

ACCELERATION RF

Louis RINOLFI

DEA
Instrumentation et Mesures
Universite Joseph Fourier
Grenoble 1990.

ACCELERATION RF

Une approche pour "piétons"

	Page
Chapitre I	
LES CHAMPS ET LES FORCES	
1-Champ magnétique constant	2
2-Champ électrique constant	3
3-Champ magnétique variable	
4-Rappels de quelques relations relativistes	
4.1 Définitions et symboles utilisés	3
4.2 Relations relativistes	4
4.3 Unités	5
5-Notion d'énergie de transition	
5.1 Approche intuitive	6
5.2 Approche quantitative	7
6-Tension sinusoidale sur une particule	10
7-Principe de la stabilité de phase	13
Chapitre II	
PARAMETRES RF	
1-Nombre harmonique	16
2-Emittance et acceptance longitudinales	17
3-Tension, phase, fréquence RF	18
4-Quelques relations	
4.1 Energie constante	19
4.2 Rayon constant	19
4.3 Faisceau groupé sur un palier magnétique	19
4.4 Faisceau piloté par un oscillateur externe	19
Chapitre III	
ACCELERATION SYNCHRONE	
1-Particule synchrone	21
2-Particule non synchrone	
2.1 Données initiales	24
2.2 Equations du mouvement	26
3-Oscillations de faibles amplitudes	28
Chapitre IV	
OSCILLATIONS AVEC HAMILTONIEN	
1-Condition d'adiabaticité	36
2-Approche intuitive	36
3-Limites des oscillations en phase	39
4-Limites de la région stable	41
5-Amortissement adiabatique	42
6-Acceptance longitudinale	
6.1 Valeurs extrêmes sur l'axe des ordonnées	44
6.2 Surface du Bucket	46
7-Energie potentielle	47
Bibliographie	49

LES CHAMPS ET LES FORCES

I- Champ magnétique constant.

Dans un champ magnétique \vec{B} constant, une particule chargée e subit la force (Fig. 1)

$$\vec{F} = e\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (1)$$

Sa direction est toujours perpendiculaire à la vitesse \vec{v} de la particule. Ce type de force peut modifier la trajectoire de la particule, mais ne peut pas modifier sa vitesse, donc son énergie.

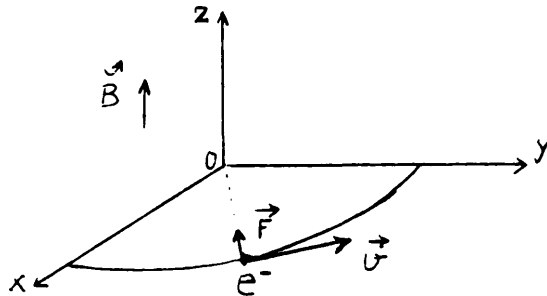


Fig. 1

Dans le plan xOy , une particule, à énergie constante, décrit un cercle en équilibre entre la force magnétique centripète et la force centrifuge.

$$evB = \frac{mv^2}{\rho}$$

En posant la quantité de mouvement $p = mv$

On en déduit

$$B\rho = \frac{p}{e} \quad (2)$$

et la fréquence angulaire de révolution

$$\omega = \frac{e}{m} B \quad (3)$$

$B\rho$ est la "rigidité du faisceau".

L'analyse de l'équation (2) nous montre:

- a) Pour une particule à énergie constante, si B augmente, ρ diminue. Cette particule est d'autant plus déviée que le champ magnétique est plus important.

- b) Pour une particule dont l'énergie croît, le rayon de courbure augmente pour un B constant. Une particule est moins déviée lorsque son énergie augmente.

II- Champ électrique constant.

Dans un champ électrique \vec{E} , une particule chargée subit une force

$$\vec{F} = e\vec{E} \quad (4)$$

Sa direction est toujours parallèle au champ électrique. Ce type de force peut modifier la trajectoire de la particule mais aussi sa vitesse donc son énergie.

On peut l'utiliser pour accélérer ou décélérer des particules.

Le champ électrique, dérivant d'un potentiel, est produit à partir d'une tension sinusoïdale appliquée dans une ou plusieurs cavités où passent les particules.

On verra plus loin, l'intérêt d'une forme sinusoïdale.

Ce type de forces est utilisé aussi bien dans les cavités RF des machines circulaires que dans les sections HF des accélérateurs linéaires.

On l'utilise aussi pour le refroidissement stochastique des faisceaux. (v. cours suivant)

III- Champ magnétique variable.

Selon les équations de Maxwell, un champ \vec{B} variable produit un champ \vec{E}

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$$

Ce type d'accélération est mis en application dans le Bétatron.

Avec un potentiel scalaire nul et une seule composante du potentiel vecteur A_ϕ , différente de zéro, à cause des symétries du champ, on obtient l'accélération par l'équation de Newton-Lorentz:

$$\frac{dp}{dt} = eE_\phi = -\frac{1}{2} e \int \frac{d\bar{B}_z}{dt}$$

IV- Rappels de quelques relations relativistes.

IV-1 Définitions et symboles utilisés.

$$\beta = \frac{v}{c} = \text{vitesse réduite}$$

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{\text{énergie totale}}{\text{énergie au repos}}$$

$$\left. \begin{aligned} E &= mc^2 && \text{énergie totale} \\ E_0 &= m_0 c^2 && \text{énergie au repos} \end{aligned} \right\} (5)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{masse de la particule} \quad (6)$$

$$\gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}} \right\} (7)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$$\beta^2 = \frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}$$

$$(\beta\gamma)^2 = \gamma^2 - 1 \quad \left. \vphantom{\frac{\gamma^2 - 1}{\gamma^2}} \right\} (8)$$

$$p = m v = \frac{E}{c^2} \beta c = \beta \frac{E}{c}$$

$$p = \frac{\beta \gamma E_0}{c} = \beta \gamma m_0 c \quad \left. \vphantom{\frac{\beta \gamma E_0}{c}} \right\} (9)$$

IV-2 Relations relativistes.

a) Quantité de mouvement

Des équations (7) et (9) on déduit:

$$pc = \beta E = \beta \gamma E_0$$

De (6):

$$m^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2$$

$$m^2 c^2 - m_0^2 c^2 = m^2 v^2$$

Multiplions par c^2

$$(m c^2)^2 - (m_0 c^2)^2 = m^2 v^2 c^2$$

D'après (5) et (9)

$$\boxed{p^2 c^2 = E^2 - E_0^2} \quad (10)$$

b) Energies

$$\boxed{E = E_0 + E_c} \quad (11)$$

E_c = énergie cinétique

Divisons par E_0

$$\frac{E}{E_0} = 1 + \frac{E_c}{E_0}$$

$$\boxed{\gamma = 1 + \frac{E_c}{E_0}} \quad (12)$$

$\gamma \simeq 1$	particule non relativiste	$\beta \ll 1$
$\gamma > 1$	particule relativiste	$\beta < 1$
$\gamma \gg 1$	particule ultra-relativiste	$\beta \simeq 1$

IV-3 Unités

Bien que toutes les relations données s'appliquent avec les unités SI ou MKSA, les physiciens de dynamique de particules utilisent l'électron-volt comme unité d'énergie (ou ses multiples), compte-tenu du fait que les valeurs mises en jeu sont infimes.

Les équations (5) et (9) permettent de donner le tableau d'unités suivant:

Paramètres	Unités
Energie	eV
Masse	eV / c^2
Quantité de mouvement	eV / c

Table 1

Exemple pour la rigidité:

D'après (2) la rigidité s'exprime par

$$B\rho = \frac{p}{e}$$

On montrera, en exercice, que

$$\boxed{p \simeq 0.3 B \rho} \quad (13)$$

GeV/c T m

V- Notion d'énergie de transition.

V-1 Approche intuitive

L'augmentation d'énergie a deux effets contradictoires:

- une augmentation de vitesse
- une augmentation de longueur de trajectoire

Suivant l'amplitude de variation de ces deux paramètres, la fréquence de révolution évolue différemment.

La fréquence angulaire d'une particule dans un synchrotron s'écrit:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi v}{C} = 2\pi f \quad (14)$$

T = période de révolution

C = longueur de la circonférence

v = vitesse de la particule

f = fréquence de révolution

Si la vitesse s'accroît plus vite que la longueur, la fréquence de révolution augmente. Si la vitesse s'accroît moins vite que la longueur, la fréquence de révolution diminue.

Pour un synchrotron donné, on fait la différence entre basse et haute énergie.

A haute énergie, la vitesse est proche de celle de la lumière et elle ne varie pratiquement plus.

A basse énergie, l'accroissement de vitesse est plus important que la variation de trajectoire.

Il y a donc une énergie intermédiaire pour laquelle la variation de vitesse est compensée par la variation de trajectoire.

C'est l'énergie de transition.

A ce niveau-là, une variation d'énergie ne modifie pas la fréquence.

V-2 approche quantitative.

Rappelons quelques définitions concernant deux paramètres:

α_p "momentum compaction"

η dispersion de fréquences angulaires

a)

$$\alpha_p = - \frac{\frac{dC}{C}}{\frac{dp}{p}}$$

$C = 2\pi R$ longueur de la trajectoire circulaire

$$\alpha_p = - \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dp}{p}} \quad (15)$$

b)

$$\eta = \frac{\frac{d\omega}{\omega}}{\frac{dp}{p}}$$

en tenant compte de l'équation (14)

$$\eta = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dp}{p}} \quad (16)$$

c) Champ magnétique moyen le long de l'orbite fermée.

$$\langle B \rangle = \frac{1}{C} \oint B_f ds$$

En différentiant l'équation (2) appliquée à une particule qui parcourt une orbite fermée de rayon R et de champ moyen $\langle B \rangle$

$$\langle B \rangle R = \frac{p}{e}$$

$$\frac{d\langle B \rangle}{\langle B \rangle} + \frac{dR}{R} = \frac{dp}{p}$$

d'après (15)

$$\frac{d \langle B \rangle}{\langle B \rangle} = (1 - \alpha_r) \frac{dp}{p} \quad (17)$$

Différentions l'équation (14)

$$\frac{d\omega}{\omega} = - \frac{dT}{T} = \frac{d\beta}{\beta} - \frac{dC}{C} \quad (18)$$

L'équation (15) nous donne l'expression de $\frac{dC}{C}$

On obtient l'expression de $\frac{d\beta}{\beta}$ en différentiant (9) écrite sous la forme

$$p = \frac{m_e c \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{d\beta}{\beta}$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma^2 \frac{d\beta}{\beta}$$

On porte dans (18)

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{\omega} &= \frac{1}{\gamma^2} \frac{dp}{p} - \alpha_r \frac{dp}{p} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_r \right) \frac{dp}{p} \end{aligned}$$

En appliquant la définition de η

$$\boxed{\eta = \frac{\frac{d\omega}{\omega}}{\frac{dp}{p}} = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_r} \quad (19)$$

Pour une machine donnée, α_p est un paramètre fixe.

Pour un accélérateur de particule, γ est un paramètre variable.

La formule (19), nous indique que la dispersion des fréquences angulaires est nulle pour

$$\alpha_p = \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \quad (20)$$

γ_{tr} est l'énergie pour laquelle la variation de vitesse est compensée par la variation de trajectoire.

C'est l'énergie de transition

$$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\gamma_{tr}^2} \quad (21)$$

$\eta < 0$ lorsque γ est grand (hautes énergies)

$\eta > 0$ lorsque γ est petit (basses énergies)

Remarques:

1) Dans plusieurs accélérateurs circulaires, les particules passent par l'énergie de transition
Ex.

	PS	SPS	LHC
α_p	0,027	0,00186	0,00039
E_{tr} (GeV)	5,7	21,7	47,5

2) Dans les accumulateurs, les particules restent au-dessus ou au-dessous de cette énergie.

Ex. dans la machine AA: $\alpha_p = 0,175$

$$E_{tr} = 2,2 \text{ GeV}$$

pour une énergie de 3,6 GeV des antiprotons accumulés.

3) Dans les accélérateurs linéaires, $\rho \rightarrow \infty$
donc $\alpha_p \simeq 0$ et η est toujours positif.

VI- Tension sinusoïdale sur une particule.

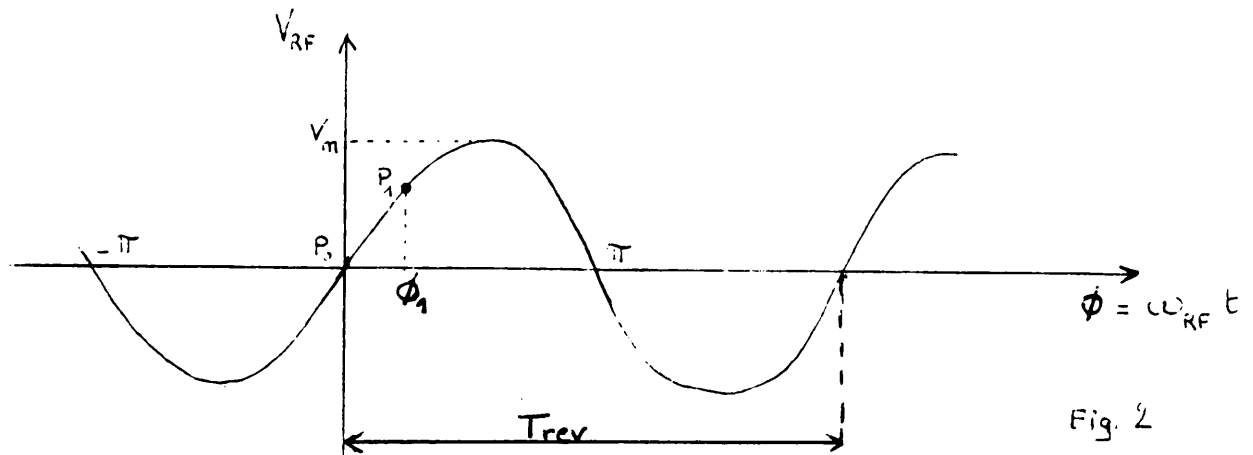


Fig. 2

Considérons une particule P_0 tournant dans un synchrotron à une énergie inférieure à l'énergie de transition ($\eta > 0$).

A chaque tour, elle traverse une cavité RF (Radio Fréquence), alimentée par une tension sinusoïdale

$$V = V_m \sin \phi$$

Si la fréquence de révolution de P_0 est égale à la fréquence de l'onde RF, et si P_0 arrive à l'instant $t = 0$ (phase nulle), cette particule n'est ni accélérée, ni décélérée.

