

VARIATION DES PARAMETRES DE L'EJECTION LENTE

	<u>Page</u>
Introduction	
<u>1. Modèle simple à 1 lentille non linéaire</u>	
1.1. Solution géométrique	4
1.2. Solution algébrique	5
1.3. Séparatrice convergente (points fixes, propriétés du point stable, surface stable)	8
1.4. Séparatrice divergente (sauts $Dx(\Delta r)$, courbure $(\Delta \theta)$ en fonction de la position θ_0 du sextupôle).	9
<u>2. Systèmes à 6 sextupôles (calcul par ordinateur)</u>	
2.1. Position asymptotique eas pour différentes valeurs k_1 et k_2	13
2.2. Position x_{00} du point double (région stable $\rightarrow 0$) en fonction de k_1 et k_2 .	14
2.3. Surface de la région stable en fonction de $\Delta e = e - eas$	14
2.4. Dimensions des sauts Dx	15
2.5. Densité des particules sur la séparatrice divergente	16
2.6. Courbure de la séparatrice divergente	16
<u>3. Un choix pour les éjections EST</u>	
3.1. Ejection de s.d.58	17
3.2. Ejection de s.d.62 (1ère étape)	20
<u>4. Ejection lente à rendement élevé</u>	22
4.1. Optimum du rendement	22
4.2. Amélioration de l'optique par un quadrupôle à septum	24
4.3. Lentille octupolaire pour la correction des distorsions	24
4.4. Ejection de la s.d.62 (2ème étape)	25
Appendice I (Système à un sextupôle)	28
Appendice II (Effet d'une perturbation + un quadrupôle)	31
Appendice III(A. Voisinage des points fixes, B. Adiabaticité)	34

Introduction

Le principe de l'éjection lente par résonance non linéaire de la 6ème harmonique dans le CPS a été décrit par H.G. Hereward ¹⁾ avec application à l'éjection de la section droite 1. Les mesures sur l'éjection lente au Sud ⁸⁾ ont confirmé ces prévisions théoriques.

En vue de l'installation des éjections lentes de sd 58 et de sd 62 pour le hall Est, il a été nécessaire d'effectuer un certain nombre de calculs pour pouvoir choisir des solutions convenables, assurant à la fois le rendement et les qualités optiques du faisceau et tenant compte des restrictions apportées par les dimensions de la chambre à vide, les puissances maxima des différents aimants utilisés, etc. . .

Dans un premier chapitre, quelques développements sur un modèle simple (à 1 sextupole) permettent de se faire une idée claire de l'influence de différents paramètres.

On examine également l'influence de la position du sextupole dans la machine sur les propriétés du faisceau éjecté.

Ces études s'étendent, au chapitre 2, au cas pratique (pour les éjections Est) où 6 sextupoles sont utilisés. Les calculs sont alors faits sur l'ordinateur au moyen des programmes décrits dans la référence 4).

Les solutions adoptées pour les éjections 58 et 62 sont exposées au chapitre 3 qui contient en outre un calcul adiabatique de l'optique dans le plan vertical.

Enfin, le chapitre 4 propose une amélioration des systèmes d'éjection prévus qui tend à diminuer les pertes dans le rapport 10 à 1 au moyen d'un nouvel aimant à septum très mince. Cette amélioration est examinée en détail et constitue la "deuxième étape" de l'éjection 62.

Le croquis de la figure 1 rappelle les différentes caractéristiques d'une éjection par résonance telles qu'elles apparaissent dans le plan de phase du point d'éjection, comme il ressort des graphiques de la référence 1).

Rappel concernant la méthode de calcul.

Les calculs qui vont suivre utilisent le modèle du CPS décrit dans la référence 4, p. 4, 5, 6.

Le plan de phase normalisé se rapportant à des sections paires a donc pour unités $[x] = 1 \text{ mm}$, $[p] = \frac{1}{12.0} \text{ mrad}$.

Les lentilles "minces" utilisées d'ordre n sont données par leur force k_n , en unités normalisées, telle qu'on a au passage d'une lentille

$$p_{\text{après}} = p_{\text{avant}} + k_n x^n$$

(k_0 : dipôle, k_1 : quadrupôle, k_2 : sextupôle . . . etc.)

La position du faisceau non perturbé correspond au paramètre défini dans la référence 1, p.2 :

$$e = \frac{E - E_0}{E_0} R_0 \alpha_D$$

où α_F est remplacé par α_D

1. Modèle simple

On sait que l'éjection lente du CPS telle qu'elle est envisagée nécessite un quadrupôle pour abaisser le Q horizontal de 6,25 à 6 et au moins une lentille non linéaire (sextupolaire).

Différents modèles se prêtent à des calculs analytiques simples ou à des solutions géométriques élégantes.

Le modèle qui consiste à placer les deux lentilles quadrupolaire et sextupolaire dans la même section droite est utilisé dans la référence 1.

Nous développons ici le cas où les lentilles sont diamétralement opposées dans la machine, ce qui est plus proche du cas pratique.

1.1. Solution géométrique

L'image la plus claire qu'on puisse se faire de l'influence d'un certain nombre de paramètres (Q_0, k_1, k_2, e) sur la position des points fixes et par conséquent de la région stable vient du cas simple suivant ^{*} (fig.2).

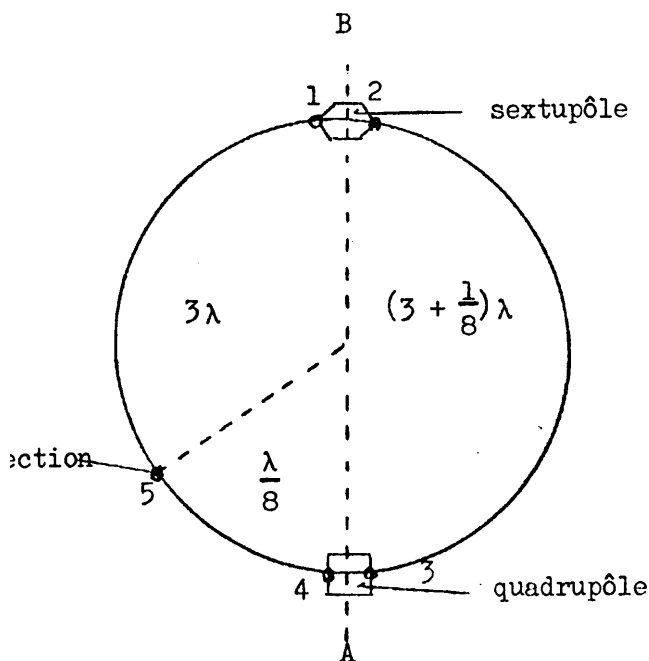


Fig. 2

On suppose pour des raisons de symétrie que les points fixes appartiennent à la droite $p = 0$ des plans de phase en A (centre du quadrupôle) et en B (centre du sextupôle). Transformée de A à 5 et de B à 5, cette droite donne respectivement une ligne droite et une parabole, dont les intersections (s'il y en a) sont les points fixes. De B à 5 on a tout d'abord la traversée à l'envers d'un demi sextupôle (force $-\frac{k_2}{2}$), puis trois rotations complètes, autour du point e (centre du faisceau dans le plan de phase) (fig. 3a).

De A à 5 on traverse un demi quadrupôle (ligne a), puis on tourne de $\frac{2\pi}{8}$ autour du point e (fig. 3b).

En superposant les figures 3a et 3b, on obtient les intersections F1 et F2 notées sur la fig. 3a.

Ce diagramme est intéressant parce qu'il permet de se faire rapidement une idée de ce qui se passe

- a) lorsque le quadrupôle n'est pas "normal" ("normal" signifie qu'il ramène Q_0 à 6 avec

$$k_1 = 2 \operatorname{tg} \left(\frac{Q_0 - 6}{2} \cdot 2\pi \right) \quad)$$

- b) lorsque la force du sextupôle k_2 varie,
c) lorsque la position e du faisceau change.

(Voir les fig. 4 correspondantes, où $Q_0 = 6.25$).

1.2. Solution algébrique

Un calcul algébrique rigoureux peut être fait dans le cas du modèle simple traité sous 1.1, de même que dans certains autres cas intéressants, en supposant $Q_0 = 6.25$.

On considère le plan de phase (x.p) au point 5 (fig. 2), et on le transforme successivement par une rotation autour de e pour l'amener au point 1, par la transformation quadratique du sextupôle pour l'amener en 2, etc.

*) Cette méthode est due à H.G. Hereward.

On obtient finalement

$$\begin{aligned}x_5 &= f_1(x, p) \\ p_5 &= f_2(x, p) \quad (\text{voir Appendice I})\end{aligned}$$

Cette transformation correspond à une révolution dans la machine perturbée.

S'il y a des points fixes, ils seront donnés par la solution du système :

$$\begin{cases} x_0 = f_1(x_0, p_0) \\ p_0 = f_2(x_0, p_0) \end{cases}$$

On trouve : (voir Appendice I, formules (I.2))

$$\begin{aligned}x_0 &= \frac{1}{k_2} \left\{ -K \pm \sqrt{K^2 - 2k_2 C e} \right\} \\ p_0 &= \frac{1}{k_2} \left\{ k_2 C e - K^2 \pm K \sqrt{K^2 - 2k_2 C e} \right\}\end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{avec } K = \frac{k_1 - 2}{k_1 + 2}, \quad C = \frac{2 + k_1(\sqrt{2} - 1)}{k_1 + 2}$$

On peut chercher ce que devient le lieu des points fixes (x_0, p_0) donné par (1), (plan de phase au point 5) lorsqu'on passe aux plans de phase en A et B (fig.2).

Allons tout d'abord au point B. De 5 à 1 la transformation est une identité (3λ). De 1 à B on a un demi sextupôle, soit:

$$x_B = x_0$$

$$p_B = p_0 + \frac{k_2}{2} x_0^2 = 0$$

Remplaçons dans cette dernière équation x_0 et p_0 par leurs valeurs issues de (1), on voit que $p_B = 0$. Tous les points fixes sont sur la droite Ox du plan de phase en B.

Pour passer du point 5 au point A on utilisera la transformation:

$$\begin{pmatrix} x_A \\ p_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} & 0 \\ -\frac{k_1}{2} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & (\sqrt{2}-1) \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ p_0 \\ e \end{pmatrix} \quad (\text{Voir Appendice I})$$

Quelques manipulations montrent que $p_A = 0$, tous les points fixes sont donc également sur la droite O_x du plan de phase en A. Nous avons donc démontré l'hypothèse faite à la page 5.

Point double et position asymptotique eas.

On voit à la fig. 4c qu'il existe une position $e = eas$ telle que les points fixes se réunissent en un point double. La surface stable tend alors vers zéro, ce point correspond à la fin de l'éjection lente.

Algébriquement le point double correspond à la valeur nulle des racines dans (1). Il vient

$$\left. \begin{aligned} x_{00} &= -\frac{1}{k_2} K \\ p_{00} &= \frac{1}{k_2} (k_2^C e - K^2) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Enfin la nullité de ces racines définit la valeur de eas :

$$eas = \frac{K^2}{2 k_2 C} \quad (4)$$

Lorsque la quadrupôle est "normal", $k_1 = 2$, on a $K = 0$ et $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$
Les équations (1) deviennent

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \pm \sqrt{-\frac{2}{k_2} \cdot \frac{e}{\sqrt{2}}} \\ p_0 &= \frac{e}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Elles correspondent aux cas illustrés par les figures 4b, 4c.

Avec $k_1 = 2$ on a aussi

$$eas = 0 \quad (4)'$$

et par conséquent

$$\left. \begin{aligned} x_{00} &= 0 \\ p_{00} &= \frac{eas}{\sqrt{2}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)'$$

1.3. Séparatrice convergente

La région stable du plan de phase a une forme de baleine dont les points fixes occuperaient la position de l'oeil et de la queue (voir fig.1). Au cours des révolutions successives le mouvement des points du plan de phase peut se décrire par des courbes fermées, à l'intérieur de la région stable, et des courbes divergentes, à l'extérieur de cette région.

Le calcul de l'Appendice I de même que les méthodes numériques ^{*}) fournissent les matrices de circulation autour des points fixes. De ces matrices on tire d'une part la forme et l'orientation de l'ellipse infinitésimale, d'autre part les pentes des séparatrices qui se coupent au point instable. Ces paramètres, calculés dans l'Appendice III.A sont également fournis par les calculs numériques ^{**}). La surface exacte de la région stable n'est pas facile à calculer. On l'approche par un polygone dans les calculs numériques. Mais c'est un paramètre important car cette surface doit être plus grande que l'émittance du faisceau pour que celui-ci se conserve, et elle est égale à l'émittance du faisceau au début de l'éjection, tendant vers zéro à la fin.

La position de la région stable est liée à celle des points fixes, sa dimension dépend de la distance de ceux-ci. On peut donc dire (voir fig. 4a, b, c)

- 1) Lorsqu'on diminue la force k_1 du quadrupole la région stable se déplace à l'extérieur ^{**}), et réciproquement.
- 2) Lorsqu'on augmente la force des sextupôles on diminue la surface stable.
- 3) Lorsqu'on déplace le faisceau vers l'extérieur ($e \rightarrow e_{as}$) on diminue la surface stable.

1.4. Séparatrice divergente.

Sur la séparatrice divergente les particules progressent par sauts correspondant à chaque révolution dans la machine.

Un saut dans le plan de phase (x, p) peut être caractérisé par les quantités Δr et $\Delta \theta$ (coordonnées polaires).

Pour la machine non perturbée, avec $Q_0 = 6.25$ on a
 $\Delta r = 0$ et $\Delta \theta = \frac{\pi}{2}$ (voir fig.5).

^{*}) Voir référence 4.

^{**}) Ce déplacement est vers l'extérieur dans la section d'éjection, vers l'intérieur dans les sections placées $n + \frac{1}{2}$ longueurs d'onde après. En effet, au cours d'une révolution dans la machine la région stable tourne dans le plan de phase autour du point e (centre du faisceau non perturbé). Il ne faut pas confondre a) machine non perturbée : 1) le déplacement radial moyen produit par une perturbation RF ou le \dot{B} , 2) le déplacement radial local produit par les kickers ou bump coils; b) machine perturbée: le déplacement radial oscillatoire (région stable) ou de résonance (séparatrice divergente) induit par les lentilles d'éjection.

a) Effet d'une perturbation

Qu'on imagine le nombre d'oscillations radiales par tour ramené artificiellement par un procédé continu à $Q = 6$. Au cours d'une révolution dans la machine la particule située au point $(r, \theta = 0)$ effectue 6 rotations dans le plan de phase (supposons $e = 0$), on a $\Delta r = \Delta \theta = 0$; mais si on introduit à l'azimut ^{*}) θ une perturbation $\Delta p = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$ on obtient (voir fig.5)

$$x = r \cos \theta, \quad p = -r \sin \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + p^2}, \quad \theta = -\arctan(p/x), \text{ soit}$$

$$\Delta r = -\sin \theta (k_0 + k_1 r \cos \theta + k_2 r^2 \cos^2 \theta + \dots) \quad (5)$$

$$\Delta \theta = -\frac{1}{r} \cos \theta (k_0 + k_1 r \cos \theta + k_2 r^2 \cos^2 \theta + \dots) \quad (6)$$

Exemple:

Le cas du sextupôle nous intéresse particulièrement, soit:

$$\frac{\Delta r}{k_2 r^2} = -\sin \theta \cos^2 \theta \quad (5)'$$

$$\frac{\Delta \theta}{k_2 r} = -\cos^3 \theta \quad (6)'$$

Selon la position azimutale du sextupôle on observera donc un saut caractérisé par les courbes de la figure 7a.

*). Dans ce qui va suivre on confondra souvent position azimutale sur la machine (qui devrait plus rigoureusement être notée $Q\theta$), et angle θ du plan de phase.

b) ^{*)} Perturbation avec un quadrupôle "normal" et $Q_0 = 6.25$.

En pratique on abaisse le Q jusqu'à 6 au moyen d'un seul quadrupôle dont l'effet (on va le voir) est aussi très important sur les sauts obtenus.

Le plan de phase (x,p) est situé en aval du quadrupôle ($\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\lambda}{8}$) de sorte qu'une particule se trouvant alors au point (4') (fig.6) effectue 6/8 rotations pour se trouver au point (2'), entrée du quadrupôle qui l'amènera au point (3') et la révolution se termine en (4').

Si une perturbation Δp se trouve au point (1'), alors la particule suit le chemin (1), (2), (3), (4) et on observe un saut

$$\Delta r = \Delta p (2 \cos \theta - \sin \theta) \quad (7)$$

$$\Delta \theta = -\Delta p \cos \theta \quad (8)$$

'voir Appendice II, formules (II.1) et (II.2))

$$\text{où } \Delta p = k_0 + k_1 r \cos \theta + k_2 r^2 \cos^2 \theta + \dots\dots\dots$$

On s'intéressera à placer un sextupôle aux différents azimuts θ et on aura les courbes de la figure 2b.

$$\frac{\Delta r}{r^2 k_2} = \cos^2 \theta (2 \cos \theta - \sin \theta) \quad (7)'$$

$$\frac{\Delta \theta}{r k_2} = \cos^3 \theta \quad (8)'$$

*) Les hypothèses faites ici : $Q_0 = 6.25$, $k_1 = 2$, $e = 0$, sont utiles pour obtenir une solution analytique simple. Mais il est clair que les résultats restent qualitativement valables pour toutes les valeurs usuelles de ces paramètres.

En comparant les figures 7a et 7b, on remarque que

- 1) le déphasage $\Delta\theta$ produit est le même dans les deux cas,
- 2) la divergence Δr peut être amplifiée par le quadrupôle jusqu'à un facteur 5 environ,
- 3) on ne peut avoir une divergence importante avec un déphasage nul. Ce fait est en rapport avec la courbure de la séparatrice divergente; on y reviendra en détail plus tard (paragraphe 2.4).

2. Systèmes à 6 sextupôles.

Les sextupôles du CPS ne sont pas assez puissants pour qu'un seul d'entre eux fournisse la perturbation non linéaire désirée. Les sextupôles placés dans les sections paires qui ont plus d'effet sur le plan vertical que sur l'horizontal ne seront pas utilisés (à moins que des difficultés surgissent dans l'optique du plan vertical). Des dix sextupôles placés en section F quatre en général ne seront pas utilisés, soit que leur position se situe dans la zone d'éjection où l'orbite fermée est déplacée par l'effet des enroulements de déformation d'orbite (bump coils), soit qu'ils se trouvent aux noeuds des oscillations de résonance.

Il nous reste donc 6 sextupôles dont on discutera la polarité au paragraphe 2.4.

Dans ces conditions un calcul analytique simple n'est plus possible et on a recours à l'ordinateur.

Deux programmes ^{*)} permettent de répondre rapidement à la plupart des questions. Ces programmes ont été utilisés systématiquement pour trouver un choix de paramètres convenables et pour évaluer l'influence de ces paramètres.

Dans les calculs qui ont été faits à l'ordinateur on a normalisé ^{**)} la machine sur les sections D puisque telle est la section d'éjection (58 ou 62). Les longueurs (en mm) doivent donc être multipliées par 1.35 lorsqu'elles se rapportent à une section F.

*) Voir référence 4)

**) Voir références 2) et 4)

Les forces normalisées k_0, k_1, k_2, k_3 qui interviennent respectivement pour les enroulements de déformation d'orbite (bump coils), le quadrupôle d'éjection, les sextupôles et les octupôles, sont exprimées dans des unités convenables ^{*}) et peuvent atteindre en pratique les valeurs suivantes, (pour $p = 27 \text{ GeV/c}$) :

$$\begin{aligned} |k_0| &< 15.8 \\ |k_1| &< 1.67 \quad (\text{quadrupôle refroidi}) \\ |k_1| &< 2.05 \quad (\text{quadrupôle spécial 61}) \\ |k_2| &< 0.0022 \quad (\text{sextupôles placés en F}) \\ |k_3| &< 0.000075 \quad (\text{octupôles placés en F}) \end{aligned}$$

Les résultats présentés dans ce chapitre proviennent, sauf indication contraire, du système de lentilles pour l'éjection de la section 62, soit: les sextupôles en 85(-), 95(+), 5(-), 25(+), 35(-), 45(+), et le quadrupôle en 61, le plan de phase d'observation étant en 62.

2.1. Position asymptotique eas en fonction de k_1 et k_2 .

Selon la position radiale moyenne du faisceau e , la région stable peut contenir tout le faisceau ou en éjecter une partie. On a vu que la surface stable diminue lorsque e augmente, et s'annule pour $e = eas$.

La figure 8 montre que la position asymptotique est 0 pour $k_1 = 2$ et qu'elle va vers l'extérieur lorsqu'on augmente ou diminue k_1 . Par exemple avec $k_2 = 0.001$ (sextupôles faibles) et $k_1 = 1.7$ on a $eas = 1.3 \text{ mm}$.

Dans les conditions normales d'utilisation des lentilles la position radiale du faisceau qui correspond à la fin de l'éjection est donc positive, mais à quelques mm seulement du centre de la chambre à vide.

Comme $\Delta e = 1 \text{ mm}$ donne une surface stable contenant largement l'émission du faisceau (voir 2.3), on peut dire que dans toutes les conditions

*) Référence 4)

de lentilles centrées (pas de "bump"), le faisceau est stable si la position radiale moyenne vaut $e < -1$ mm.

On verra au chapitre 3 que la déflexion d'orbite produite par les "bump coils" dans la région d'éjection déplace le faisceau dans le quadrupôle. Cela correspond à un système d'éjection où les sextupôles sont centrés et le quadrupôle déplacé radialement. Les valeurs calculées ici pour e ne sont alors plus valables.

2.2. Position x_{00} du point double en fonction de k_1, k_2 .

La position du point doublé vers lequel tend le point instable en fin d'éjection nous intéresse principalement à cause de la fonction de densité de particules $\rho(x)$ qui est étudiée au paragr. 2.5. En effet, à saut Δx égal, la densité $\rho(x)$ (qui caractérise la perte sur le septum) décroît lorsqu'on augmente la distance entre le point instable et le septum. On a donc tout intérêt à conserver le point instable et par conséquent le point double le plus possible à l'intérieur de la machine.

Si l'on commence par étudier les changements qui interviennent dans le plan de phase en fonction de k_1 , on trouve toute une famille de séparatrices divergentes partant des points fixes doubles (fig.9).

Les courbes de la figure 10 par contre permettent d'obtenir x_{00} pour différentes valeurs de k_1 et de k_2 .

2.3. Surface de la région stable

Cette surface varie comme k_1 , Δe et $\frac{1}{k_2}$. (Une expression analytique est donnée dans la référence 1) page 16). La figure 11 donne une idée des valeurs usuelles que prennent ces paramètres.

On notera que l'éjection du faisceau correspond à un déplacement de la position radiale moyenne e de moins de 1 mm. Pour augmenter ce déplacement, ce qui pourrait donner une meilleure stabilité au processus de "spill out", il faudrait avoir des lentilles non linéaires plus puissantes.

2.4. Dimension des sauts Δx

Au cours des oscillations de résonance l'amplitude s'accroît à chaque révolution dans la machine ce qui produit des sauts sur la séparatrice divergente.

Considérons une oscillation bétatronique radiale d'amplitude r décrite par un cercle dans le plan de phase de la figure 12a. Si un sextupôle est placé aux positions azimutales 1, 2, 3 etc. il provoque une perturbation $p = k_2 x^2$ indiquée par les différentes flèches.

