

DENSITE TRANSVERSALE DE PROTONS DANS LE FAISCEAU DU CPS

Introduction

Pour le calcul du taux d'efficacité du faisceau heurtant une (ou plusieurs) cible(s) externe(s), par exemple, et pour bien d'autres projets, il importe de connaître la densité transversale du faisceau interne (et éjecté), c'est-à-dire aussi la distribution des points dans les plans de phase H et V.

Deux méthodes expérimentales ont été utilisées jusqu'à présent pour cette mesure : 1) mesure de l'intensité résiduelle du faisceau lorsqu'une cible interne réduit progressivement l'ouverture H ou V de la chambre à vide ; 2) détermination de la densité transversale des protons au moyen d'une émulsion nucléaire que traverse le faisceau éjecté en un tour ("fast ejection").

On va montrer comment ces deux mesures peuvent être reliées et on en déduira qu'elles attestent une distribution gaussienne de la densité transversale de protons.

1. Distribution des amplitudes bétatroniques

Lorsqu'on observe que l'intensité résiduelle du faisceau diminue de ΔI quand on réduit l'ouverture de $z + \Delta z$ à z , on apprend que ΔI protons ont une amplitude d'oscillations bétatroniques a , comprise entre z et $z + \Delta z$, (on suppose que l'orbite fermée passe par $z = 0$).

Soit $I(z)$ l'intensité résiduelle mesurée (voir fig.1, courbe a) la dérivée $\frac{dI}{dz}(z)$ fournit la distribution des amplitudes bétatroniques (fig.1, courbe b). Nous l'appellerons $g(a)da$.

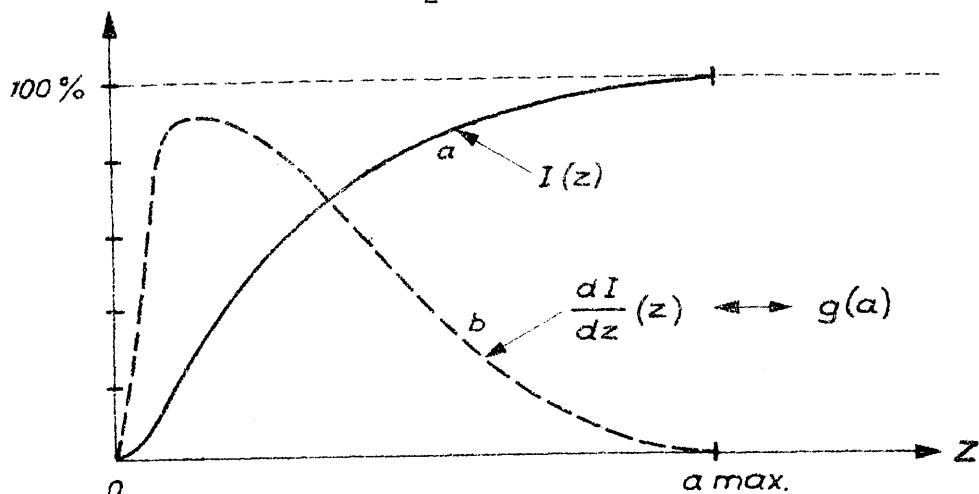
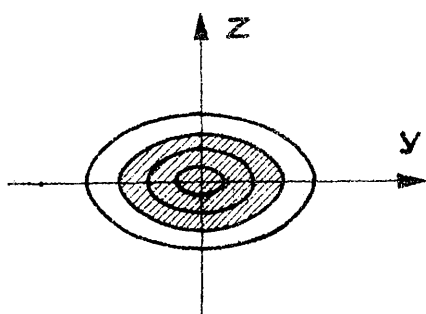


Fig. 1

2. Probabilité de présence sur z des protons d'amplitude bétatronique a .

Dans le plan (y, z) transversal au faisceau (fig.2a) supposons qu'une particule n'a pas d'oscillation bétatronique sur y mais oscille entre $z = \pm a$. Dans un plan de phase (z, z') normalisé ¹⁾, cette oscillation est représentée par un cercle (fig.2b).



