

Calcul de l'effet du champ de fuite  
au moyen de l'approximation "lentille épaisse"

---

I. Introduction

Une fois que la trajectoire axiale est connue, il est possible de calculer l'effet optique du champ de fuite sur un faisceau issu du CPS au moyen d'une approximation "lentille épaisse".

Il s'agit en fait d'une approximation linéaire autorisant de faibles déplacements transversaux (et même probablement longitudinaux) d'une cible ponctuelle, et par conséquent valable pour une cible étendue (ce qui n'est pas le cas avec l'approximation "lentille mince").

La représentation sous forme de lentille épaisse peut être utile pour l'introduction directe de l'effet optique du champ de fuite dans un programme existant de calcul de faisceau, ou encore lorsqu'il est plus simple de raisonner en termes de lentille (utilisation du champ de fuite comme premier élément d'un triplet par exemple). Encore faut-il être attentif au fait que les deux modèles rectangulaires correspondant au plan médian et au plan vertical ne coïncident pas nécessairement (voir Exemples). Pour de faibles angles de production, il peut même arriver que l'une des lentilles épaisses fictives se trouve derrière la cible ou encore soit retournée (sortie en amont de l'entrée). Ce cas "pathologique" se présente en fait lorsque plusieurs unités magnétiques ont une influence importante sur le faisceau (exemple 2).



Connaissant  $y_{oi}$ ,  $y'_{oi}$  et l'impulsion  $p_o$  (donc  $Y_o$  et  $Y'_o$ ), la matrice A peut se déterminer :

- 1) A l'aide des abaques de Michaelis des deux types (voir CPS User's Handbook, section J), compte tenu de

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial Y}{\partial y_o} & b &= \frac{\partial Y}{\partial y'_o} \\ c &= \frac{\partial Y'}{\partial y_o} & d &= \frac{\partial Y'}{\partial y'_o} \end{aligned}$$

- 2) Directement à partir du programme 193 P 5 (section J) qui fournit A pour les deux plans (dernier groupe de matrices).

Notons que A est toujours unimodulaire ( $\|A\| = 1$ ) avec une très bonne approximation. Il est donc suffisant de connaître trois de ses éléments (a, c et d par exemple).

On calculera les trois paramètres L,  $\ell$  et  $p'$  (fig. 1) de la manière suivante ( $L = k\ell =$  "force" de la lentille) :

a) Si  $\begin{cases} 0 < \text{Tr } A \leq 2 \\ c < 0 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} \text{Tr } A > 2 \\ c \geq 0 \end{cases}$  (lentille focalisante)

(on a toujours, pratiquement,  $\text{Tr } A \equiv a + d > 0$ ).

L est solution de l'équation transcendante (fig. 2a) :

$$\boxed{2 \cos L + L \sin L = \text{Tr } A} \quad (\text{voir appendice})$$

$$\begin{aligned} (0 \leq L < h_1 & \text{ si } 0 < \text{Tr } A \leq 2, \\ L > 2\pi & \text{ si } \text{Tr } A > 2). \end{aligned}$$

Puis  $\ell = \frac{-1}{c} L \sin L$  ( $\ell > 0$  si  $c < 0$ ,  
 $\ell < 0$  si  $c > 0$ ).

