

Le refroidissement stochastique

Louis RINOLFI

DEA
Instrumentation et Mesures
Universite Joseph Fourier
Grenoble 1990.

I- Introduction

Le titre de ce cours est composé de deux termes:

- "Refroidissement", qui donne l'idée de température. Il fait appel aux notions de Thermodynamique, et en particulier au concept d'entropie qui est aussi une mesure de l'ordre d'un système.

- "Stochastique", qui donne l'idée de nature aléatoire. Il fait appel aux notions de Statistiques.

Avant de développer ces deux concepts, nous rappelons les différentes méthodes de refroidissement d'un faisceau. Il en existe essentiellement quatre. Toutes ont lieu dans un anneau de stockage.

- Refroidissement stochastique.
- Refroidissement par électrons.
- Refroidissement par radiations synchrotroniques.
- Refroidissement par laser.

L'objet du cours est axé sur la première méthode. Nous dirons seulement quelques mots sur les trois autres.

II- Notion thermodynamique.

Le terme "refroidissement" des faisceaux introduit une notion de température. Elle doit être interprétée dans le sens de la théorie cinétique des gaz. On sait que dans ce cadre, la température T est reliée à l'énergie cinétique des particules par la relation:

$$\frac{3}{2} k T = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \quad (1)$$

où k est la constante de Boltzmann
 m la masse des particules
 $\langle v^2 \rangle$ la vitesse quadratique moyenne.

La température est ici une mesure du désordre, d'où la notion d'entropie.

Rappelons le concept du Premier principe de Thermodynamique. Il stipule la conservation de l'énergie disponible, mais ne tient pas compte de la "qualité" de l'énergie. De plus il ne dit rien sur le sens des variations ainsi que sur la possibilité d'un état du système à partir duquel il ne puisse plus évoluer.

Exemples: 1) La flamme d'une bougie contient assez d'énergie pour soulever un piano au plafond.

2) Une collision $p\bar{p}$ dégage une énergie qui augmente la température d'un milligramme d'eau d'environ 10^{-6} degré.

Deuxième principe.

C'est un principe d'évolution. Il permet d'affirmer que pour un système donné certains types de transformations sont réalisables dans un seul sens.

L'état initial et l'état final ne jouent pas le même rôle. Il y a une nette distinction entre les transformations irréversibles (réelles) et les transformations réversibles (limites théoriques des transformations réelles).

Le concept global stipule que pour un système isolé, abandonné à lui-même, le "désordre" ne fait que croître. On le traduit par l'équation:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T} \quad (2)$$

où la variation d'entropie ΔS est toujours positive.

Commentaire:

Le premier principe est applicable à tout processus observable, qu'il soit un système macroscopique ou un système microscopique (particules).

Le second principe n'est applicable qu'à un système macroscopique.

III- Rappels sur l'espace des phases.

C'est un espace abstrait, considéré en mécanique statistique pour représenter l'état d'un système matériel contenant N particules identiques.

III-1 Espace μ .

Soit une particule avec $l = 3$ degrés de liberté, auxquels on attache deux variables canoniques.

L'espace μ a alors six dimensions.

Chaque état d'une particule est représenté par un point dans l'espace μ .

L'évolution du système au cours du temps est donnée par l'ensemble des N trajectoires.

Les variables canoniques sont les trois coordonnées (x, y, z) et les trois moments conjugués (p_x, p_y, p_z) .

III-2 Espace \mathcal{V} .

Il y a $2lN$ dimensions. Chaque état microscopique du système y est représenté par un point. L'évolution du système au cours du temps est donnée par la trajectoire de ce point.

Si l'état macroscopique du système est soumis à certaines conditions (invariance de l'énergie), la trajectoire de phase est localisée dans une région de \mathcal{V} . L'hypothèse ergodique montre que cette région est uniformément remplie (densité constante).

III-3 Théorème de Liouville.

Il exprime la conservation d'un volume de l'espace \mathcal{V} lorsque le système est soumis à un champ de forces conservatif.

Sa forme change, mais sa densité reste constante.

III-4 Application au refroidissement stochastique.

Il utilise un champ de forces électromagnétiques qui dérivent de potentiels. Nous avons bien un système conservatif.

Si l'on peut mesurer les valeurs d'une variable canonique de l'espace μ , on peut effectuer une correction de telle sorte que chaque particule soit déplacée vers le centre de la distribution.

Dans l'espace à 6 dimensions, la densité est augmentée mais l'évolution du système dans l'espace à $6N$ dimensions remplira toujours une région \mathcal{V} d'une manière uniforme. Le théorème de Liouville est respecté.

Ce refroidissement peut se réaliser sous deux conditions:

- nous devons accéder à l'information qui nous donne la position de chaque particule.
- nous devons pouvoir agir sur les particules.

Un système de refroidissement stochastique comprend un détecteur, mesurant un signal en provenance de la particule, et un correcteur agissant sur la particule en fonction du signal d'erreur transmis au travers d'une chaîne d'amplification.

Un tel système ressemble, de prime abord, à un démon de Maxwell qui réduirait l'entropie du faisceau. En fait, le second principe de thermodynamique n'est en rien violé, car s'il y a bien une diminution d'entropie localement, l'entropie globale du système augmente.

IV- Notion de stochastique.

IV-1 Notion d'échantillon.

Dans la réalité le nombre de particules peut varier de 10^6 à 10^{12} .

