_3 \\ \hline \sin p \cdot \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) &= \delta_2 - \delta_3 \end{aligned}$$

On a donc

$$(\delta_1 + \delta_4)^2 + (\delta_2 - \delta_3)^2 = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)^2$$

et comme $\delta_1 \delta_4 - \delta_2 \delta_3 = 1$, en écrivant $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = \Sigma$, on a

$$\rho^4 - \Sigma \rho^2 + 1 = 0$$

soit

$$2\rho^2 = \Sigma \pm \sqrt{\Sigma^2 - 4}$$

Le signe + donne la solution pour ρ tandis que le signe - la fournit pour $\frac{1}{\rho}$

On peut aussi écrire

$$2\rho = \sqrt{\Sigma + 2} + \sqrt{\Sigma - 2}$$

et comme le coefficient d'aberration $r = \rho$, on a

$$r = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + 2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_x^2 - 2} \right) \quad (6)$$

L'angle φ ne présente aucun intérêt. Par contre, l'angle ξ est parfois utile. On peut le calculer en revenant au système (5); on a

$$\delta_4 - \rho^2 \delta_1 = \cos \xi \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho} - \rho^3 \right)$$

$$\delta_2 + \rho^2 \delta_3 = \sin \xi \cos \varphi \left(\frac{1}{\rho} - \rho^3 \right)$$

En divisant membre à membre, et en mettant r pour ρ , on a

$$\boxed{\operatorname{tg} \xi = \frac{\delta_2 + r^2 \delta_3}{\delta_4 - r^2 \delta_1}} \quad (7)$$

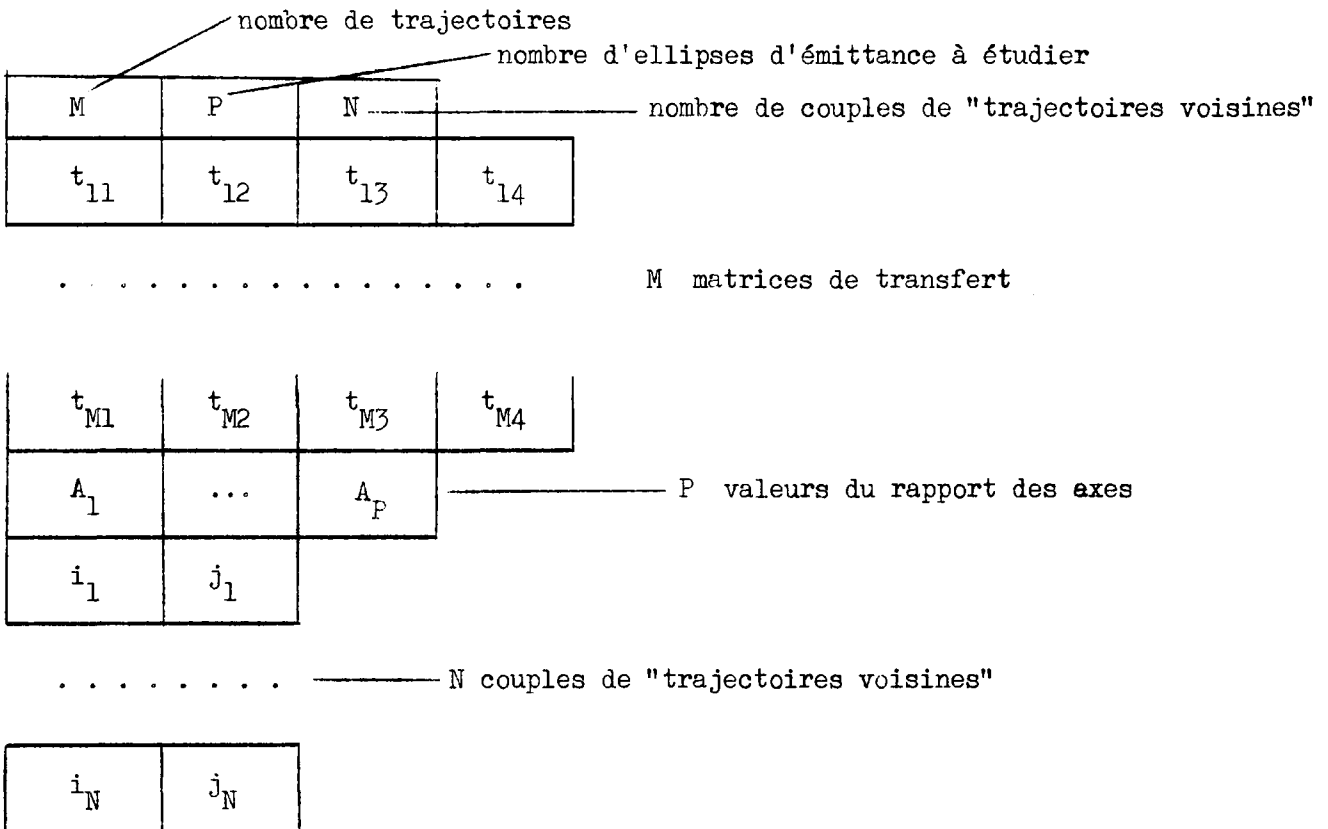
Enfin, on peut calculer également la surface commune aux deux ellipses E_1 et E_2 . Cette surface S permettrait d'estimer la fraction des particules perdues si l'acceptance d'un système de transport ne pouvait être augmentée.