On appelle P_0 particule synchrone.

Considérons maintenant une autre particule P_1 qui entre dans la cavité avec la phase ϕ_1 , mais avec la même énergie que P_0 , c'est-à-dire la même vitesse (Fig.2)

Cette particule va subir l'effet d'une tension

$$V_m \sin \phi_1$$

donc l'effet d'un champ accélérateur \vec{E} .

En gardant l'hypothèse $\eta > 0$, considérons les deux cas suivants:

- a) $0 < \varphi_1 < \pi$ P_1 est en retard sur P_0 mais subit un champ accélérateur, donc un gain d'énergie. Elle va plus vite et sa période de révolution diminue. Elle se rapproche de P_0 au tour suivant.
- b) $-\pi < \varphi_1 < 0$ P_1 est en avance sur P_0 mais subit un champ décélérateur, donc une perte d'énergie. Elle ralentit et sa période de révolution augmente. Elle se rapproche de P_0 au tour suivant.

Dans le premier cas, P_1 se rapproche de P_0 jusqu'au moment où elle est en coïncidence avec P_0 ; alors elle a une énergie supérieure, c'est à-dire une vitesse supérieure; ainsi au tour suivant elle se retrouvera avec une phase φ_1 négative.

A chaque tour, son retard sur P_0 s'accroît, sa phase négative s'amplifie jusqu'au moment où sa vitesse égale celle de P_0 .

Alors P_1 se retrouve dans le cas b). Elle a la même énergie (même vitesse) que P_0 mais est en avance. Subissant un champ décélérateur, elle va se rapprocher de P_0 .

On pressent ainsi un phénomène oscillatoire.

Autour de la particule synchrone P_0 , à énergie constante ($\varphi_0 = 0$), la particule P_1 va osciller. Ce phénomène est nommé:

oscillations synchrotroniques

Ces oscillations ont une fréquence inférieure à la fréquence de révolution $f_{\text{rev}} = 1/T_{\text{rev}}$

Nous venons de voir que P_1 oscille par rapport à P_0 à la fois en position et en énergie.

L'énergie moyenne de P_1 est donc l'énergie constante de P_0 .

Ce phénomène oscillatoire est illustré sur la figure 3.

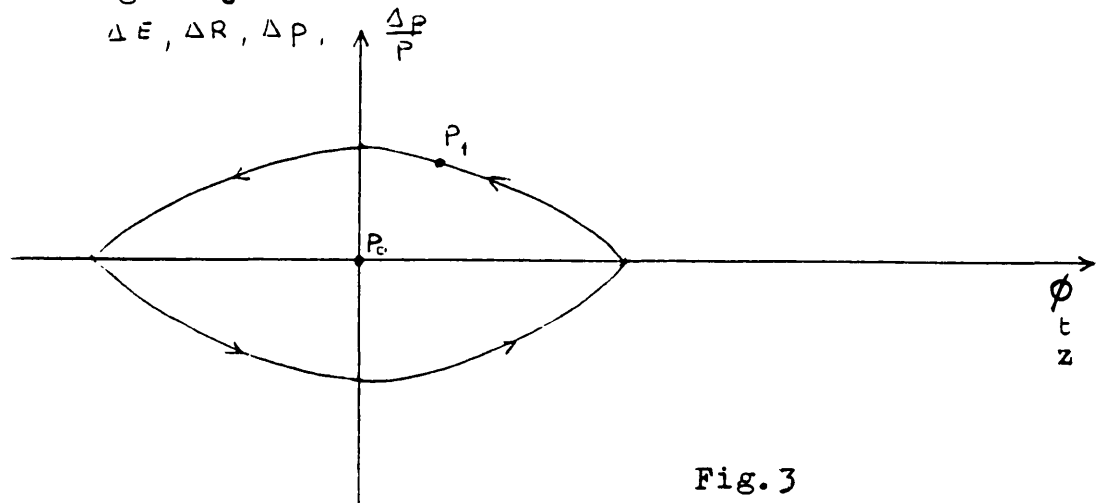


Fig.3

- L'axe horizontal peut être gradué en unité de temps, d'angle ($\phi = \omega_{\text{RF}} t$), ou de longueur (position longitudinale).
- L'axe vertical peut être gradué en unité d'énergie, de longueur (écart en position radiale), d'écart en quantité de mouvement ou d'écart relatif en quantité de mouvement.

Remarques

- 1) Une attention particulière doit être portée à ces unités. Nous avons vu au paragraphe IV-3 que les énergies s'exprimaient en eV dans le domaine de la physique des accélérateurs.
- 2) La coordonnée ΔR est utilisée pour autant que le diagramme ne soit pas considéré dans une zone où $\alpha_p = 0$. Selon la définition (15), $\Delta R = 0$ quel que soit $\frac{\Delta p}{p}$.

VII- Principe de la stabilité de phase

Dans le paragraphe VI, nous avons considéré une particule P_0 avec une phase d'arrivée dans la cavité $\varphi_0 = 0$.

Observons maintenant une particule P_1 qui arrive avec une phase φ_1 non nulle (Fig.4)

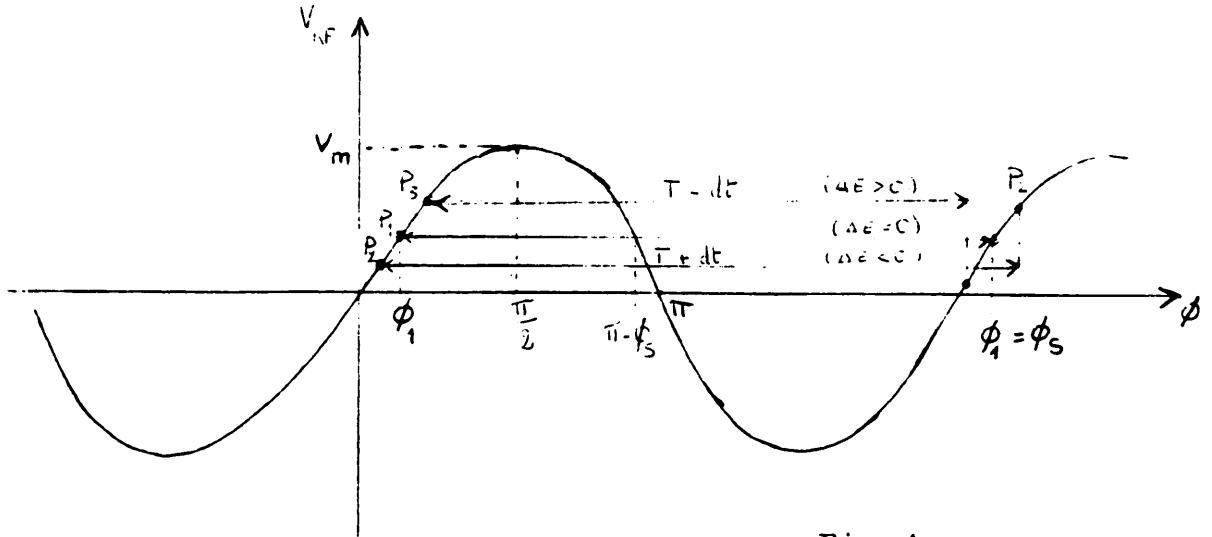


Fig.4

Elle reçoit un gain d'énergie

$$\Delta E = e V_m \sin \varphi_1$$

Sa vitesse va s'accroître. Dans l'hypothèse $\eta > 0$ (au-dessous de la transition), le trajet s'accroît aussi, le temps de révolution diminue et la fréquence augmente.

Considérons le cas où cette augmentation est telle qu'au prochain passage, cette même particule se présente toujours avec une phase φ_1 .

Alors P_1 est la particule synchrone et sa phase $\varphi_1 = \varphi_s$

Rappelons que

$$\eta = \frac{\frac{d\omega}{\omega}}{\frac{dp}{p}} = - \frac{\frac{dT}{T}}{\frac{dp}{p}}$$

Une particule P_2 , de même énergie que P_1 , mais en avance sur P_1 , reçoit un gain d'énergie plus faible ($\Delta E < 0$), son temps de révolution augmente ($T + dT$).

P_2 se rapproche de P_1 ; lorsque sa phase sera égale à celle de P_1 , son énergie sera plus faible. Alors P_2 sera en P_3 et recevra un gain d'énergie plus grand que P_1 .

Le cycle d'oscillations décrit dans le paragraphe précédent va se reproduire.

La symétrie par rapport à l'axe vertical (Fig.3) disparaît, si l'on représente ces oscillations sur un diagramme.

Les variations de phase de P_2 par rapport à θ_s ne produisent pas le même gain d'énergie au sommet et au centre de la sinusoïde (Fig.5)

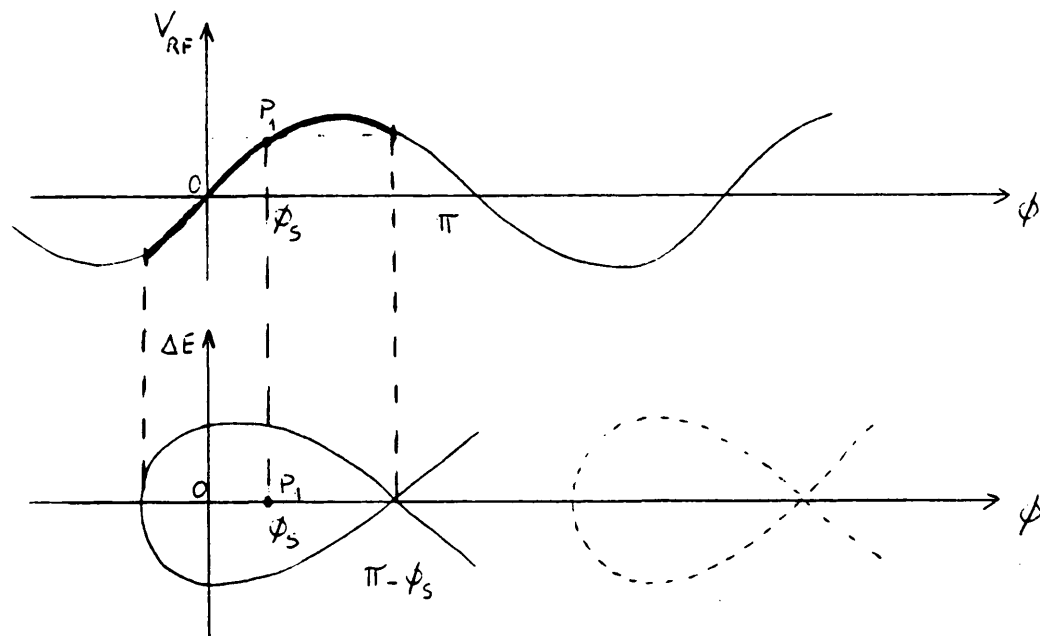


Fig. 5

Sur la figure 4, une particule P_3 , en retard sur P_1 , peut avoir un gain d'énergie supérieur à P_1 ($\Delta E > 0$) seulement si sa phase θ est comprise entre $\theta_s < \theta < \pi - \theta_s$

Si la phase de P_3 devient supérieure à $\pi - \theta_3$, alors le gain d'énergie n'est pas suffisant pour se rapprocher de P_1 et la particule s'en éloigne.

$(\pi - \theta_3)$ est le début de la phase instable.

Pour la particule P_1 , la valeur extrême dépend du gain d'énergie obtenu entre $\pi - \theta_3$ et θ_3 , donc de θ_3 .

Il existe une limite au-dessous de laquelle les particules oscillent en phase (ou en énergie) autour de P_1 et au-dessus de laquelle elles sont perdues.

La ligne séparatrice entre la phase stable et la phase instable détermine ce que l'on nomme un poisson ou un bucket.

Remarque: lorsque nous sommes au-dessus de la transition ($\eta < 0$), le même raisonnement s'applique.

PARAMETRES R F

I- Nombre harmonique

Nous avons considéré, jusqu'à présent, la fréquence de révolution de la particule égale à la fréquence de l'onde RF.

Dans ces conditions, il existe, dans la machine, un seul bucket où les particules peuvent être capturées. Si l'on veut créer plusieurs "poches", il faut augmenter la fréquence de l'onde RF, telle que

$$\boxed{f_{RF} = h f_{rev}} \quad (22)$$

h est le nombre harmonique

C'est un entier qui définit le nombre de positions, régulièrement espacées dans la machine, avec la phase stable ϕ_s , autour de laquelle pourront venir se grouper les particules.

Machines	AA	PS	*SFS
h	1	20	4620

Table 2

Remarque: tous les buckets ne sont pas forcément remplis.

II- Emittance et acceptance longitudinales.

Ces termes ont déjà été définis pour le plan transversal dans un précédent cours. (voir aussi bibliographie)

Jusqu'à présent nous avons considéré une seule particule. Dans la réalité ce n'est évidemment jamais le cas. Les machines classiques actuelles couvrent le domaine de 10^6 à 10^{13} particules.

Considérons le cas de la figure 3.

Si au lieu d'une seule particule nous en avons plusieurs, chacune d'elles va osciller autour de P_0 . Elles délimitent une surface qui est:

l'émittance longitudinale. ϵ

La particule qui oscille avec le plus grand déphasage autour de P_0 , détermine une surface:

l'acceptance longitudinale. $\frac{2\epsilon}{\beta}$

La figure 6 donne une image de ces notions.