Un système de refroidissement stochastique est représenté sur la figure 1.

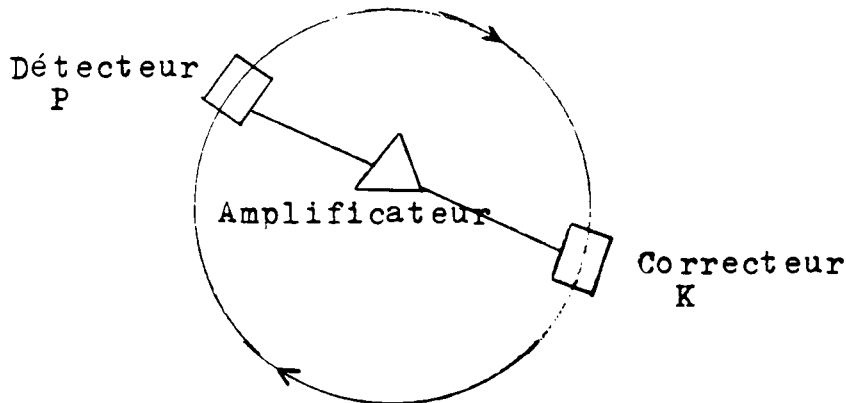


Fig. 1

On montre qu'un signal de courte durée, passant dans une chaîne de filtrage, peut être décrit par des échantillons comportant N_s particules chacun.

Un échantillon comprend une particule test et $(N_s - 1)$ autres particules.

La particule test arrive à t_0 dans le détecteur. Toutes les particules qui seront dans un intervalle $t_0 \pm \frac{T_s}{2}$ formeront un échantillon, appartenant à la particule test.

T_s est défini à partir de la bande passante du système électronique qui transporte le signal d'erreur de P vers K (Fig.1).

On peut considérer ce système de deux points de vue:

a) étude d'une particule où l'on superpose l'effet de refroidissement provenant de son propre signal, et l'effet de réchauffement provenant des autres particules.

b) étude d'un échantillon de N_s particules, en le traitant comme une particule unique.

Les deux approches conduisent au même résultat.

L'idée de signal stochastique vient du fait que l'on traite des échantillons de particules d'une manière aléatoire.

Le refroidissement d'une seule particule n'est pas un processus stochastique.

IV-2 Rappels de quelques définitions.

$\langle x \rangle$ moyenne ou espérance mathématique.

C'est un paramètre de position qui permet de localiser le centre de la distribution.

$\langle x^2 \rangle$ variance ou écart quadratique moyen.

C'est un paramètre de dispersion qui détermine la largeur de la distribution.

$$\langle x \rangle = \sum_i x_i f_i(x_i) = \frac{1}{N_s} \sum_i x_i \quad (3)$$

$$\langle x^2 \rangle = \sum_i x_i^2 f_i(x_i) = x_{\text{rms}}^2 \quad (4)$$

Soit N particules avec $\langle x \rangle = 0$

Prenons un échantillon aléatoire contenant N_s particules. D'après le principe d'échantillonnage en Statistiques:

$$\langle x \rangle_s = \langle x \rangle = 0 \quad (5)$$

$$\langle x^2 \rangle_s = \langle x^2 \rangle = x_{rms}^2 \quad (6)$$

$$\langle x \rangle_s^2 = \frac{x_{rms}^2}{N_s} \quad (7)$$

La figure 2 résume les variations de ces quantités en fonction du temps.