Après une rotation de respectivement $\frac{2\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{8}$, $\frac{4\pi}{8}$, etc., ces perturbations arrivent à la position 8 (entrée du audrupôle: voir figure 6) et elles sont dirigées selon les lignes 1, 2, 3, etc. (fig. 12a).

Si on reporte sur ces lignes des segments proportionnels à la quantité Δr de la figure 7b, on obtient une sorte de diagramme polaire indiquant la grandeur du saut Δr que produit une perturbation dont la direction est donnée au point azimutal 8 par les lignes 1, 2, 3, etc.

On définit ainsi une direction au point 8 de la perturbation produisant un Δr maximum.

De façon analogue on peut reporter sur les lignes 1, 2, 3, etc. des segments proportionnels aux quantités $\Delta r/\Delta\theta$ de la figure 7b. On aura le diagramme de la figure 12b qui montre dans quelle direction ce rapport s'accroît et diminue par conséquent la courbure de la séparatrice divergente.

Comme on l'a mentionné précédemment 6 sextupôles F sont utiles à l'éjection. Pour le cas de l'éjection 62 par exemple ils occupent dans le plan de phase ($Q_0 = 6.25$) les positions notées à la figure 13a.

Dans l'approximation où $k_2 r \ll 1$ (qui est en général valable), on peut superposer les effets individuels des 6 sextupôles.

La figure 13b montre le diagramme de composition des perturbations apportées par les 6 sextupôles, s'approchant le plus de la ligne Δr maximum (voir fig. 12a). Mais si on avait suffisamment de force à disposition on pourrait utiliser d'autres arrangements moins favorables pour Δr mais davantage pour $\Delta r/\Delta\theta$. (fig. 13c par exemple). La configuration 13b est celle qui est adoptée dans les calculs et les choix présentés plus loin.

On trouve à la figure 14 quelques courbes donnant les fonctions $Dx(x)$ (projection de Δr sur l'axe Ox du plan de phase de la section d'éjection), pour différentes valeurs de k_2 , avec $k_1 = 2$ et différentes valeurs de k_1 , avec $k_2 = 0.002$, en ayant toujours $Q_0 = 6.25$.

2.5. Densité de particules sur la séparatrice divergente

Lors des sauts successifs la même portion de particules est étalée sur une largeur $Dx(x)$. Il est clair que la densité $\rho(x)$ du faisceau est alors proportionnelle à $\frac{1}{Dx(x)}$

Pour assurer le minimum de pertes sur le septum de l'aimant d'éjection on cherchera une région où $\rho(x)$ décroît lentement avec x car le rendement de l'éjection vaut

$$\eta = \frac{\int_{x_2}^{x_3} \rho(x) dx}{\int_{x_1}^{x_3} \rho(x) dx}$$

La figure 15a montre que cette condition est remplie d'autant mieux que la distance est grande entre le point instable et la position du septum.

D'autre part, on voit que l'utilisation des octupôles pour améliorer $\rho(x)$ n'est pas recommandable parce qu'ils risquent de provoquer de fortes distorsions dans le plan de phase (fig.15b).

2.6. Courbure de la séparatrice divergente.

Dans le plan de phase d'éjection on désire que la partie de la séparatrice qui dessine l'émission du faisceau éjecté soit aussi droite que possible. Car toute courbure correspond à une distorsion du parallélogramme d'émission (voir fig.1).

Comme il est mentionné au paragraphe 2.4 (fig.12), on peut agir sur la courbure en changeant la distribution de polarité des sextupôles, mais l'effet est assez faible et on diminue en même temps la croissance de l'amplitude Δr . L'effet qu'on peut produire par des octupôles convenablement placés est beaucoup plus sensible comme le montrent les courbes de la figure 15b.

Au lieu de servir à améliorer la distribution de densité des particules $\rho(x)$, les octupôles pourront donc être utilisés avantageusement pour combattre les distorsions produites par les sextupôles (voir 4.3).

3. Un choix pour les éjections EST.

3.1. Ejection de la s.d.58

Le quadrupôle d'éjection est placé en s.d.55. Il en résulte que les sextupôles utilisables sont les suivants: 75+, 95-, 5+, 15-, 35+, 45- . (Les polarités choisies produisent un accroissement d'amplitude Δr par tour, maximum).

La déformation d'orbite ("bump coils" permettant de déplacer le faisceau vers l'extérieur pour atteindre l'aimant d'éjection 58 a été imposée par les nécessités de l'éjection rapide. Il fallait atteindre une amplitude de 8 cm en sd 59 ce qui nécessite une déformation du type $3 \frac{\lambda}{2}$ produite par des dipôles ("bump coils") placés sur les unités 46-, 47-, 54+, 55+, 62+, 63+, 70-, 71- .

Pour l'éjection lente ce système présente un désavantage, c'est que la déformation d'orbite est en phase avec l'oscillation de résonance aux environs de la s.d.66.

D'autre part, cette déformation d'orbite qui est en fait produite par la somme de deux oscillations $3 \frac{\lambda}{2}$ déphasées d'une unité donne, au milieu de sd 55, un déplacement Δr 55

$$\Delta r 55 \approx \frac{\pi}{64} \text{ déplacement en s.d.59}$$

Avec un déplacement d'orbite de 45 mm en sd 59, Δr_{55} vaut environ 2 mm. Si on compense ce déplacement en mettant le faisceau à l'intérieur de 2 mm, on a à peu près les mêmes conditions que si on avait $\Delta r_{55} = 0$ *).

Les sextupôles sont négligeables pour de faibles amplitudes, mais on aura $e_{as} = -2$ mm au lieu de $e_{as} = 0$. La position du faisceau pendant l'éjection, $e < e_{as}$ sera décentrée et par conséquent les oscillations de résonance s'approcheront de la paroi intérieure de la chambre à vide. On ne pourrait donc pas tolérer un déplacement d'orbite de 10 ou 20 mm dans le quadrupôle; 2 mm sont acceptables.

Une solution convenable de l'éjection 58 est alors calculée avec les paramètres suivants:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 6.25 \\ k_0 &= \pm 8.5 \\ k_1 &= 2 \\ k_2 &= \pm 0.0022 \\ e &= -1.9 \text{ mm} \end{aligned}$$

La figure 17 montre la situation du faisceau dans la chambre à vide de la machine. Sur la figure 18 on a reporté d'une part la position du faisceau dans le plan de phase horizontal en sd 58, d'autre part la distribution de densité de particules du faisceau éjecté.

*) En effet le faisceau passe alors au centre du quadrupôle et à 2 m du centre des 6 sextupôles. Comme parmi ceux-ci 3 ont une polarité + et 3 une polarité -, un tel décentrage ne provoque pas de changement en première approximation.

Optique verticale

A la suite de mesures faites tout récemment sur l'éjection sud, il nous est apparu que l'hypothèse d'un faisceau non perturbé dans le plan vertical n'était pas valable.

Il fallait alors envisager un calcul théorique qui a été fait dans l'hypothèse adiabatique.

Celle-ci revient à considérer que l'ellipse d'émittance du faisceau non perturbé est déformée très progressivement au cours des 50 à 100 révolutions du faisceau spiralant.

Le seul calcul d'optique verticale que nous puissions faire revient à chercher tous les champs quadrupolaires que nous connaissons dans le plan horizontal, k_{1i} , $2k_{2i}x_i$, $3k_{3i}x_i^2$, produits respectivement par les quadrupôles, les sextupôles et les octupôles au point x_i où passe la trajectoire d'une révolution. Ces champs quadrupolaires ont un effet connu dans le plan vertical; on peut donc calculer dans ce plan de phase V la matrice de transfert M qui correspond à une révolution partant de la section d'éjection ^{*}). Cette matrice M conserve dans le plan de phase une ellipse stable, qui se modifie à chaque révolution de même que la matrice M . Il est clair que cette modification sera maximum dans les dernières révolutions (à cause des lentilles non linéaires). Si le coefficient de variation v défini dans l'appendice III B (formule III.7) est petit pour les matrices M_1 et M_2 des deux dernières révolutions, le phénomène est partout adiabatique et par conséquent l'émittance du faisceau a la forme d'une ellipse stable.

Pour l'éjection 58 le calcul de (formule III.9) a donné $v < 10^{-3}$, ce qui fonde parfaitement l'hypothèse adiabatique. La figure 19 présente la situation dans le plan de phase vertical. On constate principalement que la hauteur du faisceau au point d'éjection est augmentée d'environ 30 o/o par rapport au faisceau non perturbé.

*) Cette matrice M est strictement valable pour un faisceau de diamètre nul. Toutefois, lorsqu'on aura prouvé l'adiabaticité on saura qu'elle est valable sur toute la largeur du faisceau et par conséquent aussi sur une certaine hauteur.

D'autre part, le faisceau sortira du champ de fuite ^{*}) avec une divergence plus élevée (ellipse 3).

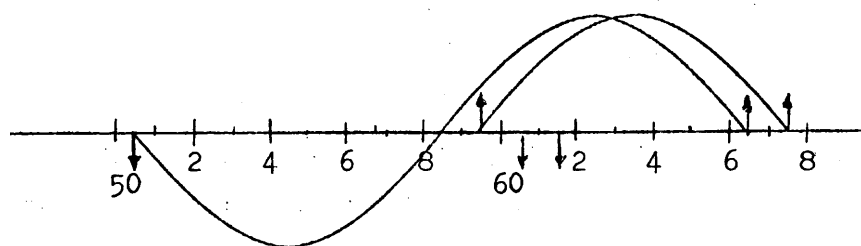
3.2. Ejection de la s.d.62(1ère étape)

Dans sa première installation l'éjection 62 comprendra un seul aimant à septum comme prévu dans le projet initial. On montrera au chapitre 4 qu'il sera possible de diminuer les pertes dans un rapport 10 à 1 en introduisant un second aimant à septum. Ce projet sera appelé 2ème étape.

Le quadrupôle d'éjection est placé en sd 61 (plus proche du point d'éjection ce qui permet de gagner 3 mrad sur l'angle d'éjection, voir fig.20).

Les sextupôles employés sont alors les suivants: 85-, 95+, 5-, 25+, 35-, 45+.

Par contre il n'est pas possible de créer une déformation d'orbite utilisable en sd 62 et nulle en sd 61 où se trouve le quadrupôle. On a choisi la déformation d'orbite que représente le schéma ci-dessous.



On additionne une oscillation λ et une oscillation $\frac{\lambda}{2}$ de manière à avoir un maximum en sd 63. Cet arrangement permet de placer des dipôles de part et d'autre du quadrupôle, soit sur les unités 60 et 61.

Les dipôles ("bump coils") sont montés sur les unités 50-, 59+, 60-, 61-, 66+, 67+. Les dipôles 60 et 61 ont pour effet de compenser le déplacement du faisceau dans le quadrupôle. Par rapport à un déplacement mécanique du quadrupôle cette compensation a l'avantage d'être indépendante du déplacement d'orbite utilisé en sd 62 (car tous les "bump coils" sont en série). Par contre,

* Dans les calculs relatifs au transport du faisceau éjecté à travers le champ de fuite de la première unité, on a considéré la trajectoire dont l'origine est donnée au centre de la section d'éjection par $r = 73 \text{ mm}$, $\alpha = 18 \text{ mrad}$.

cette compensation dépend de la force k_1 du quadrupôle et cette solution exige certaines précautions lorsqu'on enclenche la déformation d'orbite \ast).

Enfin, cette compensation par les dipôles n'est pas exacte et l'éjection calculée donne une position $e_{as} = - 3.5$ mm. On gagnera donc de l'ouverture pour les oscillations de résonance en déplaçant par la suite Q61 vers l'extérieur. Ce n'est pas le cas dans les calculs qui vont suivre.

La solution calculée pour l'éjection 62 comprend une déformation d'orbite de 42 mm en sd 63, soit 29 mm en sd 62, et les valeurs suivantes des paramètres:

$$Q_0 = 6.25$$

$$k_0 = \pm 15.8$$

$$k_1 = 2$$

$$k_2 = \pm 0.002$$

$$e = - 3.5 \text{ mm}$$

On trouvera à la figure 28 une situation des oscillations dans le plan médian, qui correspond au calcul de la "2ème étape". La largeur du faisceau au dernier tour n'est donc pas valable mais l'amplitude et la position des oscillations est la même.

La situation dans le plan de phase horizontal est présentée sur la figure 20. Il n'y a pas grande différence avec la figure 18, à part une rotation de 45° due aux positions différentes des quadrupôles respectifs.

Pour l'optique verticale c'est également une rotation dans le plan de phase qui distingue le cas 62 (ellipse ② de la fig. 29) et le cas 58 (ellipse ② de la fig. 19). (Les autres ellipses de la figure 29 concernent l'éjection 62, 2ème étape.

\ast) Si le quadrupôle n'est pas sous tension l'oscillation produite par les dipôles 60 et 61 s'étend à toute la machine et on risque de perdre le faisceau.

4. Ejection lente à rendement élevé

Si l'on cherche à augmenter l'efficacité du système d'éjection lente tel qu'il se présente au chapitre 3, on essayera de diminuer l'épaisseur du septum tout en conservant la largeur du faisceau.

Or l'épaisseur du septum dépend du courant nécessaire pour produire le saut de champ magnétique voulu. L'aimant d'éjection qui doit produire un champ de l'ordre de 20 kGm ne peut pas avoir un septum dont l'épaisseur soit inférieure à quelques millimètres.

Par contre il est possible de placer un septum mince bien avant la section d'éjection ^{*}). L'effet recherché sera de séparer les particules à éjecter et le faisceau circulant. Au point d'éjection cette séparation atteindra une valeur Δr , au moins égale à l'épaisseur du septum principal qui ne sera donc pas touché (fig. 21).

On peut trouver une position optimum pour le septum mince telle que la séparation Δr demandée dans la section d'éjection soit produite par un saut de champ k_0 minimum. Ordinairement cette position serait à $\frac{\lambda}{4}$ en amont de la section d'éjection, mais il n'est évidemment pas possible de séparer un faisceau au point nodal de ses oscillations.

La possibilité qui s'offre à nous est due au quadrupôle d'éjection qui se trouve aux environs de $\frac{\lambda}{8}$ en amont de la section d'éjection.

On montrera plus loin que le quadrupôle permet non seulement de trouver une solution favorable mais qu'il augmente encore le rapport $\Delta r/k_0$ d'un facteur 2 au moins.

4.1. Optimum du rendement

En reprenant la formule (7) du paragr. 1.4, dérivée dans l'appendice II et en l'appliquant à $\Delta p = k_0$ on a :

^{*}) Nous avons eu connaissance récemment d'une solution semblable adoptée à Frascati (voir référence 6).

$$\Delta r/k_0 = 2 \cos \theta - \sin \theta$$

On peut facilement résoudre ce problème de maximum, mais la manière la plus claire est de représenter cette fonction (voir fig.22).

Dans le cas particulier de l'éjection 62. on doit améliorer le calcul simple ci-dessus en tenant compte des trois points suivants:

- a) le quadrupôle est à $\frac{\lambda}{16}$ en amont de sd 62 et non $\frac{\lambda}{8}$
- b) les sextupôles utilisés provoquent un déphasage croissant avec l'amplitude des oscillations (courbur de la trajectoire divergente)
- c) le rendement du septum mince est proportionnel à $(1 - \frac{\epsilon}{L})$,
 ϵ = épaisseur du septum, L = largeur du faisceau. Il faut donc tenir compte de L .

Pour effectuer cette optimisation on choisit des paramètres d'éjection convenables, on fixe l'amplitude d'oscillation radiale de la trajectoire sur laquelle on désire placer le septum mince, et on calcule le point d'impact de cette trajectoire dans le plan de phase 62, sans septum mince, tout d'abord, puis avec un septum mince placé dans différentes sections.

Nous avons défini un facteur de mérite

$$f(\theta) = \frac{L}{\epsilon} \frac{\Delta r}{k_0} = \text{const } L \Delta r \quad (9)$$

qui variera avec la position azimutale θ du septum mince.

A la fig.23 on trouve ce facteur pour les sd 45 à 61, et sd 63 (qui est située 98 unités avant le quadrupôle). Si on se limite aux sections impaires dans lesquelles le rapport $\frac{L}{k_0}$ est supérieur de $(1.35)^2$, on voit que la section favorable, la plus proche de la section d'éjection, est 59. Malheureusement, cette position est inutilisable à cause de la proximité de l'aimant d'éjection 58. La solution à choisir sera donc de placer le septum mince en 63 (qui a d'ailleurs le meilleur facteur de mérite). On le placera à la limite de l'ouverture utile, soit à + 73 mm. Le saut de champ prévu sur ce septum est de 400 Gm soit 2 o/o du saut de champ nécessaire sur le septum d'éjection. Au moyen de ce septum très mince (0.1 - 0.2 mm) les pertes théoriques du système d'éjection lente sont divisées par 10.

Ce même principe pourrait être appliqué à l'éjection 58. Le calcul du facteur de mérite donne dans ce cas les courbes de la figure 24. Il semble d'après ces courbes qu'on pourrait atteindre un résultat encore meilleur que pour l'éjection 62.

4.2. Amélioration de l'optique par un quadrupôle à septum

Un point délicat dans l'optique du faisceau éjecté lent est sans doute la traversée du champ de fuite après la section d'éjection. En effet le faisceau est très large (~ 30 mm) à l'endroit où il traverse le champ de fuite non linéaire. D'autre part, il est fortement divergent ce qui occasionne des difficultés de transport. Une amélioration certaine peut être apportée par une composante quadrupolaire (convergente radialement) de l'aimant d'éjection (EM)*). Les inconvénients sont a) de prendre une partie de la puissance de l'aimant (10-20 o/o) b) de ne pas réduire la largeur du faisceau dans la section d'éjection.

On peut éviter ces inconvénients en donnant une composante quadrupolaire au champ de l'aimant à septum mince. La configuration du champ proposée est représentée sur la figure 25 **).

L'effet de ce quadrupôle à septum est présenté sur la figure 27. On remarque que la dimension du faisceau est réduite. Toutefois la distorsion du faisceau éjecté apparaît clairement sur cette figure d'émission ramassée.

4.3. Lentilles octupolaires pour la correction des distorsions.

On peut combattre cette distorsion en ajoutant au champ quadrupolaire de la lentille 63 des composantes d'ordre supérieur. Mais cette solution ne permettrait aucun réglage indépendant. Nous avons donc pensé à utiliser plutôt les octupôles de la machine.

En cherchant les positions où le faisceau spiralant au dernier tour est le plus sensible à une perturbation (amplitude max et ligne horizontale dans le plan de phase), on s'aperçoit que les octupôles en s.d.95 et s.d.35 sont les plus efficaces.

*) Voir à ce sujet la référence 5

***) Pour plus de détails sur le quadrupôle à septum voir référence 7.

La figure 27 montre la surface d'émission alors obtenue en s.d.62 (surface hachurée). On réunit cette fois tous les avantages:

- a) faible dimension radiale (quelques mm)
- b) faisceau convergent (point focal à + 3 m)
- c) distorsions négligeables
- d) optique verticale satisfaisante (voir paragr. suivant)
- e) distribution favorable de la densité radiale en s.d.63(fig.26).

La distribution de la densité radiale du faisceau dans la section 63 où se trouve le septum mince est donnée sur la figure 26 courbe b ; elle se compare avantageusement avec la courbe a qui donne la distribution correspondant au même cas sans octupôles.

4.4. Ejection de la s.d.62(2ème étape)

Nous pouvons maintenant réunir les paramètres convenant à l'éjection 62 (2ème étape).

$$Q_0 = 6.25$$

$$k_0 = \pm 15.8 \quad (\text{même déplacement d'orbite})$$

$$k_1 = 2$$

$$k_1 = -0.900, \text{ septum à } 54 \text{ mm, centre à } 60 \text{ mm} \quad (Q63)$$

$$k_2 = \pm 0.002$$

$$k_3 = - 0.00005$$

$$e = -3.5 \text{ mm}$$

Les calculs fournissent la position radiale au dernier tour qu'indique la figure 28. On a déjà vu la situation dans le plan de phase horizontal à la figure 27 (le polygone hachuré correspond aux paramètres ci-dessus).

Quant à l'optique verticale on trouve ses caractéristiques sur la figure 29. L'hypothèse d'adiabaticité est très bien vérifiée comme pour l'éjection 58. A l'avant-dernier tour on a donc l'ellipse stable adiabatique (2). Après le

dernier tour où le faisceau passe dans Q63 on trouve une ellipse passablement focalisée (3). On peut donc prévoir que le faisceau éjecté sera moins haut en sd 62 que le faisceau non perturbé. C'est un effet heureux de la position de l'aimant à septum mince.

Pour montrer que ce faisceau présente des facilités remarquables de transport, nous avons supposé que soit posé sur la ligne du faisceau éjecté en face de sd 64 un colimateur de 50 mm de diamètre (lentilles du transport de l'éjection 58). Les limites qu'apporte ce colimateur dans les plans de phase H et V en sd 62 sont représentées sur les figures 30a,b, de même que les émittances trouvées aux figures 27 et 29, (3).

On constate que le faisceau ne nécessite aucun élément de transport en s.d.63.

Remerciements

Je tiens à remercier particulièrement H.G.Hereward qui a conduit nombre de discussions utiles au sujet de ces systèmes, et K.H.Reich qui a participé au choix de tous les paramètres.

Ma gratitude va aussi à H.Fischer qui a bien voulu examiner les possibilités de réalisation du quadrupôle à septum, et à Y.Bacconnier qui a relu attentivement le manuscrit et m'a suggéré plusieurs améliorations.

C.BOVET

Distribution: (ouverte)

Personnel Scientifique et
Technique de la Division MPS

Références

- 1) H.G.Hereward. The possibility of Resonant Extraction from the CPS.
AR/Int. GS 61-5.
- 2) H.G.Hereward. Effect of Quadrupoles in the CPS : Methods of calculation.
MPS/Int. DL 63-9.
- 3) C.Bovet. Aberrations dues au champ de fuite.
MPS/Int. DL 64-9.
- 4) C.Bovet. Programmes FORTRAN CERN pour le calcul des trajectoires
perturbées et des systèmes d'éjection par résonance dans
le CPS.
MPS/Int. DL 65-5.
- 5) K.H.Reich. Further thoughts on primary and secondary Beams from
various straight sections.
MPS/Int. DL 64-13.
- 6) U.Bizzani and A.Turrin. Resonant Extraction from the 1 GeV Frascati Electron
Synchrotron. (submitted for publication to the Nuovo
Cimento, 4 mars 1965).
- 7) H.Fischer. Memorandum du 11.12.1964.
- 8) C.Bovet, G.R.Lambertson, K.H.Reich. Measurements on Slow Beam-ejection from the CPS, CERN 64-25.

APPENDICE I

Le calcul algébrique de la transformation du plan de phase correspond à une révolution dans la machine perturbée, avec $Q_0 = 6.25$, s'effectue au moyen des transformations que subit le plan de phase lorsqu'on passe d'un point au suivant (Voir fig. 2. page 4).