$$\boxed{S = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{r} \right)} \quad (8)$$

Un programme autocode calcule ces différents paramètres en fonction des matrices A , T_1 , T_2 .

IV. Programme 1749 P4

Dans la recherche d'une aberration minimum, on utilisera généralement plusieurs "trajectoires voisines". Le programme permet d'en introduire M à la fois, de calculer les paramètres requis pour N combinaisons de ces M trajectoires qui seront appelées par les numéros i et j de leur ordre d'inscription. Enfin, différentes formes de l'ellipse d'émittance peuvent être introduites dans le même calcul par les P valeurs de A (voir formule 3). On a le schéma d'introduction des données suivant :



Les valeurs des nombres M, P, N sont limitées comme suit :

$$M \leq 10, P \leq 10, N \leq 20.$$

Remarque

Comme suite de couples (i,j) on choisira par exemple $(1,2)$, $(2,3)$, $(3,4)$ $(4,5)$ etc., mais $(1,3)$ et $(3,5)$ peuvent aussi être intéressants pour un faisceau plus large, car il n'y a pas de loi simple qui permette de déduire par exemple $r(1,3)$ si on connaît $r(1,2)$ et $r(2,3)$.

Le schéma de sortie des résultats est celui ci :

t_{i1}	t_{i2}	t_{i3}	t_{i4}	
t_{j1}	t_{j2}	t_{j3}	t_{j4}	
δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	
A	n	r	S	ξ

Pour chaque cas, les deux matrices de transfert sont écrites, suivies de la matrice d'aberration. Les autres paramètres sont connus sauf n qui indique la norme de correction utilisée pour rendre Δ unitaire.

Remarque

n sert à dépister les erreurs de données, car les matrices V-MATRIX du programme 0053 sont bien normées. Si donc $(n - 1) > 10/0$ c'est qu'il y a une erreur quelque part.

L'angle ξ est mesuré en radians.

Le temps de calcul est d'environ 1 minute pour 10 paires de matrices.

Exemple d'utilisation du programme 1749 P4

Si l'on se propose, par exemple, d'éjecter le faisceau interne sous 18 mrad à partir d'une section D courte (58), on cherchera quelle est la position optimum de l'aimant d'éjection (distance à l'orbite fermée), du point de vue des aberrations.