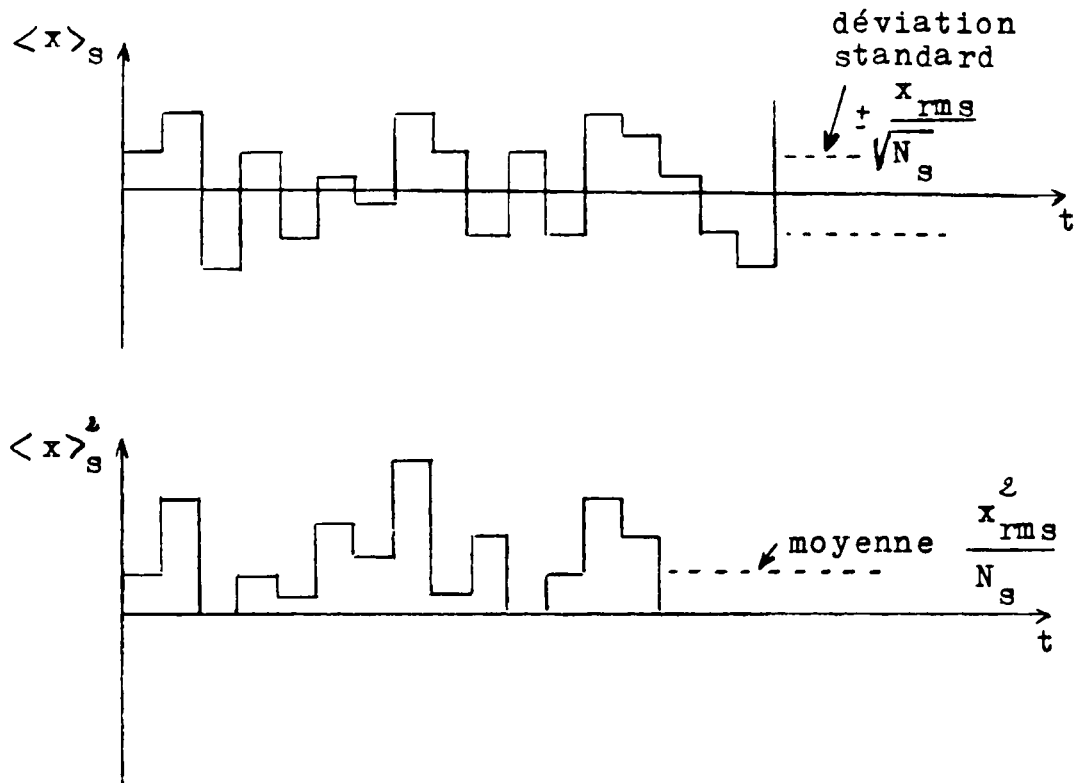


Fig. 2

IV- 3 Nombre de particules dans un échantillon.

En théorie du signal, le théorème de Kùpfmùller et Nyquist montre qu'un signal, dont le spectre de fréquences a une largeur finie $2W$, a une longueur temporelle "typique" de:

$$T_s = \frac{1}{2W} \quad (8)$$

La figure 3 illustre cet énoncé.

La transformation de Fourier permet de passer d'un domaine à l'autre.

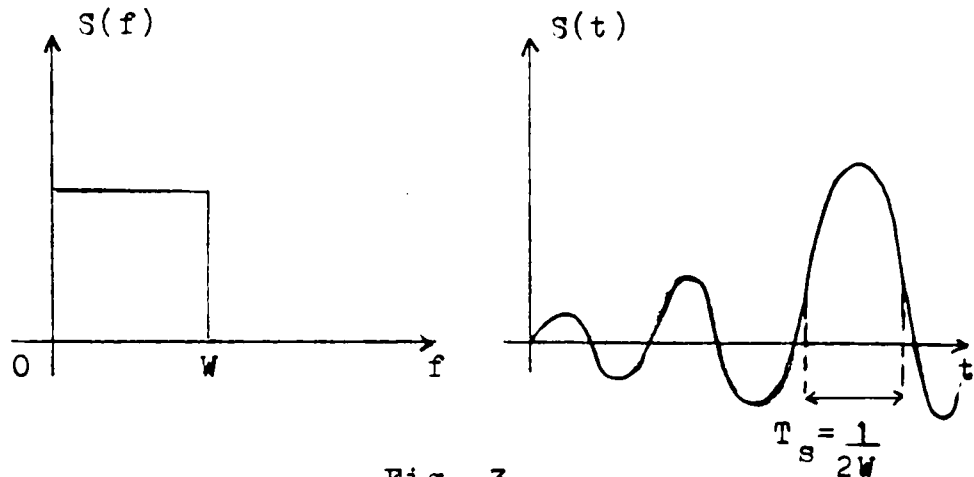


Fig. 3

Lorsqu'une impulsion courte est filtrée par un système passe-bas ou passe-bande W , l'impulsion résultante a une longueur temporelle T_s .

C'est le cas d'une particule passant dans le détecteur, dont la longueur temporelle est donnée par le temps de transit au travers de la P.U., et qui est, ensuite, filtrée par la chaîne électronique, avant d'arriver au correcteur.

Calcul du nombre de particules N_s dans un échantillon.

Soit N le nombre total de particules dans la machine,

et T la période de révolution.

$$\frac{N_s}{N} = \frac{T_s}{T}$$

D'après (8):

$$\boxed{N_s = \frac{N}{2 W T}} \quad (9)$$

V- Principe du refroidissement sur une seule particule.

Supposons que le détecteur de la figure 1 mesure les oscillations bétatroniques horizontales et que ces dernières soient de pures sinusoïdes.

Le détecteur mesure la position de la particule et le correcteur agit sur l'angle. Ils devront être espacés d'une distance $\frac{\lambda}{4}$ ou d'un multiple entier de ce quart d'oscillation bétatronique.

La figure 4 montre l'importance de la phase de l'oscillation bétatronique pour la correction de cette oscillation.