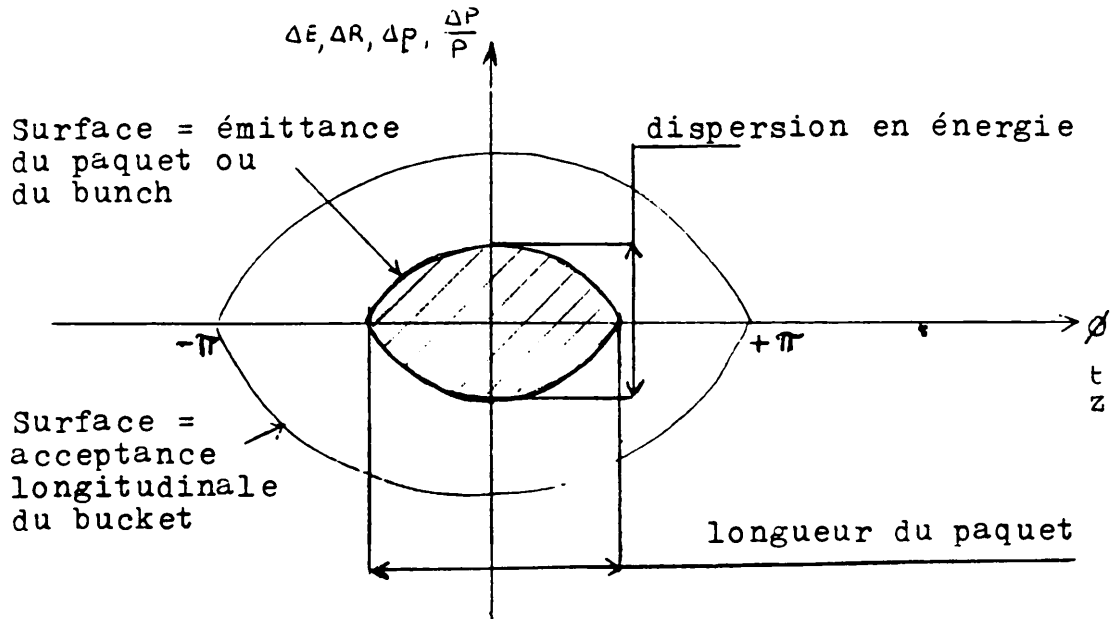


Fig. 6

C'est la représentation d'un bucket stationnaire. Il n'y a pas d'accélération.

Lorsque des particules sont injectées dans une machine où la RF est établie, trois cas peuvent se présenter:

- a) $\mathcal{A} < \mathcal{E} \rightarrow$ il y a des pertes de faisceau.
- b) $\mathcal{A} \approx \mathcal{E} \rightarrow$ toutes les particules sont capturées
- c) $\mathcal{A} \gg \mathcal{E} \rightarrow$ il y a trop de place et on peut avoir des instabilités longitudinales qui conduisent à une augmentation de \mathcal{E} .

III- Tension, phase, fréquence RF.

Ce sont les trois paramètres qui caractérisent une cavité RF.

La tension et la phase influencent le gain d'énergie par tour et déterminent l'acceptance longitudinale.

La fréquence influence la position radiale du faisceau et le nombre de buckets existant dans la machine.

IV- Quelques relations.

Voir référence [1]

$$\frac{dp}{p} = \gamma_{tr}^2 \frac{dR}{R} + \frac{dB}{B} \quad (23)$$

$$\frac{dp}{p} = \gamma^2 \frac{df}{f} + \gamma^2 \frac{dR}{R} \quad (24)$$

$$\frac{dB}{B} = \gamma_{tr}^2 \frac{df}{f} + \left[1 - \left(\frac{\gamma_{tr}}{\gamma} \right)^2 \right] \frac{dp}{p} \quad (25)$$

$$\frac{dB}{B} = \gamma^2 \frac{df}{f} + (\gamma^2 - \gamma_{tr}^2) \frac{dR}{R} \quad (26)$$

A partir de ces relations, nous pouvons considérer plusieurs cas.

IV-1 $\Delta p = 0$ énergie constante.

Cela correspond au cas où la tension RF est coupée. L'équation (23) indique que B et R varient en sens opposé, (24) montre que R et f varient aussi en sens opposé.

IV-2 $\Delta R = 0$ rayon constant.

Durant l'accélération, on maintient le faisceau sur une orbite constante. (23) et (24) permettent de dire que B, p, f varient dans le même sens.

IV-3 $\Delta B = 0$ le faisceau est groupé sur un palier magnétique.

p et R varient dans le même sens (23).

La variation de f va dépendre du signe du terme entre parenthèses (25) et (26).

Avant la transition $\gamma < \gamma_{tr}$, R et f varient dans le même sens.

Après la transition $\gamma > \gamma_{tr}$, R et f varient en sens opposé.

IV-4 $\Delta f = 0$ Le faisceau est piloté par un oscillateur externe.

p et R varient dans le même sens (24).

Avant la transition, B et R varient en sens opposé.
Après la transition, ils varient dans le même sens.
(26)

Résumons ces différents cas dans un tableau.

Faisceau	Paramètre imposé	Variations de B, R et f		
dégroulé	$\Delta p = 0$	B ↗	R ↘	f ↗
orbite fixe	$\Delta R = 0$	B ↗	p ↗	f ↗
palier magnétique	$\Delta B = 0$	p ↗	R ↗	f ↗ ($\eta > 0$)
				f ↘ ($\eta < 0$)
oscillateur local extérieur	$\Delta f = 0$	B ↗	p ↘	R ↘ ($\eta > 0$)
			p ↗	R ↗ ($\eta < 0$)

Table 3

I- Particule synchrone

On considère l'accélération de particules [2] par un champ électrique alternatif dont la fréquence est en résonance avec la fréquence de révolution.

Dans une cavité, on exprime le potentiel par:

$$V = \hat{V}_{RF} \sin \vartheta (t) \quad (27)$$

On a vu que la particule synchrone est celle qui arrive toujours avec la même phase ϑ_s à l'entrée de la cavité. Son équation du mouvement satisfait à

$$\vartheta (t) = \vartheta_s = \text{constante}$$

Dans un synchrotron, l'énergie de la particule synchrone varie durant l'accélération. Si l'on veut garder cette particule accélérée toujours sur la même orbite ($R = \text{cte}$), il faut que le champ magnétique B varie aussi avec le temps. L'équation (2) exprimée pour un champ moyen s'écrit

$$p = e \langle B \rangle R$$

Différentiations

$$\frac{dp}{dt} = e R \frac{d\langle B \rangle}{dt} = e R \langle \dot{B} \rangle$$

Le gain d'énergie par tour, pour la particule synchrone s'obtient en passant des différentielles aux accroissements finis.

$$(\Delta p)_{\text{tour}} = e R \langle \dot{B} \rangle T_{\text{rev}}$$

T_{rev} est la période de révolution

$$T_{\text{rev}} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi R}{\beta c}$$

$$(\Delta p)_{\text{tour}} = \frac{2\pi e R^2}{\beta c} \langle \dot{B} \rangle = \frac{2\pi e R}{\beta c} \rho \dot{B}$$

Différentiations((10)

$$\Delta(E^2) = \Delta(p^2 c^2)$$

$$2E \Delta E = c^2 2p \Delta p$$

$$\Delta E = \frac{pc^2}{E} \Delta p = \frac{m \beta c^3}{mc^2} \Delta p$$

$$\Delta E = \beta c \Delta p$$

$$\boxed{(\Delta E)_{\text{tour}} = 2\pi e R \rho \dot{B}} \quad (28)$$

L'équation (27) appliquée à la particule synchrone s'écrit:

$$(\Delta E)_{\text{tour}} = e \hat{V}_{\text{RF}} \sin \vartheta_s$$

d'où la phase de la particule synchrone:

$$\boxed{\sin \vartheta_s = \frac{(\Delta E)_{\text{tour}}}{e \hat{V}_{\text{RF}}}} \quad (29)$$

Si (29) est satisfaite pour ϑ_s , elle l'est également pour $\pi - \vartheta_s$. Mais une seule possibilité correspond à un équilibre dynamique stable [voir (49)].

Etablissons la loi de variation de la fréquence RF en fonction du champ B.

Pour la particule synchrone l'équation (3) s'écrit:

$$\omega_s = \frac{e}{m} \langle B \rangle$$

l'équation (2):

$$\frac{p}{e} = B \rho = \langle B \rangle R$$

ρ est le rayon de courbure des dipoles qui permettent la déflexion.

R est le rayon de l'orbite circulaire du synchrotron.

D'après (22)

$$\omega_s = \frac{\omega_{RF}}{h} = \frac{e}{m} \langle B \rangle = \frac{e}{m R} \int B$$

On explicite m à partir des équations (5) à (10)

$$m = \frac{E_s}{c^2}$$

$$E_s^2 = c^2 p_s^2 + E_0^2 \quad p_s = e B \rho$$

ω_s devient:

$$\omega_{RF} = \frac{h c}{R} \sqrt{\frac{B^2}{B^2 + \left(\frac{E_0}{c e \rho}\right)^2}} \quad (30)$$

Exercice: Dans le synchrotron à protons du CERN, le champ magnétique croît de 2,4 T/s. Le rayon de la trajectoire est R = 100m. Il y a 100 dipoles d'une longueur effective de 4,398 m. Calculer l'accroissement d'énergie par tour. En déduire la tension RF minimum.

Solution

- Calcul du rayon de courbure.
Cent dipôles doivent donner une orbite fermée,
donc un angle total de 2π

$$\vartheta = \frac{100 \times 4,398}{r} = 2\pi$$
$$r = 70 \text{ m}$$

- Calcul de l'accroissement d'énergie par tour.
D'après (28):

$$\Delta E = 439,8 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 100 \times 2,4$$

$$\Delta E \approx 17 \text{ fJ} \quad (\text{femto Joule})$$

$$\Delta E = 439,8 \times 100 \times 2,4$$

$$(\Delta E)_{\text{tour}} = 105,5 \text{ keV}$$

- Calcul de la tension RF
D'après (29)

$$\hat{V}_{\text{RF}_{\text{min}}} = 105,5 \text{ kV} \quad (\text{pour } \sin \vartheta_s = 1)$$

II- Particule non synchronone

II-1 Données initiales

L'indice s se rapporte à la particule synchronone. Une autre particule est définie par son écart avec la particule synchronone.

Fréquence de révolution	$f = f_s + \Delta f$	
Phase RF	$\vartheta = \vartheta_s + \Delta \vartheta$	
Quantité de mouvement	$p = p_s + \Delta p$	(31)
Energie	$E = E_s + \Delta E$	
Angle d'azimuth	$\vartheta = \vartheta_s + \Delta \vartheta$	

Ce dernier paramètre est relié à la position azimuthale par

$$ds = R d\vartheta$$

Sur un tour, l'angle φ varie de 2π pendant que la phase RF varie de $2\pi h$ donc

$$\Delta \phi = -h \Delta \varphi \quad (32)$$

On mesure φ dans le sens de propagation de la particule. Le signe - provient du fait que la particule, en retard sur la particule synchrone ($\Delta \varphi < 0$), arrive plus tard dans le gap RF, donc $\Delta \phi > 0$.

De plus, l'angle φ s'exprime par

$$\varphi = \int_{t_0}^t \omega dt \quad (33)$$

d'où une petite variation de $\Delta \omega$:

$$\Delta \omega = \frac{d}{dt} (\Delta \varphi)$$

En utilisant (32):

$$\Delta \omega = -\frac{1}{h} \frac{d}{dt} (\Delta \phi)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\Delta \phi) &= \Delta \left(\frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\phi_s}{dt} \\ &= \dot{\phi} - \dot{\phi}_s = \dot{\phi} \end{aligned}$$

car par définition $\dot{\phi}_s = 0$.

La variation de fréquence angulaire peut s'écrire

$$\boxed{\Delta \omega = -\frac{1}{h} \frac{d\phi}{dt}} \quad (34)$$

Cherchons à exprimer l'écart en quantité de mouvement et en énergie.

Reprenons la définition (16) de η et exprimons Δp

$$\Delta p = \frac{p}{\omega} \frac{\Delta \omega}{\eta} = \frac{p}{\omega_s \eta} \left(-\frac{1}{h} \dot{\phi} \right)$$

$$\Delta p = \frac{-p}{\eta h \omega_s} \dot{\phi} \quad (35)$$

Partons de l'équation (10) et dérivons-la par rapport à p

$$E^2 = p^2 c^2 + E_0^2$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{p c^2}{E} = \frac{m v c^2}{E} = v$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{\Delta E}{\Delta p} = v = \omega R$$

$$\frac{\Delta E}{\omega} = R \Delta p \quad (36)$$

II-2 Equations du mouvement.

Nous avons vu que dans une cavité RF, avec une différence de potentiel $V = \hat{V}_{RF} \sin \phi$, l'énergie d'une particule augmente de

$$(\Delta E)_{\text{tour}} = e \hat{V}_{RF} \sin \phi$$

D'après (36) la quantité de mouvement augmente de:

$$(\Delta p)_{\text{tour}} = \frac{e}{\omega R} \hat{V}_{RF} \sin \phi$$

Divisons par la période de révolution $T = \frac{2\pi}{\omega}$, on obtient le taux d'accroissement moyen par unité de temps

$$\left(\frac{\Delta p}{T} \right)_{\text{tour}} = \dot{p} = \frac{e}{2\pi R} \hat{V}_{RF} \sin \phi \quad (37)$$

Pour la particule synchrone cette équation s'écrit

$$2\pi R_s \dot{p}_s = e \hat{V}_{RF} \sin \phi_s \quad (38)$$

Soustrayons (38) de (37)

$$2 \pi (R \dot{p} - R_s \dot{p}_s) = e \hat{V}_{RF} (\sin \varnothing - \sin \varnothing_s) \quad (39)$$

Développons le terme de gauche au premier ordre

$$\begin{aligned} R \dot{p} - R_s \dot{p}_s &= (R_s + \Delta R) (\dot{p}_s + \Delta \dot{p}) - R_s \dot{p}_s \\ &\approx R_s \Delta \dot{p} + \dot{p}_s \Delta R \end{aligned}$$

$$\Delta R = \left(\frac{dR}{dp} \right)_s \Delta p + \dots$$

$$= R_s \Delta \dot{p} + \dot{p}_s \left(\frac{dR}{dp} \right)_s \Delta p$$

$$\dot{p}_s \left(\frac{dR}{dp} \right)_s = \frac{dp}{dt} \frac{dR}{dp} = \dot{R}_s$$

$$= R_s \Delta \dot{p} + \dot{R}_s \Delta p$$

$$= \frac{d}{dt} (R_s \Delta p) \quad \text{par déf. d'une dérivée}$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) \quad \text{d'après (36)}$$

Ainsi (39) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta E}{\omega_s} \right) = \frac{1}{2\pi} e \hat{V}_{RF} (\sin \varnothing - \sin \varnothing_s) \quad (40)$$

Le mouvement d'une particule quelconque peut s'exprimer en termes de déviations par rapport à la particule synchrone, par le système d'équations différentielles du premier ordre ci-dessous (d'après (35), (36), (40))

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d(\Delta p)}{dt} &= \frac{e \hat{V}_{RF}}{2\pi R_s} (\sin \varnothing - \sin \varnothing_s) \\ \frac{d\varnothing}{dt} &= - \frac{7}{p_s} \frac{h\omega_s}{p_s} \Delta p \end{aligned}} \quad (41)$$

Nous savons que $\omega_s = \frac{v_s}{R_s} = \frac{\beta c}{R_s}$

Le système d'équations différentielles (41) peut s'exprimer par

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d(\Delta p)}{dt} &= A (\sin \vartheta - \sin \vartheta_s) \\ \frac{d\vartheta}{dt} &= B \Delta p \end{aligned}} \quad (42)$$

où $A = \frac{e \hat{V}_{PF}}{2 \pi R_s}$ et $B = - \frac{\eta h \beta c}{p_s R_s}$ (43)

III- Oscillations de faibles amplitudes.