Les transformations sont:

$$5 \rightarrow 1 \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \\ e \end{pmatrix}^{\#)}$$

$$1 \rightarrow 2 \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} \right.$$

$$2 \rightarrow 3 \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \\ e \end{pmatrix}^{\#)}$$

$$3 \rightarrow 4 \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_4 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} \right.$$

$$4 \rightarrow 5 \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_5 \\ p_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2}-1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ p_4 \\ e \end{pmatrix}^{\#)}$$

$\#)$ Pour ces transformations on emploie la formule générale d'une rotation φ autour du point (x_0, p_0) :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & (1 - \cos \varphi) & -\sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & \sin \varphi & (1 - \cos \varphi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p \\ x_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$$

En effectuant on a

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x \\ p_1 = p \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 = x \\ p_2 = p + k_2 x^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + p + k_2 x^2 + (\sqrt{2} - 1)e) \\ p_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} (-x + p + k_2 x^2 + e) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_4 = x_3 \\ p_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (k_1 x + k_1 p + k_1 k_2 x^2 + k_1 (\sqrt{2} - 1)e - x + p + k_2 x^2 + e) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} (x + p + k_2 x^2 + (\sqrt{2} - 1)e + k_1 x + k_1 p + k_1 k_2 x^2 + k_1 (\sqrt{2} - 1)e \\ \quad - x + p + k_2 x^2 + e + (2 - \sqrt{2})e) \\ p_5 = \frac{1}{2} (-x - p - k_2 x^2 - (\sqrt{2} - 1)e + k_1 x + k_1 p + k_1 k_2 x^2 + k_1 (\sqrt{2} - 1)e \\ \quad - x + p + k_2 x^2 + e + \sqrt{2} e) \end{array} \right. \quad (I.1)$$

Pour chercher les points fixes, posons $x_5 = x$, $p_5 = p$ et résolvons le système.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + p = k_1 (x + p + k_2 x^2 + (\sqrt{2} - 1)e) - x + p + k_2 x^2 + e + e \\ x - p = x + p + k_2 x^2 + (\sqrt{2} - 1)e + (1 - \sqrt{2})e \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -k_1 p = k_2 (k_1 + 1)x^2 + (k_1 - 2)x + (2 + k_1 (\sqrt{2} - 1))e \\ -2p = k_2 x^2 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -2k_1 p = 2k_2 (k_1 + 1)x^2 + 2(k_1 - 2)x + 2(2 + k_1 (\sqrt{2} - 1))e \\ +2k_1 p = -k_1 k_2 x^2 \end{array} \right.$$

$$k_2 (k_1 + 2)x^2 + 2(k_1 - 2)x + 2(2 + k_1 (\sqrt{2} - 1))e = 0$$

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\frac{k_1-2}{k_2(k_1+2)} \pm \sqrt{\left(\frac{k_1-2}{k_2(k_1+2)}\right)^2 - \frac{2(2+k_1(\sqrt{2}-1))e}{k_2(k_1+2)}} \\
 p_0 &= \frac{(2+k_1(\sqrt{2}-1))e}{k_1+2} - \frac{1}{k_2} \left(\frac{k_1-2}{k_1+2}\right)^2 \pm \frac{k_1-2}{k_1+2} \sqrt{\left(\frac{k_1-2}{k_2(k_1+2)}\right)^2 - \frac{2(2+k_1(\sqrt{2}-1))e}{k_2(k_1+2)}}
 \end{aligned}
 \tag{I.2}$$

D'autre part pour calculer la circulation des points du plan de phase autour des points fixes (voir appendice III) il est utile de connaître l'approximation linéaire de la transformation (I.1). On la dérive facilement des formules (I.1) ci-dessus.

Si on écrit

$$x_5 = f_1(x, p)$$

$$p_5 = f_2(x, p)$$

la transformation linéaire sera donnée par

$$\begin{pmatrix} dx_5 \\ dp_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dp \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} dx \\ dp \end{pmatrix}$$

En dérivant les équations (I.1) on trouve:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{k_1+2}{2} & \frac{k_1+2}{2} \\ \frac{k_1+2}{2} & \frac{k_1}{2} \end{pmatrix}
 \tag{I.3}$$

APPENDICE II

Calcul de l'effet d'une perturbation avec un quadrupôle

$$(Q_0 = 6.25, k_1 = 2, e = 0)$$

(Voir fig.6)

On aura les transformations suivantes:

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$p_1 = -r \sin \theta + \Delta p$$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \phi = \frac{\pi}{4} - \theta$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (\text{quadrupôle de force } k_1 = 2)$$

On cherche

$$\Delta r = \sqrt{(x_3 - x_3')^2 + (p_3 - p_3')^2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\Delta \theta = \frac{1}{r} \sqrt{(x_3 - x_3')^2 + (p_3 - p_3')^2} \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{où } \tan \alpha = (p_3 - p_3') / (x_3 - x_3')$$

Commençons par exprimer $\cos \phi$:

$$\begin{aligned}\cos \phi &= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta + \sin \theta) \\ \sin \phi &= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \theta \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta - \sin \theta)\end{aligned}$$

il vient alors

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (r + \Delta p (\cos \theta - \sin \theta)) \\ p_2 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-r + \Delta p (\cos \theta + \sin \theta)) \\ x_3 &= x_2 \\ p_3 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (r + \Delta p (3 \cos \theta - \sin \theta)) .\end{aligned}$$

Comme $x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} r = p'_3$, on a pour

$$\begin{aligned}\Delta x_3 &= x_3 - x'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta p (\cos \theta - \sin \theta) \\ \Delta p_3 &= p_3 - p'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta p (3 \cos \theta - \sin \theta),\end{aligned}$$

par conséquent

$$\tan \alpha = \frac{3 \cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta - \sin \theta}$$

Il faut maintenant exprimer $\cos(\alpha - \frac{\pi}{4})$ en fonction de $\tan \alpha$

$$\cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha + \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1 + \tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}{5 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

De façon analogue on aura

$$\sin \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\tan \alpha - 1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

$$\sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\cos^2 \theta}{5 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta}$$

On peut alors exprimer

$$\Delta r^2 = (\Delta x_3^2 + \Delta p_3^2) \cos^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \Delta p^2 (4 \cos^2 \theta - 4 \cos \theta \sin \theta + \sin^2 \theta)$$

et enfin

$$\boxed{\Delta r = \Delta p (2 \cos \theta - \sin \theta)} \quad (\text{II.1})$$

D'autre part

$$\Delta \theta^2 = (\Delta x_3^2 + \Delta p_3^2) \sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{r^2} \Delta p^2 \cos^2 \theta$$

$$\boxed{\Delta \theta = - \frac{1}{r} \Delta p \cos \theta} \quad (\text{II.2})$$

où

$$\Delta p = k_0 + k_1 r \cos \theta + k_2 r^2 \cos^2 \theta + k_3 r^3 \cos^3 \theta + \dots$$

APPENDICE III

A. Paramètres caractérisant la circulation autour des points fixes

Les matrices unitaires 2×2 représentent un opérateur linéaire dans le plan, conservant certains invariants. On appelle vecteurs propres les solutions \vec{x}_i de l'équation

$$(\chi_i I - M) \vec{x}_i = 0 \quad (\text{III.1})$$

où les χ_i sont les valeurs caractéristiques correspondant aux vecteurs propres.

Pour qu'il existe des vecteurs propres il faut que la matrice $(\chi_i I - M)$ soit singulière c'est-à-dire que son déterminant soit nul.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{vmatrix} \chi_i - a & -b \\ -c & \chi_i - d \end{vmatrix} = 0$$

C'est une équation du 2ème degré en χ_i qui a donc deux solutions

$$\chi_i = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a+d}{2}\right)^2 - 1} .$$

Ecrivons $\vec{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}$, l'équation (1) nous donne

$$a x_i + b p_i = \chi_i x_i .$$

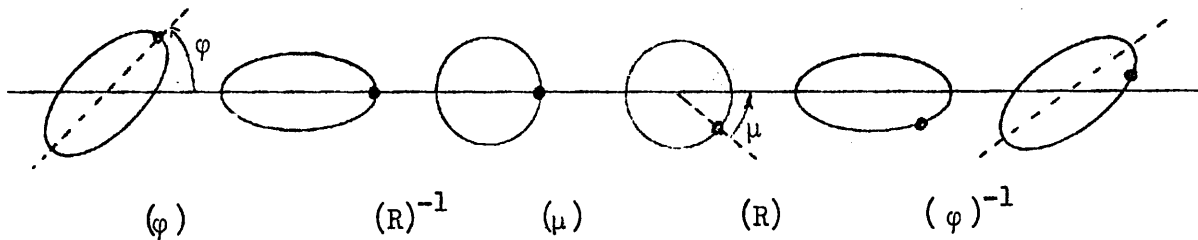
Les pentes des vecteurs propres sont

$$\frac{p_i}{x_i} = \frac{d-a}{2b} \pm \frac{\sqrt{\frac{a+d}{2}^2 - 1}}{b} \quad (\text{III.2})$$

Ce sont les pentes des séparatrices qui se coupent au point fixe instable.

Il est clair que si $\frac{a+d}{2} < 1$ ces pentes ne sont plus réelles. On va montrer qu'au lieu d'une paire de vecteurs propres on a alors une ellipse invariante, qui caractérisera la circulation autour d'un point fixe stable.

Si la matrice M conserve une ellipse dans le plan, elle peut être représentée par cinq transformations successives:



$$M = (\varphi)^{-1} (R) (\mu) (R)^{-1} (\varphi), \text{ où}$$

$$(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (R) = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}, \quad (\mu) = \begin{pmatrix} \cos\mu & \sin\mu \\ -\sin\mu & \cos\mu \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On peut écrire

$$({}_{\varphi})M({}_{\varphi})^{-1} = (R)({}_{\mu})(R)^{-1} \quad (\text{III.3})$$

et on trouve facilement

$$({}_{\varphi})M({}_{\varphi})^{-1} = \begin{pmatrix} a \cos^2 \varphi + (b+c) \sin \varphi \cos \varphi + d \sin^2 \varphi / b \cos^2 \varphi + (d-a) \sin \varphi \cos \varphi - c \sin^2 \varphi \\ c \cos^2 \varphi + (d-a) \sin \varphi \cos \varphi - b \sin^2 \varphi / d \cos^2 \varphi - (b+c) \sin \varphi \cos \varphi + a \sin^2 \varphi \end{pmatrix}$$

$$(R)({}_{\mu})(R)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \mu & R^2 \sin \mu \\ -\frac{1}{R^2} \sin \mu & \cos \mu \end{pmatrix}$$

En égalant les traces on obtient immédiatement

$$\boxed{\cos \mu = \frac{a+d}{d}} \quad (\text{III.4})$$

Le nombre harmonique $\frac{2\pi}{\mu}$ correspond au nombre de révolutions dans la machine nécessaire pour que les points voisins du point stable parcourent l'ellipse infinitésimale. En soustrayant les éléments diagonaux des deux membres de l'équation (III.3) on obtient

$$(a-d)(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + 2(b+c) \sin \varphi \cos \varphi = 0,$$

ce qui peut s'écrire

$$(a-d) \cos 2 \varphi + (b+c) \sin 2 \varphi = 0 .$$

Il vient alors

$$\boxed{\tan 2 \varphi = \frac{d-a}{b+c}} \quad (\text{III.5})$$

où φ est l'angle que fait le grand axe de l'ellipse infinitésimale avec l'axe Ox.

Enfin, en soustrayant les éléments non diagonaux des deux membres de (III.3) on obtient

$$\left(R^2 + \frac{1}{R^2}\right) \sin \theta = b-c$$

Ainsi le rapport des axes de l'ellipse infinitésimale sera

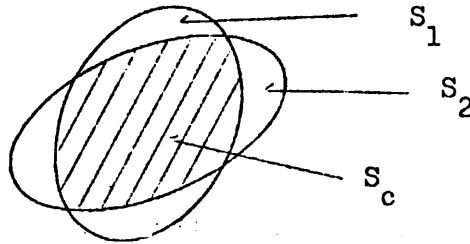
$$\boxed{R^2 = A \pm \sqrt{A^2 - 1}} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{avec } A = \frac{b-c}{\sqrt{4-(a+d)^2}}$$

B. Degré d'adiabaticité

Lorsqu'une transformation linéaire valable autour d'un point du plan de phase se modifie à chaque révolution dans la machine, on désire savoir si cette modification peut être attribuée à un phénomène adiabatique ou non. Une manière de s'en informer consiste à comparer les ellipses invariantes E_1 attachées à la transformation M_1 et E_2 à la transformation modifiée M_2 .

Soit S la surface de ces ellipses et S_c leur surface commune :



Nous définissons un coefficient de variation v qui caractérise l'adiabaticité du phénomène (Adiabatique si v est petit).

$$\boxed{v = \frac{1}{2\pi} \frac{S - S_c}{S}} \quad (\text{III.7})$$

Pour calculer S_c , au lieu de reproduire tout un développement nous nous reportons à la référence 3) où ce problème a été traité. Il suffit de trouver la matrice qui correspond dans notre cas à la matrice d'aberration Δ définie à la référence 3) p.8. Nous devons comparer les ellipses E_1 et E_2 attachées aux transformations M_1 et M_2 dont on a vu ci-dessus qu'elles pouvaient être représentées par

$$M_1 = (\varphi_1)^{-1} (R_1) (\mu_1) (R_1)^{-1} (\varphi_1)$$

$$M_2 = (\varphi_2)^{-1} (R_2) (\mu_2) (R_2)^{-1} (\varphi_2)$$

On aura donc,

$$\Delta = (R_2)^{-1} (\varphi_2) (\varphi_1)^{-1} (R_1) \quad (\text{III.8})$$

C'est la transformation d'un cercle dans l'ellipse E_1 suivie de la transformation de l'ellipse E_2 dans un cercle (voir page 35).

Il vient

$$\begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 \\ \delta_3 & \delta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{R_1}{R_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \frac{1}{R_1 R_2} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \\ -R_1 R_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \frac{R_2}{R_1} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{pmatrix}$$

où les valeurs $\varphi_1, \varphi_2, R_1$ et R_2 sont calculées à partir des formules (III.5) et (III.6) ci-dessus. La formule (8) de référence 3) nous permet d'écrire

$$S_c = \frac{4}{\pi} \arctan \frac{1}{r}$$

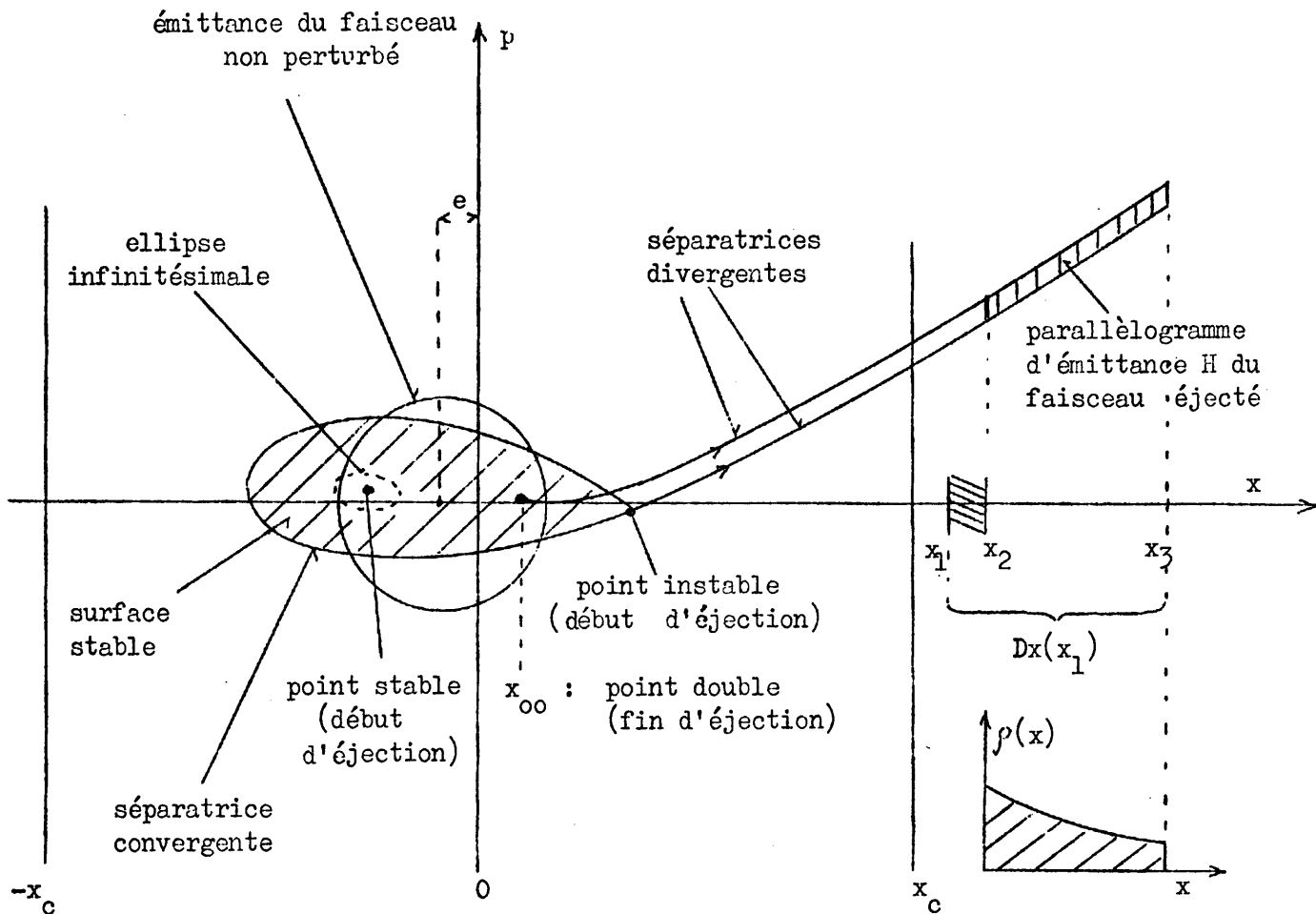
où r est donné par la formule (6) de référence 3) :

$$r = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 + 2} + \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 - 2} \right)$$

On peut donc exprimer finalement

$$\boxed{\nu = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{4}{\pi} \arctan \frac{1}{r} \right)} \quad (\text{III.9})$$

Croquis dans le plan de phase horizontal (x,p) de la section d'éjection



$\pm x_c$ parois de la chambre à vide

x_1 paroi intérieure du septum

$\epsilon = x_2 - x_1$: épaisseur du septum

$Dx(x)$ saut des particules sur la séparatrice divergente après une révolution dans la machine

$\rho(x)$ densité de particules du faisceau éjecté

e position du centre du faisceau non perturbé (augmente au cours de l'éjection lorsque B diminue).