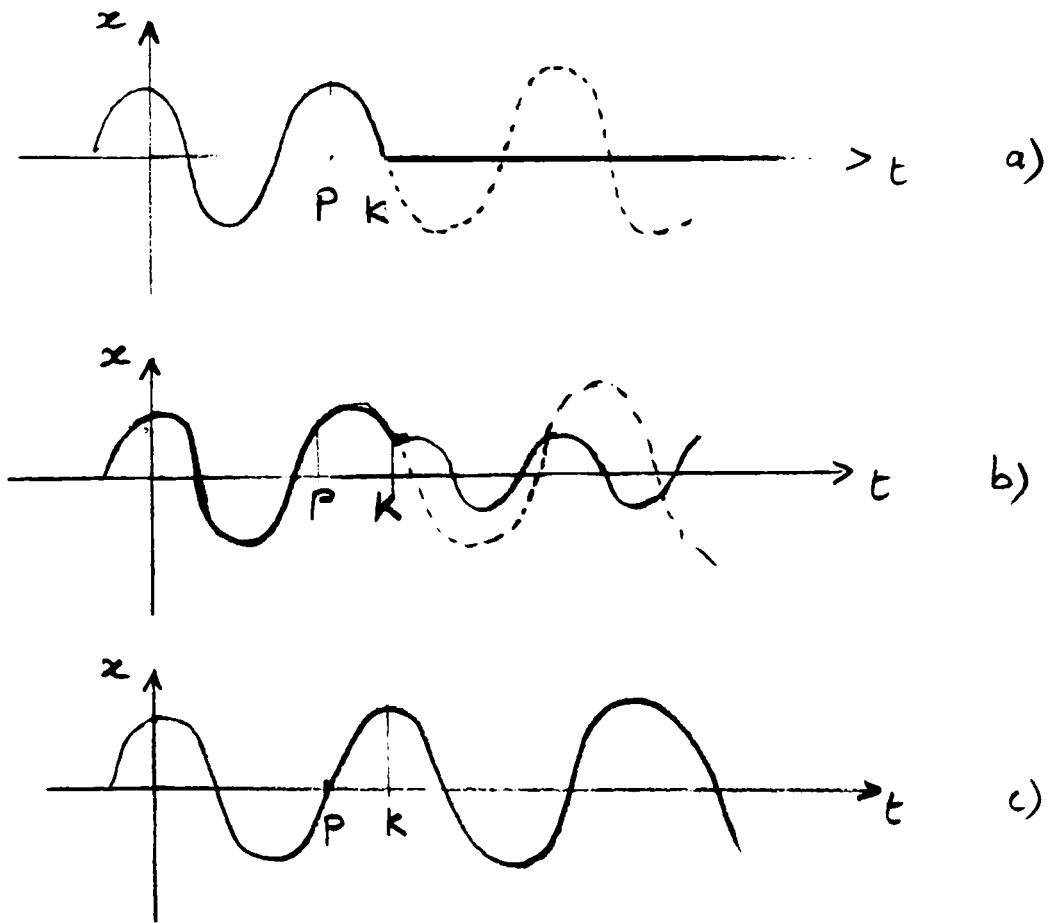


Fig 4

a) La particule passe dans la P.U. avec le maximum d'élongation et elle est corrigée lorsqu'elle arrive au kicker.

b) La particule arrive dans le détecteur avec une phase quelconque. Le correcteur ne corrige que partiellement l'amplitude de l'oscillation.

c) La particule arrive dans le détecteur sans erreur de position, le kicker ne corrige rien.

La figure 5 donne une représentation dans l'espace de phase (x, x') pour chacun des trois cas.

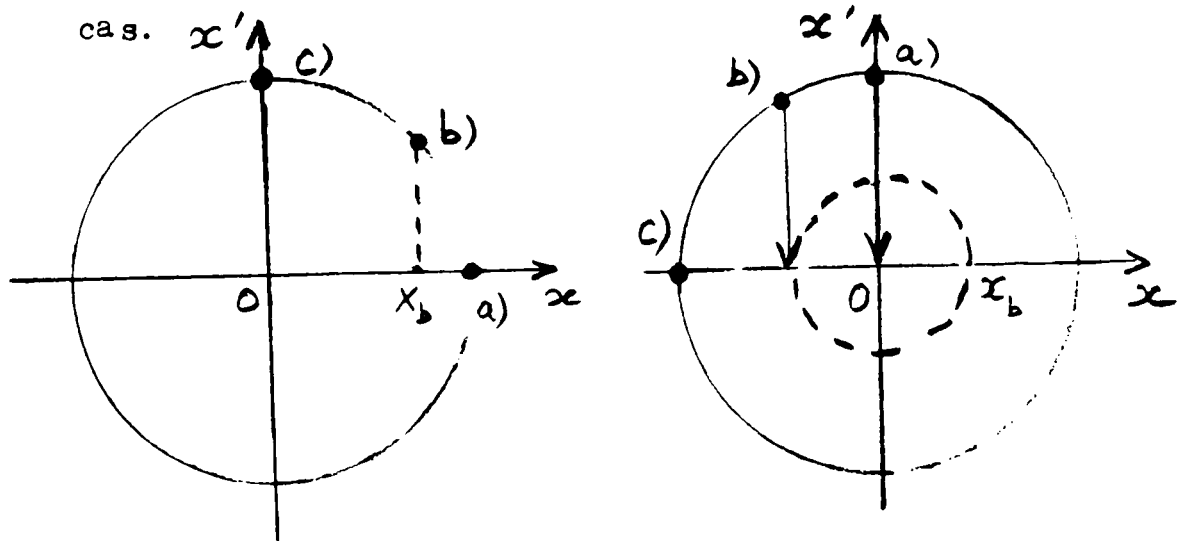


Fig. 5

Remarque:

Pour que ce processus fonctionne correctement, il faut que le temps, mis par le signal d'erreur pour aller du détecteur au correcteur, en passant par les chaînes d'amplification, soit égal au temps mis par la particule pour aller de P à K (Fig. 1).

VI- Temps de refroidissement

VI-1 Notion sur la correction effectuée par tour.