Pour une telle trajectoire, un blindage magnétique peut être placé le long de l'unité d'aimant 59. Le champ de fuite à considérer s'étend donc entre les sections droites 58 et 59. Le long de deux trajectoires partant du milieu de S-S 58 à 58 mm et 63 mm de l'orbite, et se terminant au milieu de S-S 59, on obtient les matrices V-MATRIX suivantes :

y	tan A			
0.058	0.018	VERTICAL MATRIX	0.09 867	3.13414
			- 0.32 906	- 0.31740
0.063	0.018	VERTICAL MATRIX	0.07 500	3.06431
			- 0.33 410	- 0.31731

Introduites dans le programme 1749 P4 ces matrices donnent les résultats suivants :

$$r = 1.0966 \quad S = 0.9414 \quad \xi = -2.4379$$

Etendu à une dizaine de trajectoires, ce calcul fournit les valeurs de la fig. 5.

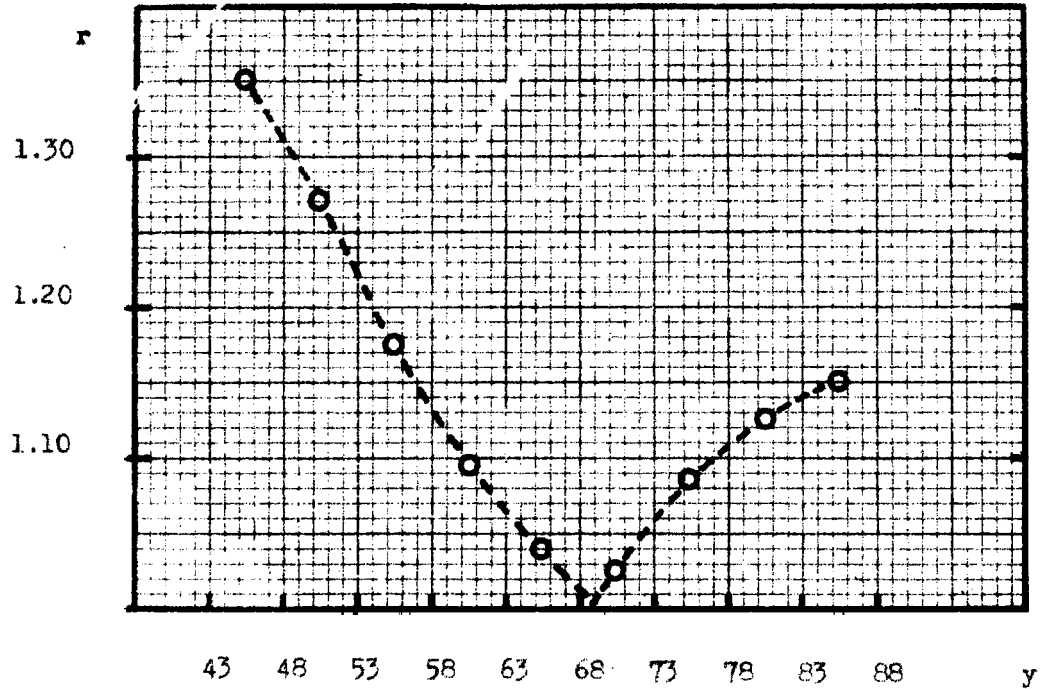


FIG. 5

Distance à l'orbite (entrée du septum)

Remerciements

Je tiens à remercier spécialement M. K.H. Reich qui m'a proposé le sujet de cette étude et qui en plus a contribué à en éclairer l'exposé. Ma gratitude va également à M. H.G. Hereward dont la contribution m'a été apportée par plusieurs discussions et un manuscrit concernant l'émittance du faisceau interne.

C.A. Bovet

Distribution : Personnel scientifique de la division MPS

Références

- 1) G. Auberson et K.H. Reich : Etude préliminaire du faisceau éjecté lent.
MPS/Int. DL 62-25
- 2) K.H. Reich - Ejection from Various Types and CPS Straight Sections
MPS/Int. DL 63-8
- 3) R. Keyser - Particle Trajectories in the C.P.S. Magnetic Field
computed by a Fortran Program. DD/CO/63/2
- 4) H.G. Hereward - The Possibility of Resonant Extraction from the C.P.S.
AR/Int. GS/61-5
- 5) C.P.S. User's Handbook D1.