$$p' = \frac{1}{c} (d - \cos L) \quad (p' \geq 0).$$

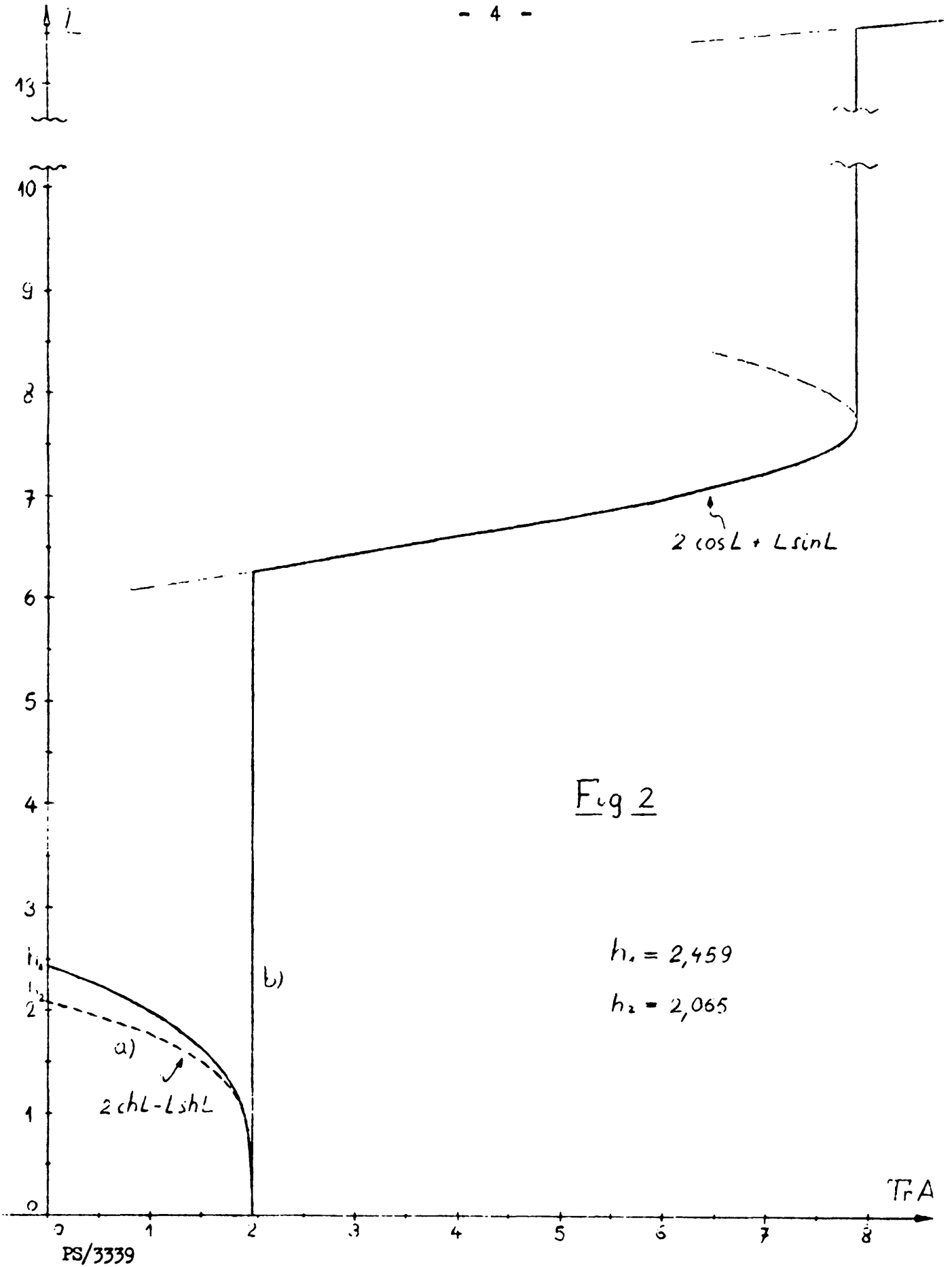


Fig 2

$$h_1 = 2,459$$

$$h_2 = 2,065$$

b) Si 
$$\begin{cases} 0 < \text{Tr A} \leq 2 \\ c > 0 \end{cases} \quad (\text{lentille défocalisante})$$

L est solution de l'équation transcendante (fig. 2b) :

$$2 \text{ ch } L - L \text{ sh } L = \text{Tr A}$$

$$(0 \leq L < h_2)$$

Puis : 
$$\ell = \frac{1}{c} L \text{ sh } L \quad (\ell > 0)$$

$$p' = \frac{1}{c} (d - \text{ch } L) \quad (p' \geq 0).$$

Notons que la lentille est retournée lorsque  $\ell < 0$ .

Cas particuliers :

Les équations transcendantes ont des solutions approximatives directes dans les deux cas suivants, assez fréquents :

Tr A peu inférieure à 2 : 
$$L = \sqrt[4]{12 (2 - \text{Tr A})}$$

Tr A peu supérieure à 2 : 
$$L = 2\pi + \frac{1}{2\pi} (\text{Tr A} - 2)$$

III. Exemples

1. Particules positives issues de la cible 1

$$y_{oi} = 0 \quad y'_{oi} = 0,10584 \text{ rad}, \quad p_o = 6,5 \text{ GeV/c} \quad (\text{faisceau } d_8).$$

Le programme 193 P 5 fournit, pour le plan médian H :

$$A_H = \begin{pmatrix} 0,6856 & -1,117 \\ 0,088 & 1,3031 \end{pmatrix} \quad (\|A_H\| \approx 1)$$

D'où 
$$\begin{cases} \text{Tr } A_H = 1,9887 \\ c_H = 0,088 \end{cases}$$

Le champ de fuite agit donc comme une lentille épaisse défocalisante dans ce plan. On trouve :

$$L_H = 0,6028$$

$$\ell_H = 4,38 \text{ m} \quad (k_H = 0,138 \text{ m}^{-1})$$

$$p'_H = 1,32 \text{ m}$$

De même pour le plan vertical V :

$$A_V = \begin{pmatrix} 1,2963 & 1,079 \\ -0,084 & 0,6955 \end{pmatrix} \quad (\|A_V\| \approx 1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr } A_V = 1,9918 \\ c_V = -0,084 \end{array} \right.$$

$$L_V = 0,5601$$

$$\ell_V = 3,54 \text{ m} \quad (k_V = 0,158 \text{ m}^{-1})$$

$$p'_V = 1,80 \text{ m}$$

La lentille fictive est focalisante dans ce plan et n'est pas trop différente de celle correspondant au plan horizontal (fig. 3).