Exprimons l'équation de phase en éliminant Δp dans le système d'équations différentielles (42)

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{B} \frac{d\vartheta}{dt} \right] - \left[A \right] (\sin \vartheta - \sin \vartheta_s) = 0 \quad (44)$$

Étudions le cas où tous les paramètres entre crochets varient très lentement en fonction du temps, comparés à la variable $\Delta \vartheta = \vartheta - \vartheta_s$.

Si on les considère presque constants, l'équation (44) peut s'écrire:

$$\boxed{\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{\Omega_s^2}{\cos \vartheta_s} (\sin \vartheta - \sin \vartheta_s) = 0} \quad (45)$$

où $\Omega_s^2 = - A B = \frac{e \hat{V}_{RF} \eta h \beta c}{2 \pi p_s R_s^2} \cos \vartheta_s$ (46)

On peut en faire une autre formulation avec

$$\frac{\beta c}{p_s R_s^2} = \frac{\beta c}{m_s v_s R_s^2} = \frac{v_s}{m_s v_s R_s^2} = \frac{1}{m_s R_s^2} = \frac{c^2}{E_s R_s^2}$$

L'équation (46) s'écrit

$$\Omega_s^2 = \Omega_0^2 \cos \varphi_s = \frac{e \hat{V}_{RF} \eta h c^2}{2 \pi E_s R_s^2} \cos \varphi_s \quad (47)$$

Pour les particules qui s'écartent très peu en position, ou en phase, de la particule synchrone, l'expression du $\sin \varphi$ peut être développée comme suit:

$$\sin \varphi = \sin (\varphi_s + \Delta \varphi) = \sin \varphi_s \cos \Delta \varphi + \cos \varphi_s \sin \Delta \varphi$$

Si $\Delta \varphi$ très petit, au premier ordre:

$$\sin \varphi \approx \sin \varphi_s + \cos \varphi_s \Delta \varphi$$

au deuxième ordre:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^2 (\Delta \varphi)}{dt^2}$$

L'équation (45) devient, sous ces conditions:

$$\frac{d^2 (\Delta \varphi)}{dt^2} + \Omega_s^2 \Delta \varphi = 0 \quad (48)$$

Pour les faibles amplitudes, nous obtenons l'équation d'une oscillation harmonique dont Ω_s est la fréquence angulaire.

La stabilité est obtenue à condition que Ω_s^2 soit réel, ce qui implique que le membre de droite de (46) soit positif donc

$$\eta \cos \varphi_s > 0 \quad (49)$$

Nous avons vu dans (29) que l'accélération synchrone admet deux phases distinctes ϑ_s et $\pi - \vartheta_s$. La condition (49) impose donc à la particule synchrone, les conditions suivantes:

$$\gamma < \gamma_{tr} \quad \eta > 0 \quad \cos \vartheta_s > 0 \quad 0 < \vartheta_s < \frac{\pi}{2} \quad (50)$$

$$\gamma > \gamma_{tr} \quad \eta < 0 \quad \cos \vartheta_s < 0 \quad \frac{\pi}{2} < \vartheta_s < \pi$$

Avant la transition, la particule synchrone stable traverse la cavité pendant la montée du champ accélérateur.

Après la transition, cette particule traverse la cavité pendant la descente du champ accélérateur.

On remarque que ces deux cas donnent toujours un $\sin \vartheta_s > 0$, qui correspond à une accélération de la particule synchrone. $\sin \vartheta_s < 0$ correspond à une décélération.

$$\gamma > \gamma_{tr} \quad \eta < 0 \quad \cos \vartheta_s < 0 \quad \pi < \vartheta_s < \frac{3\pi}{2} \quad (51)$$

$$\gamma < \gamma_{tr} \quad \eta > 0 \quad \cos \vartheta_s > 0 \quad \frac{3\pi}{2} < \vartheta_s < 2\pi$$

Tous ces cas sont résumés sur la figure 7. [Ref.3]

A l'énergie de transition $\eta \rightarrow 0$ et $\Omega_s^2 \rightarrow 0$. Il n'y a plus, en première approximation de stabilité de phase.

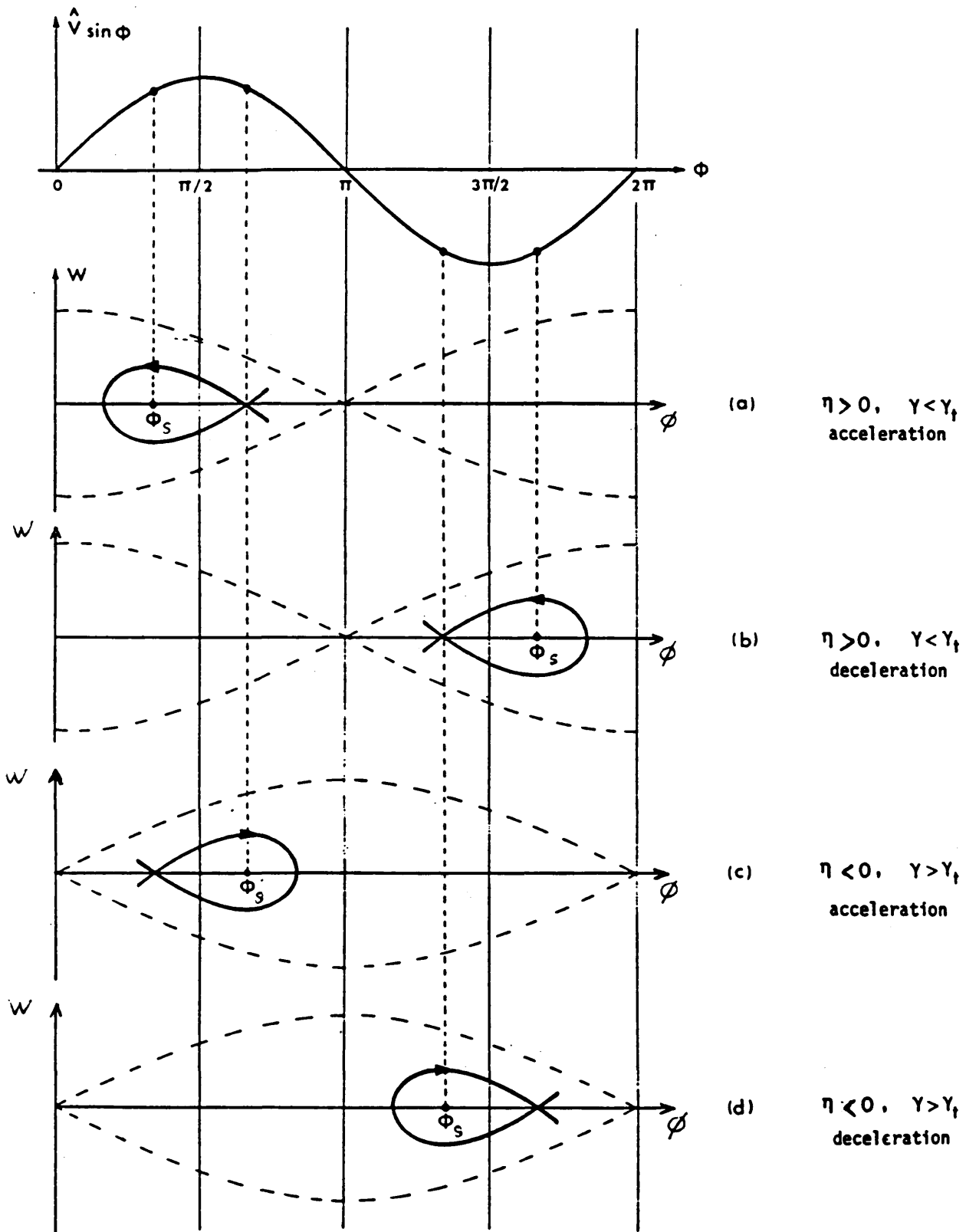


Fig. 7 Phasing of moving and stationary buckets relative to RF voltage

Dans un synchrotron à protons, lorsque les particules doivent traverser l'énergie de transition, il faut que le système RF commute sa phase très rapidement de ϕ_s à $\pi - \phi_s$ de façon à maintenir la stabilité dynamique au-dessus de la transition.

Dans le cas des machines à leptons, synchrotrons ou accumulateurs, où la vitesse des particules est pratiquement égale à la vitesse de la lumière, on a

$$\eta \simeq -\alpha_p$$

L'équation (47) se simplifie:

$$\Omega_s^2 = \frac{-e \hat{V}_{RF} \alpha_p h c^2}{2 \pi E_s R_s^2} \cos \phi_s \quad (52)$$

Le nombre d'oscillations synchrotroniques par tour est donné par

$$Q_s = \frac{\Omega_s}{\omega_s} = \frac{\Omega_s}{c} R_s$$

$$Q_s = \frac{\Omega_s}{\omega_s} = \sqrt{\frac{-e \hat{V}_{RF} \alpha_p h \cos \phi_s}{2 \pi E_s}} \quad (53)$$

Remarque: Dans une telle machine, la fréquence RF ne change pas.

L'équation (48) d'une oscillation harmonique a pour solution:

$$\Delta \phi = \Delta \hat{\phi} \sin (\Omega_s t + \phi_0)$$

En utilisant (42) :

$$\frac{d\phi}{dt} = B \Delta p = \frac{d(\Delta \phi)}{dt}$$

$$\frac{d(\Delta \phi)}{dt} = \hat{\Delta \phi} \cdot \Omega_s \cos(\Omega_s t + \theta_0) = B \Delta p$$

$$\Delta p = \hat{\Delta p} \cos(\Omega_s t + \theta_0)$$

où $\hat{\Delta p} = \frac{\Omega_s \hat{\Delta \phi}}{B}$

C'est un mouvement oscillatoire stable autour de la phase ϕ_s pour un $\Delta \phi$ petit et pour $\eta \cos \phi_s > 0$.

Ces oscillations harmoniques se traduisent par des cercles dans un diagramme $(\Delta p, \Delta \phi)$ (Voir fig.8).

On dit que le mouvement est représenté dans le "plan de phase longitudinal"; les coordonnées en sont $\Delta p, \Delta \phi$, mais on peut utiliser tout autre variable proportionnelle.

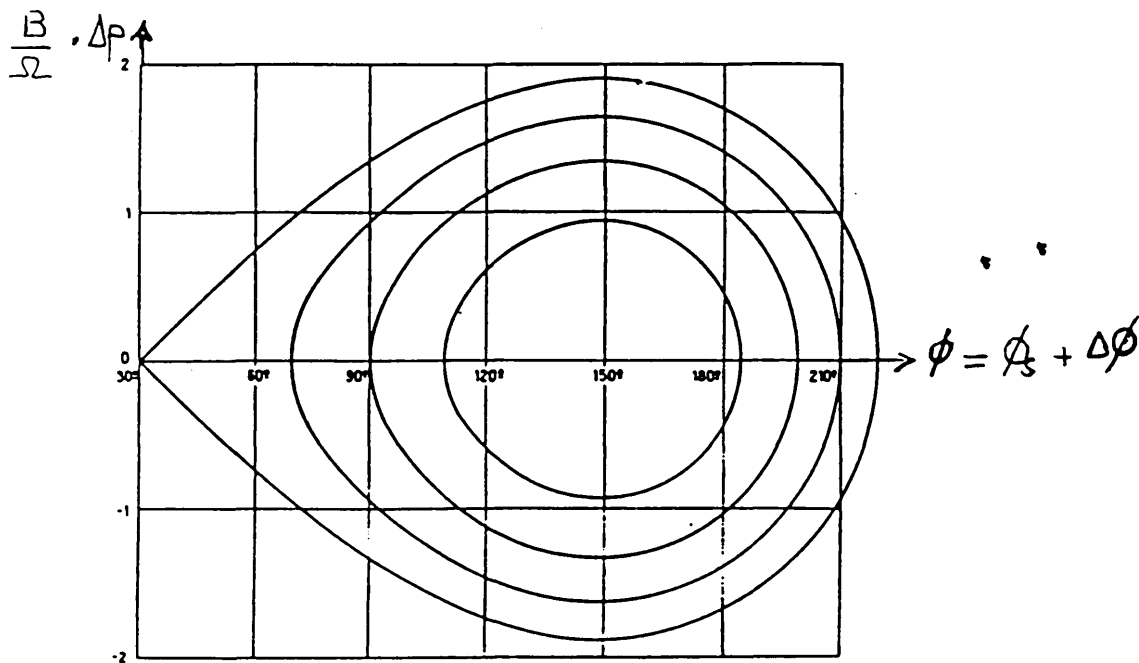


Fig 8 Les oscillations de faibles amplitudes sont approximées par des cercles autour de la phase stable $\phi_s = 150^\circ$

OSCILLATIONS AVEC HAMILTONIEN

Nous allons utiliser le formalisme hamiltonien pour illustrer:

- les limites des régions stables pour les oscillations de grandes amplitudes.
- L'amortissement adiabatique pour les oscillations de faibles amplitudes.

Théorème de Boltzmann-Ehrenfest:

Un oscillateur non dissipatif, dont les paramètres varient lentement, a ses variables canoniques qui évoluent de telle sorte que l'intégrale d'action I reste constante.

$$I = \int_T p \, dq = \text{cte}$$

où T est une période d'oscillation.

Puisque l'invariance n'existe que pour des variables canoniques, il nous faut donc établir ces dernières. Si $H(\varnothing, W, t)$ est l'hamiltonien du mouvement, les variables canoniques doivent respecter les conditions:

$$\frac{d\varnothing}{dt} = \frac{\partial H}{\partial W} \quad \text{et} \quad \frac{dW}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \varnothing} \quad (54)$$

Introduisons la variable "d'énergie" W qui est la conjuguée canonique de la variable de "position" \varnothing .

$$W = \frac{\Delta E}{f_s} \quad (55)$$

Elle a les dimensions d'une "action" (énergie \times temps).