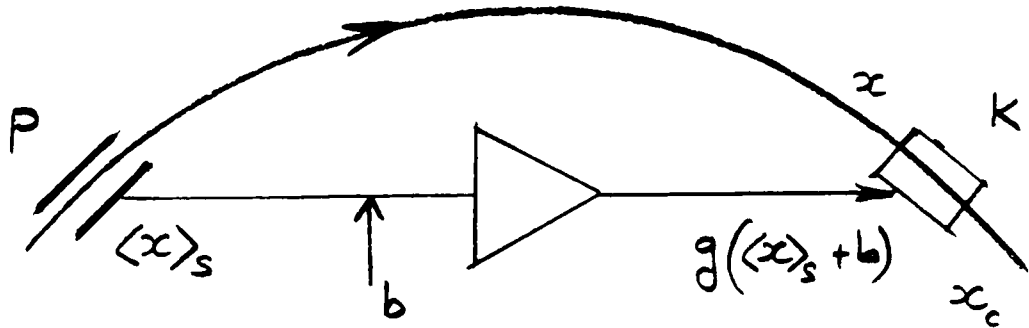


Fig. 6

- x erreur de la particule test avant le passage dans le kicker K.
- x_c erreur corrigée après le passage dans K.
- b bruit de la chaîne d'amplification et du filtrage (négligé en première approche).

$$x_c = x + \Delta x \quad (10)$$

$$\Delta x = \underbrace{-\lambda x}_{\text{effet cohérent}} - \underbrace{\lambda \sum_{\text{autres}} x_i}_{\text{incohérent}} \quad (11)$$

On suppose que la correction apportée par K est proportionnelle à x .

En tenant compte de (3) et en faisant entrer la particule test sous le signe somme, l'équation (11) devient:

$$\Delta x = -\lambda N_s \langle x \rangle_s = -g \langle x \rangle_s \quad (12)$$

où on a posé $g = \lambda N_s$ (13)

Le système de refroidissement stochastique mesure en P, la moyenne d'un échantillon (en fait, le centre de gravité de la distribution). En K, il applique le signal d'erreur proportionnel à $\langle x \rangle_s$, à la particule test.

Remarques:

1) On a considéré un seul échantillon attaché à une seule particule test. Cependant, sur une base statistique, tout échantillon de longueur T_s a une moyenne $\langle x \rangle_s$ identique.

On peut appliquer ces considérations à n'importe quelle particule test.

2) g ou "gain" est proportionnel à l'amplification du système (gain électronique) et à N_s .

L'équation (12) s'écrit: $-g = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle_s}$

g est une fraction du signal d'erreur appliqué à l'échantillon observé, par tour.

VI-2 Première approximation de τ

g , fraction décrite ci-dessus, est toujours inférieur à 1 (on ne peut pas corriger plus que l'erreur mesurée par échantillon).

Une limite supérieure du temps est donnée lorsque $g = 1$.

Supposons l'effet incohérent négligeable. A chaque passage, on a:

$$\Delta x = -\frac{1}{N_s} x \quad \text{d'après (11) et (13)}$$

Avec une décroissance exponentielle, le taux de refroidissement par tour s'exprime par:

$$\frac{1}{\tau_0} = - \frac{1}{x} \frac{dx}{dt_0}$$

Si la correction par tour est petite, on peut assimiler les différentielles aux accroissements finis:

$$\frac{1}{\tau_0} \approx - \frac{1}{x} \frac{\Delta x}{\Delta t_0}$$

Δx est le changement par tour,
 $\Delta t_0 = 1$ par tour

$$\frac{1}{\tau_0} \approx - \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{N_S} \quad \text{par tour}$$

On doit ramener ce paramètre en unité de temps

$$- \frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = \frac{dt_0}{dt} \left(- \frac{1}{x} \frac{dx}{dt_0} \right) = f_0 \left(\frac{1}{\tau_0} \right)$$

$$\frac{1}{\tau} = f_0 \left(\frac{1}{\tau_0} \right)$$

(9) permet d'écrire:

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{2W}{N}} \quad (14)$$

VI-3 Seconde approximation de τ

Si on ne néglige pas les termes provenant des autres particules (effet incohérent), on doit évaluer les variations quadratiques de $\Delta(x^2)$, non celles de $\Delta(x)$

$$\Delta(x^2) = x_c^2 - x^2$$

En utilisant (10), (12) et (13)

$$\Delta(x^2) = -2g x \frac{1}{N_s} \sum_i x_i + \left(\frac{g}{N_s} \sum_i x_i \right)^2 \quad (15)$$

Le refroidissement est un processus assez lent, qui nécessite plusieurs tours machine. On prend donc la moyenne de l'équation (15).

On remplace les moyennes sur les échantillons, par les valeurs attendues sur des échantillons aléatoires, pour obtenir le taux de refroidissement par tour.

Avec (3) et (7), le second terme de (15):

$$\left(\frac{g}{N_s} \sum_i x_i \right)^2 = g^2 \left(\langle x \rangle_s \right)^2 = \frac{g^2}{N_s} x_{rms}^2$$

En sortant la particule de référence du signe somme, le premier terme de (15):

$$x \frac{1}{N_s} \sum_i x_i = \frac{x^2}{N_s} + \frac{x}{N_s} \sum_{i=1} x_i$$

D'après (5)

$$\frac{1}{N_s-1} \sum_{i=1} x_i = \langle x \rangle = 0$$

(15) devient

$$\Delta(x^2) = -\frac{2g}{N_s} x^2 + \frac{g^2}{N_s} x_{rms}^2$$

et s'applique à toute particule test.