Fig. 1

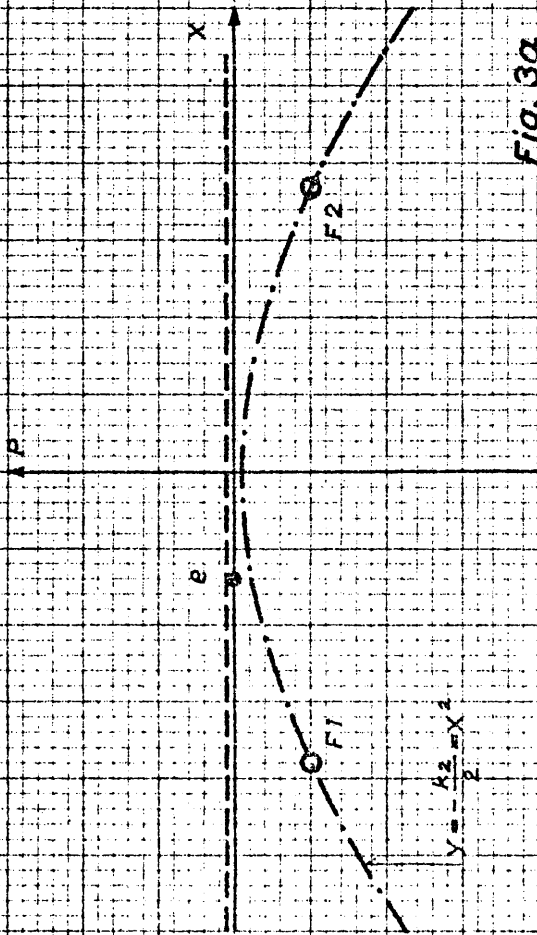


Fig. 3a

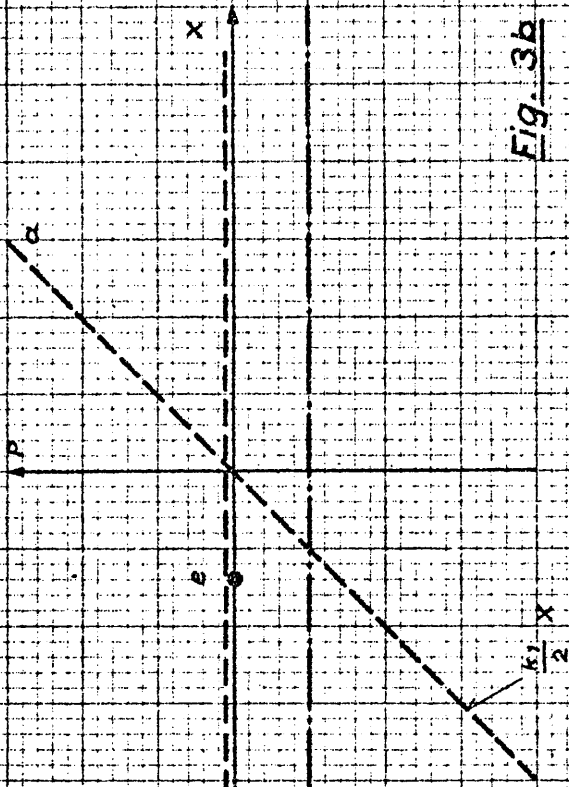


Fig. 3b

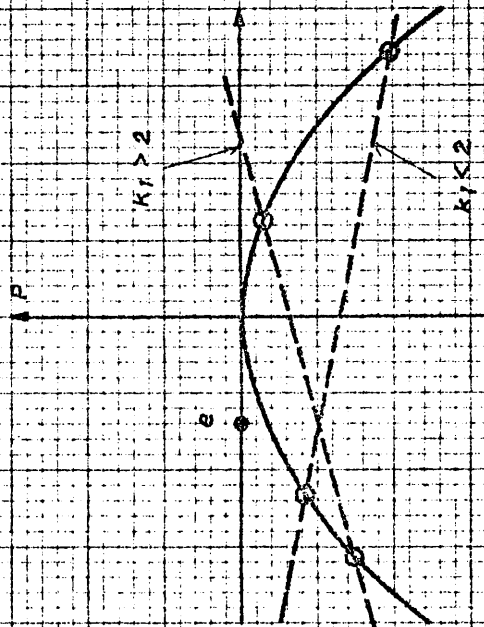


Fig. 4a

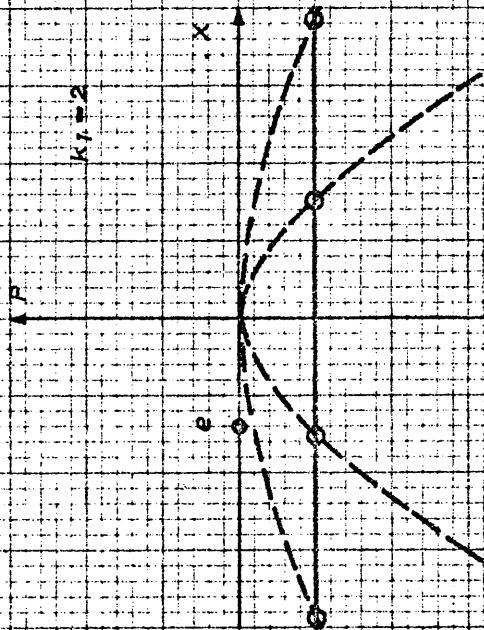


Fig. 4b

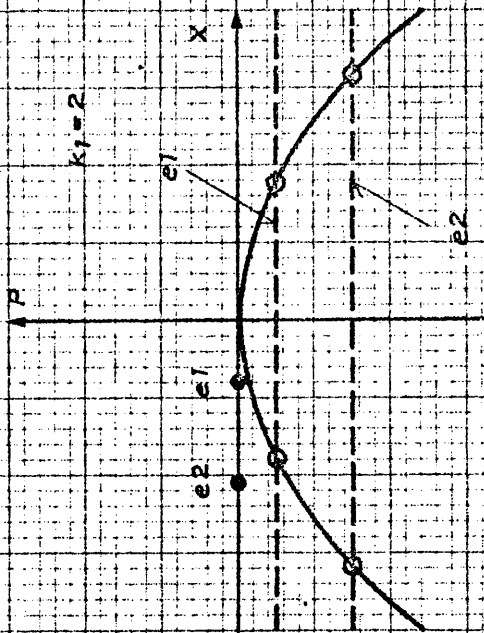


Fig. 4c

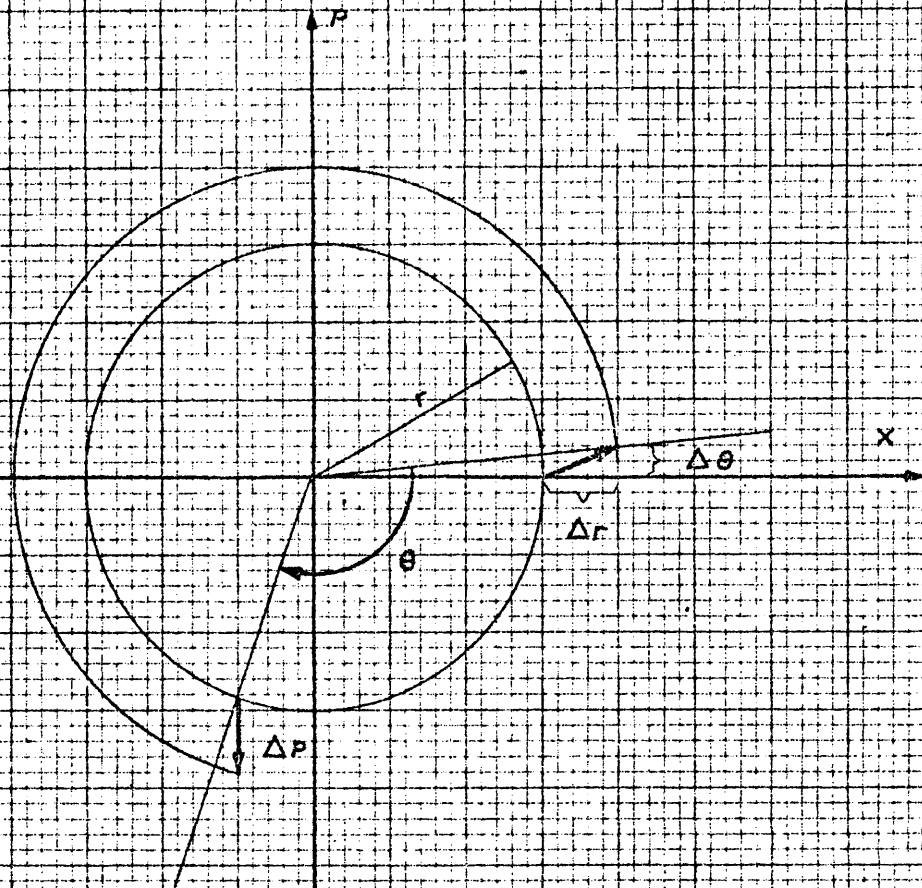


Fig. 5

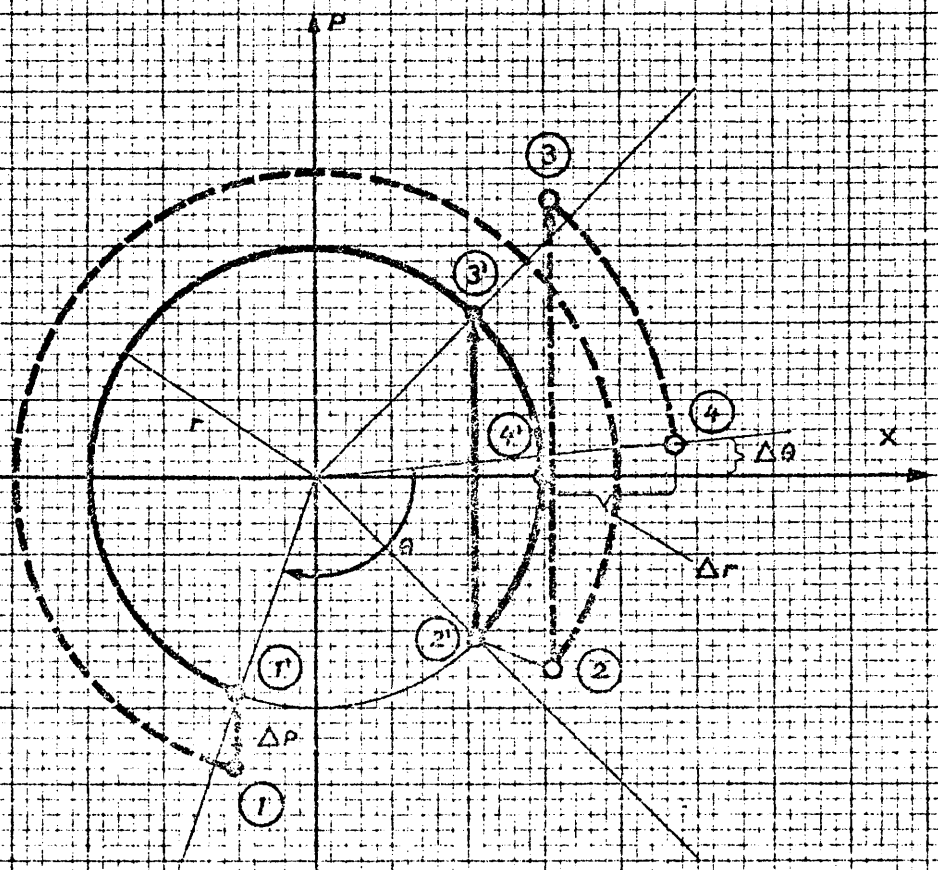
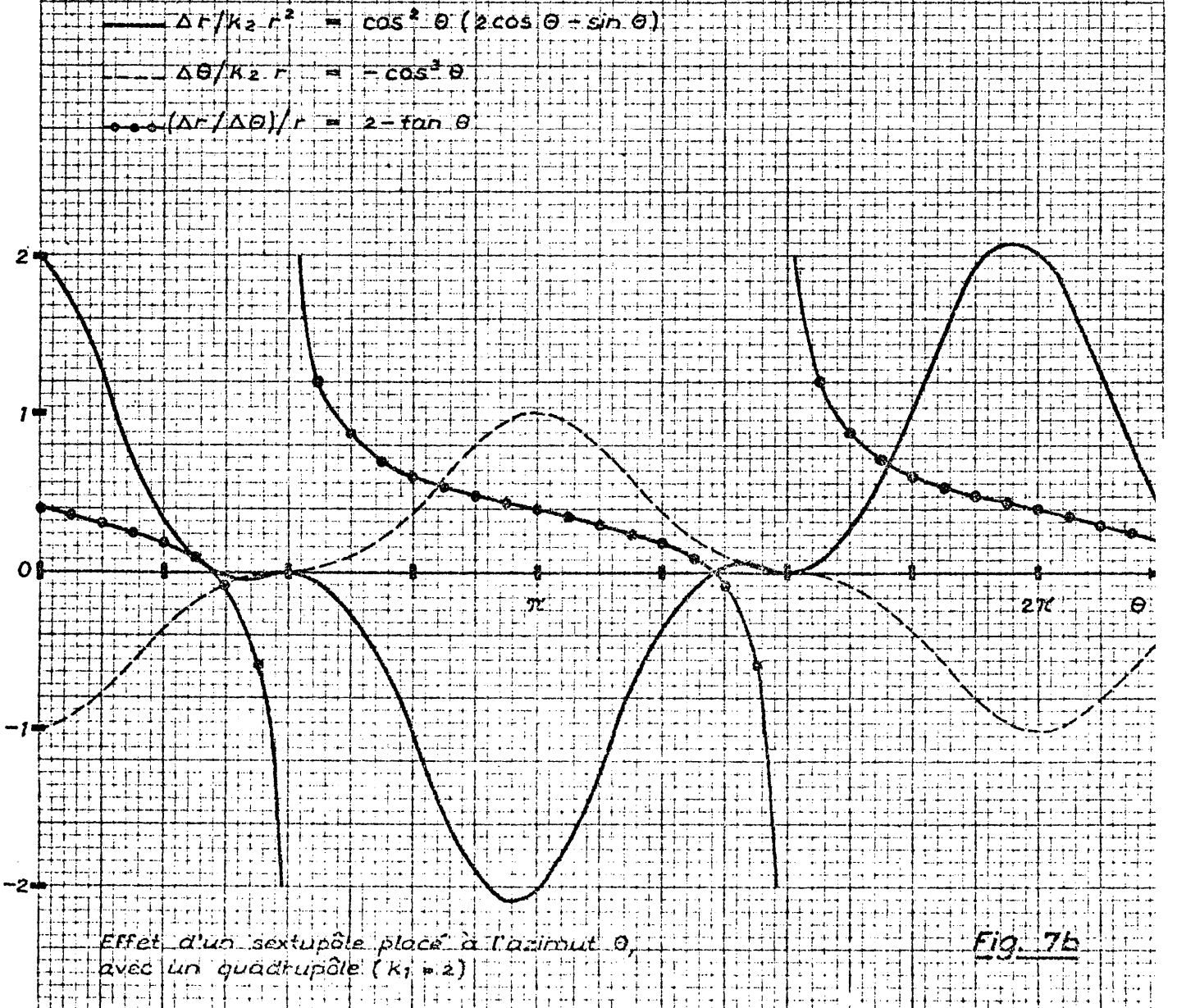
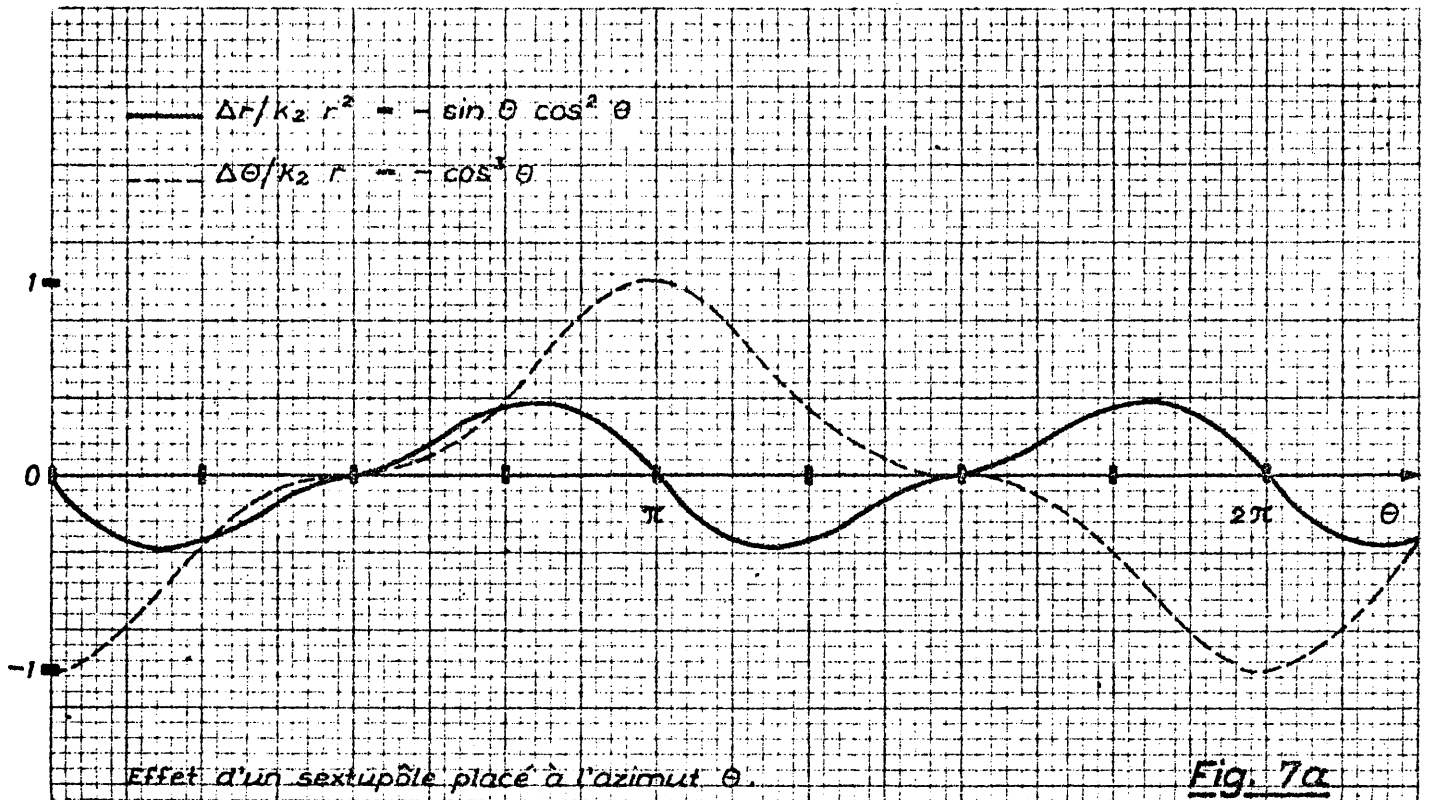


Fig. 6



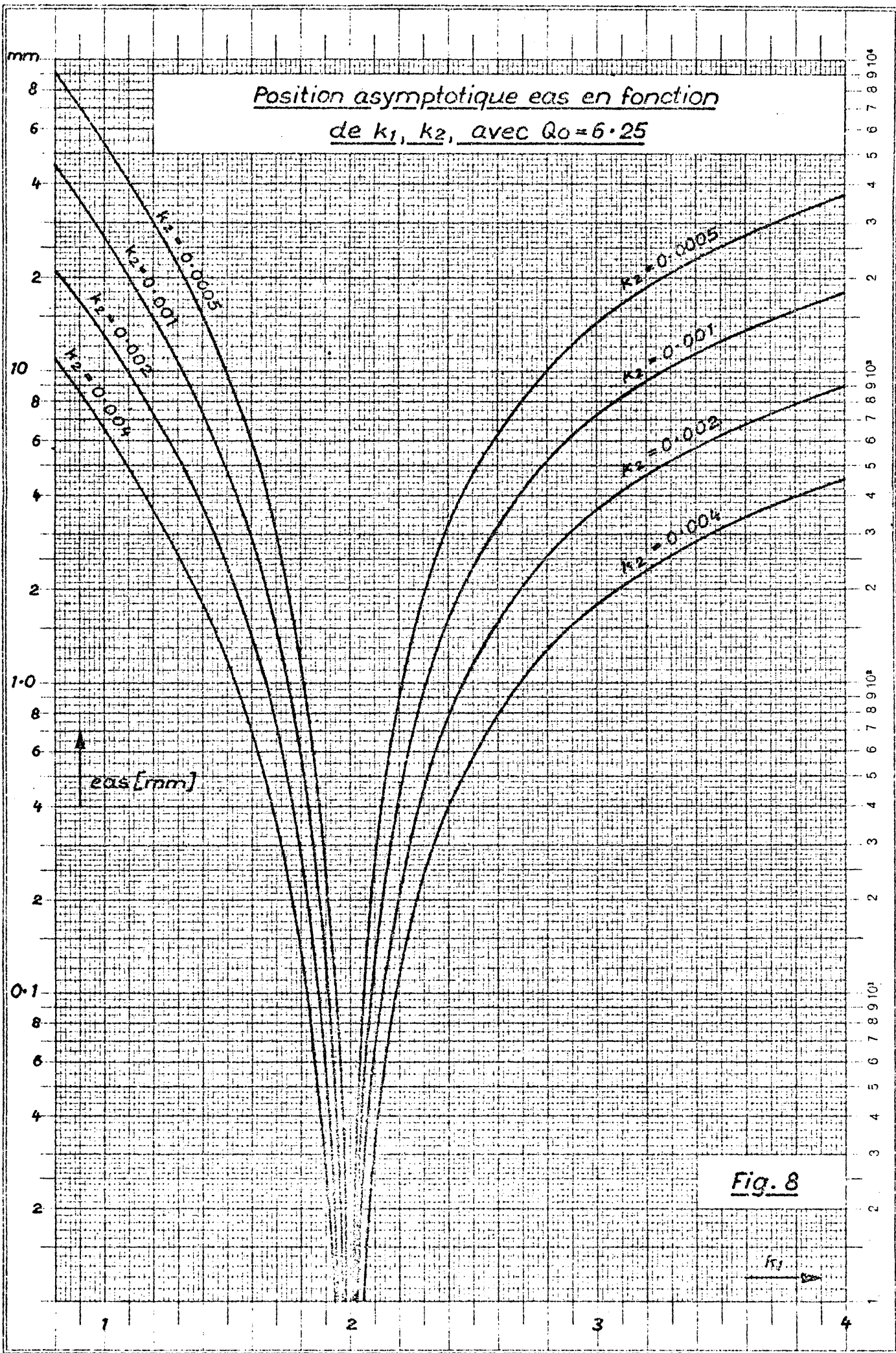


Fig. 8

Points fixes doubles et séparatrices divergentes

(pour différentes valeurs de k_1 , avec $k_2 = 0.002$)

(en pointillé: $k_1 = 2$, $e = e_{0.3} = 0.3 = -0.3$)