La relation (55) peut prendre plusieurs formes

$$W = \frac{\Delta E}{f_s} = 2\pi \frac{\Delta E}{\omega} = 2\pi R_s \Delta p = C \Delta p$$

↑
↑
↑
(def.)
(36)
(def.)

Les équations (43) s'écrivent alors:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= A C (\sin \varphi - \sin \varphi_s) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \frac{B}{C} W \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Elles peuvent être dérivées de l'hamiltonien

$$H(\varphi, W, t) = AC \left[\cos \varphi - \cos \varphi_s + (\varphi - \varphi_s) \sin \varphi_s \right] - \frac{1}{2} \frac{B}{C} W^2$$

Remplaçons A, B, C par leurs valeurs (43)

$$H(\varphi, W, t) = e \hat{V}_{RF} \left[\cos \varphi - \cos \varphi_s + (\varphi - \varphi_s) \sin \varphi_s \right] - \frac{h \gamma \omega_s}{4\pi R_s p_s} W^2 \quad (57)$$

Les paramètres γ , ω_s , φ_s , p_s , R_s et \hat{V}_{RF} peuvent varier avec le temps et par conséquent l'hamiltonien sera fonction de t.

Cependant les variations seront, en général, lentes par rapport aux mouvements synchrotroniques sur quelques périodes d'oscillation.

Dans ce cas

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \approx 0$$

I - Condition d'adiabaticité.

Pour caractériser ces évolutions lentes des paramètres du mouvement vis à vis de la période d'oscillation synchrotrone, on définit un coefficient d'adiabaticité α qui doit être très petit devant 1.

$$\alpha = \frac{1}{\Omega_s^2} \frac{d\Omega_s}{dt} \quad (58)$$

Dans un synchrotron où \hat{V}_{RF} et ϕ_s sont constants durant l'accélération, la principale variation est celle de p . Ainsi à partir de (37) et de (46), la condition $\alpha \ll 1$ peut s'écrire

$$\frac{1}{\Omega_s^2} \frac{d\Omega_s}{dt} = \frac{1}{\Omega_s^2} \frac{d\Omega_s}{dp} \frac{dp}{dt} \ll 1$$

$$\left[\frac{e \hat{V}_{RF} \sin \phi_s \operatorname{tg} \phi_s}{2 \pi h \eta p_s \beta c} \right]^{\frac{1}{2}} \ll 1 \quad (59)$$

Cette condition est en général vérifiée, sauf aux environs de l'énergie de transition où η devient très petit.

II - Approche intuitive.

Les trajectoires, représentées dans le plan de phase (fig.8), sont des contours pour un hamiltonien constant (57).

Des familles de courbes sont représentées sur la figure 9 pour $\delta > \delta_{tr}$ ou $\eta < 0$ [3].

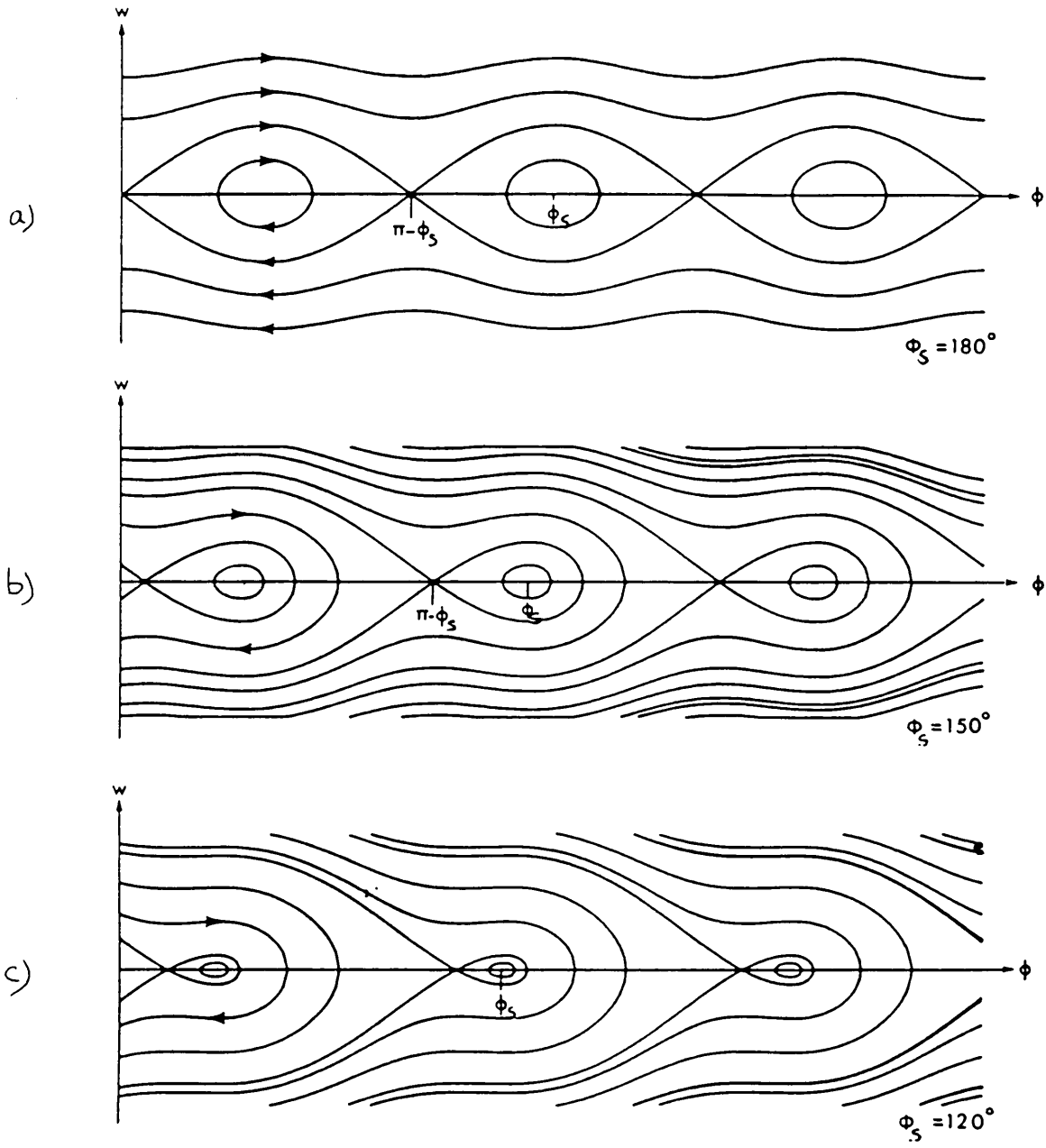


Fig. 9 Trajectories of constant Hamiltonian, $\gamma > \gamma_t$

Les particules se déplacent le long des trajectoires (en temps) suivant les flèches.

Elles respectent les conditions

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial H}{\partial W} = - \frac{h \eta \omega_s}{2 \pi R_s p_s} W \quad (60)$$

$$\dot{W} = \frac{dW}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \phi} = e \hat{V}_{RF} \left[\sin \phi - \sin \phi_s \right] \quad (61)$$

Dans chaque intervalle 2π , il y a deux points fixes où $\dot{\phi} = \dot{W} = 0$

Le point fixe stable à $\phi = \phi_s$ et $W = 0$ correspond à la particule synchrone et se trouve dans la région de stabilité (bucket) bornée par une séparatrice.

Un point fixe instable se trouve à $\phi = \pi - \phi_s$ et $W = 0$. Il correspond à une limite extrême de la séparatrice.

Le cas où $\phi_s = \pi$ correspond à une accélération nulle, $\dot{p}_s = 0$; on a alors des "buckets stationnaires".

La séparatrice joint les points instables adjacents. La région intérieure correspond à des particules avec des oscillations stables, la région extérieure correspond à des particules avec des oscillations instables.

Il n'y a pas de communication entre le demi-plan supérieur et le demi-plan inférieur du plan de phase.

Pour le cas où $\phi_s \neq \pi + k\pi$, on a une accélération ou une décélération.

La séparatrice ne possède plus qu'un seul point instable fixe (fig.9 b etc) et les particules passent d'un demi-plan à l'autre en dehors des régions de stabilité.

III- Limites des oscillations en phase.

Pour une particule à l'intérieur de la région stable, les limites d'oscillations en W sont données par $\dot{W} = 0$

L'équation (61) donne deux solutions

$$\phi = \phi_s$$

et
$$\phi = \pi - \phi_s$$

La 2^{ème} solution correspond au point fixe instable.

La 1^{ère} solution, portée dans (57) donne la valeur de l'hamiltonien pour la trajectoire extrême \dot{W} .

On peut en déduire:

$$H(\phi, W) = -\frac{h \gamma \omega_s}{4 \pi R_s p_s} \hat{W}^2 = -\frac{h \gamma \omega_s}{4 \pi R_s p_s} W^2 + e \hat{V}_{RF} \left[\cos \phi - \cos \phi_s + (\phi - \phi_s) \sin \phi_s \right] \quad (62)$$

Les limites d'oscillations en ϕ sont données par $\dot{\phi} = 0$. Ce qui est identique à $W = 0$, d'après (60).

En portant dans (57), on obtient la valeur de l'hamiltonien pour la trajectoire extrême $\hat{\phi}$.

On peut écrire:

$$\begin{aligned} H(\phi, W) &= e \hat{V}_{RF} \left[\cos \hat{\phi} - \cos \phi_s + (\hat{\phi} - \phi_s) \sin \phi_s \right] \\ &= e \hat{V}_{RF} \left[\cos \phi - \cos \phi_s + (\phi - \phi_s) \sin \phi_s \right] - \frac{h \gamma \omega_s}{4 \pi R_s p_s} W^2 \end{aligned}$$

C'est une équation transcendante.

Toutefois deux cas spéciaux peuvent être analysés.

a) Bucket stationnaire $\phi_s = 0$ et $\eta > 0$

Portons $W = 0$ dans (62):

$$-\frac{h \eta \omega_s}{4 \pi R_s p_s} \hat{W}^2 = \left[e \hat{V}_{RF} \cos \phi - 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{2} e \hat{V}_{RF} \sin^2 \frac{\phi}{2}$$

On reconnaît l'hamiltonien du pendule classique (voir ex. 7).

Les limites des oscillations sont:

$$\hat{\phi}_{1,2} = \pm 2 \arcsin \left[\frac{h \eta \omega_s \hat{W}^2}{2 \pi e \hat{V}_{RF} R_s p_s} \right]^{1/2} \quad (63)$$

b) Petites oscillations avec bucket accélérateur. $\Delta \phi \ll 1$

L'expression entre crochets de (57) devient:

$$\left[\right] \simeq -\frac{1}{2} (\Delta \phi)^2 \cos \phi_s$$

Portons-la dans (62) avec la condition $W = 0$.

$$\Delta \phi = \pm \left[\frac{h \eta \omega_s}{2 \pi R_s p_s e \hat{V}_{RF} \cos \phi_s} \right]^{1/2} \hat{W} \quad (64)$$

Nous remarquerons que pour les faibles amplitudes (63) est équivalent à (64).

Le rapport $\frac{\hat{W}}{\Delta \phi}$ est fondamental pour l'adaptation des paquets dans les buckets RF.

IV- Limites de la région stable.

Nous avons vu qu'une des limites de la région de stabilité est donnée par

$$W = 0 \quad \text{et} \quad \phi_1 = \pi - \phi_s$$

En portant ces valeurs dans (62), nous obtenons un extrémum de W correspondant à un point de la séparatrice.

$$-\frac{h \gamma \omega_s}{4\pi R_s p_s} \dot{W}^2 = e \hat{V}_{RF} \left[\cos(\pi - \phi_s) - \cos\phi_s + (\pi - 2\phi_s) \sin\phi_s \right]$$

$$\left(\dot{W} \right)_{\text{sep}}^2 = \frac{e \hat{V}_{RF}^2 4\pi R_s p_s}{h \gamma \omega_s} \left[2 \cos \phi_s - (\pi - 2\phi_s) \sin \phi_s \right] \quad (65)$$

L'autre limite de phase ϕ_2 est donnée en portant (65) dans (62) avec $\phi = \phi_2$ et $W = 0$

$$\cos\phi_2 - \cos\phi_s + (\phi_2 - \phi_s) \sin\phi_s = (\pi - 2\phi_s) \sin\phi_s - 2 \cos\phi_s$$

$$\cos \phi_2 + \phi_2 \sin \phi_s = (\pi - \phi_s) \sin \phi_s - \cos \phi_s \quad (66)$$

On obtient une équation transcendante $\phi_2(\phi_s)$.

Etablissons l'équation de la séparatrice. Pour cela, multiplions chaque terme de l'équation (45) par $\dot{\phi}(t)$.

$$\dot{\phi} \ddot{\phi} + \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\dot{\phi} \sin \phi - \phi \dot{\phi} \sin \phi_s) = 0$$

Une intégrale première s'obtient directement

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = \text{cte} \quad (67)$$

Utilisons (60) et la définition de B (43)

$$\boxed{\frac{B^2}{8\pi^2 R_s^2} W^2 - \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) = \text{cte} \quad (68)}$$

Dans cette équation $W(\phi)$, déterminons la constante à l'aide d'un point appartenant à la limite de stabilité.

$W = 0$ et $\phi_1 = \pi - \phi_s$ est un point limite.

(68) s'écrit après simplifications et mises en facteur:

$$\boxed{\frac{B^2}{8\pi^2 R_s^2} W^2 - \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} \left[\cos \phi + \cos \phi_s + (\phi - \pi + \phi_s) \sin \phi_s \right] = 0 \quad (69)}$$

C'est l'équation de la séparatrice $W = f(\phi)$

V- Amortissement adiabatique.

Appliquons le théorème de Boltzmann, Ehrenfest.

L'intégrale d'action I:

$$I = \oint W d\phi = \oint W \frac{d\phi}{dt} dt = \text{cte}$$

Si l'on considère de faibles amplitudes et que l'on moyenne la quantité $W = \frac{d\phi}{dt}$ sur une période d'oscillations synchrotroniques, nous pouvons écrire:

$$I \simeq \left(\overline{W \frac{d\phi}{dt}} \right) \cdot T_s = \left(\overline{W \dot{\phi}} \right) \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} \quad (70)$$

Portons (46) et (60) dans (70).