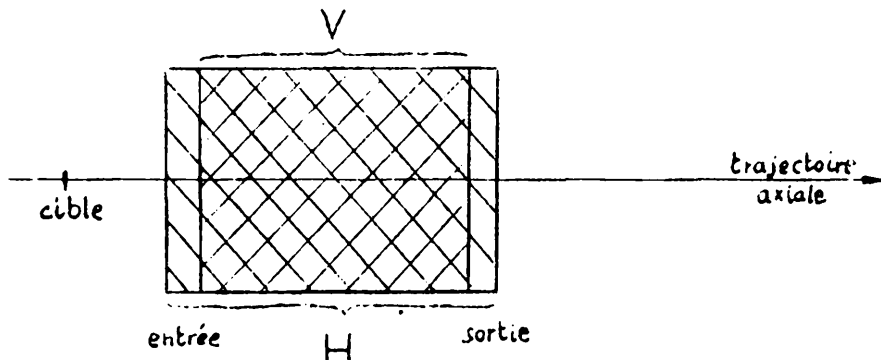


Fig. 3

2. Particules négatives issues de la cible 1

$$y_{oi} = y'_{oi} = 0, \quad p_o = 4 \text{ GeV}/c \quad (\text{cas "pathologique"}).$$

On obtient :

$$A_H = \begin{pmatrix} 2,98 & 9,79 \\ -0,302 & -0,66 \end{pmatrix} \quad A_V = \begin{pmatrix} 0,866 & -3,825 \\ -0,068 & 1,446 \end{pmatrix}$$

$$(\|A_H\| = \|A_V\| \approx 1)$$

D'où :

$$\begin{aligned} L_H &= 6,334 \quad (= 2\pi + 0,051) & L_V &= 6,333 \quad (= 2\pi + 0,050) \\ l_H &= 1,069 \text{ m} & l_V &= 4,657 \text{ m} \\ (k_H &= 5,925 \text{ m}^{-1}) & (k_V &= 1,360 \text{ m}^{-1}) \\ p_H^i &= 5,49 \text{ m} & p_V^i &= -6,57 \text{ m} \end{aligned}$$

Les deux lentilles fictives sont ici focalisantes mais l'une (plan vertical) est placée derrière la cible (fig. 4).

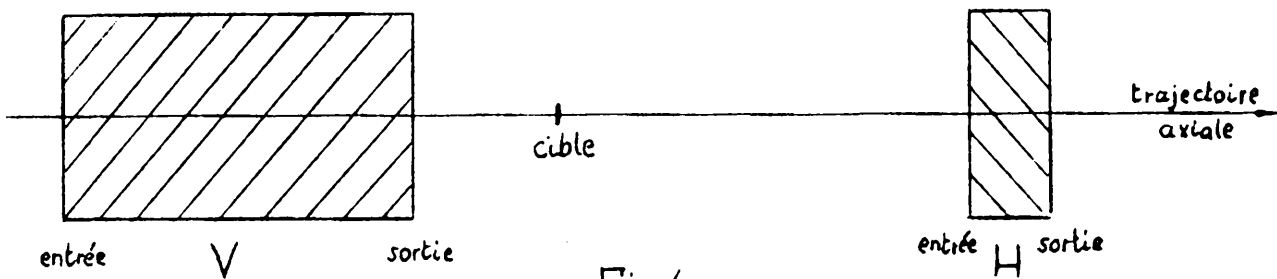


Fig. 4

G. Auberson

Distribution : (ouverte)

Personnel scientifique de la Division MPS

Personnel scientifique des Equipes Experimentales.

Appendice

Les équations de la page 3 et 5 s'obtiennent de la manière suivante (cas focalisant pour fixer les idées).

Par définition de A :

$$\begin{pmatrix} \Delta Y \\ \Delta Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y'_0 \end{pmatrix}$$

On a en outre, pour de faibles angles de production :

$$\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Y \\ \Delta Y' \end{pmatrix} \quad (\text{voir fig. 1})$$

D'où

$$\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a + cx & b + dx \\ c & d \end{pmatrix}}_{T_1} \begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y'_0 \end{pmatrix}$$

D'autre part, si l'on remplace le champ de fuite par une lentille fictive :

$$\begin{pmatrix} \Delta y \\ \Delta y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x - \ell - p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos L & \frac{1}{k} \sin L \\ -k \sin L & \cos L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & p' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{T_2} \begin{pmatrix} \Delta y_0 \\ \Delta y'_0 \end{pmatrix}$$

Les deux effets seront équivalents si  $T_1 \equiv T_2$  est une identité matricielle par rapport à  $x$ . Cette condition se traduit par le système de trois équations :

$$\begin{cases} \cos L = a + cp' + c\ell \\ \sin L = -\frac{c}{k} \\ \cos L - kp' \sin L = d \end{cases} \quad (L = k\ell, \text{ inconnues : } L, \ell, p').$$

dont la solution est :

$$2 \cos L + L \sin L = a + d \rightarrow L$$

$$\ell = -\frac{1}{c} L \sin L$$

$$p' = \frac{1}{c} (d - \cos L)$$