m_{ad}

$1 \leftarrow p$

0

-1

-20

-10

0

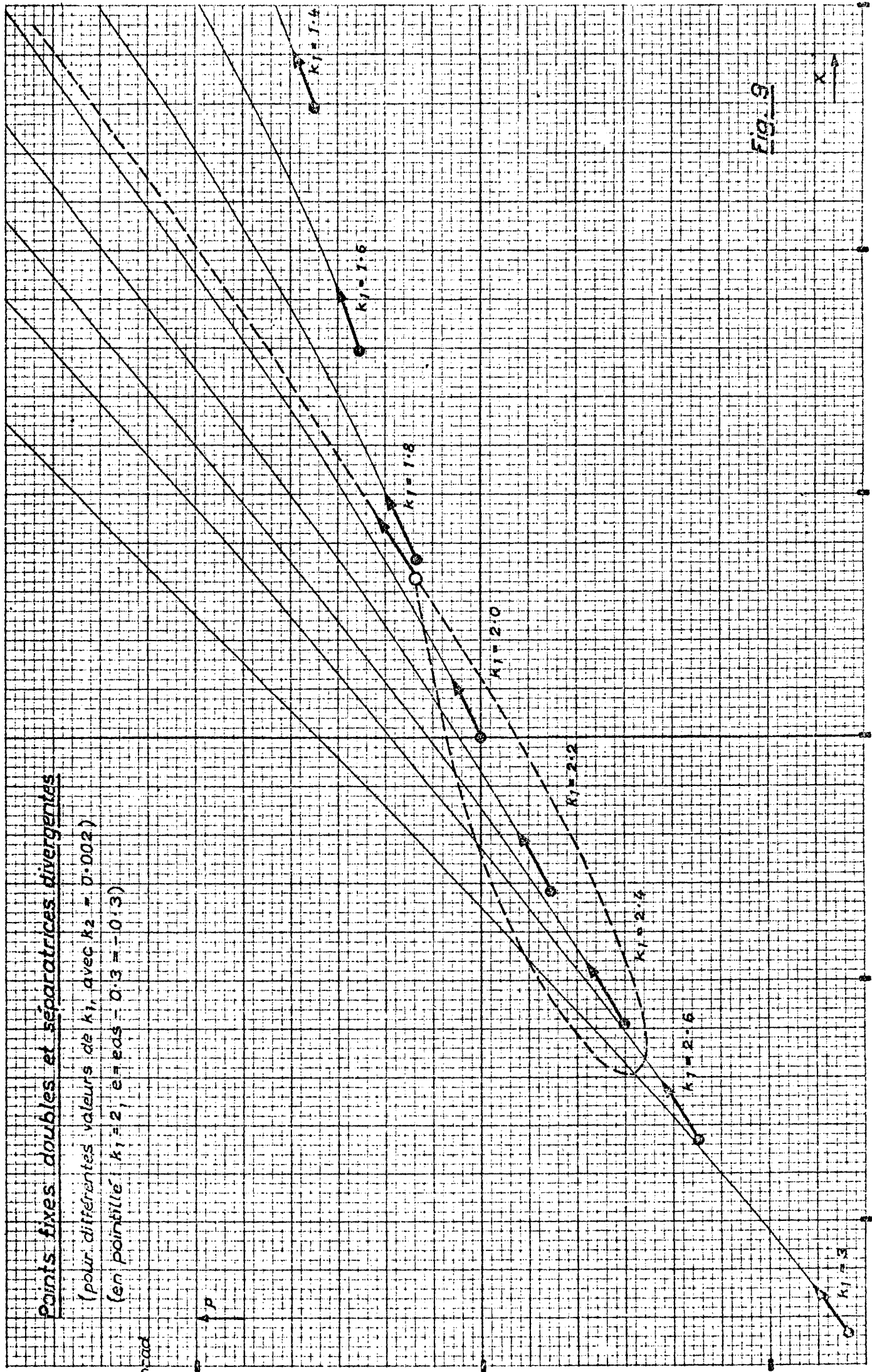
10

20

30

x

Fig. 9



Position du point double en fonction de k_1, k_2 , avec $Q_0 = 6.25$

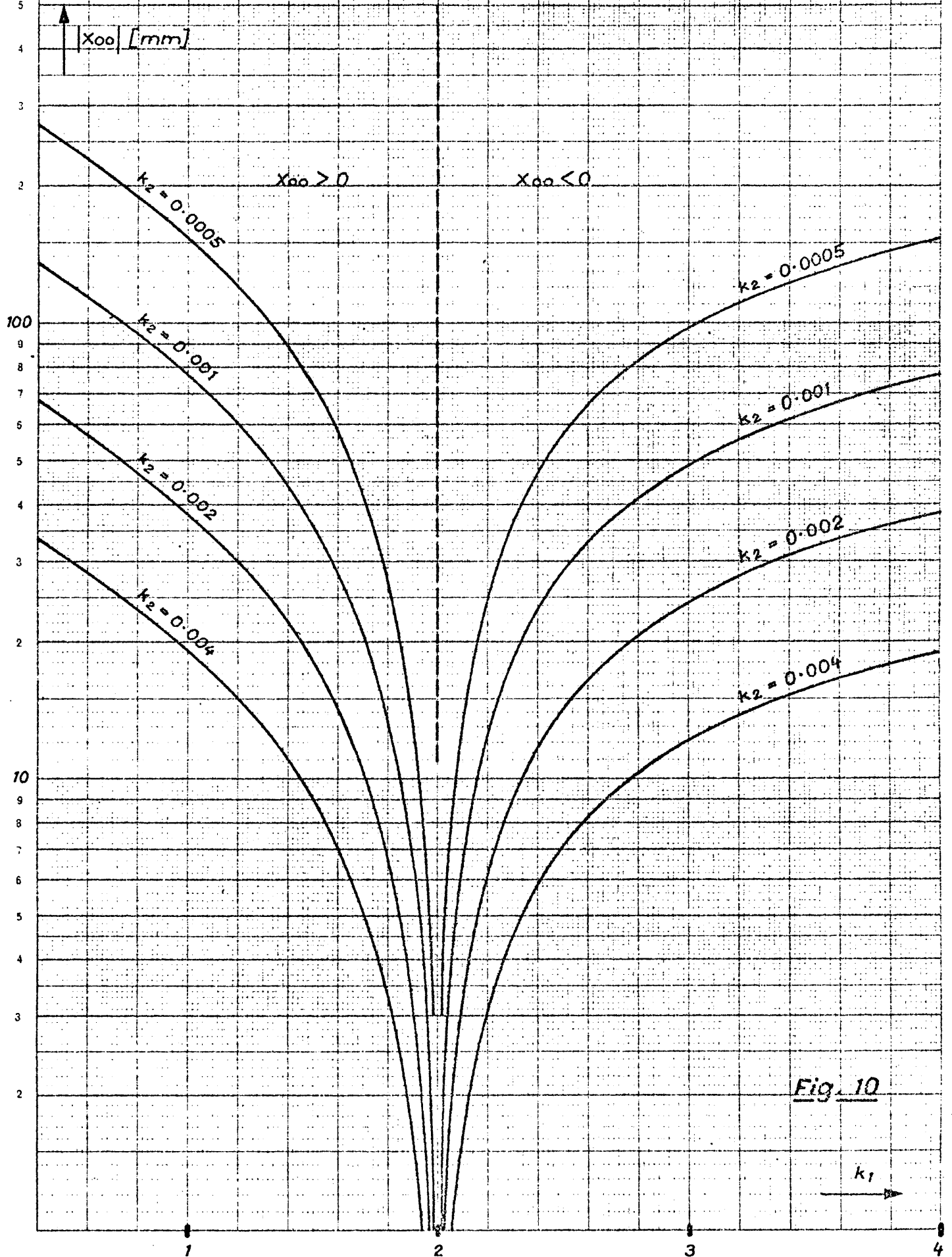


Fig. 10

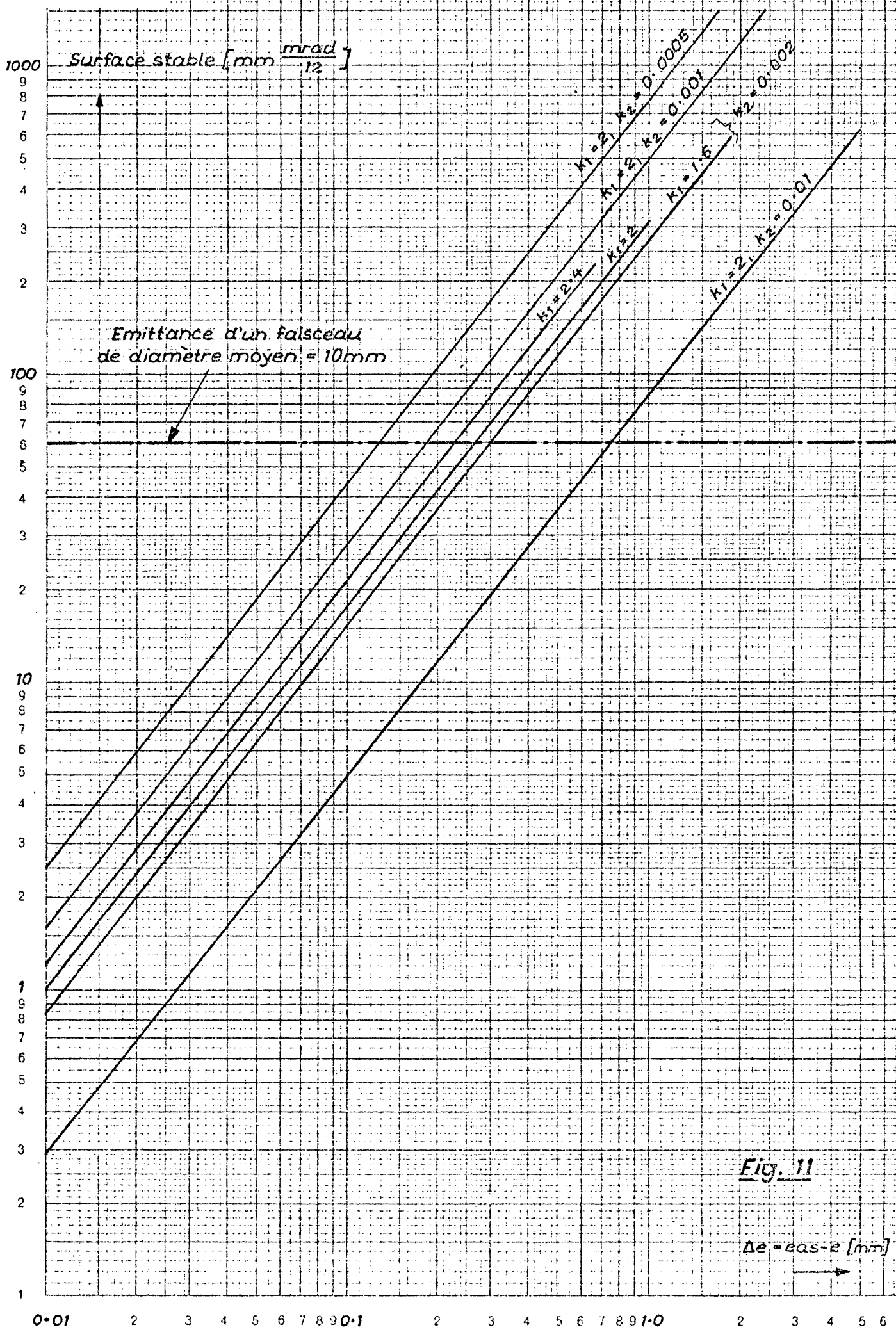
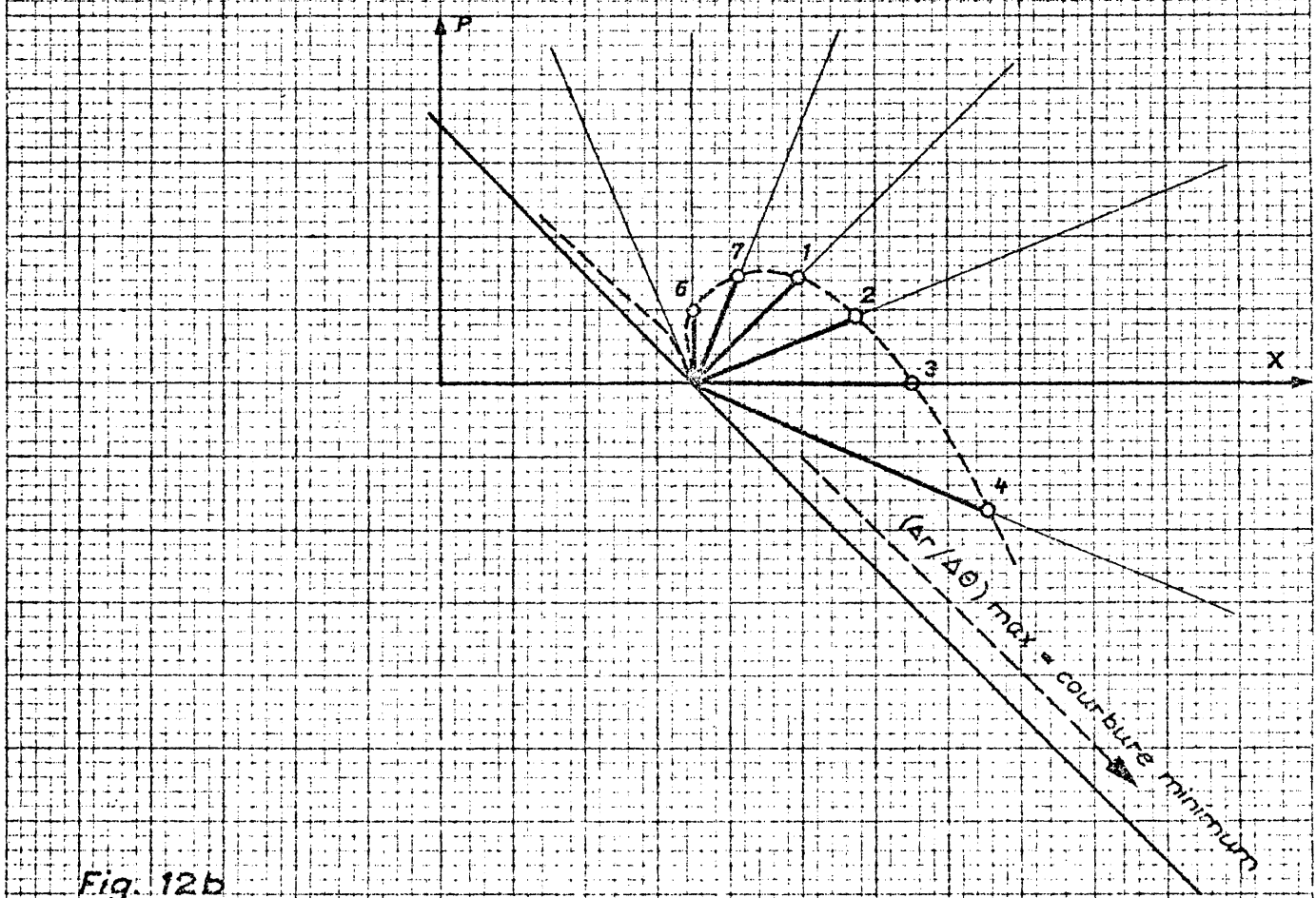
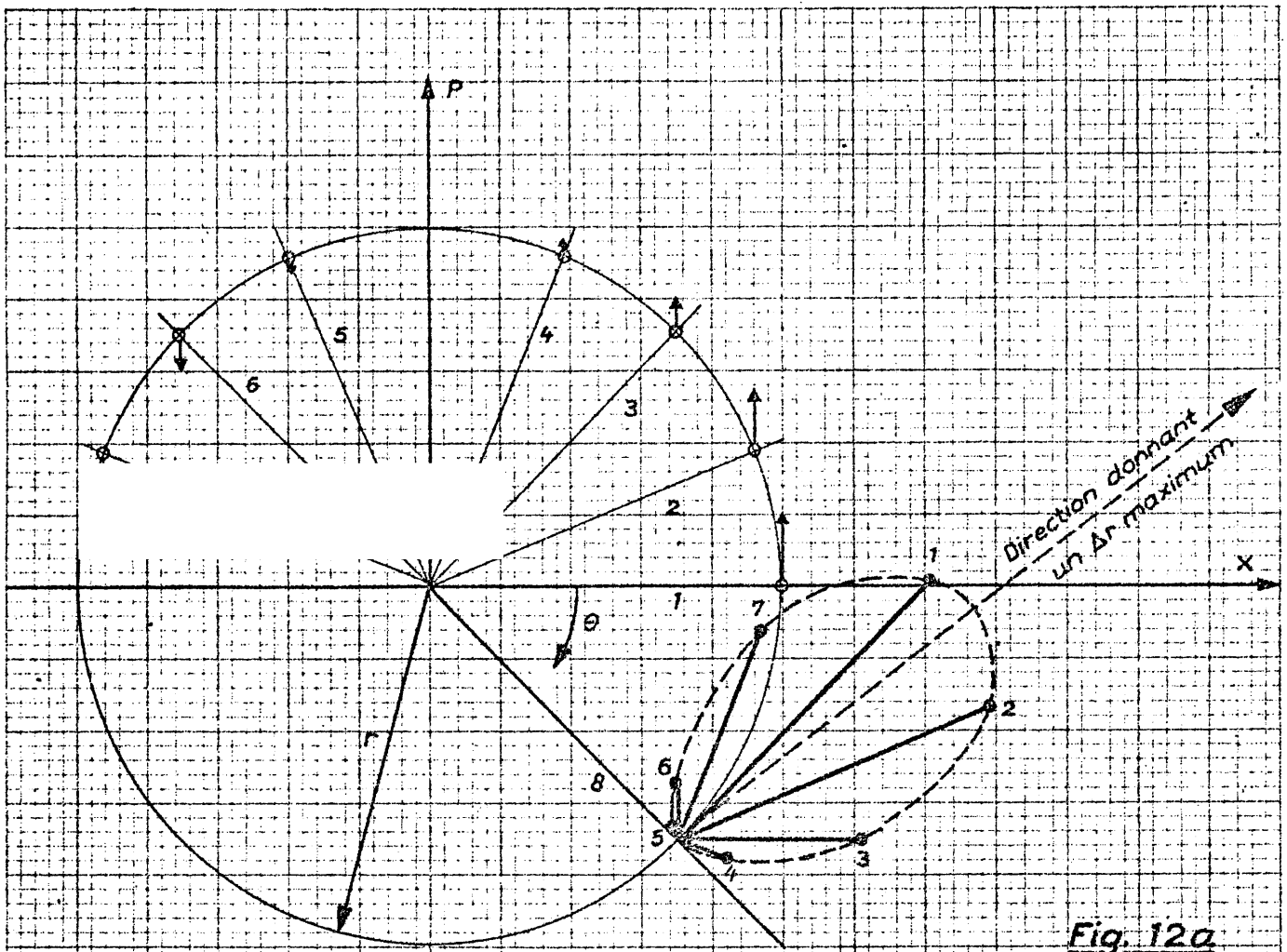
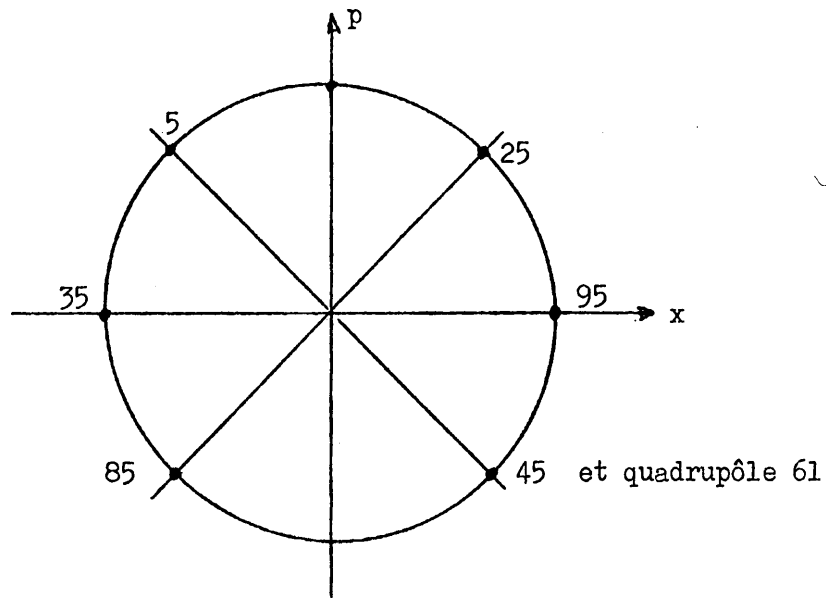


Fig. 11

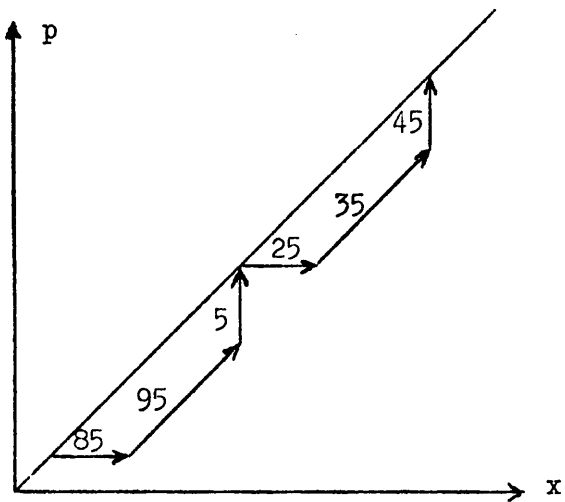


Position azimutale des 6 sextupôles



a.

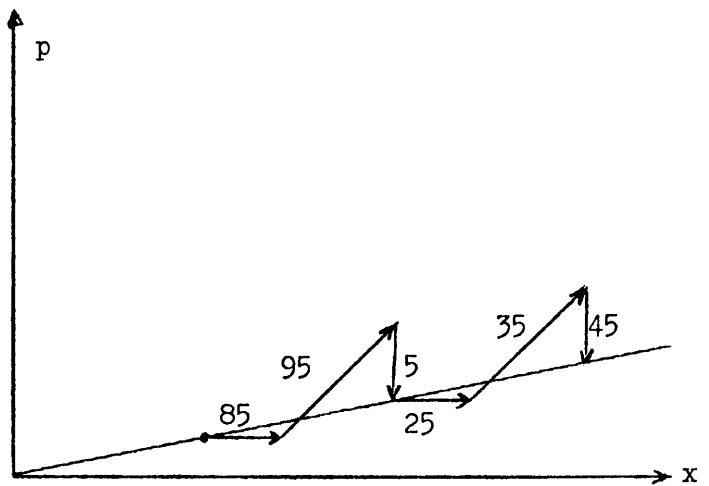
Composition, au point d'entrée, du quadrupôle des effets des 6 sextupôles



polarités

85-
95+
5-
25+
35-
45+

b.



polarités

85-
95+
5+
25+
35-
45-

c.