Pour des oscillations sinusoïdales $\hat{W}^2 = 2 \overline{W^2}$

$$\overline{W^2} \left[\frac{2\pi \eta h \omega_s}{e \hat{V}_{RF} R_s p_s \cos \phi_s} \right]^{\frac{1}{2}} = \text{cte}$$

Faisons passer les termes constants sous le radical, dans le membre de droite invariant.

$$\hat{W} = \text{cte} \left[\frac{\hat{V}_{RF} R_s p_s \cos \phi_s}{\eta \omega_s} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (71)$$

Les variations adiabatiques de la phase sont obtenues de la même manière.

$$\begin{aligned} I &= \int \Delta \phi dW = \int \Delta \phi \frac{dW}{dt} dt \\ &= (\Delta \phi \dot{W}) \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} \end{aligned} \quad (72)$$

Développons (61) pour les faibles amplitudes et portons dans (72)

$$\begin{aligned} \dot{W} &\approx e \hat{V}_{RF} \Delta \phi \cos \phi_s \\ \overline{\Delta \phi^2} &\left[\frac{e \hat{V}_{RF} \cos \phi_s 2\pi p_s R_s}{\eta h \omega_s} \right]^{\frac{1}{2}} = \text{cte} \end{aligned}$$

Conservons seulement les termes variables

$$\hat{\Delta \phi} = \text{cte} \left[\frac{\eta \omega_s}{p_s R_s \hat{V}_{RF} \cos \phi_s} \right]^{\frac{1}{4}} \quad (73)$$

Durant l'accélération, p_s croît. Si les autres termes restent constants, l'excursion de phase $\hat{\Delta\phi}$ réduit proportionnellement à $(p)^{-\frac{1}{4}}$.

Ceci est appelé, à tort, l'amortissement adiabatique des oscillations de phase.

Remarque: Le produit $\hat{W} \cdot \hat{\Delta\phi}$ reste constant durant l'accélération. Il n'y a pas d'amortissement de la surface dans l'espace des phases.
Le théorème de Liouville est respecté.

VI- Acceptance longitudinale.

VI-1 Valeurs extrêmes sur l'axe des ordonnées.

Nous avons vu, dans le chapitre sur les paramètres RF, que dans les diagrammes caractérisant une acceptance ou une émittance longitudinale, l'axe des ordonnées pouvait avoir comme paramètre l'énergie, la position radiale ou $\frac{\Delta p}{p}$.

Exprimons ces différents paramètres en fonction de la phase

$$W = 2 \pi R_s \Delta p \quad \text{d'après (55)}$$

$$\frac{\hat{W}}{p} = 2 \pi R_s \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max}$$

Utilisons la relation (65) (voir ex. 10)

$$\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\max} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{RF}}{\pi \eta h E_S} \left[2 \cos \phi_S - (\pi - 2\phi_S) \sin \phi_S \right]}$$

Posons $F(\phi_S) = \left[2 \cos \phi_S - (\pi - 2\phi_S) \sin \phi_S \right]$

$$\boxed{\left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\max} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{RF}}{\pi \eta h E_S} F(\phi_S)}} \quad (74)$$

Etablissons les expressions équivalentes en $\left(\frac{\Delta E}{E}\right)$ et $\left(\frac{\Delta R}{R}\right)$

La démonstration qui a conduit à l'équation (28) nous permet de montrer que

$$\frac{dE}{E} = \beta^2 \frac{dp}{p}$$

En passant aux accroissements finis

$$\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\max} = \beta^2 \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\max}$$

Donc:

$$\boxed{\left(\frac{\Delta E}{E}\right)_{\max} = \pm \beta \sqrt{\frac{e \hat{V}_{RF}}{\pi \eta h E_S} F(\phi_S)}} \quad (75)$$

D'après (15)

$$\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\max} = \alpha \left(\frac{\Delta p}{p}\right)_{\max}$$

$$\boxed{\left(\frac{\Delta R}{R}\right)_{\max} = \pm \frac{\alpha}{\beta} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{RF}}{\pi \eta h E_S} F(\phi_S)}} \quad (76)$$

VI-2 Surface du Bucket

On montre [1] que la surface d'un Bucket quelconque est

$$\mathcal{L} \text{ [eV.s]} = \frac{16}{2\pi} \frac{\beta}{f_{RF}} \cdot \alpha(\mathbf{r}) \cdot \sqrt{\frac{e \hat{V}_{RF} E_S}{2\pi h |\eta|}} \quad (77)$$

Cette expression est donnée en unités universelles (eV.s). Elles sont indépendantes de la machine.

$\alpha(\mathbf{r})$ est une fonction qui caractérise un Bucket accélérateur. Elle est égale à 1 lorsque le Bucket est stationnaire.

Exemple: Surface du Bucket AA sur l'orbite d'injection.

$$h = 1 \quad E = 3,7 \cdot 10^9 \text{ eV} \quad (\beta = 0,967)$$

$$\eta = -0,11 \quad f_{RF} = 1\,846 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

$$e \hat{V}_{RF} = e \cdot 14 \text{ kV} = 14 \cdot 10^3 \text{ eV}$$

$$\dot{B} = 0 \quad \text{donc} \quad \alpha(\mathbf{r}) = 1$$

$$\underline{\mathcal{L} = 11,6 \text{ eV.s}}$$

Nous verrons en exercice les autres unités employées.

VII:- Energie potentielle.

Le mouvement synchrotron est produit par un champ de force $G(\phi)$ qui suit la loi

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = G(\phi)$$

Ce champ peut être dérivé d'un potentiel scalaire

$$G(\phi) = - \frac{\partial U}{\partial \phi}$$

$$U(\phi) = - \int G(\phi) d\phi = - \int \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\sin \phi - \sin \phi_s) d\phi$$

d'après (45)

$$U(\phi) = \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} (\cos \phi + \phi \sin \phi_s) + \text{cte} \quad (78)$$

La somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique est égale à l'énergie totale qui est un invariant, donc une constante

$$\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + U(\phi) = U_0 \quad (79)$$

D'après (78), l'énergie potentielle est la somme d'une fonction sinusoïdale et d'une fonction linéaire.

La figure 11 représente la tension RF ainsi que la fonction énergie potentielle.

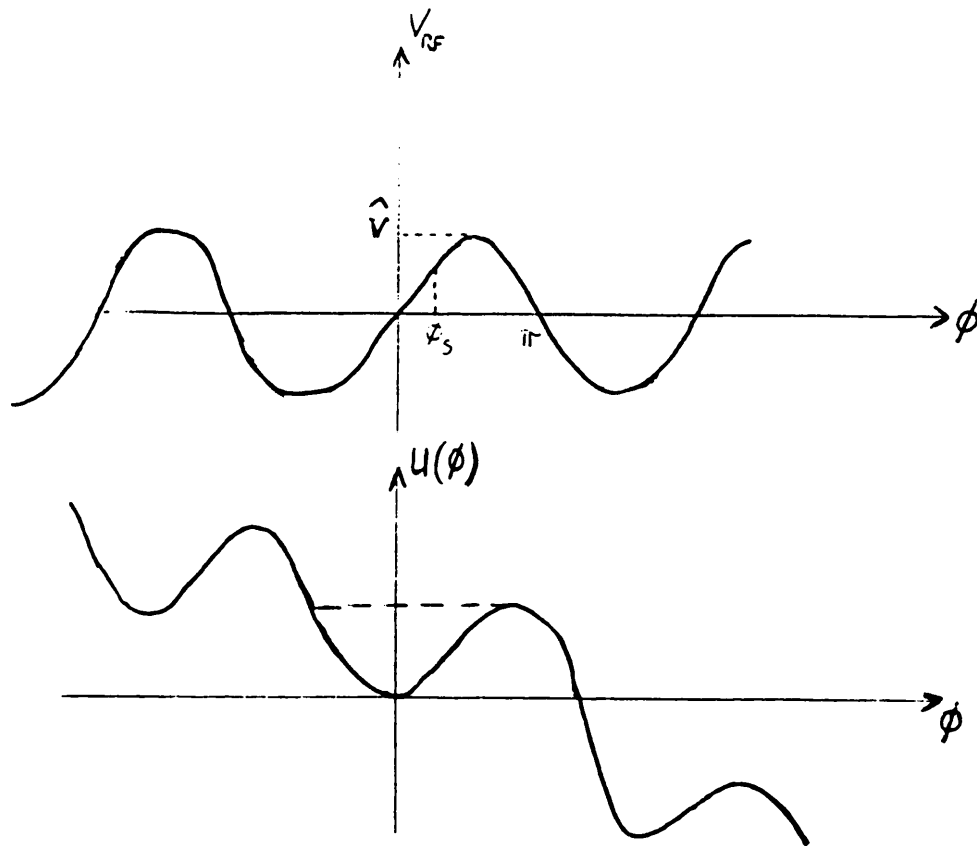


Fig.11

Remarques:

- Une oscillation synchrotronique ne peut avoir lieu que si la particule reste dans un puits de potentiel, ce qui implique que l'énergie totale ne peut excéder une certaine valeur correspondant à la ligne pointillée de l'énergie potentielle de la figure 11. Sinon la particule "descendra" le long de la courbe (fig.11).

- L'équation (79) montre que pour les petites valeurs de $\Delta \phi = \phi - \phi_s$, on retrouve l'équation (64). $U(\phi)$ varie d'une manière quadratique pour les oscillations de faibles amplitudes. On approxime la courbe par une parabole pour les $\Delta \phi$ petits.

E X E R C I C E S

Exercice 1

Démontrer la relation (13)

$$p = 0,3 \frac{B \rho}{T \text{ m}}$$

GeV/c

Exercice 2

Compléter le tableau ci-dessous

Machines à hadrons	E_0 (GeV)	E_c (GeV)	E (GeV)	γ	β	p (GeV/c)	$\frac{B \rho}{T \text{ m}}$
Saturne (Saclay)		3					
PS (CERN)							86,6
Tevatron (Fermilab)			10^3				
AA (CERN)						3,5	
<u>Machines à leptons</u>							
EPA (CERN)							1,66
ESRF (Grenoble)			6				
LEP (CERN)						100	

Exercice 3

A partir de l'équation (11), retrouver l'expression de l'énergie cinétique pour une particule non relativiste.

Calculer β pour des électrons accélérés sous une d.d.p. de 500 V.

A partir de quelle énergie sont-ils relativistes?

Exercice 4

Fréquence RF.

a) Etablir l'équation (30).

b) En posant $B_c = \frac{E_c}{\rho e c}$ montrer que

$$f_{RF} = \frac{h c}{2 \pi R} \left(\frac{B}{B_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{B_c} \right)^2}}$$

c) Comment varie la fréquence RF lorsque $B \ll B_0$ et lorsque $B \gg B_0$?

d) Calculer la fréquence RF à l'énergie d'injection dans le PS ($E_i = 988$ MeV) et à l'énergie d'éjection ($E_e = 26$ GeV). On prendra $h = 20$, $\rho = 70$ m et $R = 100$ m.

e) Quel est le temps mis par un proton pour faire un tour machine à ces deux énergies ?

Exercice 5

Montrer que la vitesse normalisée peut s'écrire:

$$\beta = \left(\frac{B}{B_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{B_c} \right)^2}}$$

où B est le champ magnétique à l'énergie totale E et

$$B_c = \frac{E_c}{\rho e c}$$

Exercice 6

1) Calculer la fréquence des oscillations synchrotroniques pour le AA (énergie fixe).
Même question pour le PS entre l'injection et l'éjection.

	AA	PS	
		injection	éjection
E (GeV)	3,6	0,988	26
h	1	20	20
φ_s (degré)	191	34	146
V (kV)	14	200	200
R (m)	25	100	100
α_P	0,178	0,027	0,027

2) Montrer que la fréquence synchrotronique passe par un extrémum lorsque l'énergie varie.

Donner l'expression correspondante de γ .

3) Tracer l'allure de la courbe:

$$\Omega_s = f(\gamma)$$

pour le cas du PS.

Commenter le point de rebroussement.

Exercice 7

Etablir l'hamiltonien du pendule simple.
Donner une représentation graphique dans
l'espace de phase (p, θ) .

Exercice 8

A partir de l'équation de la séparatrice
(69), retrouver l'expression (65) qui donne la va-
leur maximum de la variable énergie W .

Exercice 9

Loi d'amortissement adiabatique.

- 1) Exprimer (73) en fonction de l'énergie E_S .
- 2) Donner l'expression de $\Delta \hat{E}$ et $\Delta \hat{p}$ en fonction de E_S , R_S , \hat{V}_{RF} , η , ω_S , $\cos \phi_S$.
- 3) Etablir l'écart en position radiale $\Delta \hat{R}$.
- 4) Montrer que l'on peut déterminer la constante si des conditions initiales sur E et φ sont connues.
- 5) Appliquer au cas des machines à électrons et montrer que

$$(\Delta \hat{\phi}) = \left(\frac{\delta_i}{\gamma} \right)^{\frac{1}{4}} (\Delta \hat{\phi}_i)$$

l'indice i étant pour initial.