Prenons celle qui a la valeur rms:

$$\frac{1}{x_{rms}^2} \Delta(x_{rms}^2) = -\frac{1}{N_s} (2g - g^2) \quad (16)$$

On en déduit le taux de refroidissement par seconde:

$$\frac{1}{\tau_1} = -f_0 \frac{\Delta(x_{rms}^2)}{x_{rms}^2} = \frac{f_0}{N_s} (2g - g^2)$$

$$\boxed{\frac{1}{\tau_1} = \frac{2W}{N} (2g - g^2)} \quad (17)$$

Le terme $2g$ représente l'effet cohérent, le terme g^2 , l'effet incohérent produit par les autres particules.

Si l'on veut un refroidissement, g doit être assez petit.

Si $g > 2$ $\frac{1}{\tau_1} < 0$, on réchauffe le faisceau.

Si $g = 1$, on a un refroidissement optimum. la parenthèse de (17) est maximum.

VI-4 Bruit.

L'équation (10) s'écrit (Fig. 6)

$$x_c = x - g (\langle x \rangle_s + b)$$

L'équation (15) se transforme en:

$$\Delta(x^2) = -2g \frac{x}{N_s} \sum_i x_i + g^2 \left[\frac{x_{rms}^2}{N_s} + b^2 \right]$$

(16) devient:

$$\frac{\Delta(x_{rms}^2)}{x_{rms}^2} = -\frac{1}{N_s} \left[2g - g^2 \left(1 + \frac{b^2}{x_{rms}^2} \right) \right]$$

L'équation (17) devient

$$\frac{1}{\sigma_2} = \frac{2W}{N} \left[2g - g^2 \left(1 + \frac{b^2}{x_{rms}^2} \right) \right] \quad (18)$$

On peut dire que

$$\frac{b^2}{x_{rms}^2} \sim \frac{\text{puissance de bruit (ampli)}}{\text{puissance du signal}}$$

Même si le bruit est plus grand que le signal, on peut garder $\frac{1}{\sigma_2} > 0$ et rendre le refroidissement possible. Il suffit de prendre g assez petit.

Il faut attendre suffisamment longtemps pour que le système sorte le signal du bruit.

VI-5 Représentation graphique.

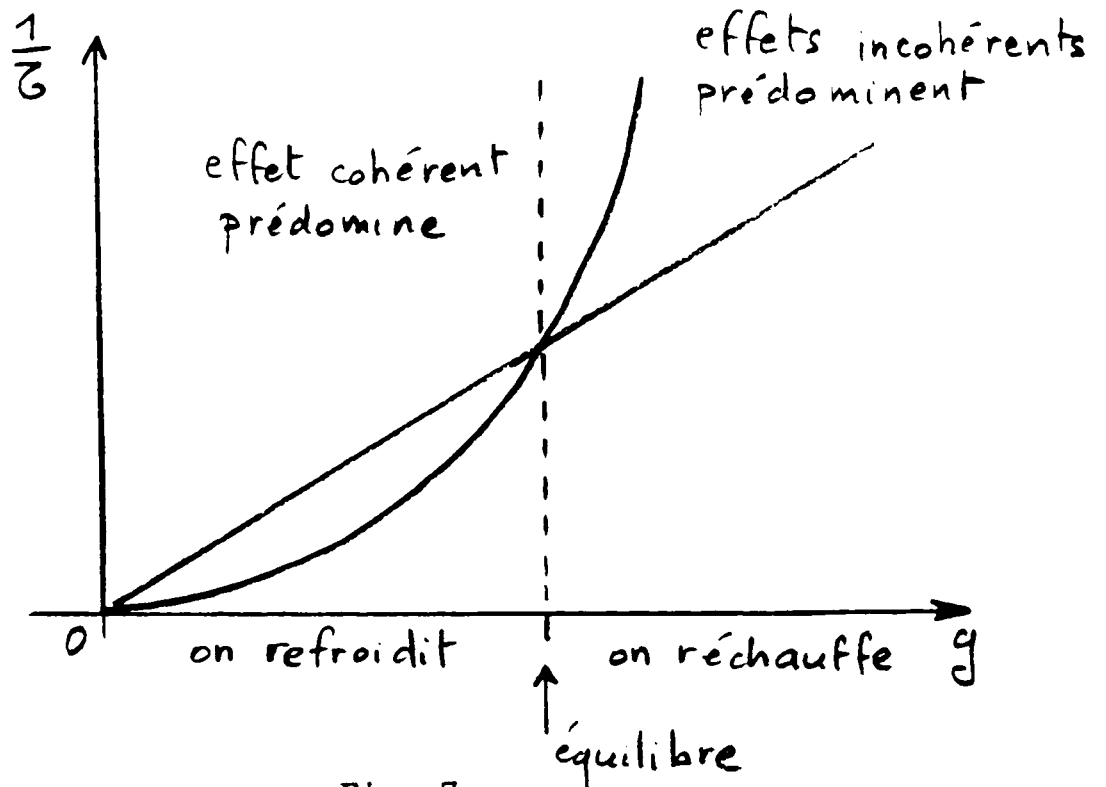


Fig. 7

VII- Mixing

Jusqu'à présent, nous avons supposé une distribution aléatoire des échantillons, ce qui est correct pour un faisceau non perturbé.

Lorsque le premier échantillon est corrigé, il ne donne plus de signal d'erreur au passage suivant dans le détecteur, et le refroidissement s'arrête.

Mais l'existence de la dispersion d'énergie dans un accumulateur implique des vitesses différentes, donc des orbites et des fréquences de révolution différentes, pour chaque particule.