Coupe transversale du faisceau

Fig. 2a

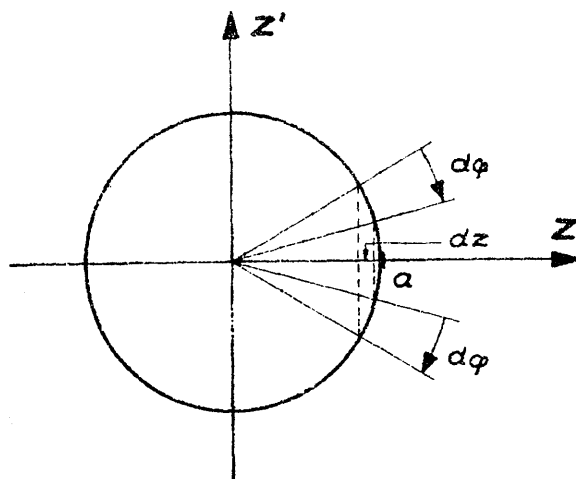


Fig. 2b

Si g particules ont la même amplitude a et circulent sur le même cercle du plan de phase leur probabilité de présence sur le cercle est uniforme (incohérence de phase bétatronique), on peut écrire

$$\frac{dn}{d\varphi} = \frac{g}{2\pi} = \text{const.} \quad (1)$$

On aura donc pour probabilité de présence sur z

$$\frac{dn}{dz} = \frac{dn}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} \frac{g}{2\pi} \quad (2)$$

car $z = a \cos \varphi$.

En appelant $h(a, z)$ cette probabilité de présence sur z normée à 1 de telle sorte que

$$\int_0^a h(a, z) dz = 1, \quad \text{il vient}$$

$$h(a, z) dz = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - z^2}} dz \quad (3)$$

(voir fig.3).

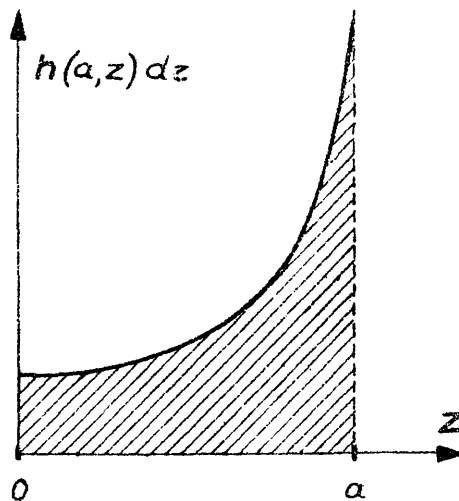


Fig. 3

3. Densité de protons $\rho(z)$.

La densité de protons $\rho(z)$ sera donc fournie par la probabilité de présence au point z des protons d'amplitude bétatronique a , et ceci intégré sur la distribution des amplitudes:

$$\rho(z) = \int_z^{a_{\max}} h(a, z) \cdot g(a) da = \frac{2}{\pi} \int_z^{a_{\max}} \frac{g(a) da}{\sqrt{a^2 - z^2}} \quad (4)$$

Pour effectuer l'intégration numérique, avec la distribution expérimentale $g(a)da$, on préférera la somme :

$$\rho(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^M \left\{ \left[g(z_i) + g(z_{i+1}) \right] \int_{z_i}^{z_{i+1}} \frac{da}{\sqrt{a^2 - z^2}} \right\}, \quad (5)$$

où $z_{i+1} = z_i + \Delta z$, avec $M\Delta z = a_{\max} - z$

ou encore

$$\rho(z) = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^M \left\{ \left[g(z_i) + g(z_{i+1}) \right] \left[\ln(z_{i+1} + \sqrt{z_{i+1}^2 - z^2}) - \ln(z_i + \sqrt{z_i^2 - z^2}) \right] \right\} \quad (5')$$

(avec les mêmes notations que dans (5)).