Exercice 10

Démontrer l'équation (74)

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{RF}}{\pi \eta h E_S} F(\phi_S)}$$

Exercice 11

On trouve dans la référence [1] l'expression de la surface d'un bucket en radians

$$\mathcal{A}_{[\text{rad}]} = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \alpha(r) \sqrt{\frac{\gamma e \hat{V}_{RF}}{h E_0 |\eta|}}$$

S O L U T I O N S

Exercice 1

Preprenons la formule (2), donnée en unités MKSA, où p s'exprime en $[\text{kg m s}^{-1}]$ ou en $[\text{J s m}^{-1}]$ ou encore $[\text{A s V s m}^{-1}]$

$$p = e B \rho$$

$$[\text{A s V s m}^{-1}] = [e] [\text{T}] [\text{m}]$$

$$[\text{e V s m}^{-1}] = [e] [\text{T}] [\text{m}]$$

$$p = \frac{e}{[e]} B \rho [\text{e V s m}^{-1}]$$

$$p = B \rho [\text{e V s m}^{-1}]$$

Multiplions par deux facteurs dont le rapport est 1:

$$p = B \rho [\text{e V s m}^{-1}] \left[\frac{10^{-9} \text{ GeV}}{\text{e V}} \cdot \frac{3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}}{c} \right]$$

Simplifions les unités:

$$p = B \rho \left[3 \cdot 10^{-1} \frac{\text{GeV}}{c} \right]$$

$$\boxed{p = 0,3 B \rho}$$
$$\left[\frac{\text{GeV}}{c} \right] \quad [\text{T}] [\text{m}]$$

Exemple: $B = 1 \text{ T}$ et $\rho = 100 \text{ m}$

$$p = 0,3 \times 1 \times 100 = 30 \text{ GeV} / c$$

$$p = 1,6 \times 10^{-19} \times 1 \times 100 = 1,6 \cdot 10^{-17} \text{ kg ms}^{-1}$$

Exercise 2

	E_0 (GeV)	E_c (GeV)	E (GeV)	γ	β	P (GeV/c)	$B\rho$ (T.m)
Saturne	0,938	3	3,94	4,2	0,971	3,82	12,76
PS(CERN)	0,938	25,08	26,017	27,7	0,9993	26	86,6
Tevatron Fermilab	0,938	999	10^3	1066	~ 1	$\sim 10^3$	$3,3 \cdot 10^3$
AA(CERN)	0,938	2,68	3,62	3,9	0,9659	3,5	11,6
EPA(CERN)	$0,511 \cdot 10^{-3}$	0,495	0,5	10^3	~ 1	0,5	1,66
ESRF Grenoble	$0,511 \cdot 10^{-3}$	5,995	6	$1,2 \cdot 10^4$	~ 1	6	20
LEP(CERN)	$0,511 \cdot 10^{-3}$	100	100	$2 \cdot 10^5$	~ 1	100	333

Exercice 3

- Expression de l'énergie cinétique:

Formule (11): $E_c = E - E_0$

$$E_c = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right] = m_0 c^2 \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} - 1 \right]$$

Si $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$, on peut développer l'expression entre parenthèses:

$$(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!} \varepsilon^2 + \dots$$

$$E_c \approx m_0 c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{v}{c}\right)^4 + \dots - 1 \right]$$

$$\boxed{E_c \approx \frac{1}{2} m_0 v^2}$$

- Calcul de β pour $U = 500$ V.

$$E_c = eU = \frac{1}{2} m_0 v^2 \implies v = \sqrt{\frac{2eU}{m_0}} = c \sqrt{\frac{2eU}{m_0 c^2}}$$

d'où
$$\boxed{\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2eU}{E_0}}}$$

$U = 500$ V et $E_0 = 511 \cdot 10^3$ eV

$$\beta \approx \sqrt{\frac{2}{1000}} = 0,044$$

- Les électrons sont relativistes si

$$\beta \gtrsim 0,9.$$

$$E = m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{511 \cdot 10^3}{0,435} = 1,2 \cdot 10^6 \text{ eV}$$

A partir d'une énergie $\boxed{E = 2 \text{ MeV}}$, les électrons peuvent être considérés comme relativistes.

Exercice 4

Fréquence RF

a) Etablissons l'équation (30)

$$\omega_{RF} = \frac{h c}{R} \sqrt{\frac{B^2}{B^2 + \left(\frac{E_0}{e \rho c}\right)^2}}$$

On a vu (éq. 3 et 22)

$$\omega_s = \frac{\omega_{RF}}{h} = \frac{e}{m} \langle B \rangle = \frac{e}{m} \frac{\rho}{R} B$$

$$m = \frac{E}{c^2}, \quad E^2 = p^2 c^2 + E_0^2 \quad \text{et} \quad p = e B \rho$$

$$m = \frac{\sqrt{p^2 c^2 + E_0^2}}{c^2} = \frac{\sqrt{e^2 B^2 \rho^2 c^2 + E_0^2}}{c^2}$$

$$= \frac{c e}{c^2} \sqrt{B^2 \rho^2 + \left(\frac{E_0}{c e}\right)^2}$$

$$\frac{e}{m} = \frac{c}{\sqrt{B^2 \rho^2 + \left(\frac{E_0}{e c}\right)^2}} = \frac{c}{\rho \sqrt{B^2 + \left(\frac{E_0}{\rho e c}\right)^2}}$$

$$\frac{\omega_{RF}}{h} = \frac{e}{m} \frac{\rho}{R} B = \frac{c}{\rho \sqrt{B^2 + \left(\frac{E_0}{\rho e c}\right)^2}} \frac{\rho}{R} B$$

$$\omega_{RF} = \frac{h c}{R} \sqrt{\frac{B^2}{B^2 + \left(\frac{E_0}{\rho e c}\right)^2}}$$

(30)

b) Posons $B_0 = \frac{E_0}{\rho e c}$

On sait que $\omega_{RF} = 2 \pi f_{RF}$

L'équation (30) s'écrit:

$$\omega_{RF} = \frac{h c}{R} \sqrt{\frac{B^2}{B^2 + B_0^2}} = \frac{h c}{R} \sqrt{\frac{\left(\frac{B}{B_0}\right)^2}{1 + \left(\frac{B}{B_0}\right)^2}}$$

$$f_{RF} = \frac{h c}{2 \pi R} \left(\frac{B}{B_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{B_0}\right)^2}}$$

c) Variations de f

1) Si $B \ll B_0$, f_{RF} varie linéairement avec le champ magnétique car $\left(\frac{B}{B_0}\right)^2 \ll 1$.

2) Si $B \gg B_0$, f_{RF} tend vers la limite $\frac{h c}{2 \pi R}$.

d) Exemple du PS pour les protons ($h = 20$).

$$B_0 = \frac{938.10^6 \text{ eV}}{70 \times 3 \times 10^8} = 0,0446 \text{ T}$$

Calcul du champ B à l'injection:

$$B = \frac{p}{0,3 \rho} \quad \text{d'après (13)}$$

$$P = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2} \quad \text{d'après (10)}$$

Avec $E = 988 \text{ MeV}$

$$p = 0,31 \text{ GeV} / c$$

$$B = 1,48 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

$$\frac{B}{B_0} = 0,3308$$

Fréquence à l'énergie d'injection:

$$f_{RF} = \frac{20 \times 3 \cdot 10^8}{2 \pi \cdot 100} (0,33) = 3,1 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$(f_{RF})_{inj} \approx 3 \text{ MHz}$$

Même calcul pour la fréquence à l'éjection:

$$p \approx 26 \text{ GeV} / c$$

$$B \approx 1,23 \text{ T} \quad \frac{B}{B_0} \approx 27,72$$

$$f_{RF} \approx \frac{h c}{2 \pi R} = \frac{20 \times 3 \cdot 10^8}{2 \pi \cdot 100} = 9,5 \cdot 10^6 \text{ Hz}$$

$$(f_{RF})_{éjéc} = 9,5 \text{ MHz}$$

e) Temps mis par un proton pour un tour machine.

$$\omega_{RF} = h \omega_{rev}$$

$$2 \pi f_{RF} = h \frac{2 \pi}{T}$$

$$T_{rev} = \frac{h}{f_{RF}}$$

$$T_i = \frac{20}{3 \cdot 10^6} \approx 6,6 \mu s$$

$$T_e = \frac{20}{9,5 \cdot 10^6} \approx 2,1 \mu s$$

Exercice 5

Montrons la relation:

$$\beta = \left(\frac{B}{B_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{B_0} \right)^2}}$$

D'après (2) nous avons:

$$B \rho = \frac{p}{e} = \frac{m v}{e} = \frac{m \beta c}{e} \quad \text{d'où}$$

$$\beta = \frac{B \rho e}{m c} = \frac{B \rho e c}{m_0 \gamma c^2} = \frac{B}{\gamma} \frac{\rho e c}{m_0 c^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{B}{B_0}$$

D'après (8) nous avons:

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \beta^2}$$

portons ce résultat dans l'équation ci-dessus:

$$\beta = \frac{1}{\gamma} \frac{B}{B_0} = \sqrt{1 - \beta^2} \frac{B}{B_0}$$

$$\beta = \left(\frac{B}{B_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{B_0} \right)^2}}$$

Exemple:

$$\rho = 70 \text{ m}$$

$$B_0 = \frac{E_0}{\rho e c} = \frac{938 \cdot 10^6 \text{ eV}}{70 \times 3 \cdot 10^8} = 0,0446$$

$$\text{Avec } E = 938 \text{ MeV} \quad B = 1,48 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

d'où $\frac{B}{B_0} = 0,3308$. On retrouve le résultat de l'exercice 4.

Autre méthode.

$$\beta = \frac{v}{c} = \frac{\omega R}{c} = \frac{2 \pi f_{\text{rev}} R}{c}$$

$$\beta = \frac{2 \pi R}{c} \frac{f_{\text{RF}}}{h}$$

d'où

$$f_{\text{RF}} = \frac{h c}{2 \pi R} \beta$$

Comparons avec l'expression de l'exercice 4.

On en déduit:

$$\beta = \left(\frac{B}{B_0} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B}{B_0} \right)^2}}$$

Exercice 6

1) Calcul de fréquences synchrotroniques.

La relation (47) s'écrit:

$$\Omega_s^2 = \frac{e \hat{V}_{RF} \eta h \cos \phi_s}{2 \pi E_s} \frac{c^2}{R_s^2}$$

a) Pour le AA

$$\omega_\infty = \frac{c}{R_s} = \frac{3 \cdot 10^8}{25} = 1,2 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$$

$$\cos \phi_s = -0,9816$$

$$\eta = -0,11 = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p = \left(\frac{0,938}{3,6}\right)^2 - 0,178$$

$$\Omega_s^2 = \frac{\hat{V}_{RF} \eta h \cos \phi_s}{2 \pi E_s \text{ (eV)}} \omega_\infty^2$$

$$\Omega_s^2 = \frac{14 \cdot 10^3 \times (-0,11) (1) (-0,9816)}{2 \pi 3,6 \cdot 10^9} (1,2 \cdot 10^7)^2$$

$$\Omega_s^2 = 9,62 \cdot 10^6$$

$$\Omega_s = 3102 \text{ rad/s} = 2 \pi f_s$$

$$f_s = 493,7 \text{ Hz}$$

$f_s \approx 500 \text{ Hz}$

b) Pour le PS.

$$\frac{c}{R} = \frac{3 \cdot 10^8}{100} = 3 \cdot 10^6 \text{ rad/s}$$

Posons: $\Omega_s^2 = \Omega_0^2 \cos \phi_s$

$$f_s = \frac{\Omega_0}{2\pi} \sqrt{|\cos \phi_s|}$$

avec: $\Omega_0^2 = \frac{e \hat{V}_{RF} \eta h}{2 \pi E_s} \frac{c^2}{R^2} = \frac{e \hat{V}_{RF} h}{2 \pi} \frac{c^2}{R^2} \frac{\eta}{E_s}$

$$\Omega_0^2 = \frac{200 \times 10^3 (20)}{2\pi} (3 \cdot 10^6)^2 \frac{\eta}{E_s} = 6,1 \cdot 10^9 \frac{|\eta|}{\gamma}$$

	injection	tran- sition	accélé ration	éjection
E_s (GeV)	0,988	6	10	26
$\eta = \frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p$	0,8743	0	-0,0182	-0,0257
Ω_0 (rad/s)	$7,1 \cdot 10^4$	0	3227	2380
ϕ_s (degrés)	34	-	146	146
$ \cos \phi_s $	0,829	-	0,829	0,829
$\sqrt{\cos \phi_s}$	0,91	-	0,91	0,91
f_s (Hz)	$10,3 \cdot 10^3$	0	467	345

La fréquence synchrotrique diminue avant la transition jusqu'à s'annuler. Puis elle croît de nouveau.

2) La fréquence synchrotronique passe par un extrêmun.

$$\Omega_0^2 = K \frac{1}{\gamma} = K \left(\frac{1}{\gamma^2} - \alpha_p \right) \frac{1}{\gamma} = K \left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{\alpha_p}{\gamma} \right)$$

$$\gamma = \frac{E}{E_0}$$

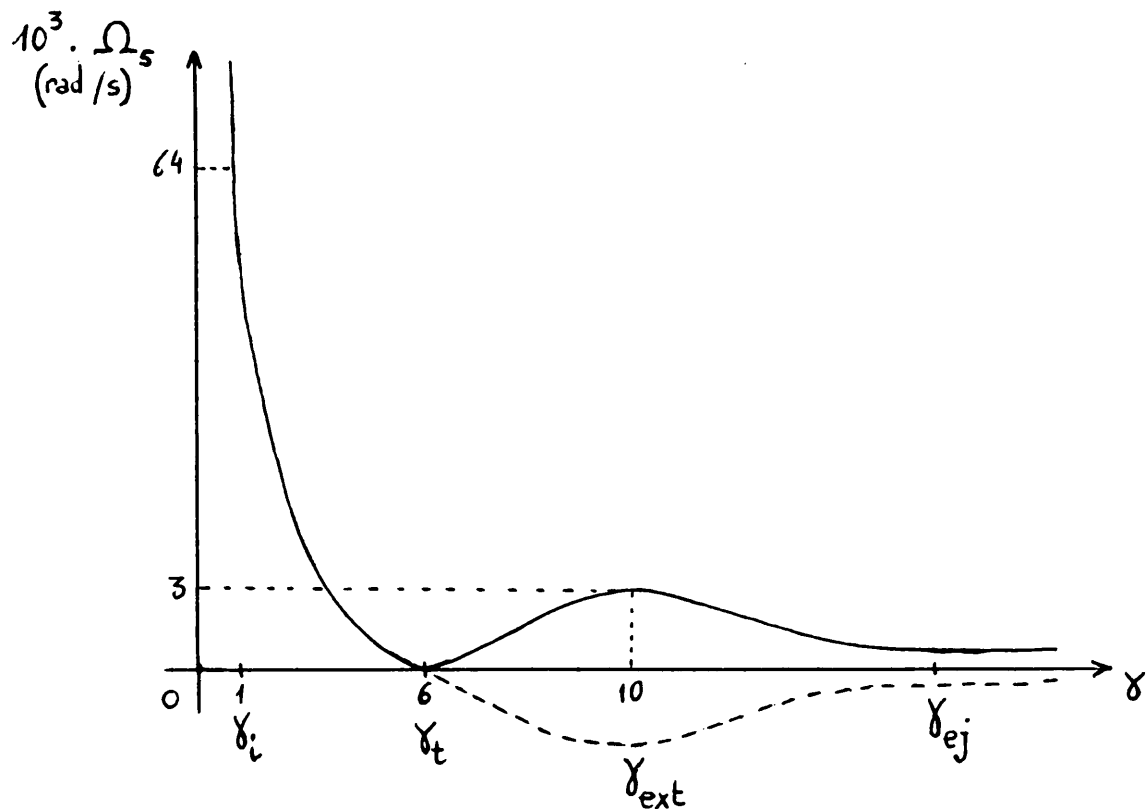
$$\Omega_0^2 = K \left(\frac{1}{\gamma} \right)^3 - \frac{\alpha_p}{\gamma}$$

$$\begin{aligned} 2 \Omega_0 \frac{d\Omega_0}{d\gamma} &= K \left[3 \left(\frac{1}{\gamma} \right)^2 \left(-\frac{1}{\gamma^2} \right) - \alpha_p \left(-\frac{1}{\gamma^2} \right) \right] \\ &= K \left[-3 \frac{1}{\gamma^4} + \frac{\alpha_p}{\gamma^2} \right] \\ &= \frac{K}{\gamma^2} \left[\alpha_p - \frac{3}{\gamma^2} \right] \end{aligned}$$

La fréquence synchrotronique passe par un extrêmun, car sa dérivée s'annule pour une certaine valeur de γ .

$$\gamma_{\text{ext}} = \sqrt{\frac{3}{\alpha_p}}$$

3) Courbe $\Omega_s = K \cdot \left(\frac{1}{\gamma^3} - \frac{\alpha_p}{\gamma} \right)$

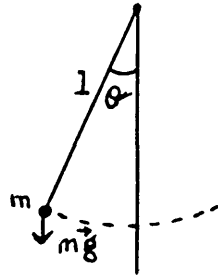


Les fréquences étant toujours positives, on a un point de rebroussement lorsque $\gamma = \gamma_t$

γ	f_s (Hz)	$10^3 \frac{\Omega_s}{\text{rad/s}}$
$\gamma_i = \frac{0,988}{0,938} = 1,05$	10300	64,7
$\gamma_t = \sqrt{\frac{1}{0,027}} = 6,08$	0	0
$\gamma_{ext} = \sqrt{\frac{3}{0,027}} = 10,5$	467	2,9
$\gamma_{ej} = \frac{26}{0,938} = 27,7$	345	2,1

Exercice 7

Pendule simple.