Fig. 13

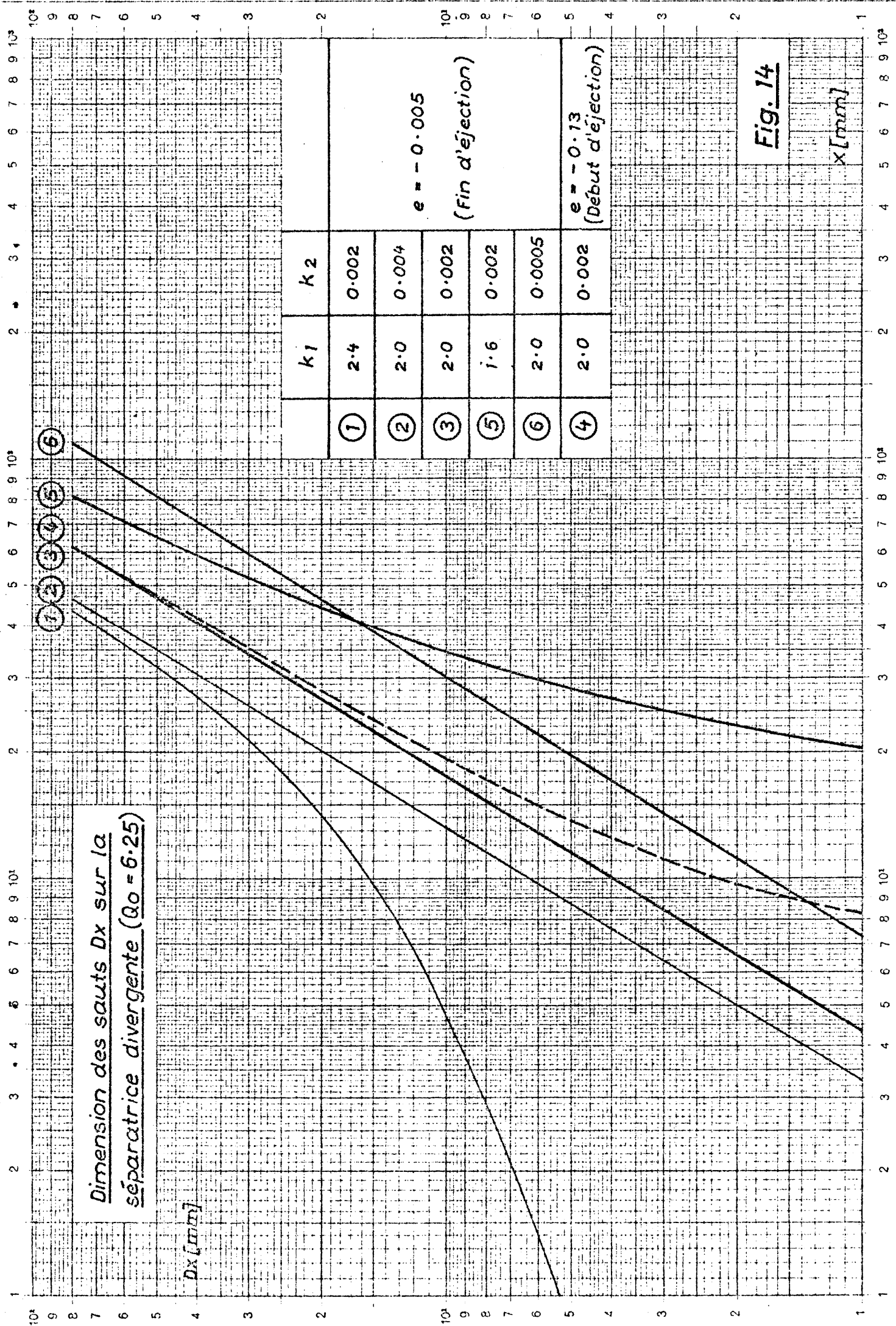


Fig. 14

Distribution de la densité de particules dans un faisceau de $Dx = 20\text{mm}$

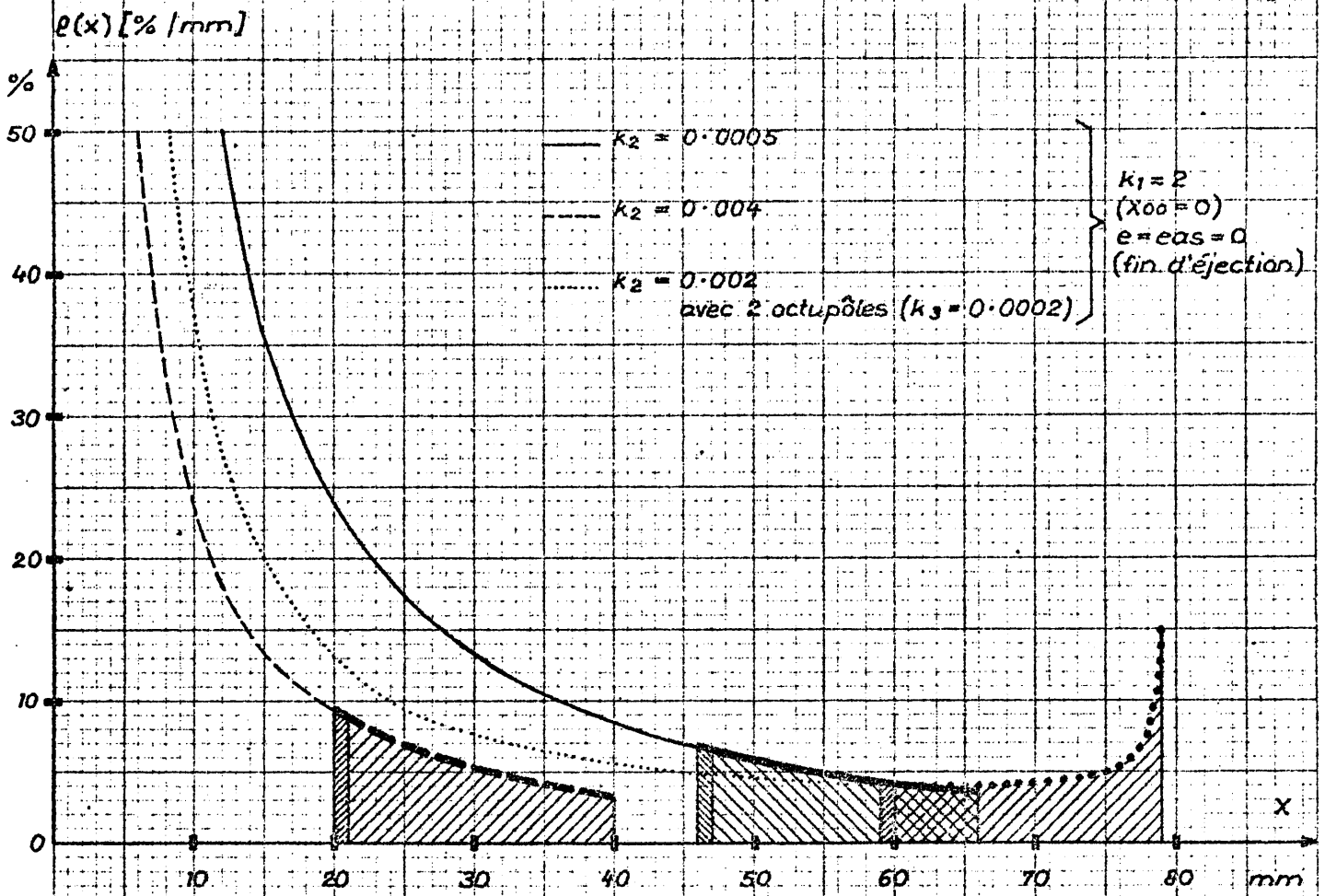


Fig. 15a

Séparatrices divergentes correspondantes

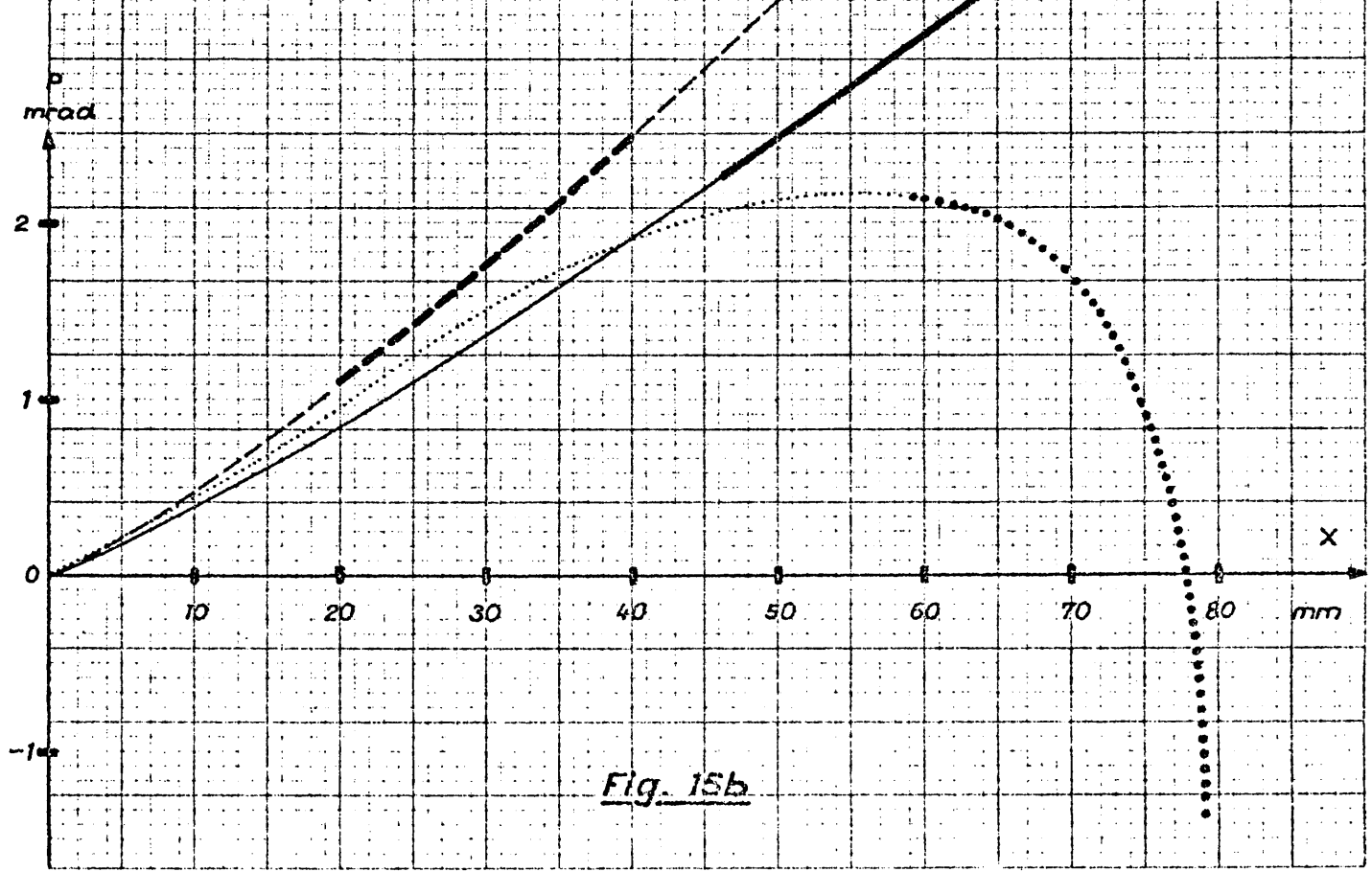
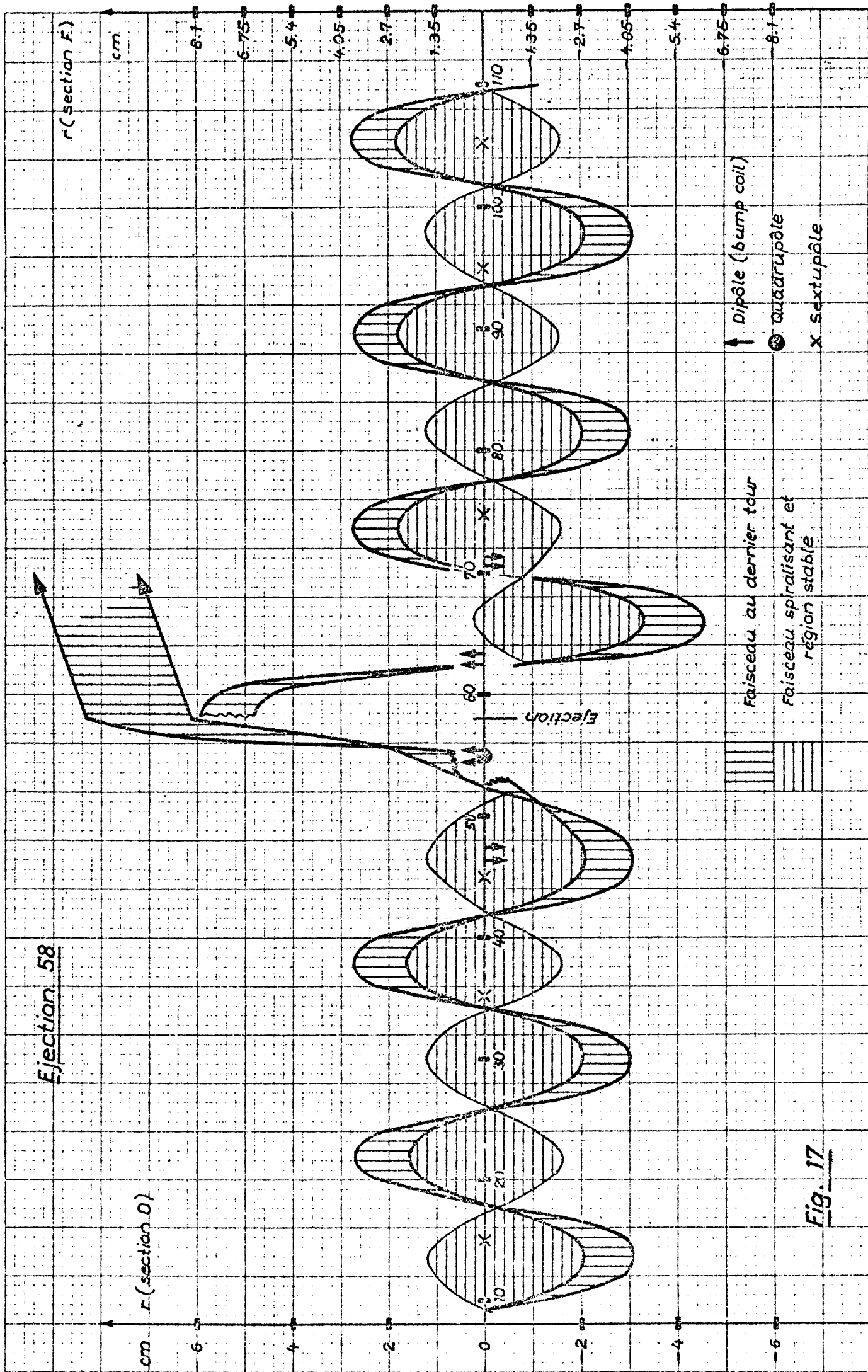


Fig. 15b

Ejection 58



Faisceau au dernier tour
 Faisceau spiralisant et région stable

Fig. 17

Ejection 58: plan de phase horizontal et densité de particules

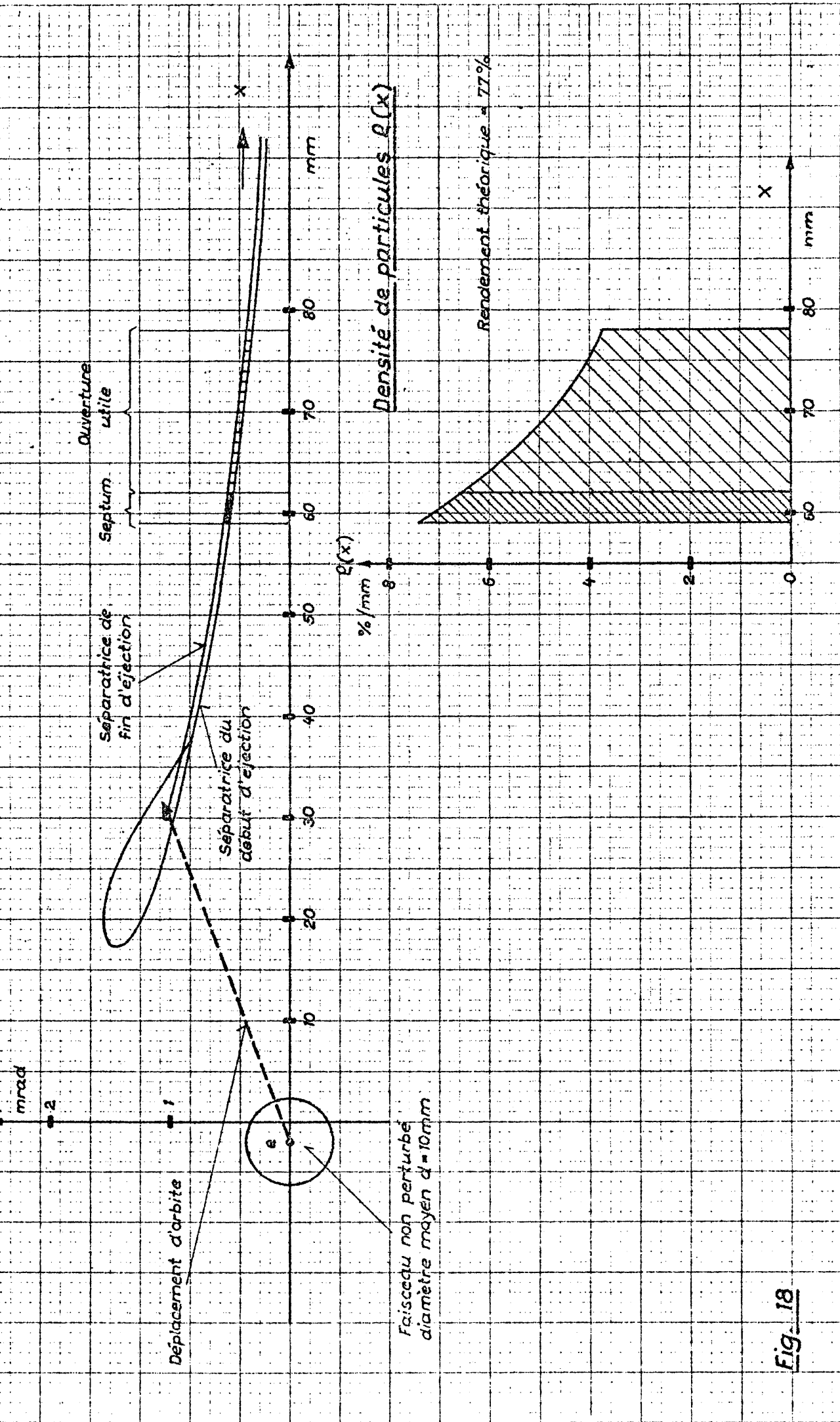


Fig. 18

Ejection 58

Emittance dans le plan de phase vertical d'un faisceau de diametre moyen $d = 10\text{mm}$

- ① en s-d 58 (non perturbé)
- ② en s-d 58 (adiabatique)
- ③ en s-d 59 (après traversée du champ de suite de l'unité N° 58)

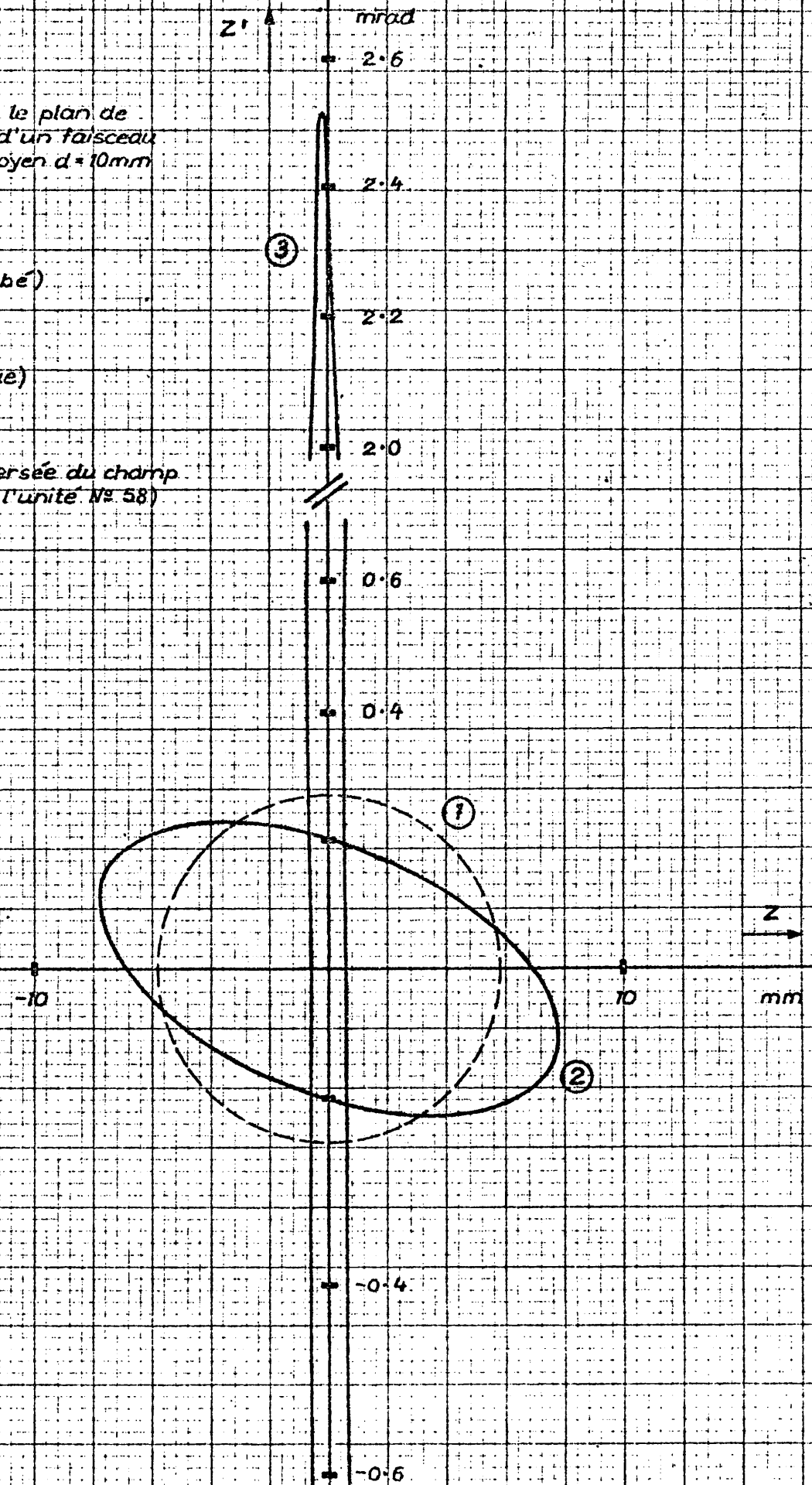


Fig. 19

Ejection 62 (1ère étape) plan de phase horizontal et densité de particules

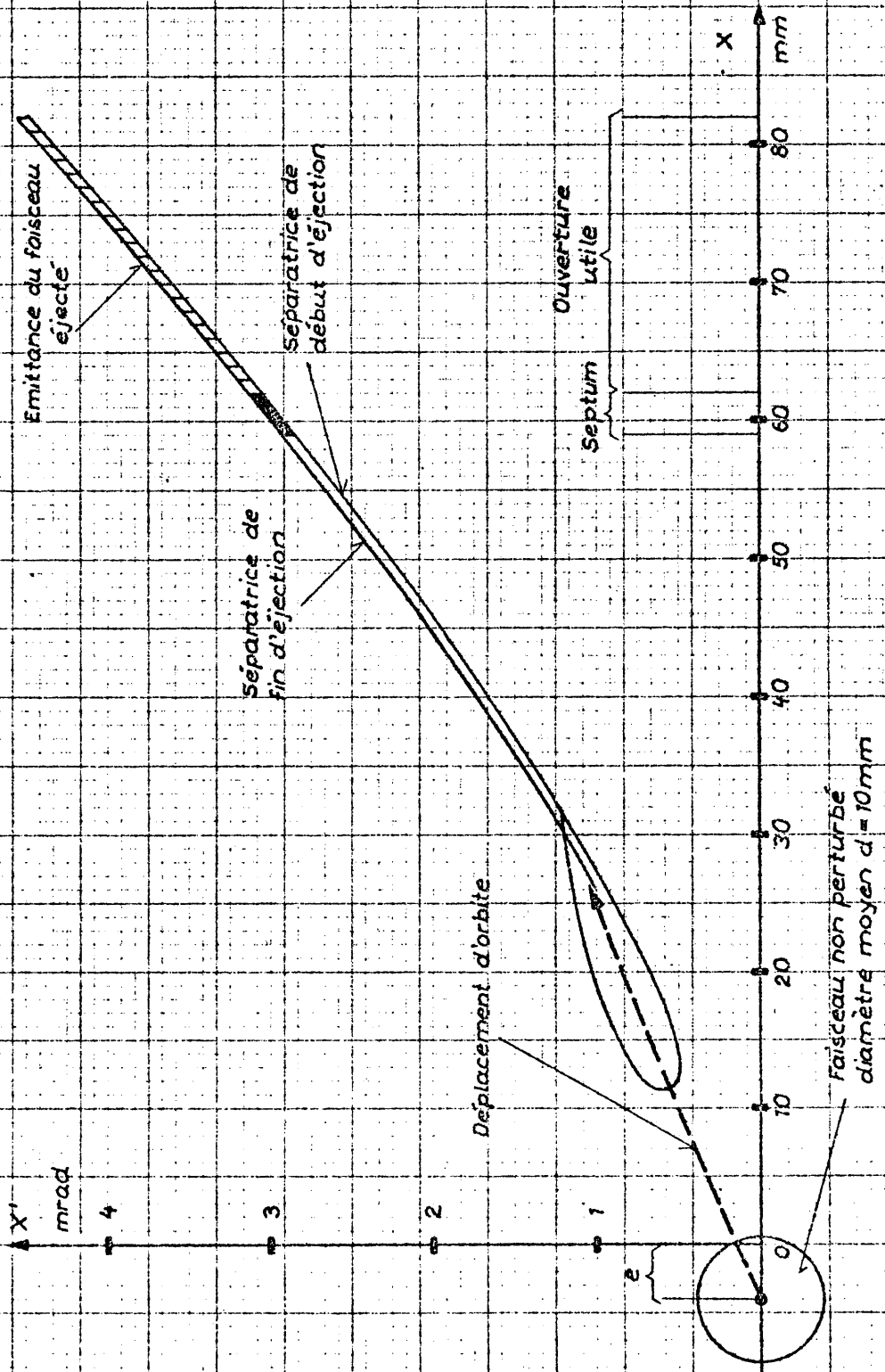
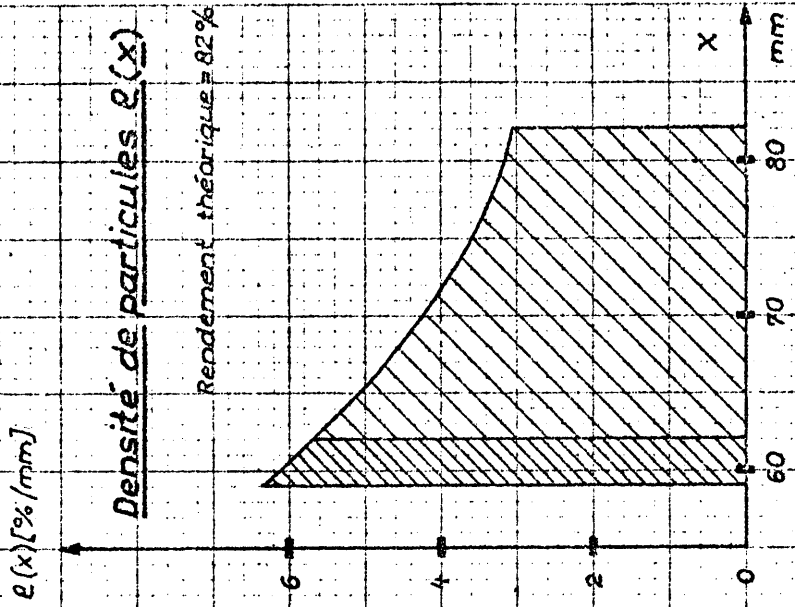