4. Relation entre les deux méthodes de mesures

Les mesures faites sur le faisceau éjecté -58 au moyen d'émulsions nucléaires confirment le résultat que nous avons déjà montré ²⁾ pour la densité verticale : pour des intensités de faisceau comprises entre 10×10^{10} et 50×10^{10} protons par impulsion, la densité transversale prend la forme d'une distribution gaussienne, soit

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\alpha z^2}, \quad (6)$$

où ρ_0 dépend de l'intensité totale, et α qui définit la dimension du faisceau varie principalement avec l'énergie.

Comme le résultat de la seconde méthode de mesure prend ici une forme analytique, il est plus simple de faire la transformation en sens inverse, de $\rho(z)$ à $g(a)$, puis à $I(z)$, et de comparer les courbes $I(z)$ mesurées.

Un calcul simple (voir Appendice) montre qu'à une densité transversale

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-\alpha z^2}$$

correspond une courbe d'intensité résiduelle de la forme

$$I(z) = I_0 (1 - e^{-\alpha z^2}) \quad (7)$$

La figure 4 montre les résultats des mesures faites avec une cible interne ³⁾ et avec les émulsions nucléaires.

Conclusion

Le faisceau interne du CPS a une distribution de densité transversale gaussienne (formule (6)). Ce résultat a été établi expérimentalement soit à l'intérieur de l'accélérateur, soit sur le faisceau éjecté. Nous n'avons pas donné de table de valeurs de α pour différentes énergies et intensités du faisceau accéléré, car ces valeurs fluctuent avec les conditions de fonctionnement de l'accélérateur. Toutefois une valeur moyenne peut être déduite du diamètre d donné dans le CPS Handbook à la page D1,2, pour $I \approx 50 \times 10^{10}$ p/p :

$$\alpha = 40/d^2$$

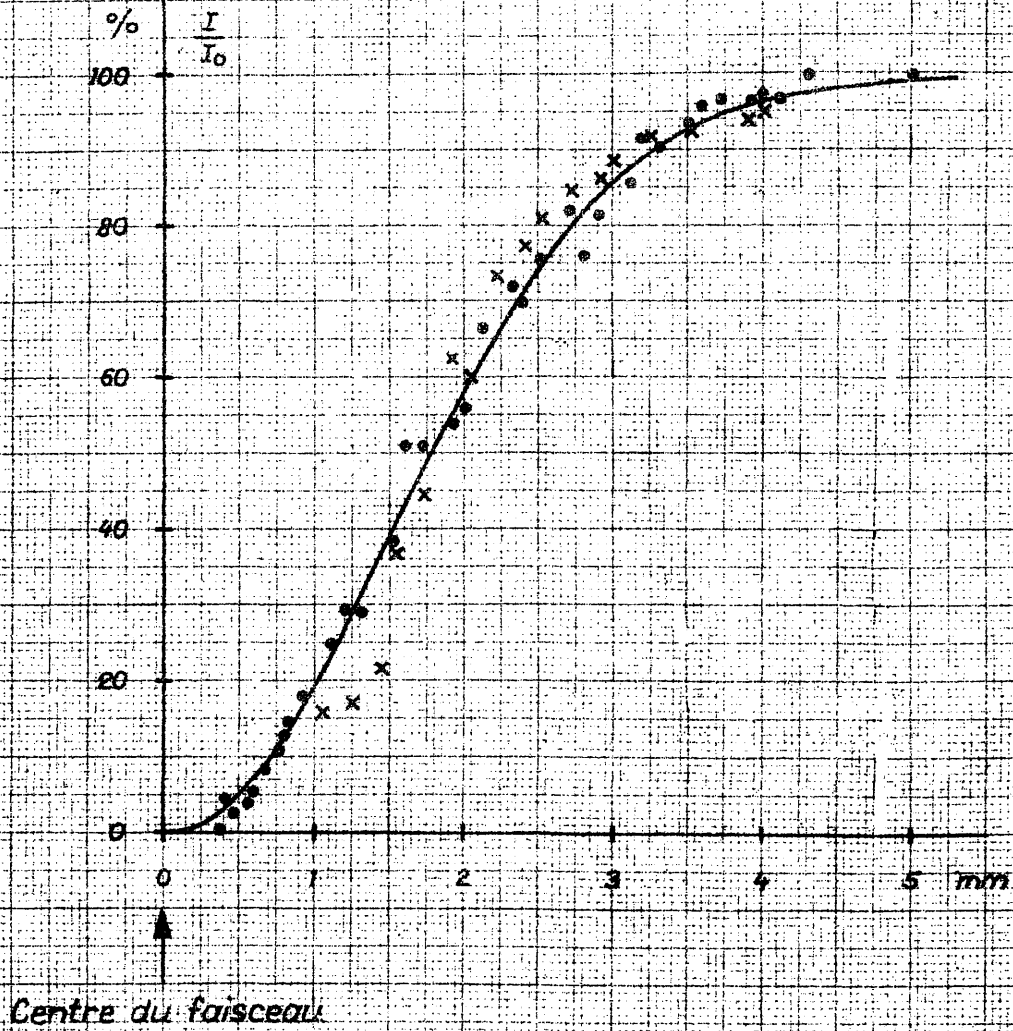
Cette conclusion permettra l'introduction d'une densité non uniforme de points dans le plan de phase (voir ⁴⁾).