Appelons que:

$$\eta = \frac{\frac{df}{f}}{\frac{dp}{p}} = \frac{1}{\gamma^2} - \frac{\frac{dR}{R}}{\frac{dp}{p}} \quad (19)$$

La population d'un échantillon donné va changer et l'erreur réapparaît.

Le refroidissement continue à s'effectuer. Il a toutefois une limite déterminée par:

1) la distribution en énergie.

Si elle devient trop petite le mixing devient trop lent.

2) le signal délivré par le détecteur.

S'il devient trop faible, il est complètement recouvert par les bruits.

3) les forces dues à la diffusion faisceau - faisceau qui compensent l'effet de refroidissement.

Si le mixing est assez rapide, pour obtenir une distribution aléatoire nouvelle entre K et P, l'hypothèse d'échantillons stochastiques s'applique.

Si le mixing est incomplet, le refroidissement devient plus lent.

Ainsi, si une particule, avec un certain $\frac{\Delta p}{p}$ met M tours pour changer d'échantillon par rapport à une particule avec $\frac{\Delta p}{p} = 0$, on peut dire intuitivement que le taux de refroidissement sera M fois plus grand.

(18) s'écrit alors:

$$\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{2W}{N} \left[2g - g^2 (M + U) \right]} \quad (19)$$

où $M \geq 1$

$$U = \frac{b^2}{x_{rms}^2}$$

L'optimum est obtenu pour:

$$g = g_0 = \frac{1}{M + U}$$

$$\boxed{\tau = \frac{N}{2W} (M + U)} \quad (20)$$

VIII- Autres méthodes de refroidissement.

VIII-1 Refroidissement par rayonnement syn- chrotronique.

Ce sujet a été traité dans un autre cours
[3] .

C'est la seule méthode qui ne requiert pas d'hardware spécifique, mais elle ne s'applique qu'à des particules légères.

L'équilibre se fait entre l'amortissement des oscillations, du à la radiation synchrotronique, et l'excitation quantique.

C'est d'ailleurs un des rares processus quantiques dont on peut mesurer l'effet au niveau macroscopique.

VIII-2 Refroidissement par électrons.

Contrairement au refroidissement stochastique, le champ de forces qui intervient ici, n'est pas conservatif.

L'idée de base, est de mélanger, dans une section droite, le faisceau de particules à refroidir avec un faisceau d'électrons.

Au début du refroidissement:

$$\langle v_i^2 \rangle \gg \langle v_e^2 \rangle$$

où v_i est la vitesse des ions
et v_e est la vitesse des électrons.

La théorie cinétique des gaz permet d'écrire

$$\frac{3}{2} k [T_i]_d = \frac{1}{2} M \langle v_i^2 \rangle \gg \frac{1}{2} m \langle v_e^2 \rangle = \frac{3}{2} k [T_e]_d$$

$[T_i]_d$ = température des ions au début.

A l'équilibre, nous avons:

$$[T_i]_f = [T_e]_f$$

VIII-3 Refroidissement par laser.

L'idée de base est la suivante: les ions ont des électrons qui possèdent un spectre discret d'absorption.

Si on utilise une fréquence sélective en relation avec l'effet Doppler, on peut distinguer les ions de différentes vitesses.

La fréquence Doppler des photons vue par les ions est:

$$\omega' = \gamma \omega (1 - \beta \cos \theta)$$

où θ est l'angle entre la vitesse de l'ion et celle du photon laser.

Les ions, dont la vitesse $\omega' = \omega_{AB}$ correspond à une transition A vers B, peuvent absorber des photons.

Ils seront réémis ensuite.

L'absorption des photons est unidirectionnelle, alors que l'émission est isotropique.

Les ions verront donc leur vitesse changer (conservation de la quantité de mouvement).

Un refroidissement pourra avoir lieu.

La figure 8 schématise le processus:

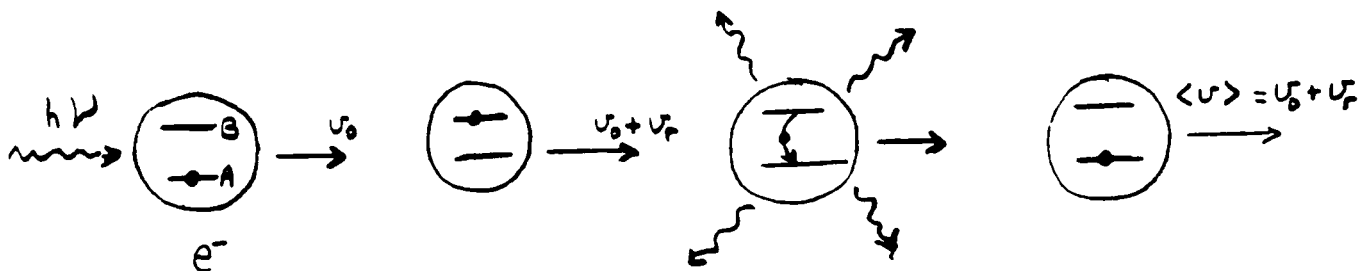


Fig. 8

IX- Comparaison des différentes méthodes.