Fig. 20

Principe d'action de l'aimant à septum mince

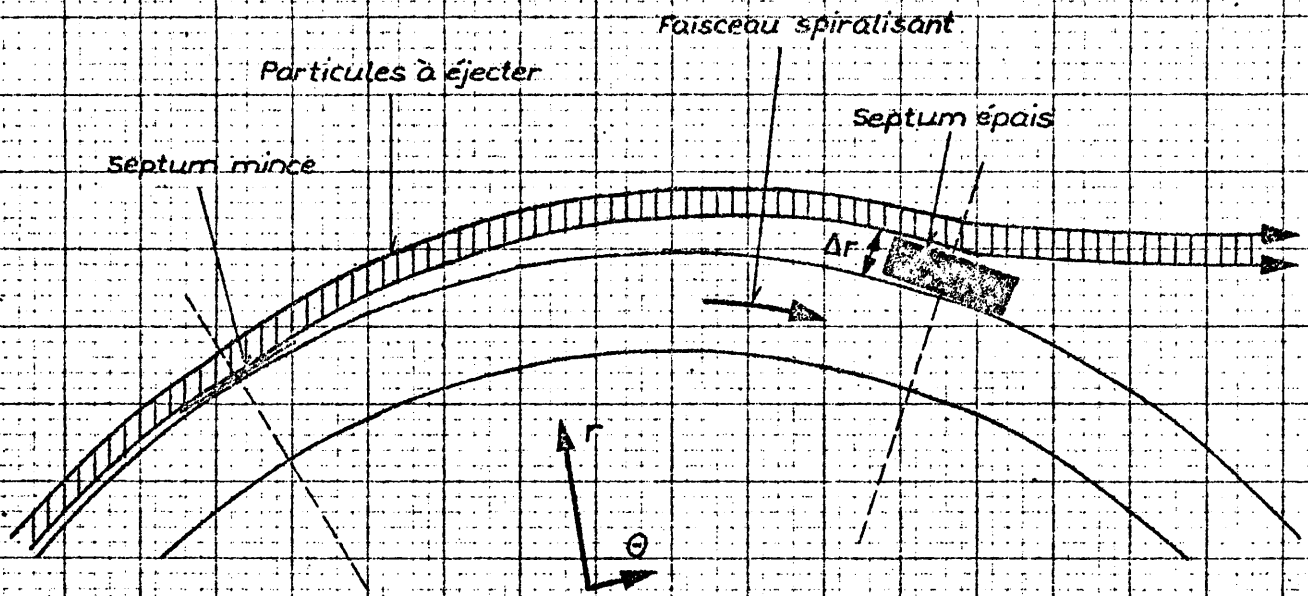


Fig. 21

Effet d'un dipôle placé avant le quadrupôle d'éjection

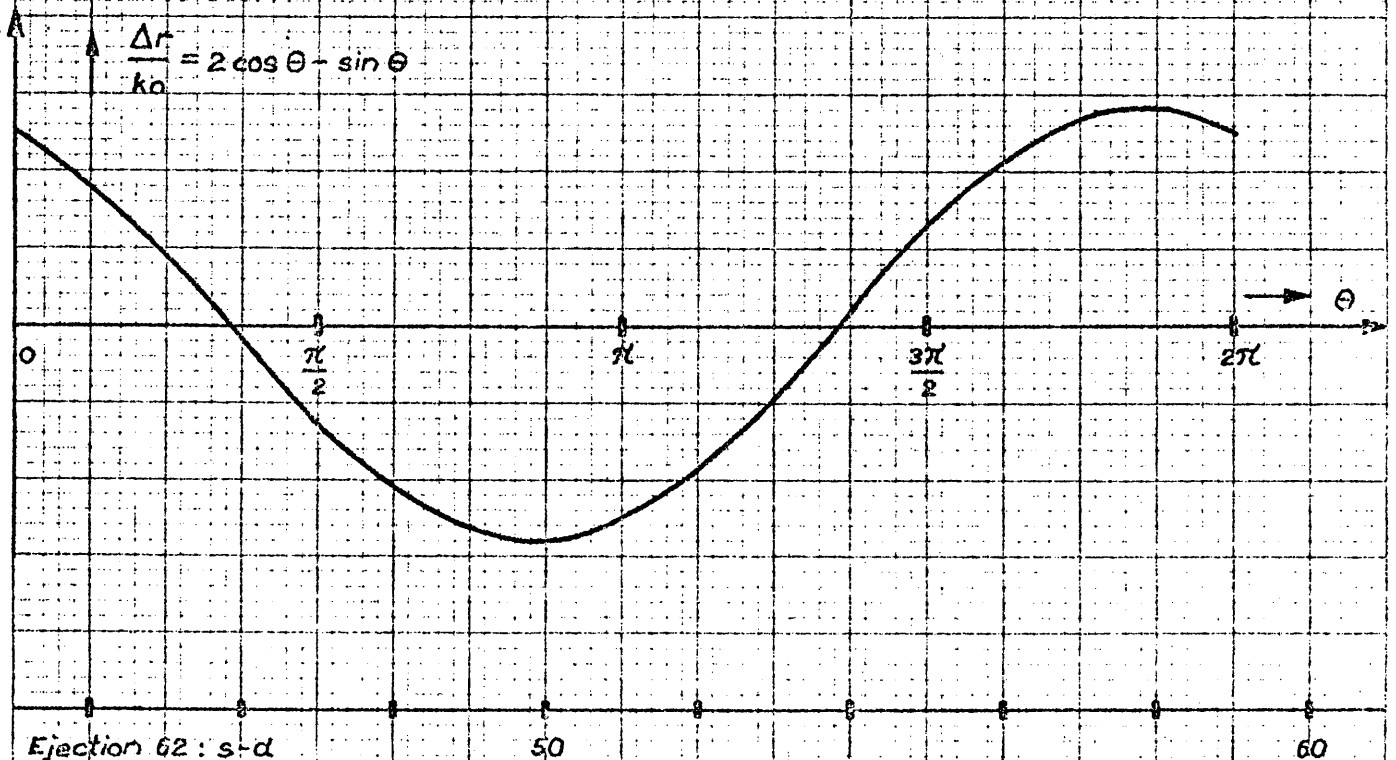


Fig. 22

Ejection 62: facteur de mérite pour la position du septum mince

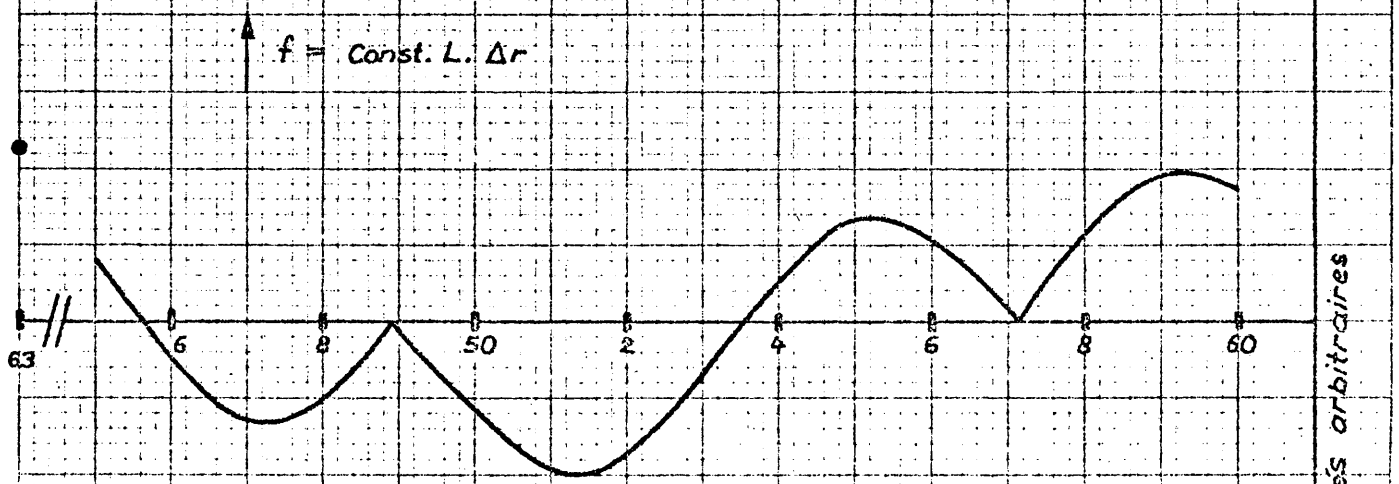
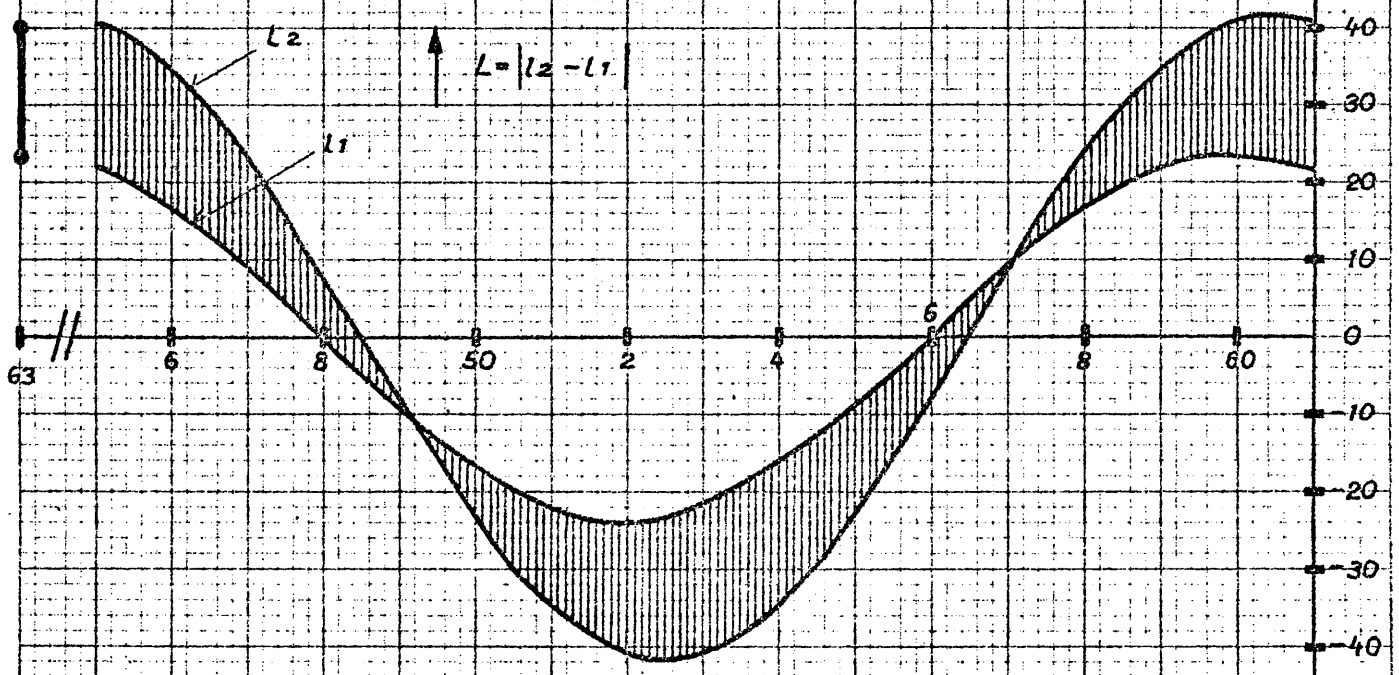
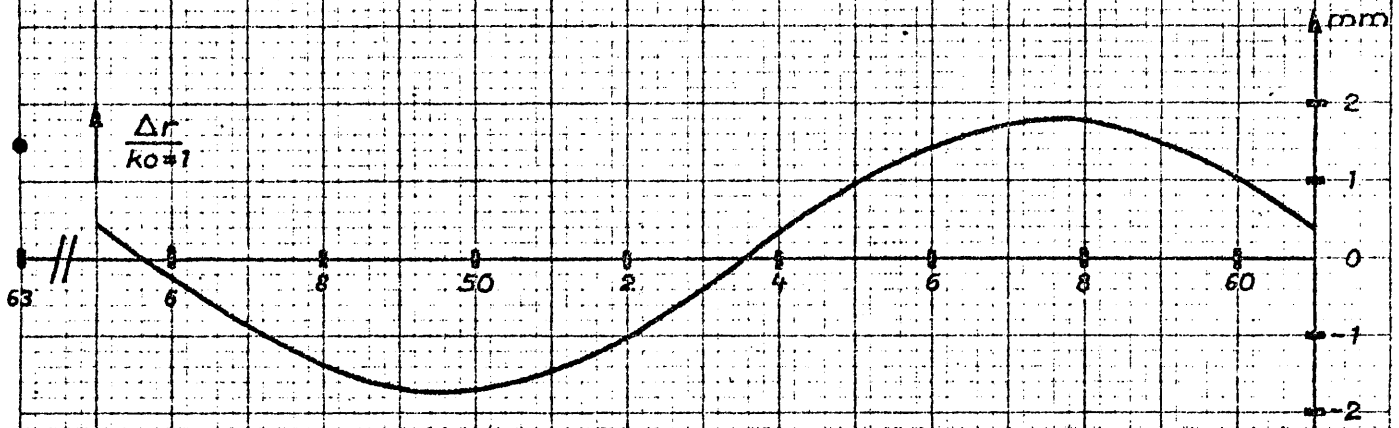


Fig. 23

Unités arbitraires

Ejection 58: facteur de mérite pour la position du septum mince

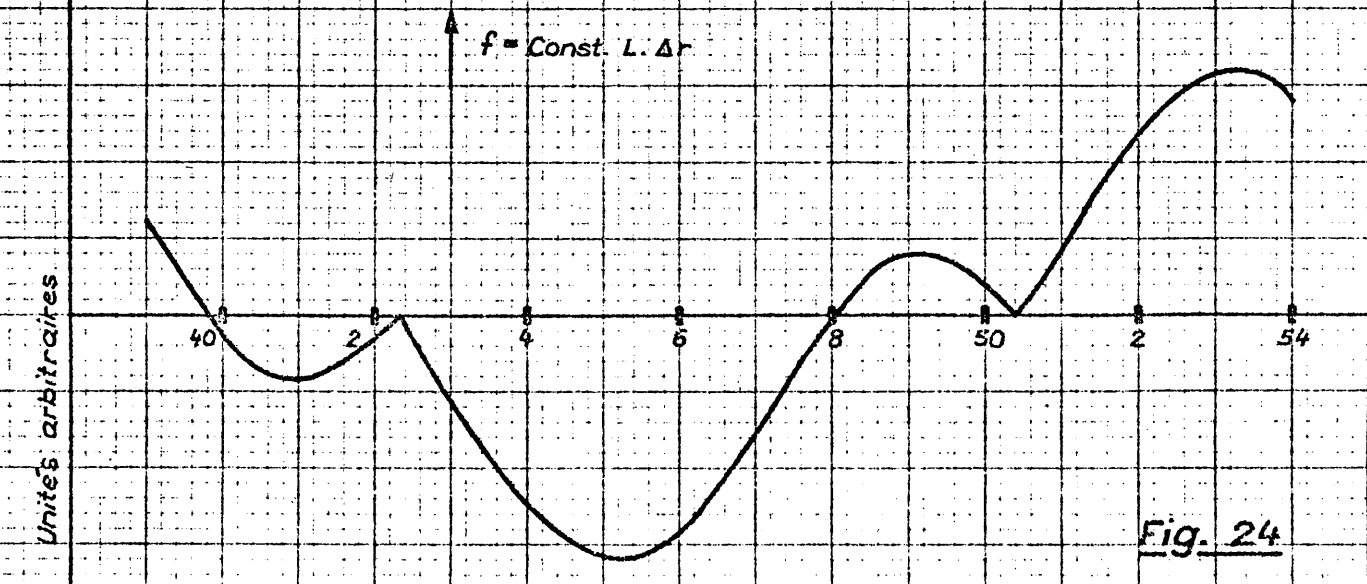
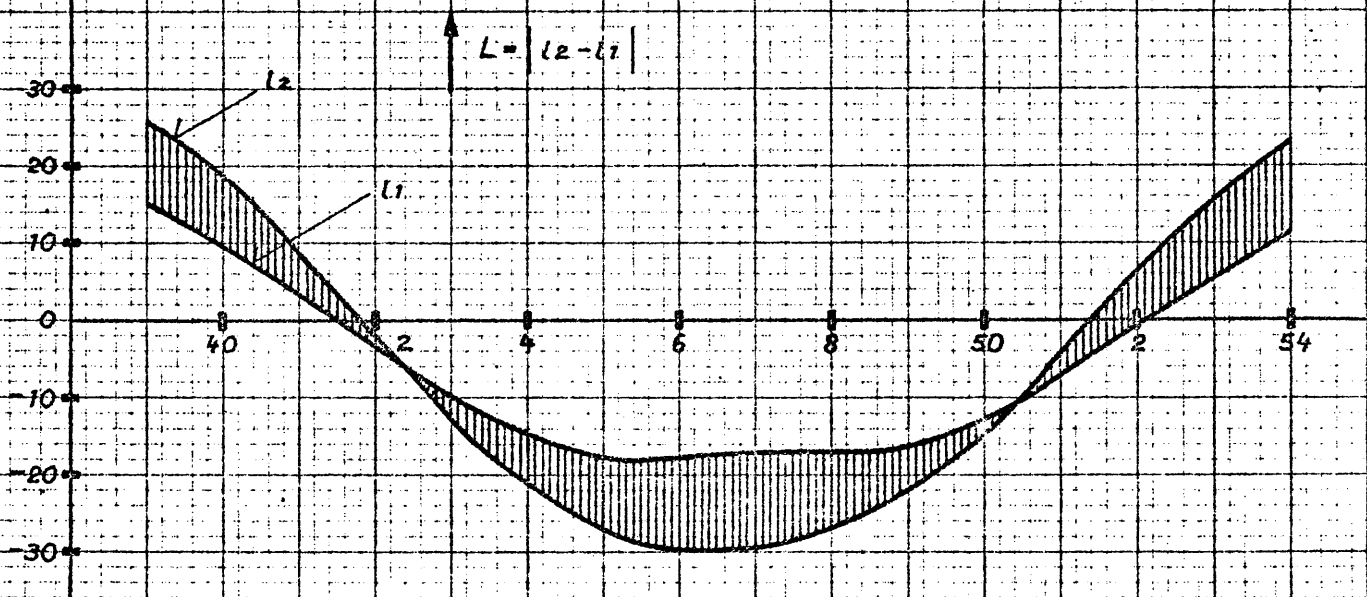
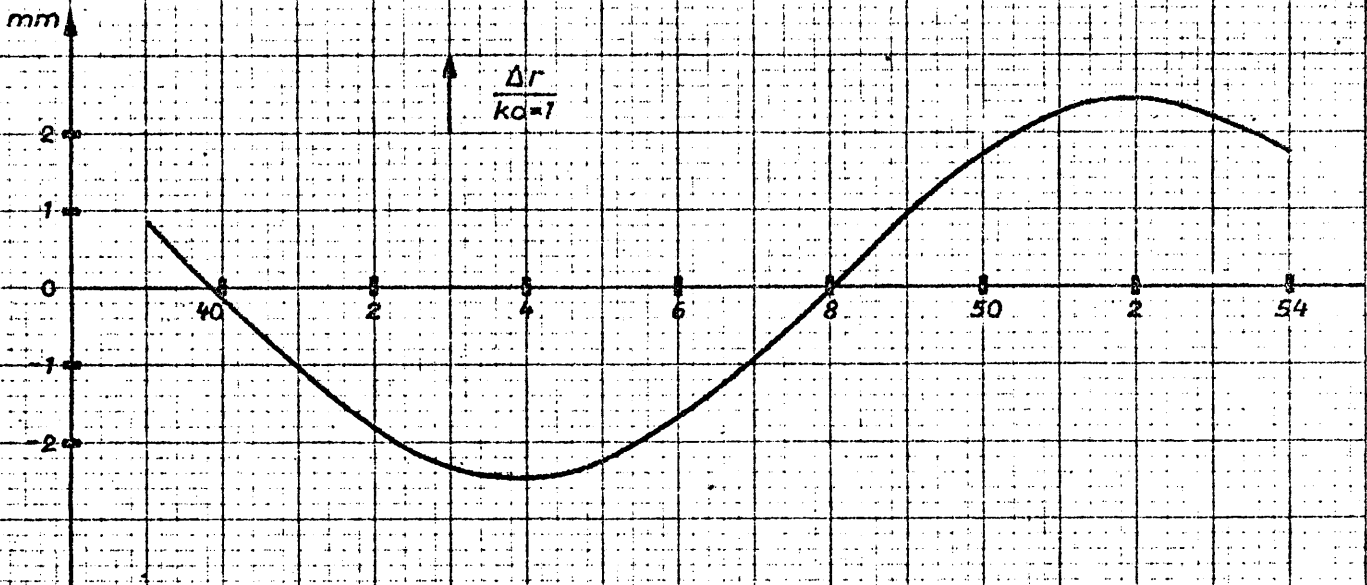