C. Bovet

Distribution : (ouverte)

Personnel Scientifique et technique du MPS

Intensité résiduelle (plan vertical)



- x mesure du 20 X 64 $I_0 = 20 \times 10^{10}$ p/p
- mesure du 10 X 63 $I_0 = 60 \times 10^{10}$ p/p
- courbe gaussienne

Fig. 4

Références

- 1) H.G.Hereward.
Effects of Quadrupoles in the CPS : Methods of Calculation.
MPS/Int. DL 63-9.
- 2) C.Bovet, G.R.Lambertson, K.H.Reich.
Measurements on Slow Beam Ejection from the CPS.
CERN 64-25.
- 3) W.Richter.
Résultats non publiés.
- 4) C.Bovet (à paraître)
Evolution d'une distribution non uniforme de points dans
l'espace des phases.
- 5) I.S.Gradstein, I.M. Ryjik.
Tablitsy Integralov, Summ, Riadov i Proizredenii.
Editions physico-mathématiques, Moscou 1963. (p.329).

Appendice

Comme on ne peut pas écrire la transformée inverse de l'équation (4), nous présentons le calcul en partant du résultat (7), pour arriver à (6).

Soit

$$I(z) = I_0(1 - e^{-\beta z^2})$$

$$\frac{dI}{dz} = 2\beta I_0 z e^{-\beta z^2}$$

soit
$$g(a)da = 2\beta I_0 a e^{-\beta a^2} da, \quad (a_{\max} = \infty) .$$

En utilisant (4) il vient

$$\rho(z) = \frac{2\beta I_0}{\pi} \int_z^\infty \frac{e^{-\beta a^2} z a da}{\sqrt{a^2 - z^2}}$$

Faisons le changement de variable

$$a = z \sqrt{x}, \quad 2a da = z^2 dx, \quad \text{on a}$$

$$\rho(z) = \frac{2\beta I_0 z}{\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-\beta z^2 x}}{\sqrt{x-1}} dx$$

Utilisons le résultat

$$\int_1^\infty \frac{e^{-\mu x}}{\sqrt{x-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} e^{-\mu}, \quad (\text{voir } 5),$$

il vient

$$\rho(z) = 2 I_0 \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta z^2}$$