	stochastique	Electron	Radiation synchrotron	Laser
Particules	toutes	p, \bar{p} , ions	e ⁺ e ⁻	ions
vitesse favorable	grande	$10^{-2} \leq \beta < 10^{-1}$	quelconque	quelconque mais effet Doppler
Intensité faisceau	basse	quelconque	quelconque	quelconque
Température favorable	haute	basse	quelconque	basse
Temps de refroidissement	dizaines de minutes	1 à 10 ⁻² s	~ ms	10 à 100 μ s

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Van der Meer Stochastic cooling and the
 accumulation of antiprotons
 Nobel lecture in Physics 1984
 CERN / PS / 84-72
- [2] D. Möhl Stochastic cooling for
 beginners
 CERN 84-15
 Dec. 1984
- [3] L. Rinolfi Rayonnement synchrotronique
 DEA Instrumentation
 et Mesures
 Grenoble 1990

E X E R C I C E S

Exercice 1

Soit une distribution discrète x telle que $x \in [-1, 0, 1]$ avec équiprobabilité de réalisation.

1) Calculer $\langle x \rangle$ et $\langle x^2 \rangle$

2) Prendre $N_s = 2$ échantillons.

Pour toutes les configurations possibles, calculer $\langle x \rangle_s$, $(\langle x \rangle_s)^2$ et $\langle x^2 \rangle_s$

3) Vérifier les équations (5), (6) et (7).

Exercice 2

Calculer le nombre de particules dans un échantillon et leur longueur spatiale pour les deux machines ci-dessous:

	AA	LEAR
p (GeV/c)	3,5	0,6
N	10^{11}	$5 \cdot 10^8$
W (GHz)	1	0,250
T (μ s)	0,542	0,50
N_s		
l_s		

Exercice 3

Effet du Mixing sur le refroidissement stochastique

Soient 10 particules aux positions aléatoires, réparties dans le faisceau de manière uniforme. Chaque échantillon consiste en une case carrée où se trouvent 2 particules (ligne 1).

1) Représenter sur la ligne 2, l'effet du passage dans le dispositif de refroidissement. C'est l'image après correction par le kicker.

Que peut-on dire de la particule 6 ?

2) Si les particules ne sont pas redistribuées, le faisceau peut repasser un nombre infini de fois dans le système, sans subir aucune modification.

Les détecteurs mesurent le centre de gravité de la distribution pour chaque échantillon.

Pour simuler le mixing, on portera la particule de droite de chaque échantillon (ligne 2) dans l'échantillon suivant à la même place.

Dessiner l'effet du mixing sur la ligne 3.

3) Représenter l'effet du passage dans le correcteur, sur la ligne 4.

4) Vérifier qu'après plusieurs passages entre Mixing et Cooling, la distribution finale est "refroidie" par rapport à la distribution initiale.

					1 Situation initiale
					2 Après 1 ^{er} passage dans K
					3 Après mixing
					4 Après 2 ^{em} passage dans K
					5
					6
					7
					8
					9
					10
					11

• = particule

x = centre de gravité de l'échantillon

10 particules réparties dans 5 échantillons

S O L U T I O N S

Exercice 1

1) Par définition

$$\langle x \rangle = \frac{1}{3} [-1 + 0 + 1] = 0$$

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= x_{\text{rms}}^2 = \frac{1}{3} [(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2] \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2) Prenons $N_s = 2$

<u>Séquences possibles</u>		<u>Statistiques</u>		
		$\langle x \rangle_s$	$(\langle x \rangle_s)^2$	$\langle x^2 \rangle_s$
-1	-1	-1	+1	+1
-1	0	$-\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{4}$	$+\frac{1}{2}$
-1	1	0	0	1
0	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
0	0	0	0	0
0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	-1	0	0	1
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1
Moyennes des valeurs = attente		$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

3) On vérifie bien:

$$\text{éq. (5)} \quad \langle x \rangle_s = \langle x \rangle = 0$$

$$\text{éq. (6)} \quad \langle x^2 \rangle_s = x_{\text{rms}}^2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{éq. (7)} \quad \langle x \rangle_s^2 = \frac{x_{\text{rms}}^2}{N_s} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}$$

Exercice 2

	AA	LEAR
N	10^{11}	$5 \cdot 10^8$
W (GHz)	1	0,250
T (μ s)	0,542	0,50
N_s	$9,2 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^6$
l_s (m)	0,15	0,3

a) On applique l'équation (9)

$$N_s = \frac{N}{2WT}$$

b) Longueur spatiale (définition)

$$l_s = \beta c T_s$$

équation (8)

$$l_s = \frac{\beta c}{2W}$$

Calcul de β

$$\beta = \sqrt{1 - \gamma^2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{E(\text{GeV})}{0,938}$$

	AA	LEAR
E(GeV)	3,62	1,1
γ	3,86	1,2
β	0,966	0,54

Exercice 3

- 1) L'effet du passage dans le dispositif de refroidissement consiste à ramener le centre de gravité de l'échantillon à zéro. La particule 6 qui avait une amplitude d'oscillation nulle va maintenant osciller.

- 2) Effet du mixing sur la ligne 3.

- 3) On continue ce processus jusqu'à l'équilibre. La distribution initiale est "refroidie".

					1 Situation initiale
					2 Après 1 ^{er} passage dans K
					3 Après mixing
					4 Après 2 ^{em} passage dans K
					5 mixing
					6 Kicker
					7 Mixing
					8 On a "refroidi" la distribution
					9
					10
					11

• = particule

x = centre de gravité de l'échantillon

10 particules réparties dans 5 échantillons