Fig. 24

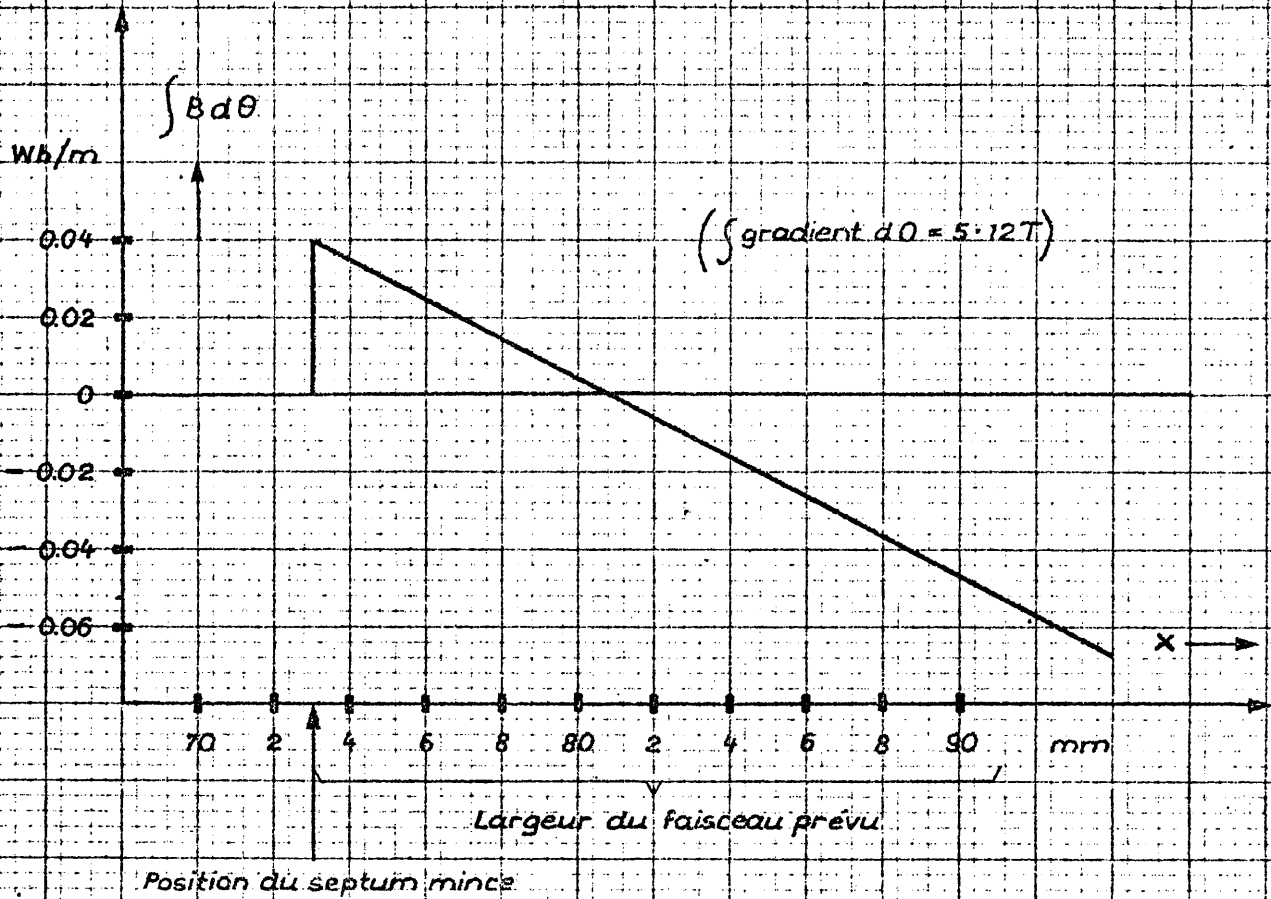


Fig. 25

Densité de particules $R(x)$

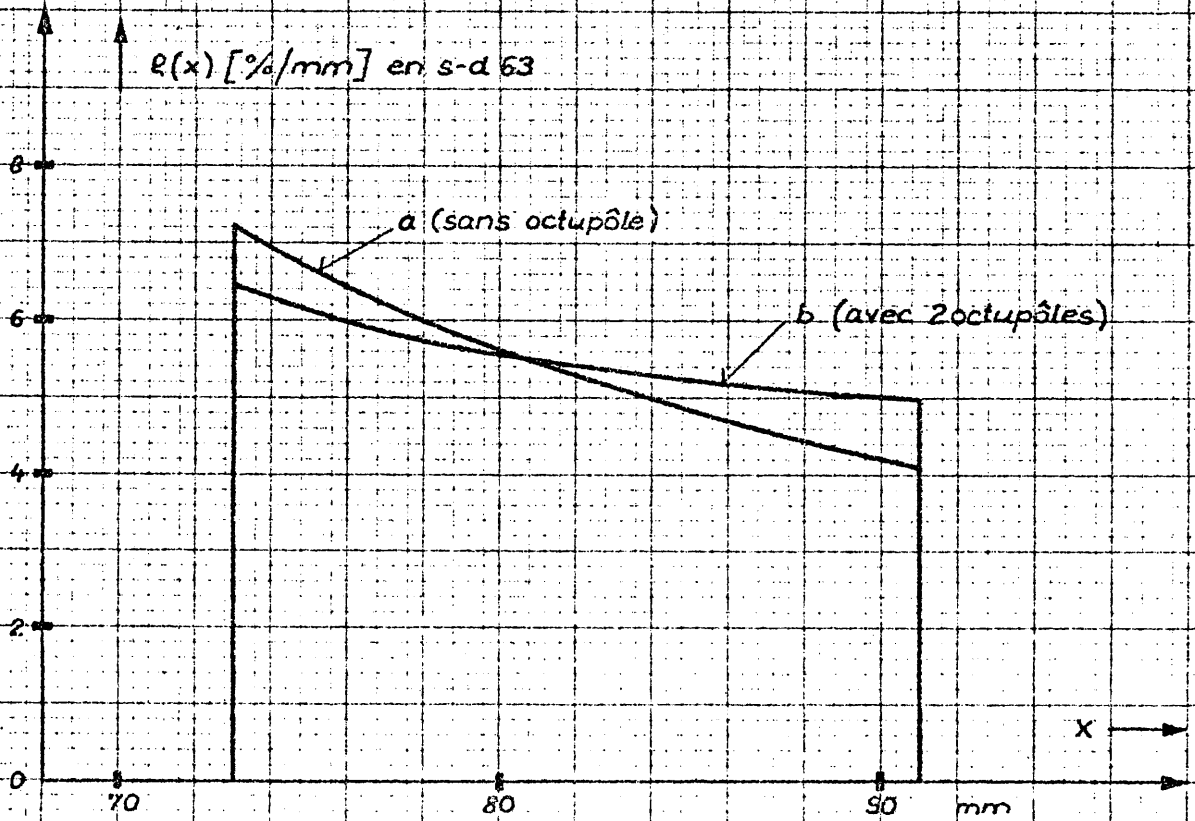


Fig. 26

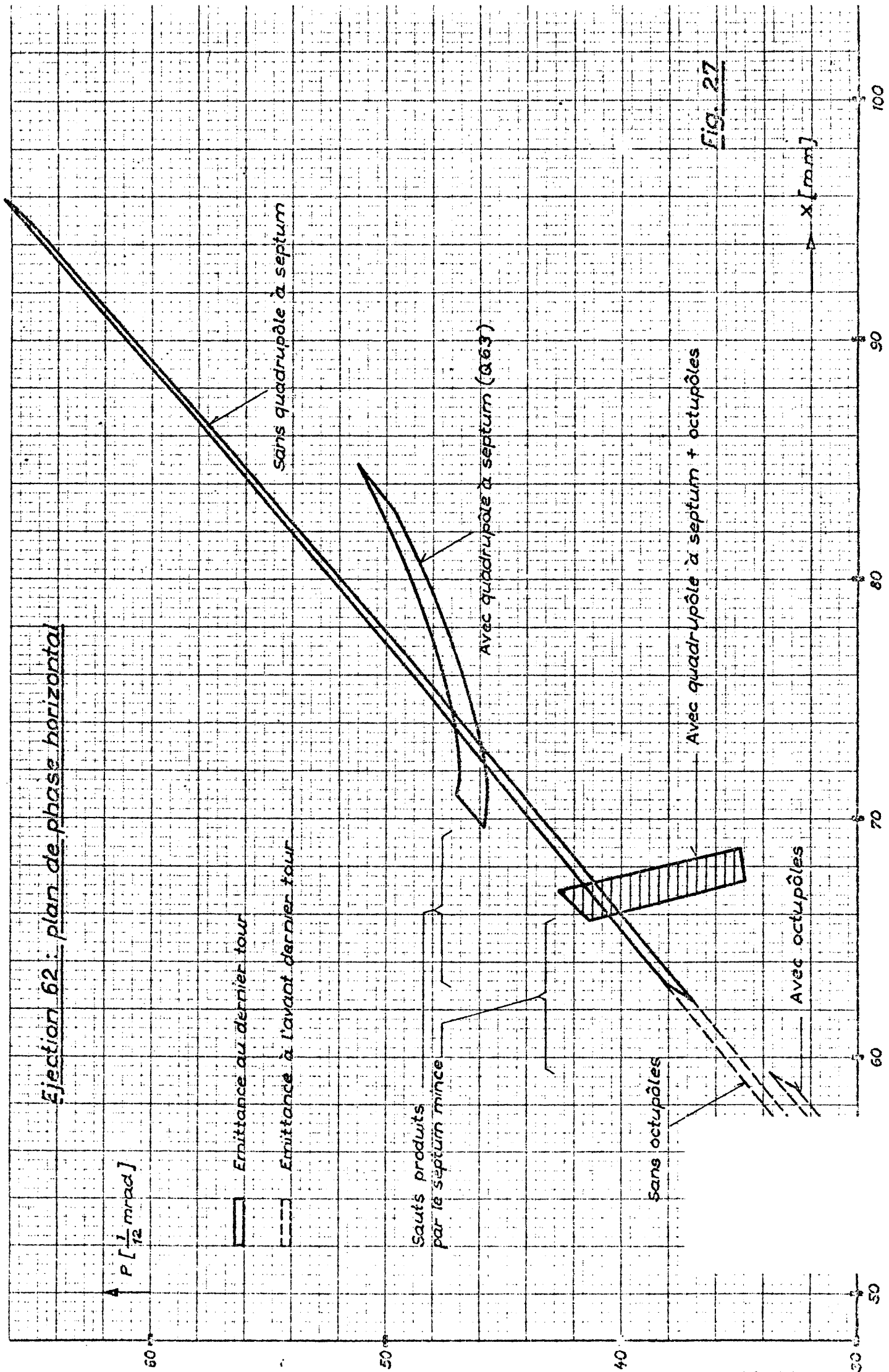


FIG. 27

Ejection 62 (2^{ème} étape) / Position radiale du faisceau au dernier tour

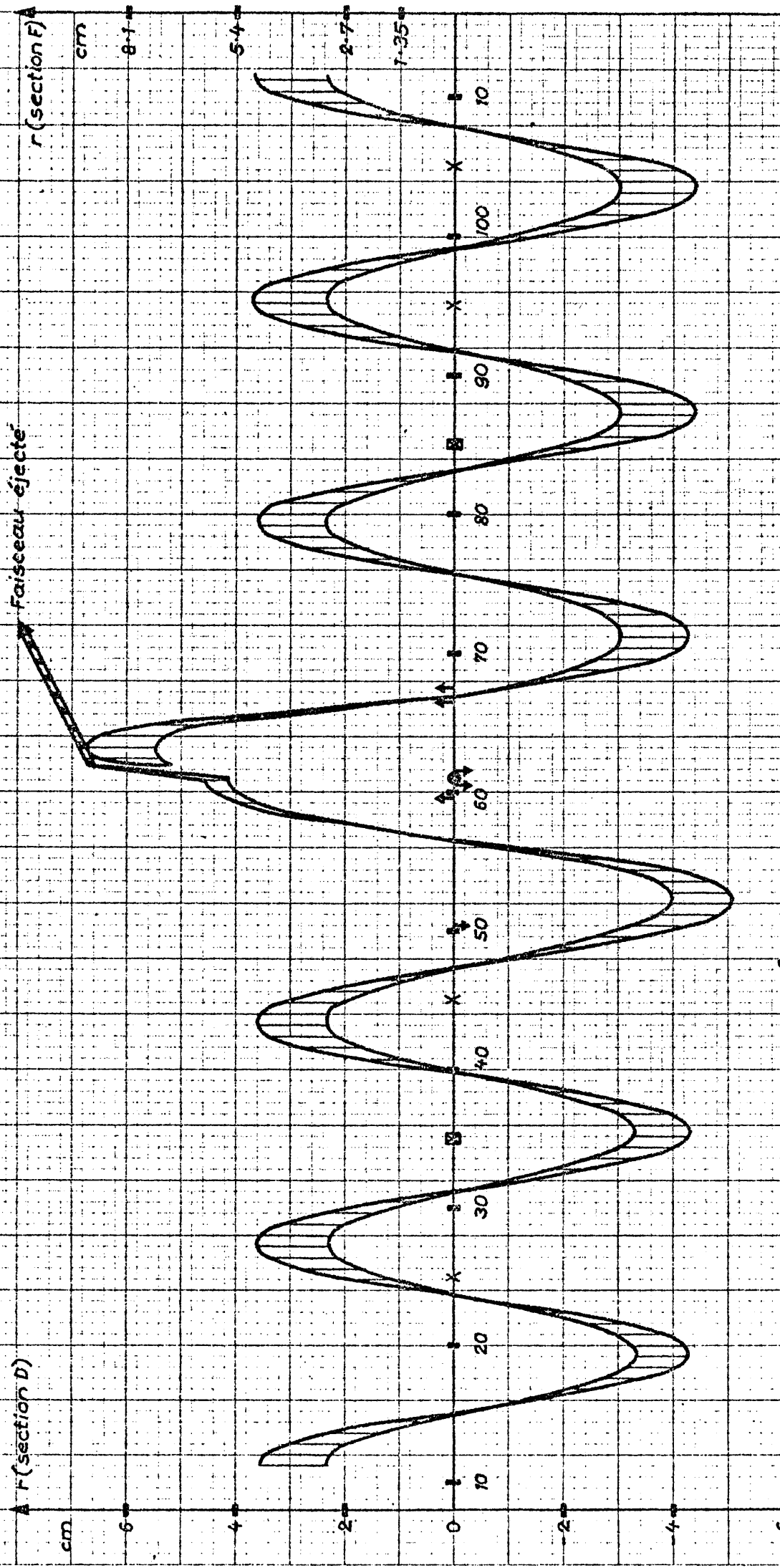
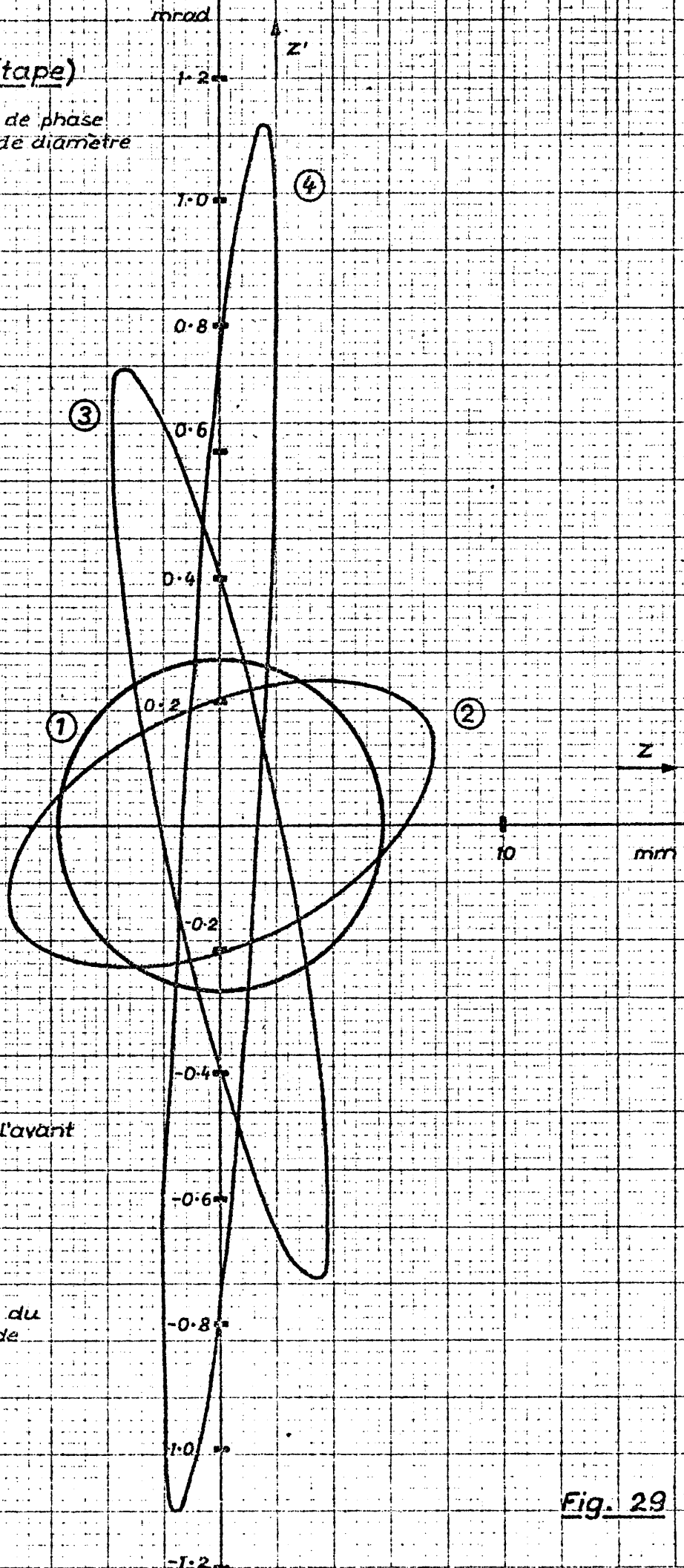


Fig. 28

Ejection 62 (2^{ème} étape)

Emission dans le plan de phase vertical d'un faisceau de diamètre moyen $d = 10\text{mm}$



- ① en s-d 62 (non perturbé)
- ② en s-d 62 (adiabatique, à l'avant dernier tour)
- ③ en s-d 62 (au dernier tour, avec Q 63)
- ④ en s-d 63 (après traversée du champ de fuite de l'unité N° 62)

Fig. 29

Plan de phase horizontal en s-d 62

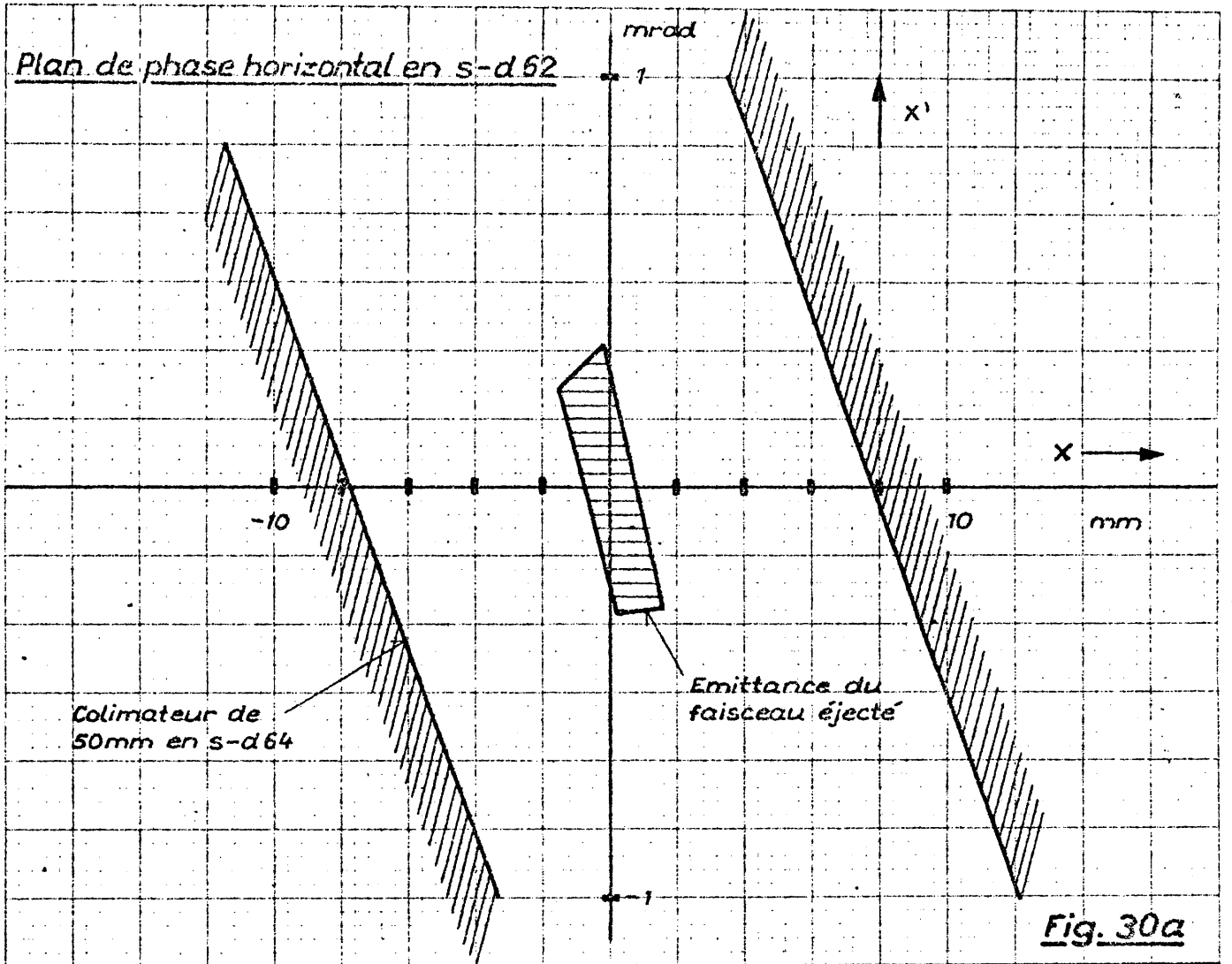


Fig. 30a

Plan de phase vertical en s-d 62

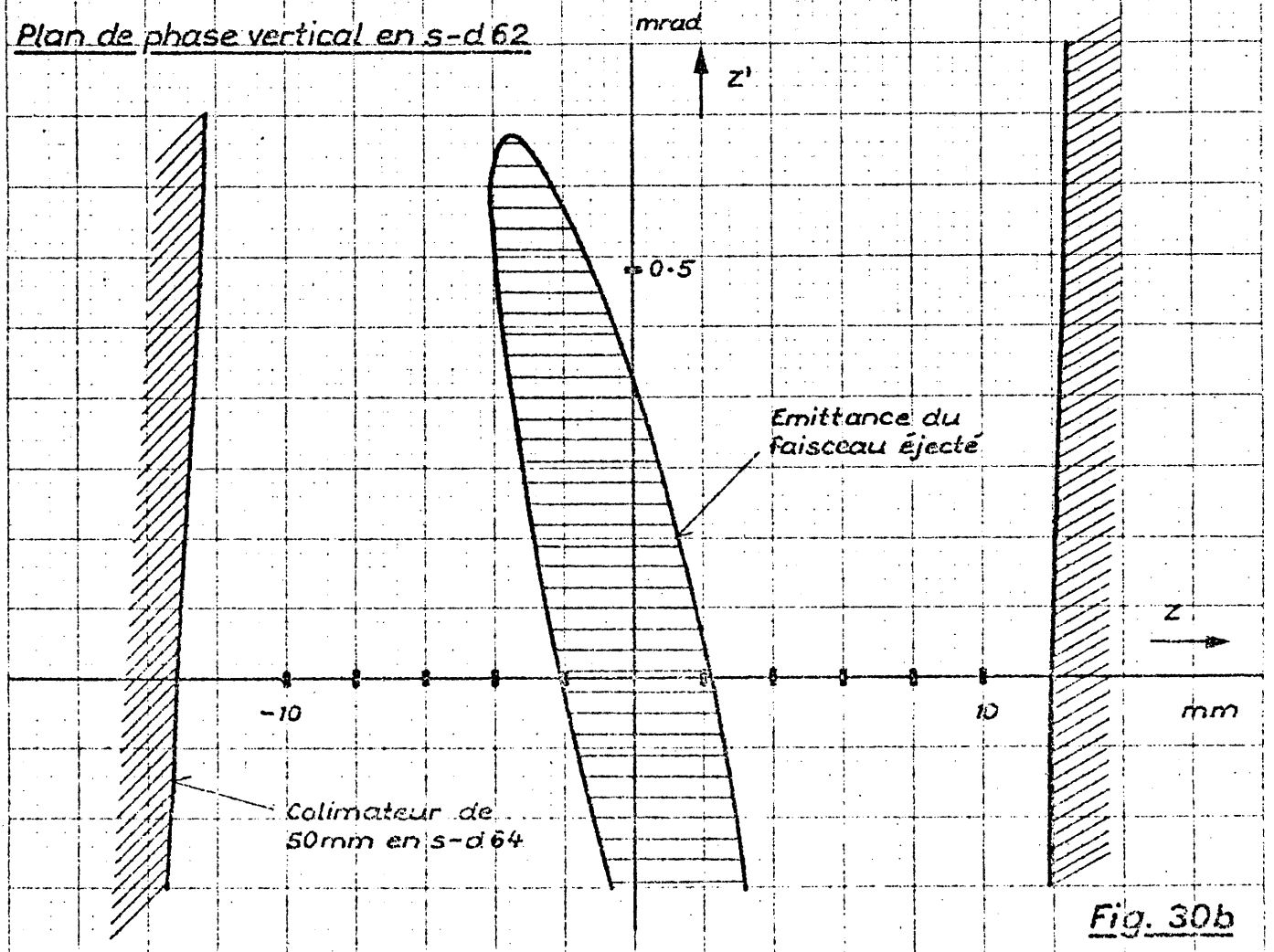


Fig. 30b