Energie potentielle:

$$U = m g l (1 - \cos \theta)$$

Energie cinétique:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d(l\theta)}{dt} = l \dot{\theta}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2$$

$$E_c = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m l^2}$$

L'hamiltonien $H(\theta, p)$ s'écrit:

$$H(\theta, p) = E_c + U = \frac{p^2}{2 m l^2} + 2 m g l \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

où les variables canoniques:

$$\dot{p} = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = - m g l \sin \theta$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m l^2}$$

Dérivons cette dernière équation:

$$\ddot{\theta} = \frac{\dot{p}}{m l^2}$$

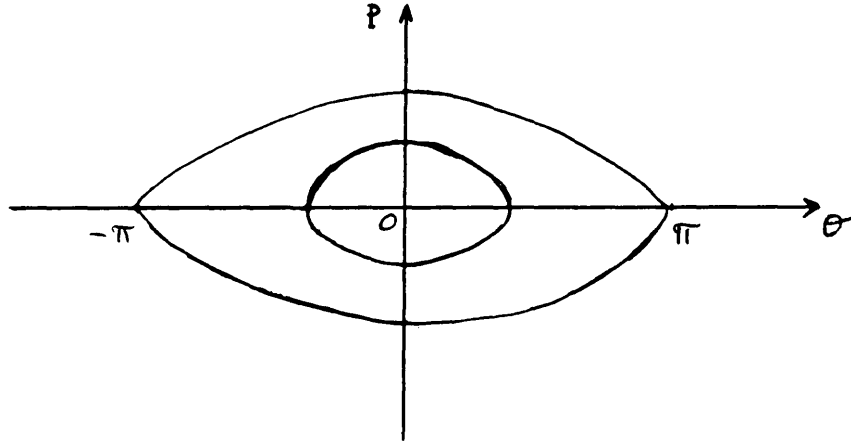
Remplaçons \dot{p} par son expression pour trouver l'équation différentielle du mouvement.

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Puisque $\frac{dH}{dt} = 0$ l'hamiltonien est un invariant.

$$H(\theta, p) = \frac{p^2}{2 m l^2} + 2 m g l \sin^2 \frac{\theta}{2} = \text{constant}$$

Trajectoires dans le plan de phase (p, θ)



Remarque: Le lagrangien $L(\theta, \dot{\theta})$ s'écrit:

$$L(\theta, \dot{\theta}) = E_c - U = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - m g l (1 - \cos \theta)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta}$$

Exercice 8

A partir de l'équation de la séparatrice (69), calculons la valeur maximum de W .

On doit l'obtenir pour $\phi = \phi_s$
(voir figures 8 et 9).

$$\frac{B^2}{8 \pi^2 R_s^2} \hat{W}^2 - \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} \left[\cos \phi_s + \cos \phi_s + (\phi_s - \pi + \phi_s) \sin \phi_s \right] = 0$$

Rappelons que $B = \frac{-\eta h \omega_s}{R_s p_s}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{\eta h \omega_s}{2 \pi R_s p_s} \right)^2 \hat{W}^2 &= \frac{\Omega_s^2}{\cos \phi_s} \left[2 \cos \phi_s - (\pi - 2\phi_s) \sin \phi_s \right] \\ &= \frac{e \hat{V}_{RF} \eta h \omega_s}{2 \pi R_s p_s} \left[\right] \end{aligned}$$

On retrouve l'expression (65)

$$\boxed{(\hat{W})_{sep}^2 = \frac{e \hat{V}_{RF} 4 \pi R_s p_s}{h \eta \omega_s} \left[2 \cos \phi_s - (\pi - 2\phi_s) \sin \phi_s \right]}$$

Exercice 9

1) Exprimons (73) en fonction de l'énergie:

$$\frac{\omega_s}{p_s R_s} = \frac{v_s}{p_s R_s^2} = \frac{v_s}{m v_s R_s^2} = \frac{1}{m R_s^2} = \frac{c^2}{E_s R_s^2}$$

$$\hat{\Delta \phi} = \text{cte} \left[\frac{\eta}{E_s R_s^2 \hat{V}_{RF} \cos \phi_s} \right]^{1/4}$$

2) Exprimons $\hat{\Delta E}$ et $\hat{\Delta p}$

On utilise la relation (55): $\hat{W} = \frac{\hat{\Delta E}}{\omega_s} 2\pi$

Portons dans (71)

$$\hat{\Delta E} = \text{cte.} \omega_s \left[\frac{E_s R_s^2 \hat{V}_{RF} \cos \phi_s}{\eta} \right]^{1/4}$$

Nous avons vu que $\hat{W} = 2\pi R_s \hat{\Delta p}$

$$\hat{\Delta p} = \text{cte.} \left[\frac{E_s \hat{V}_{RF} \cos \phi_s}{\eta R_s^2} \right]^{1/4}$$

3) Exprimons l'écart en position radiale

$$\frac{\hat{\Delta p}}{p} = \frac{\hat{\Delta R}}{R} \alpha_p$$

$$\hat{\Delta p} = \frac{p}{\alpha_p} \hat{\Delta R} = \frac{1}{\alpha_p} \frac{E_s \omega_s}{c^2} \hat{\Delta R}$$

$$\hat{\Delta R} = \text{cte.} \frac{\alpha_p}{\omega_s} \left[\frac{\hat{V}_{RF} \cos \phi_s}{\eta R_s^2 E_s^3} \right]^{1/4}$$

- 4) La constante peut être déterminée par les conditions initiales.

Ainsi l'expression du 1) peut s'écrire:

$$\widehat{\Delta\phi}_i = \text{cte} \left[\frac{\eta_i}{E_i R_s^2 \widehat{V}_{RF} \cos\phi_s} \right]^{1/4}$$

où l'indice i indique une situation initiale donnée.

Faisons le rapport $(\widehat{\Delta\phi}) / (\widehat{\Delta\phi}_i)$

$$(\widehat{\Delta\phi}) = \left[\frac{E_i}{E_s} \frac{\eta}{\eta_i} \right]^{1/4} (\widehat{\Delta\phi}_i)$$

En identifiant avec l'expression initiale, on en déduit la valeur de la constante.

- 5) Exemple: Cas des machines à électrons.

$$\eta = \eta_i \approx -\alpha$$

$$\gamma_i = \frac{E_i}{E_0} \quad \gamma = \frac{E_s}{E_0}$$

L'expression de $(\widehat{\Delta\phi})$ ci-dessus se réduit à:

$$\boxed{(\widehat{\Delta\phi}) = \left(\frac{\gamma_i}{\gamma} \right)^{1/4} (\widehat{\Delta\phi}_i)}$$

Exercice 10

Démonstration de l'équation (74).

D'après (55) $W = 2 \pi R_s \Delta p$

Divisons par p et prenons la valeur maximum.

$$\frac{\hat{W}}{p} = 2 \pi R_s \left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max}$$

L'équation (65) donne:

$$(\hat{W})_{\text{sep}} = \pm \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{RF}} 4 \pi R_s p_s}{h \eta \omega_s} \left[2 \cos \phi_s - (\pi - 2 \phi_s) \sin \phi_s \right]}$$

Posons $F(\phi_s) = \left[2 \cos \phi_s - (\pi - 2 \phi_s) \sin \phi_s \right]$

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max} = \pm \frac{1}{2 \pi R_s p_s} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{RF}} 4 \pi R_s p_s}{h \eta \omega_s} F(\phi_s)}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{RF}} 4 \pi R_s p_s F(\phi_s)}{4 \pi^2 R_s^2 p_s^2 h \eta \omega_s}}$$

$$= \pm \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{RF}}}{\pi \eta h E_s} \left(\frac{E_s}{R_s p_s \omega_s} \right) F(\phi_s)}$$

$$\frac{E}{p} = \frac{m c^2}{m v} = \frac{c^2}{v} = \frac{c^2}{\omega R}$$

$$\frac{E}{p \omega R} = \frac{c^2}{(\omega R)^2} = \frac{c^2}{v^2} = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\left(\frac{\Delta p}{p} \right)_{\max} = \pm \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{e \hat{V}_{\text{RF}}}{\pi \eta h E_s} F(\phi_s)} \quad (74)$$

Exercice 11

1) L'expression de l'acceptance en unité eV.s est conservée lorsqu'on change de machine.

D'autres unités sont employées: le radian.

$$\mathcal{A} [\text{rad}] = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \cdot \alpha(r) \cdot \sqrt{\frac{\gamma e \hat{V}_{RF}}{h E_0 |\eta|}} \quad (11.1)$$

En comparant avec l'équation (77), on en déduit:

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{A} [\text{rad}]}{\mathcal{A} [\text{eV.s}]} &= \sqrt{2\pi} \frac{f_{RF}}{\beta} \sqrt{\frac{\gamma 2\pi}{E E_0}} = \frac{2\pi f_{RF}}{\beta E_0} = \frac{\omega_{RF}}{\beta E_0} \\ &= \frac{\beta c h}{\beta E_0 R} = \frac{h c}{R E_0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{A} [\text{rad}] = \frac{h c}{R E_0} \mathcal{A} [\text{eV.s}]} \quad (11.2)$$

On montre de la même manière que

$$\boxed{\mathcal{A} [\text{Hz}] = \frac{h c^2 \eta}{(2\pi R)^2 E} \mathcal{A} [\text{eV.s}]} \quad (11.3)$$

Cette valeur n'est utilisable que pour un faisceau dégroupé.

2) Emittance longitudinale.

Sur un palier magnétique, la surface du paquet de particules \mathcal{E} est donnée par:

$$\mathcal{E} [\text{rad}] = \mathcal{A} \cdot f(\hat{\phi})$$

$$\text{où } f(\hat{\phi}) = \frac{\sin^2 (\hat{\phi} / 2,255)}{\sin^2 (\pi / 2,255)}$$

$$\text{avec } \hat{\phi} = \frac{\Delta \phi}{2} \quad \Delta \phi = \text{longueur du paquet} \\ \text{(en radians)}$$

Soit t la longueur temporelle du paquet.

$$\Delta \phi = \omega_{RF} \cdot t = 2 \pi f_{RF} t$$

$$\hat{\phi} = \pi f_{RF} t$$

d'où

$$\mathcal{E}_{[\text{rad}]} = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\gamma e \hat{V}_{RF}}{h E_0 |\eta|}} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi f_{RF} t}{2,255} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2,255} \right)}$$

En tenant compte de (11.2)

$$\mathcal{E}_{[\text{ev. s}]} = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{E e \hat{V}_{RF} R^2}{h^3 |\eta| c^2}} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi f_{RF} t}{2,255} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2,255} \right)} \quad (11.4)$$

3) Application pour un paquet d'anti-protons sur l'orbite d'éjection du AA.

$$E = 3,6962 \text{ GeV} \quad e \hat{V}_{RF} = 14 \text{ keV} \quad R = 25 \text{ m} \\ t = 80 \text{ ns} \quad h = 1 \quad |\eta| = 0,11 \\ f_{RF} = 1846 \text{ kHz}$$

$$\mathcal{E}_{[\text{eV} \cdot \text{s}]} = \frac{16}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{3,69 \cdot 10^9 \cdot 14 \cdot 10^3 (25)^2}{0,11 (3 \cdot 10^8)^2}} \frac{\sin^2 \left(\frac{\pi \cdot 1846 \cdot 10^3 \cdot 80 \cdot 10^{-9}}{2,255} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\pi}{2,255} \right)}$$

$$\mathcal{E} = 0,496 \text{ eV} \cdot \text{s}$$

Appliquons la relation (11.2) pour trouver l'émittance longitudinale en radians.

$$\mathcal{E} = \frac{1 \times 3 \times 10^8}{25 \times 938 \cdot 10^6} 0,496 = 6,34 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\mathcal{E} \approx 6 \text{ mrad}$$

4) Calcul de cette émittance dans le PS où $R = 100 \text{ m}$ et $h = 6$

$$\mathcal{E} = \frac{6 \times 3 \times 10^8}{100 \times 938 \cdot 10^6} 0,496 = 9,518 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$$

$$\mathcal{E} \approx 9 \text{ mrad}$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. Eovet *useful* A selection of formulae and *data*
for the design of A.G. syn-
chrotrons.
CERN / MPS-SI DL/70-4
- [2] H. Bruck Accélérateurs circulaires
de particules
INSTN Saclay 1966
- [3] B.W. Montague Single particule dynamics
RF acceleration
CERN 77-13
- [4] J.P. Riinaud La RF du AA PS/OP Note 82-16